

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur

Volume 12

2007

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

ALAIN KUZNIAK
Département de mathématiques
IUFM d'Orléans-Tours
72 rue du Fg de Bourgogne
45000 Orléans
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM de Strasbourg
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
pluvin@math.u-strasbg.fr

Comité de rédaction

ALAIN BRONNER – Montpellier
VIVIANE DURAND-GUERRIER – Lyon
RAYMOND DUVAL – Lille
ATHANASIOS GAGATSIS – Chypre
FERNANDO HITT – Canada
CATHERINE HOUEMENT – Rouen

MICHALIS KOURKOULOS – Crète
GUY NOËL – Mons
LUIS RADFORD - Canada
JEAN-CLAUDE RÉGNIER - Lyon
CARL WINSLOW – Danemark
MONCEF ZAKI – Maroc

Responsable de publication

PHILIPPE NUSS - Directeur de l'IREM de Strasbourg

Mise en page

ALEXANDRA CARMINATI – IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. (33) 03 90 24 01 30

Fax (33) 03 90 24 01 65
Bibliothèque : (33) 03 90 24 01 61
<http://irem.u-strasbg.fr>
irem@math.u-strasbg.fr

SOMMAIRE

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 12 – 2007

ÉDITORIAL	3
Carlo MARCHINI & Maria Gabriella RINALDI (Italie)	
<i>Les préconceptions des enfants de huit ans sur les triangles isocèles</i>	5
Éric LAGUERRE (France)	
<i>Le concept de typicalité appliqué aux registres figuraux et numérico-algébriques : figures archétypes, prototypes pathologiques et pathogènes, typicalité dans la résolution de tâches</i>	17
Éric RODITI (France)	
<i>La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté</i>	55
Philippe R. RICHARD & Josep M. FORTUNY (Canada, Espagne)	
<i>Amélioration des compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel en classe de mathématique au secondaire</i>	83
Lurdes FIGUEIRAL & Inés Maria GÓMEZ-CHACÓN (Portugal, Espagne)	
<i>Identité et facteurs affectifs dans l'apprentissage des mathématiques (des élèves portugais en classes belges francophones de l'enseignement technique)</i>	117
Abdulkadir ERDOGAN & Alain MERCIER (France)	
<i>Les forums de questions mathématiques sur Internet et les attentes sur le travail des élèves</i>	147
M. Eugenia Andreu IBARRA & Jesús A. Riestra Velázquez (Mexique – article adapté par F. Pluinage)	
<i>Et si nous en restions à Euler et Lagrange ? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures</i>	165
Carl Winsløw (Danemark)	
<i>Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique</i>	189
INSTRUCTIONS POUR LES AUTEURS	205

ÉDITORIAL

A partir de cette parution, les anciens numéros des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives seront disponibles en ligne. Ainsi, avec un décalage d'un an, les lecteurs pourront accéder librement aux articles sur le site de l'IREM de Strasbourg à la rubrique de la revue. Bien sûr, une bibliothèque disposant de la collection des volumes parus conservera tout son intérêt. La publication de la version imprimée est par ailleurs garante de la qualité éditoriale et scientifique des textes publiés. En facilitant l'accès aux articles, nous pensons satisfaire les nombreuses demandes de collègues, surtout étrangers, qui souhaitent avoir un lien aisé et rapide avec la revue, sans devoir passer pour chaque commande ponctuelle par la lourdeur de démarches bancaires et la lenteur parfois aléatoire des transports postaux. Souhaitons que cette nouvelle forme de disponibilité de la revue favorise les échanges et les interactions entre les auteurs et les lecteurs.

Quant au contenu de ce numéro qu'on peut qualifier de standard, après l'ampleur exceptionnelle du précédent, il faut noter sa grande variété avec des thèmes qui concernent toutes les étapes de la scolarité. Notons simplement que la question de l'interaction est aussi au centre d'un certain nombre d'articles de ce numéro qui envisagent avec une entrée didactique la question du travail de l'élève dans des environnements de travail avec usage de l'informatique. Ainsi Fortuny et Richard décrivent de manière détaillée un logiciel complexe qui interagit avec les élèves dans une tâche de géométrie. Cette interaction a été « automatisée » grâce à un travail préalable important des enseignants qui ont pu préparer ces échanges par une analyse a priori conséquente du travail de l'élève. Dans leur article, Erdogan et Mercier ont choisi d'analyser les échanges à distance entre élèves et tuteurs dans le cadre de la résolution de problèmes en ligne. Ces interactions à distance sont axées sur le contenu mathématique. Dans la recherche de Gomez-Chacon et Figueras, il

s'agit cette fois d'étudier les interactions autour de mathématiques entre des élèves et un professeur dans une classe presque ordinaire de Belgique, où des élèves d'origine portugaise sont fortement influencés par leur identité culturelle et sociale et les facteurs affectifs qui lui sont associés.

Alain Kuzniak & François Pluvinage

LES PRÉCONCEPTIONS DES ENFANTS DE HUIT ANS SUR LES TRIANGLES ISOCÈLES¹

Abstract. Preconceptions of eight year old children on isosceles triangles

In an experimental study about isosceles triangles, we observed pupils' solution strategies revealing different naive approaches to the problem of measure in geometry. Our experiment discovered phenomena that should be accounted in geometrical teaching.

Résumé. Pendant une expérimentation sur des triangles isocèles, nous avons observé les stratégies de solution des enfants. Ces stratégies nous ont montré des approches naïves différentes relatives au problème de la mesure en géométrie. Notre expérimentation a mis au point des phénomènes dont on doit tenir en compte dans l'enseignement de la géométrie.

Mots-clés. Géométrie, triangle isocèle, préconceptions, mesure.

1. La recherche

Notre groupe a étudié l'influence de l'orientation du dessin (Cooper, 1998) dans la perception du caractère isocèle pour les triangles (Marchini & alii, 2002) en collaboration avec Martin Cooper. Le même test a été utilisé en Italie et en Australie.

En Italie la recherche a été exécutée dans six classes de troisième comptant en tout 105 écoliers de huit ans. Les auteurs du présent travail et Lucia Grugnetti avaient préparé les outils et comment exécuter le test, en collaboration avec M. Cooper. Les écoles dans lesquelles nous avons opéré sont de différents endroits de l'Italie du Nord (Viadana, Parma, Cattolica). Dans chaque école nous avons choisi un couple de classes de troisième, avec le même instituteur pour les mathématiques et dans lesquelles les arguments de géométrie n'avaient pas encore été présentés. La présence de deux classes parallèles dans chaque école était nécessaire pour mettre en évidence comment l'apprentissage influence les images mentales² des jeunes :

¹ Travail réalisé dans le cadre des activités de l'Unité de recherche en Didactique des Mathématiques de Parme. Ce travail, sauf la Figure 2, est la traduction en français d'un article à paraître dans les Actes du CERME 4.

² Nous nous référons à l'image mentale dans le sens de (Fischbein, 1993) : « une représentation sensorielle d'un objet » ; dans notre opinion l'établissement d'une image mentale est le premier pas en géométrie puisque « la géométrie traite d'entités mentales (les soi disant figures géométriques), qui possèdent simultanément des caractères conceptuels et

nous avons introduit les triangles isocèles de deux façons différentes : les «toits» (A), et les «drapeaux» (B) (Figure 1) (Les mots « toit » et « drapeau » ne furent pas utilisés dans l'expérimentation ; ici ces mots servent comme référence pour les triangles A et B, respectivement).

Les tests ont été exécutés en même temps dans les deux classes parallèles pour éviter l'échange d'informations entre enfants de la même école. L'entraînement avec les triangles A a concerné 49 écoliers ; les autres 56 ont eu la présentation avec les triangles B. Nous avons choisi d'introduire la notion de triangle isocèle comme triangle ayant (au moins) deux côtés égaux. Ce choix est en accord avec la tradition scolaire d'Italie,

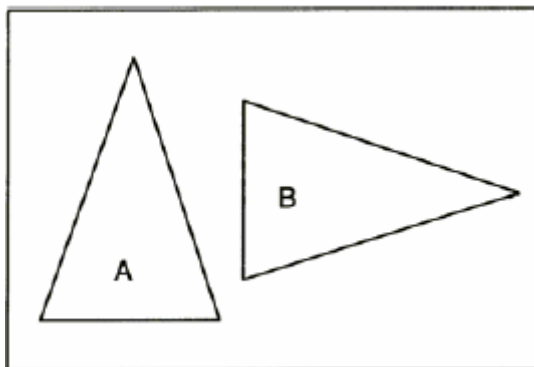


Figure 1

puisque la mesure des angles est introduite plus tard que la mesure des segments. Il a aussi des raisons étymologiques. Nous avons évité d'utiliser le mot «congruence» car nous pensons que ce mot est relié à des intuitions secondaires (Fischbein, 1987). Les résultats italiens et ceux de l'Australie ne sont pas comparables puisque dans l'expérimentation en Australie la condition « être isocèle » a été introduite comme l'égalité d'au moins deux angles. L'expérimentation italienne nous a donné des résultats inattendus et nous avons eu l'occasion d'observer directement la présence de fortes préconceptions au regard du triangle et de la mesure.

2. L'expérimentation

Nous avons conduit l'expérimentation dans l'école de Viadana (le 12 novembre et le 21 novembre 1997) dans deux classes : III C (15 écoliers) et III D (20 écoliers). Le 12 novembre, la première partie de notre intervention a été dédiée à l'entraînement et la seconde au test ; le 21 novembre nous avons commencé avec le test et poursuivi par des interviews écrites.

Nous avons demandé aux institutrices de ne pas parler du test et de ne pas traiter la géométrie entre nos deux interventions en classe. L'activité du 12 novembre a pris une heure ; celle du 21 novembre à peu près quarante minutes.

Dans ce travail nous mettons au point ce que nous avons directement observé à Viadana. La même expérimentation a eu lieu dans d'autres écoles (Parma, 12 et

figuraux ». Il est remarquable que dans *op. cit.* le premier exemple soit un triangle isocèle dessiné comme le triangle A de la Figure 1.

19 décembre 1997 ; Cattolica 23 et 30 janvier 1998) en suivant les mêmes modalités, sauf les interviews écrites, puisque dans la première expérimentation nous avons obtenu des résultats peu significatifs. Les chercheurs qui ont conduit les expérimentations dans les autres écoles nous ont confirmé la présence de comportements semblables des enfants. Pour améliorer l'engagement des écoliers nous avons présenté le test comme une compétition entre des jeunes du même âge. Nous avons commencé le 12 novembre en dessinant des triangles (isocèles ou non) au tableau noir : en III C en «toit» et en III D en «drapeau» cette activité fut brève et nous avons établi le glossaire (triangle, côté, triangle isocèle). Nous avons mis en évidence l'égalité ou la différence des côtés avec nos doigts. Ce que nous avons fait peut être placé aux niveaux 1 et 2 de Van Hiele (Van Hiele, 1986). Nous avons choisi d'utiliser un langage géométrique très pauvre avec seulement les mots «triangle», «côté» et «isocèle», dans le but d'éviter des interférences avec des modèles physiques.

Par la suite nous avons distribué à chaque écolier un petit livre pour l'entraînement (Figure 2, Annexe 1), contenant les dessins de 10 triangles en «toit» (en III C) et en «drapeau» (III D). Les triangles dessinés sur le petit livre étaient les mêmes et dans le même ordre : 5 d'entre eux étaient isocèles et les 5 autres ne l'étaient pas. Les petits livres utilisés dans les classes différaient seulement pour l'orientation des triangles qui était cohérente avec celle des dessins au tableau noir. Pour chaque triangle du petit livre nous avons spécifié s'il était isocèle ou non en montrant avec nos doigts l'égalité (ou non) des côtés. En raison de la nouveauté et de la complexité du mot « isocèle », notre présentation orale a eu le but de faciliter l'*intérieurisation*, dans le sens de (Sfard, 1991), du terme géométrique et du concept qu'il véhicule en disant lentement en succession « isocèle », « isocèl... », « iso... », « i... » et en attendant que les enfants complètent le mot. Dans notre idée une dévolution progressive aux écoliers de la répétition du mot « isocèle » les aurait aidés dans la création de leur propre image mentale correcte.

La troisième étape du 12 novembre a été le test (figure 3) : nous avons donné le même petit livre à deux classes. Dans celui-ci il y avait les dessins de 20 triangles dont ceux avec les numéros 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 15 et 19 sont des triangles isocèles (Figure 3, Annexe 2). Sur le petit livre figuraient les triangles sur les pages de droite et sur les pages de gauche, les questions (à deux réponses) le triangle est-il isocèle ou non ? Le temps dédié au test a été inférieur à 10 minutes et pour y répondre les enfants ne pouvaient utiliser qu'un stylo à bille.

Dans la deuxième rencontre avec les classes (21 novembre 1997) nous avons présenté directement le test en utilisant le même petit livre et mené seulement après le test l'interview écrite, dans laquelle on demandait s'ils avaient trouvé le test facile ou non.

Les dimensions, l'orientation et la succession des triangles dans le petit livre d'entraînement et dans le test furent décidées avec M. Cooper qui ensuite les présenta aux écoliers d'Australie. La mesure des côtés des triangles était comprise entre 8 et 12 centimètres environ et dans chaque triangle les différences de longueur entre (au moins deux de) ses côtés étaient assez petites pour ne pas être perçues et exiger que l'enfant se serve d'autres stratégies pour mesurer.

3. Résultats et analyse statistique de l'expérimentation

Dans (Marchini & alii 2002) on présente et commente les résultats (moyens) de l'expérimentation. Sur la base de ces résultats nous avons classifié les questions en trois catégories : « très faciles » (avec un taux de succès $\geq 75\%$), « facile » (avec un taux de succès $\geq 50\%$ et $< 75\%$) et « difficile » (avec un taux de succès $< 50\%$). En accord avec cette classification les questions Q2, Q5, Q7, Q8, Q9, Q11, Q12, Q13, Q14, Q16 et Q18 ont été très faciles, Q3 et Q6 ont été faciles et les autres Q1, Q4, Q10, Q15, Q17, Q19 et Q20 ont été difficiles. Le soulignement indique les triangles isocèles. Il nous semble évident que les écoliers ont reconnu avec difficultés le caractère d'être isocèle, ou mieux l'« étrange » orientation des triangles n'a pas permis d'appliquer la métaphore du balancement, laquelle : « is so basic that all *homo sapiens* – no matter when and where they live on earth – have experienced it [...] this experience [le balancement], it's working out in cultural expressions such as language, art, dance, science » (Núñez & alii, 1999).

Nous avons relevé le taux maximum de réponses correctes pour Q9, le minimum pour Q1. Nous remarquons que Q3 a été facile pour les écoliers A et difficile pour les enfants B. La question Q1 a été la plus difficile pour les deux entraînements ; la plus facile a été Q9 pour les écoliers « toit » et Q7 pour les enfants « drapeau ». La question Q7 présente un triangle isocèle typique dans la position « toit » et les résultats globaux ont été meilleurs pour les écoliers « drapeau ». Ce résultat était inattendu. Un autre point d'intérêt a été le fait que les enfants « drapeau » ont obtenu de meilleurs résultats à toutes les questions difficiles, sauf Q20.

Seulement quatre questions parmi les seize premières ont été difficiles et trois parmi les quatre dernières. Nous supposons que le test a fatigué les écoliers. Les triangles isocèles 2, 5, 7 et 14 ont un axe de symétrie « horizontal » ou « vertical » et ces configurations sont plus proches des images mentales des enfants. Quant aux réponses erronées relatives à Q1, Q4, Q10, Q15, Q17 et Q19 il nous semble clair que la position « étrange » de ces triangles isocèles a influencé les réponses, en accord avec l'hypothèse de la recherche, qui est « l'orientation conditionne la perception ».

Les résultats moyens du deuxième test ont été meilleurs, particulièrement pour l'entraînement B. Les augmentations des valeurs moyennes ont exigé une analyse plus approfondie : une raison pourrait être une attention plus soutenue dans

l'exécution du test, comme nous l'ont confirmé les autres chercheurs. Une seconde hypothèse est que l'activité d'entraînement a été suffisante pour fixer un apprentissage. La seconde hypothèse s'appuie sur :

- l'intervalle de temps entre les deux tests ;
- l'absence de commentaires sur le premier test et de leçons de géométrie dans cet intervalle ;
- et surtout le peu de temps dédié au test (15 secondes pour tourner la page, regarder le dessin et répondre à la demande), ce qui a empêché dans le second test les écoliers de se fier à leur mémoire.

Ainsi l'existence d'une amélioration des résultats nous semble notable même sans être significative du point de vue de la statistique. Pour analyser avec des outils statistiques si les réponses du premier test ont influencé les résultats du deuxième test, nous avons employé l'index de crédibilité de l'implication de Larher (Larher, 1991 ; Gras & Larher, 1993) (Figure 4, Annexe 3). Cet index est une mesure probabiliste (qui prend ses valeurs entre 0 et 1) de l'implication des deux attributs.

Nous avons pu utiliser cet index puisque les réponses des deux tests sont des ensembles de données exprimées par 0 (erronée) et 1 (exacte) ; ces ensembles peuvent être considérés comme des fonctions caractéristiques de deux sous-ensembles ou attributs. Les valeurs de l'index sont comprises entre 69.35% (Q9) et 99.88% (Q6) : nous interprétons ces valeurs comme une corroboration du fait que le premier test a influencé le second et que l'activité proposée a aidé les enfants à obtenir un apprentissage suffisant des triangles isocèles. Nous n'avons pas pu évaluer la persistance de ce type d'apprentissage avec un troisième test car le déroulement du programme scolaire prévoyait des leçons de géométrie.

4. Résultats et commentaires sur l'expérimentation de Viadana

La Table 1 (Annexe 3) contient des résultats statistiques relatives à l'expérimentation de Viadana (en cursif dans la Table) comparés avec les résultats de l'expérimentation entière pour prouver que l'échantillon de Viadana était cohérent avec l'échantillon total des six classes. Les valeurs moyennes que nous avons trouvées n'étaient pas loin de celles de l'expérimentation entière : l'entraînement en « drapeau » a fourni des résultats moins bons que l'entraînement en « toit » dans les deux tests. Grâce aux écoliers « toit » le résultat du deuxième test à Viadana a été meilleur que dans l'expérimentation entière : les améliorations pour les enfants « toit » et pour ceux « drapeau » ont été comparables avec une valeur plus grande pour les garçons B.

Pour les écoliers de Viadana les questions Q5, Q7, Q8, Q11, Q12, Q13, Q14, Q16 et Q18 étaient très faciles, Q2, Q3, Q6 et Q20 étaient faciles et enfin Q1, Q4, Q10,

Q15, Q17 et Q19 étaient difficiles. La question la plus facile a été Q18 globalement, Q8 pour les écoliers « toit » avec 100% de réponses exactes et Q11 pour les enfants « drapeau ». Le pire résultat global pour les écoliers B était Q1 et Q4 pour les garçons « toit ». En comparaison avec l'expérimentation entière dans les classes de Viadana, Q2 était facile au lieu d'être très facile et Q20 était facile au lieu d'être difficile. La présence de meilleurs résultats pour les écoliers « drapeau » sur les demandes difficiles a été confirmée sauf pour Q10 et pour Q7.

Suivant les catégories introduites, globalement le test a été très facile pour trois enfants (A : 1 ; B : 2), facile pour 31 écoliers (A : 14 ; B : 17) et difficile seulement pour un garçon B. La fréquence moindre de réponses correctes était de 42.5%, la fréquence majeure 82.5% ; toutes deux furent obtenues par des écoliers « drapeau ».

Avant de commencer l'expérimentation nous avons demandé à l'institutrice de mathématiques une évaluation qualitative (très insuffisant, insuffisant, suffisant, bon, optimale) des ses élèves et nous l'avons comparé ensuite avec les résultats des tests. Les évaluations de l'institutrice présentaient une dispersion plus grande que celle des résultats. Une interprétation possible peut être relative à la nature du savoir que nous avons induit avec notre activité. L'évaluation du maître rassemble beaucoup d'informations sur l'enfant (la compétence linguistique, la bosse de mathématiques, la soin et l'application,...), tandis que nous avons testé un unique aspect lié à des habiletés visuelles en évitant les compétences linguistiques. Ce qui peut justifier la similarité des résultats des tests et la dissemblance entre le test et l'évaluation de l'institutrice. Par exemple des écoliers peuvent être handicapés dans l'évaluation du maître par rapport à une compétence insuffisante sur un sujet que ne demande pas de compétence visuelle.

La présence de la préconception du triangle en « toit » se manifesta clairement chez les écoliers exécutant les tests : nous avons observé que la majorité des enfants tournait le petit livre ou bien leur tête pour placer le triangle dans la position « toit » et comparer le dessin avec leur archétype de triangle, (Medici & alii, 1986) ; nous avons observé ce comportement dans la classe « drapeau » aussi. Cette préconception pourrait prendre origine dès l'expérience : le véritable toit pourrait être un objet représentant de la meilleure façon le triangle isocèle, dans le sens de (Collin & Loftus, 1975). La différence perceptive (Arnheim, 1974) avec la préconception en « toit » nous semble justifier la présence d'une structure d'apprentissage flexible et dynamique dans le sens de (Singer, 2001). La présence de la préconception en « toit » est confirmée aussi par (Vighi, 2003 et 2004), comme une partie d'un « concept image » (Tall & Vinner, 1981). Dans notre opinion l'entraînement en « toit » soutient une intériorisation suivant des structures rigides, dans le sens de (Singer, 2001), car il renforce la préconception installée :

ainsi peut on expliquer que les garçons « drapeau » aient obtenu de meilleurs résultats dans les questions plus difficiles.

Les petites différences dans les mesures des côtés en liaison avec l'orientation « étrange » des figures que nous avons proposées ont eu pour effet d'activer les préconceptions des enfants relatives au mesurage. Nous avons observé des écoliers « transportant » des longueurs comme des peintres. Certains écoliers ont préféré « construire un compas » avec leurs doigts, même si leur institutrice n'avait pas encore introduit le compas (mécanique) dans les classes. D'autres ont utilisé leurs doigts comme une règle pour mesurer : ils ont parcouru les côtés en procédant par saccades, et dans une sorte de subdivision de la longueur, l'espace d'une saccade comme unité de mesure, ce qui correspond à une première approche de la mesure (qu'ils n'avaient pas encore vue en classe).

Dans plusieurs cas un élève a employé simultanément des stratégies différentes selon le *dictum* de (Vergnaud, 1990) : quand un sujet n'a pas les compétences requises, il utilise plusieurs schémas au même instant.

Conclusion

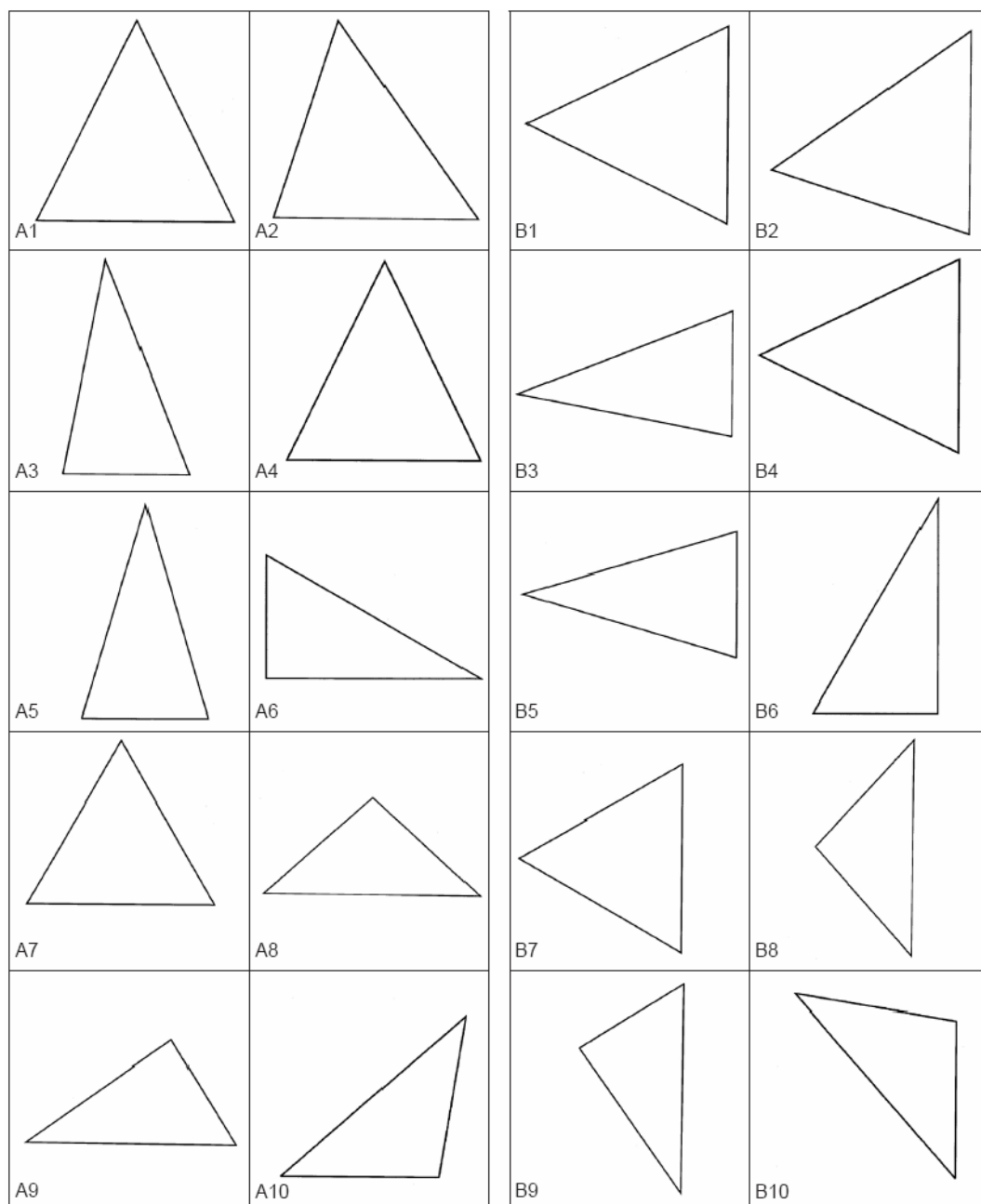
L'expérimentation entière et ce qui s'est passé à Viadana ont révélé que les écoliers ont acquis un savoir grâce à ces brèves activités. Nous expliquons ces résultats par la présence de préconceptions qui ont aidé les enfants dans l'apprentissage. Ainsi le maître doit repérer les préconceptions de ses écoliers.

De plus l'expérimentation a révélé que les « outils » de mesure sont « embodied » (incorporés) et nous a montré comment la géométrie métrique a ses racines dans des préconceptions ou dans des connaissances qui naissent hors de l'école.

Selon nous, l'expérimentation a mis à jour des préconceptions importantes que le maître ne peut pas négliger. La prédominance, que nous avons vérifiée, de la conception « toit » sur celle « drapeau », est en même temps une aide et un obstacle à la conceptualisation de la figure géométrique du triangle, en tant qu'elle semble contribuer à instaurer une conception rigide qui conduit à la réussite presque uniquement dans les situations les plus typiques.

Au regard de la présence de préconceptions relatives à la mesure, avant que le sujet ne soit traité en classe, on peut penser qu'elles sont le résultat d'un apprentissage acquis avant l'école ou en dehors de l'école, en réponse aux problèmes pratiques. Ces préconceptions peuvent être objet de réflexion de la part de l'enfant, en constituant un système de croyances (*beliefs*).

Tout ça peut être un point de départ pour le maître qui doit faire comprendre à l'enfant l'importance des connaissances préexistantes comme connaissances légitimes pour l'école.

Annexe 1**Figure 2**

Annexe 2

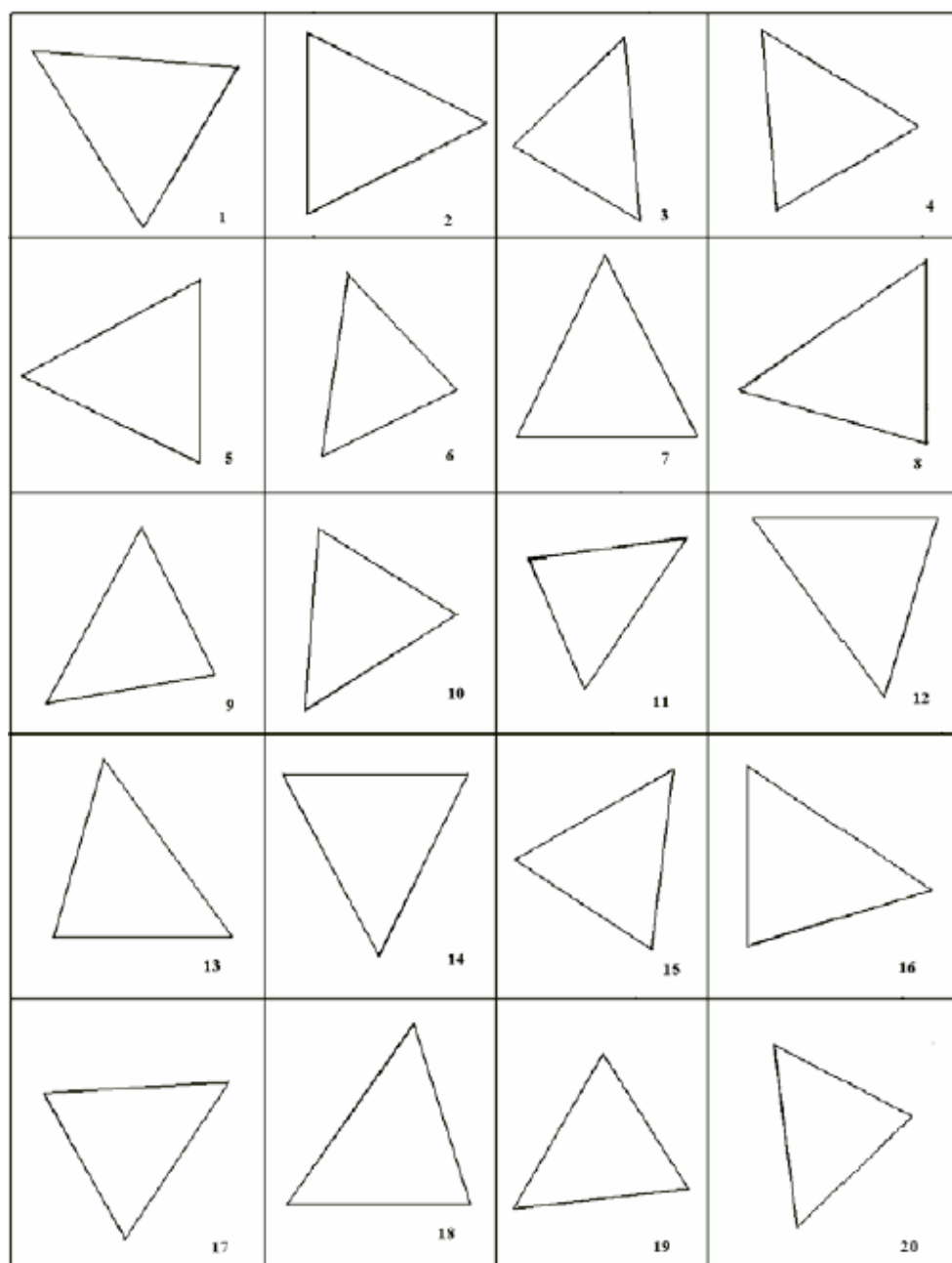


Figure 3

Annexe 3

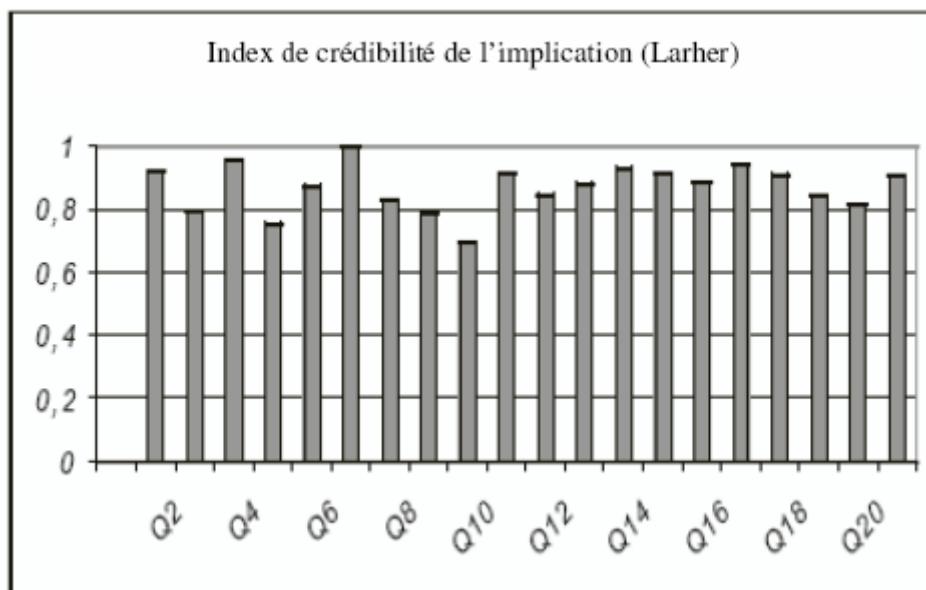


Figure 4

	Global	A	B
Nombre d'écouliers	105	49	56
<i>Exp. de Viadana</i>	35	15	20
Réponses	98.81%	98.72%	98.88%
<i>Exp. de Viadana</i>	99.43%	98.83%	99.88%
Réponses correctes	64.53%	64.39%	64.65%
<i>Exp. de Viadana</i>	64.21%	65.67%	63.13%
Réps. correctes 1 ^{er} test	63.29%	63.66%	62.98%
<i>Exp. de Viadana</i>	61.99%	63.82%	60.65%
Réps. correctes 2 ^{me} test	65.82%	65.12%	66.31%
<i>Exp. de Viadana</i>	66.57%	67.67%	65.75%

Table 1

Bibliographie

- ARNHEIM R. (1974), *Art and Visual Perception: a Psychology of the Creative Eye*, University of California Press, London.
- COLLINS A. & LOFTUS E.F. (1975), A spreading activation theory of semantic processing, *Psychological Review* **82**, 407-428.
- COOPER M. (1998), The inescapable influence of the horizontal and vertical on geometrical and other human behaviour, *L'educazione Matematica* **XIX.3**, 81-99.
- LARHER A. (1991), *Implication statistique et applications à l'analyse de démarches des preuves mathématiques*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes I.
- FISCHBEIN E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics*, D. Reidel Publishing Company? Dordrecht.
- FISCHBEIN E. (1993), The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics* **24.2**, 139-162.
- GRAS R. & LARHER A. (1993), L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse des données, *Mat. Inf. Sci. Hum.* **120**, 5-31.
- MARCHINI C. (1999), La didattica della Logica, *L'educazione Matematica* **XX.1**, 156-166.
- MARCHINI C. & RINALDI M.G. & BEDULLI M. & GRUGNETTI L. (2002), Tetti e bandiere, dans *Processi innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, (Eds. Malara & alii), Pitagora Editrice, Bologna, 223-236.
- MEDICI D. & SPERANZA F. & VIGHI P. (1986), Sobre la formación de los conceptos geometricos y sobre el lexico geometrico, *Enseñanza de las ciencias* **4.1**, 16-22.
- NÚÑEZ R.E. & EDWARDS L.D. & MATOS J.P. (1999), Embodied cognition as grounding situatedness and context in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics* **39.1-3**, 45-65.
- SFARD A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions (reflection on processes and objects as different sides of the same coin), *Educational Studies in Mathematics* **22**, 1-36.
- SINGER M. (2001), Thinking structures involved in mathematics learning, dans *Proceedings CERME 2* (Ed. Novotna), Part I, 92-100.
- TALL D.O. & VINNER S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity, *Educational Studies in Mathematics* **12**, 151-169.
- VAN HIELE P.M. (1959), *Structure and Insight (a theory of mathematics education)*, Academic Press, New York.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des mathématiques* **10**, 133-170.

VIGHI P. (2003), Pre-conceptions about the triangle, dans *Proceedings SEMT '03* (Ed. Novotna), 152-157.

VIGHI P. (2004), The triangle as mathematical object, dans *Proceedings CERME 3*, TG7_Vighi_cerme3.pdf, Edizioni Plus, Pisa.

CARLO MARCHINI & MARIA GABRIELLA RINALDI

Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma

Parco Area delle Scienze 53/A – 43100 PARMA - I

carlo.marchini@unipr.it & mariagabriella.rinaldi@unipr.it

ÉRIC LAGUERRE

FIGURES ARCHÉTYPES, FIGURES PROTOTYPES ET LEURS EFFETS DANS LA RÉOLUTION DE TÂCHES

Abstract. Archetypal figures, prototypic figures, and their effects on problem solving

A characteristic of key-figures is to reproduce theorem's premises and so to facilitate its application: for instance it's easier to see a sub-figure included in a complex configuration. In this paper, we limited our study on Thales' Theorem, and by bringing out figures named archetype or prototype – depending on their apparition before or after the teaching of the Theorem – we tried to understand how students built their typical representations. Then, we have studied how some redundant parameters defining the prototypes partly could generate difficulties on one hand on perception of figures – leading us to pathological figures – and on the other hand in the use of the theorem – leading us to pathogenic figures.

Résumé. Les figures-clés ont, *a priori*, pour caractéristiques de reproduire les prémisses d'un théorème afin de faciliter son application, par exemple, en rendant plus aisé l'accès à une sous-figure incluse dans une configuration complexe. Dans cet article, dont le champ est restreint au théorème de Thalès, nous nous sommes attachés, dans un premier temps, à comprendre la façon dont se constituaient des représentations typiques pour les élèves en dégagant des figures que nous avons nommées archétypes ou prototypes suivant leur moment d'apparition par rapport à l'enseignement du théorème. Nous nous sommes interrogés ensuite sur la manière dont certains paramètres superflus qui définissaient en partie ces prototypes pouvaient générer des difficultés, d'une part, dans la reconnaissance de figures, ce qui nous a conduit à mettre en lumière des figures pathologiques, et d'autre part dans la mise en œuvre du théorème, ce qui nous a amené à mettre en évidence des figures pathogènes.

Mots-clés. Figure, appréhension perceptive, appréhension opératoire, variable figurale, typicalité, figure archétype, figure prototype, congruence, Thalès.

Introduction

Lorsque nous parcourons des ouvrages scolaires de l'enseignement secondaire de toutes les périodes, nous pouvons observer que les expressions "figures clés de Thalès", "configurations de Thalès", "triangles en situation de Thalès" ont très souvent été utilisées et qu'une expression du type "figure de référence" a été employée un temps pour l'homothétie par exemple. L'analyse de quelques préparations de cours actuels de professeurs ou mêmes d'articles liés à

l'enseignement (Montfort, 1995) nous montre également que ces vocables sont encore employés.

Mais quels sens pouvons-nous donner à ces termes ? Quelles précisions théoriques est-il possible de conférer à ces expressions ? Quels sont leurs effets et leur utilité éventuels pour les élèves en ce qui concerne une propriété ou une définition précise ?

Notre questionnement initial a trait d'une part à la didactique de la géométrie en général de par la définition et la recherche de l'existence de nouveaux objets liés à la notion de figure-clé et d'autre part aux répercussions que ces objets ont sur l'enseignement d'un théorème au niveau collège, en l'occurrence celui communément dénommé actuellement en France théorème de Thalès et qui est rédigé comme suit :

En classe de quatrième :

Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AC] et si (MN) est parallèle à (BC), alors $AM/AB = AN/AC = MN/BC$. Il s'agit de la variante que nous appelons "triangle". Sauf indication contraire, la figure ci-dessous sert de référence dans la suite du texte pour l'écriture de rapports littéraux.

La propriété directe de Thalès, dans sa totalité, est enseignée en classe de troisième et est rédigée comme suit :

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.

Soient B et M deux points de (d), distincts de A, C et N deux points de (d') distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors

$AM/AB = AN/AC = MN/BC$.

Nous nommons cette version la variante "droites sécantes".



La réciproque est rédigée de la façon suivante :

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A. Soient B et M deux points de (d), distincts de A. Soient C et N deux points de (d'), distincts de A.

Si $AM/AB = AN/AC$ et si les points A, B, M et les points A, C, N sont dans le même ordre, alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Nous notons au passage que cet énoncé n'est pas tout à fait la réciproque du théorème direct car d'une part il faudrait que dans le premier apparaissent trois égalités et non une seule et que dans la conclusion du second soit mis en évidence l'ordre des points, ce qui peut se déduire du fait que si ces points n'étaient pas alignés dans l'ordre voulu, les droites en question ne seraient pas parallèles.

L'objectif principal de ce texte est par conséquent double mais une mise au point théorique est avant tout nécessaire.

Ainsi, en premier lieu, après avoir communiqué des éléments théoriques liés à la géométrie complétés par des précisions au sujet de l'enseignement et de la recherche en rapport avec le théorème de Thalès, nous définissons les notions de figures archétypes et prototypes, de figures pathologiques et pathogènes. Mais encore faut-il montrer l'existence et la pertinence de tels objets. Ainsi, nous mettons en évidence la présence de tels dessins dans le cadre plus circonscrit du théorème en question.

En second lieu, nous cherchons à comprendre les interactions des deux notions d'archétype et de prototype en mettant en évidence l'influence que peut avoir l'enseignement sur les archétypes et en montrant que la modification d'une ou plusieurs variables figurales les caractérisants peut soit engendrer le fait que les dessins ne sont plus reconnus comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème soit engendrer des erreurs caractéristiques dans l'écriture de rapports littéraires.

1. Cadre théorique

1.1. Cadre géométrique

Comme le rappelle Duval (2005), la géométrie est l'un des domaines qui exige une activité cognitive la plus complète puisqu'elle sollicite le geste, le regard et la vue afin de construire, de raisonner et de voir. Mais la manière de voir des figures dépend étroitement de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. En particulier, les tâches en rapport avec le théorème de Thalès peuvent se situer, parfois simultanément, dans trois cadres : le cadre géométrique, le cadre des grandeurs et le cadre numérique. Ces différents niveaux d'approche sont forcément liés à la reconnaissance, à la construction ou aux interprétations qu'il est possible d'avoir de dessins géométriques. Mais le problème est que ces actions ne se réfèrent pas aux mêmes types de perceptions.

1.1.1. Les manières de voir une figure

Duval distingue quatre manières de voir une figure qu'il considère comme quatre entrées différentes dans la géométrie.

Dans la vision du botaniste, il s'agit d'apprendre à reconnaître des formes qui sont utilisées en géométrie. Cette vision permet de constituer un «herbier» de figures qu'il faut reconnaître pour pouvoir rentrer dans une tâche.

En ce qui concerne l'arpenteur, il faut apprendre à mesurer des longueurs sur un terrain dans le méso-espace et à les reporter sur un dessin du micro-espace.

Le constructeur tente lui de connaître les figures qui sont constructibles et de comprendre les contraintes instrumentales qu'engendre de telles constructions.

Enfin, l'inventeur bricoleur a pour tâche de découvrir sur une figure une procédure de résolution d'un problème, en la décomposant, par exemple, en unités figurales que peuvent ensuite être reconfigurées ou en ajoutant des tracés supplémentaires.

De plus, Duval précise que voir recouvre deux niveaux d'opérations qui sont la reconnaissance discriminative de formes et l'identification des objets correspondant aux formes reconnues. Le passage d'un niveau à l'autre repose sur une ressemblance entre la forme visuellement discriminée et la forme typique de l'objet représenté. Deux mécanismes à partir de formes visuelles sont à la source d'identifications d'objets. Il existe une manière de voir qualifiée d'iconique et une autre manière non iconique.

La visualisation iconique, dont relève les entrées botaniste et arpenteur, permet de détecter des ressemblances avec un modèle type étalon. La figure reste indépendante des opérations qui sont susceptibles d'être faites sur elle. Les formes sont perçues comme étant stables ce qui annihile la possibilité de les transformer en d'autres formes semblables ou différentes, ou de les décomposer en une configuration d'autres unités figurales, ce qui constituent des impasses de la visualisation iconique.

La visualisation non iconique, qui concerne les approches «constructeurs», «inventeur bricoleur», passe justement par une décomposition de formes, par des modifications figurales qui constituent un acte de géométrie.

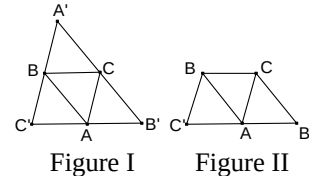
Ces quatre manières de voir les figures de la géométrie relèvent de diverses appréhensions et modifications de ces dernières.

1.1.2. Les diverses appréhensions et modifications des figures

Duval (1994) indique qu'il y a quatre types d'appréhension possibles d'une figure. La plus immédiate semble être **l'appréhension perceptive**, c'est-à-dire celle qui permet d'identifier ou de reconnaître, rapidement une forme ou un objet grâce à des indicateurs intrafiguraux qui sont, par exemple, des différences de taille ou d'orientation entre certaines unités figurales constituant l'image de ce qui est vu. Le traitement est automatique, c'est-à-dire immédiat au niveau du contrôle inconscient. La vision du botaniste est en rapport avec cette appréhension. Elle est fondamentale dans notre travail notamment pour la mise en évidence de figures prototypes, pathologiques que nous définissons plus bas et pour la prise en compte de la notion de **prégnance** empruntée à Noirfalise (1991). Par exemple, dans des contextes très différents des auteurs comme Grenier (1988) et Audibert (1982) ont montré que les élèves éprouvaient des difficultés dans la réalisation de constructions géométriques du fait de la prégnance des directions privilégiées par les bords de la feuille que l'élève intègre comme un repère de verticalité et d'horizontalité.

La perception suivante que propose Duval est l'**appréhension discursive**. Une figure est regardée par rapport à une dénomination (Soit un triangle ABC...), une légende ou une hypothèse qui en fixe explicitement les propriétés. Elle conduit à une explicitation déductive des propriétés mathématiques d'une figure autres que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. De plus, l'appréhension discursive peut être **congruente** ou non avec l'**appréhension perceptive** ce qui, quand le dessin est fourni, rend l'exercice plus ou moins facile.

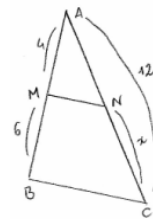
Duval (1988) prend un exemple pour l'expliquer la notion de **figure congruente**. La figure I a été proposée à des élèves de 3^{ème} avec l'énoncé suivant : *les droites (A'C') et (AC), (A'B') et (AB), (B'C') et (BC) sont parallèles. Montrer que A est le milieu de [B'C']*.



Juste avant cette question, le même problème avait été posé avec la figure II qui est la sous-figure utile. Et l'énoncé fournissait les hypothèses non plus en indiquant l'existence de droites parallèles mais celles de parallélogrammes. Le passage de la présentation sémantique **congruente** du problème (figure II et hypothèses mentionnant des parallélogrammes) à la présentation **non sémantiquement congruente** (figure I montrant des triangles et hypothèses mentionnant des droites) a entraîné une chute très nette dans le taux de réussite.

L'auteur conclut alors que les élèves se concentrent généralement sur la figure sans revenir à l'énoncé. Cela caractérise une absence de l'attitude qu'il nomme **interprétation discursive** des figures. Les problèmes qui sont alors accessibles à ces élèves sont ceux dont l'énoncé est sémantiquement congruent avec la figure construite ou à construire ou avec la version du théorème du cours. Selon qu'elle est congruente ou non à l'énoncé, l'appréhension perceptive des figures peut avoir un rôle facilitateur ou inhibiteur sur la compréhension et la résolution d'un problème posé.

La mise en œuvre du théorème de Thalès engendre un jeu de cadres entre le géométrique et l'algébrique qui donne lieu aux phénomènes de congruence ou de non congruence sémantique. En effet, un grand nombre de distributions de longueurs utiles dans la tâche du calcul de l'une d'entre-elles ne sont pas congruentes avec la version actuelle du théorème, et sont à l'origine d'erreurs caractéristiques dans les mises en équations du type : $4/(4 + 6) = (12 - x)/12$.



Ainsi, la notion de congruence est employée dans notre travail pour une mise en évidence de catégories au sujet de la mise en équations et de la résolution de ces équations suivant les répartitions des mesures de longueurs sur une figure.

L'appréhension séquentielle, qui concerne l'ordre de construction d'une figure et qui est fondamentale dans la vision du constructeur, est explicitement sollicitée

dans les tâches de construction ou dans les tâches de description ayant pour but la reproduction d'une figure donnée. Cet ordre dépend donc non seulement des propriétés mathématiques de la figure à construire mais aussi des contraintes techniques du programme de construction utilisé. Nous employons cette notion dans le cadre de l'étude des figures archétypes définies ci-après.

L'appréhension opératoire fonde la fonction heuristique d'un dessin et intervient dans la vision inventeur/bricoleur. Elle donne la possibilité de modifier une figure donnée pour en déduire une autre et Duval distingue trois types de modifications.

Tout d'abord, les **modifications optiques** consistent dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure. Viennent ensuite les **modifications positionnelles** caractérisées soit par le déplacement de la figure dans le plan soit par le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle du sujet. Ces deux types de modifications sont pris en compte dans notre travail dans le but de voir jusqu'à quel degré elles peuvent être portées pour qu'une figure puisse être reconnue comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème de Thalès. Enfin, les **modifications méréologiques**, que nous retrouvons dans l'exemple que nous avons pris pour illustrer la problématique géométrique ci-dessus, consistent à partager une figure en sous-figures, pour les recombinaison en une autre figure.

Duval (1993) précise qu'un apprentissage des traitements proprement figuraux doit être centré sur cette appréhension opératoire des figures et non sur leur appréhension séquentielle ou discursive. Mais notre travail est principalement centré sur l'appréhension séquentielle et perceptive de dessins à la différence d'autres travaux connexes au notre comme ceux de Lémonidis (1991) qui se fondent sur l'appréhension opératoire. Ce dernier a procédé à une classification systématique *a priori* des différents cas de figures pour la représentation des situations de l'homothétie dans le plan afin de mettre en évidence trois possibilités de perception en profondeur. Des dessins que nous avons obtenus de la part des élèves peuvent se retrouver dans la classification de cet auteur puisque le théorème de Thalès est un résultat en rapport étroit avec l'homothétie, mais les deux travaux sont bien distincts dans leurs objectifs et leurs résultats. Nous avons en effet classés *a posteriori* des dessins produits par des apprenants.

1.1.3. Premiers éléments de réponses à la question initiale

a) Figure-clé

Une première réponse à la question de savoir ce que peuvent précisément signifier les termes de figure-clé ou de figure de référence est apportée par Houbedine et Kerboeuf (2005).

Ces auteurs considèrent qu'une figure-clé associe à un énoncé de théorème une figure obtenue par des *tracés minima* - éventuellement complétés de codages matérialisant par exemple l'égalité de mesures de longueurs ou d'angles, un angle droit, le parallélisme et des points alignés grâce à des couleurs - correspondant aux strictes données initiales contenues dans cet énoncé indépendamment de sa conclusion. D'autres chercheurs (Audibert 1982, Cordier 1989) associent justement à ces figures-clés un schéma représentant la conclusion du théorème.

L'une des raisons d'être d'une figure-clé est de rendre plus aisée, par le biais de la vision du botaniste, la reconnaissance puis l'extraction, au sein d'une figure complexe, d'une sous-figure qui vérifie les seules "hypothèses" de l'énoncé d'un théorème pour en faciliter l'application. Le rassemblement de figures clés correspondant à un niveau scolaire donné constitue une forme d'herbier géométrique. Le but est d'être capable de reconnaître des figures particulières typiques rattachées à un théorème, à partir de qualités visuelles minimales. Ainsi, une figure-clé ne devrait pas faire apparaître de tracés supplémentaires, comme par exemple ceux liés à la conclusion du théorème, par rapport aux prémisses de ce dernier. De plus, cela signifie également indirectement que les paramètres de ces figures-clés, comme la mesure de certains angles, l'orientation, la position des droites par rapports aux bords de la feuille, n'ont pas à être fixés.

Si nous prenons l'exemple d'une figure clé *triangle*, il n'y a aucune raison pour que cette dernière se caractérise par deux côtés de même longueur et un troisième dont le support se trouve être parallèle aux bords supérieurs et inférieurs de la feuille. Il n'y a pas non plus de raisons pour que les hauteurs demeurent à l'intérieur de la figure.

Au sujet du théorème de Thalès, une figure-clé peut au minimum, en classe de quatrième, se caractériser par un triangle dont deux côtés sont coupés par une parallèle au troisième côté, ce qui détermine deux triangles que nous nommons *gigognes* qui ont un sommet en commun. Aucun autre paramètre d'orientation, de mesure d'angle ou de position des parallèles par rapport à l'horizontale, ne devrait intervenir pour définir cette figure-clé puisque telle quelle, aussi simple soit-elle, elle permet l'accès au théorème.

En classe de troisième, cette figure-clé obtenue non pas à partir d'un triangle mais de deux droites sécantes est complétée par la figure-clé, que nous nommons *papillon*, pour laquelle les deux droites parallèles se situent de part et d'autre du point d'intersection des deux sécantes sans privilégier encore une fois d'autres paramètres.

Pour rendre totalement compatible l'énoncé actuel de la réciproque avec le théorème direct dont la conclusion ne fait pas apparaître de points alignés dans le même ordre, le seul schéma qui pourrait éventuellement apparaître à la suite d'une figure-clé serait celui qui mettrait en évidence, à l'aide d'un codage à déterminer,

le fait que trois points, d'une part, et trois autres, d'autre part soient alignés dans le même ordre.

Mais la détermination de ce qu'un dessin représente pour un apprenant dépend du contexte ou des indications discursives qui sont données et surtout retenues par l'élève. Nous en arrivons alors au concept de typicalité, car suivant ce que l'enseignant veut transmettre, pense avoir transmis et a réellement transmis et ce que l'apprenant conserve de significatif d'une figure, pouvant adjoindre à des éléments fondamentaux des caractéristiques superflues, l'application du théorème qui se rapporte à ce dessin peut subir des "déviances" plus ou moins caractéristiques, plus ou moins reproductibles.



b) La notion de typicalité

Dans ce qui précède, tant pour ce que nous avons trouvé dans les ouvrages scolaires que dans l'article précité, la notion de figure-clé est un outil dans la transmission du savoir. Dans cette perspective, les figures-clés, qui ne conservent que les caractéristiques utiles à l'application du théorème, facilitent la reconnaissance d'une figure ou l'opérationnalisation d'un théorème. Elles sont une aide significative pour les élèves.

Mais nous pouvons considérer qu'elles peuvent parfois privilégier des éléments superfétatoires qui faciliteraient, dans certains cas, l'accès au sens et dans d'autre lui nuirait. Nous allons illustrer notre propos en prenant un premier exemple situé hors du champ des mathématiques puis un second qui a trait au théorème de Thalès.

Lors d'une émission radiodiffusée, un sociologue a énoncé le fait que la société française n'était plus organisée de façon triangulaire mais sous la forme d'un losange. Ces propos relèvent de représentations typiques du triangle et du losange qui privilégient implicitement une orientation qui s'ajoute aux paramètres qui définissent les deux figures-clés "triangle" et "losange".

Par exemple, comme nous l'avons dit plus haut, en mathématique, une figure-clé représentant un triangle devrait faire apparaître un triangle scalène et non un triangle isocèle dont la base serait parallèle aux côtés supérieurs et inférieurs de la feuille. Les deux représentations ci-contre, en l'espèce, sont des facilitateurs d'accès au sens d'une idée, en rapport ici avec la sociologie élémentaire, en jouant le rôle d'illustrations spontanées d'une idée collectivement admise et comprise.

En ce qui concerne le théorème de Thalès, nous avons maintes fois observé des enseignants qui, dans l'espoir faciliter son application, signifiaient aux élèves les éléments qu'ils devaient en priorité reconnaître. Ainsi, ils leur conseillaient, que ce soit dans la version "triangles" que dans la version "droites sécantes", de trouver le

sommet commun aux deux triangles qui apparaissent dans une figure-clé. Puis, pour construire les trois fractions égales, de partir à chaque fois d'une *"petite longueur et de la diviser par une grande"*.

Dans d'autres cas, nous avons supputé que les caractéristiques rajoutées à des figures-clés pouvaient, par exemple, perturber la reconnaissance de figures. Ainsi, il est bien connu qu'après enseignement, un rectangle n'est identifié que s'il a des dimensions caractéristiques ni trop grandes ni trop petites, s'il a des proportions moyennes et s'il est présenté avec les côtés pratiquement parallèles aux bords de la feuille. De même, nous avons observé des élèves du niveau sixième reconnaissant un losange et non un carré lorsque ce dernier est représenté "une pointe en haut et une en bas".

De telles figures biaisent alors l'accès au sens par le fait qu'à partir d'un moment, le changement de certains des paramètres qui les caractérisent ne permettent plus leur reconnaissance ni l'application d'un théorème, ce qui relève de la notion de **typicalité** (Cordier, 1989).

La typicalité, au sens de la psychologie cognitive, se définit ainsi : certains éléments (sous-catégories exemplaires) constituent de meilleurs exemples que d'autres de leur catégorie d'appartenance : ils sont typiques pour cette catégorie. Ces "bons" exemples se montrent d'une grande stabilité d'apparition sur des échantillons importants de sujets quand les consignes de construction sont les mêmes. Les normes de typicalité mises en évidence témoignent ainsi de la présence de sous-figures et de leurs représentations dans la mémoire à long terme. Des schémas de réflexion ou des schémas cognitifs seraient biaisés de façon significative par le fait que certaines propriétés non caractéristiques des figures seraient privilégiées par rapport à d'autres, et ce de façon permanente, ce qui engendrerait des erreurs ou des réponses incomplètes à certaines questions.

Cordier pense que les **représentations typiques**, expression introduite par Le Ny (1989), sont activées avant les représentations non typiques, ou encore que leur seuil d'activation est beaucoup plus bas.

Rosch (1976) dans ses travaux sur la représentation cognitive, a dégagé la notion de **prototype** qui se rapproche de la notion de représentations typiques, que, par ailleurs, nous adaptons ci-dessous et que nous enrichissons de la notion d'archétype :

« Comme de nombreuses expériences l'ont montré, les catégories ne sont codées dans l'esprit ni au moyen de listes de tous les membres individuels de la catégorie, ni au moyen d'une liste de critères formels nécessaires et suffisants pour définir l'appartenance à la catégorie, mais plutôt sous forme de prototype d'un membre caractéristique de la catégorie. »

Nous appliquons cette notion de typicalité à la bonne identification des configurations de Thalès et à la mise en œuvre de ce théorème tant du point de vue des mises en équation que de la résolution de ces dernières.

c) Le concept de typicalité complété : figure archétype et prototype ; figure pathologique et pathogène

Nous avons émis l'hypothèse que l'identification et la reconnaissance des figures géométriques, dépendraient de l'activité personnelle de l'élève qui lui ferait développer des représentations et des modèles spontanés qui joueraient un rôle décisif dans ses acquisitions. Ainsi, pour préciser le concept de **typicalité**, nous introduisons deux notions nouvelles dont nous postulons l'existence : les **figures archétypes** et les **figures prototypes**, les premières étant censées être produites en liaison avec un théorème mais avant l'enseignement de ce dernier et les secondes apparaissant après son enseignement.

Plus précisément, les **figures archétypes**¹ sont des produits culturels prégnants liés à des objets mathématiques antérieurs aux notions auxquelles ces dessins se rapportent directement. Il s'agit de représentations propres à l'individu et produites par l'élève avant l'enseignement du théorème auquel elles se réfèrent. Ainsi, elles se caractérisent par des dessins types produits très fréquemment par les élèves dont les tracés et les valeurs des paramètres sont clairement déterminés. Nous pourrions dire au premier abord qu'il s'agit de figures-clés produites par les élèves avant enseignement de la proposition en question mais en fait ces dessins peuvent non pas uniquement comprendre des tracés supplémentaires par rapport à ceux obtenus en référence aux prémisses de l'énoncé mais aussi privilégier des variables figurales superflues.

Par exemple, compte tenu de propos ci-dessus tenus par un sociologue, nous nous référons sûrement tous à un archétype de l'objet triangle. Si nous demandons à un certain nombre d'individus de tracer spontanément un triangle à main levée, il y a de forte chance qu'un pourcentage élevé de ces productions fasse apparaître un triangle isocèle dont la base est parallèle au plan fronto-parallèle.

Les **figures prototypes**² sont des dessins types produits très fréquemment par les élèves après un enseignement ayant pour principal sujet le résultat concerné par ces dessins. La forme que prend l'enseignement imprègne directement, de façon plus ou moins explicite, les représentations géométriques de l'élève en rapport à ce théorème. Une telle imprégnation serait possible du fait, qu'à l'inverse des figures

¹ Dans Platon, les archétypes sont des idées, des formes, des modèles qui ont déterminé toutes les conditions de l'Univers.

² Un prototype, d'après le petit Robert, est un premier type, un modèle premier, un standard, un type, une forme de fabrication. Au sens figuré, cela désigne ce qui est conforme au modèle habituel, ce qui est sans originalité.

archétypes, les figures prototypes seraient parfois institutionnalisées comme le laisse penser l'institutionnalisation de figures dites "clés de Thalès" que nous avons pu relever à maintes reprises. Mais à la différence des figures-clés définies par Houbedine, les figures prototypes, en plus des tracés *minima* qui suivent à la lettre les prémisses d'un énoncé, peuvent être caractérisées par le rajout de variables figurales inutiles dans la mise en œuvre du théorème et qui seraient même à la source d'erreur dans une telle application ou de non reconnaissance de dessins qui s'éloigneraient de cette norme. Une telle figure, dont les propriétés ajoutées ou reconnues comme importantes par l'élève sont des composantes contextuelles a été appelé par Wermus (1976, 1978), un **prédicat amalgamé**. Ces sont les caractéristiques réelles ou erronées qui sont rattachées à une figure en dehors de toute description explicite faite dans un énoncé. Ainsi, il est possible que les élèves qui dessineraient un triangle archétype sous une forme isocèle en produiraient peut être un différent après un enseignement qui insisterait sur les formes scalènes.

L'idée de typicalité n'est pas nouvelle et nombre de formateurs insistent souvent auprès d'enseignants pour qu'ils varient l'orientation et les paramètres des figures qu'ils représentent.

Mais ce qui est novateur dans ce domaine est, en premier lieu, l'idée de montrer que les représentations typiques existent chez les élèves avant et après enseignement au sujet d'un théorème précis sans être forcément les mêmes d'ailleurs et que l'enseignement en renforce certaines et, en second lieu, que des variables superflues retenues par des élèves entrave ou modifie l'application d'un théorème ou simplement la reconnaissance des figures qui évolue parfois au gré des propres représentations des enseignants. Ainsi, ce qui caractérise aussi bien les figures prototypes que les figures archétypes c'est le fait qu'elles laissent des empreintes lors de l'application d'un théorème ou d'une définition.

Le classement des dessins du côté des figures archétypes ou des figures prototypes s'effectue grâce à leur fréquence d'apparition significativement importante (plus de 50% pour les premières et plus de 65% pour les secondes), avant ou après enseignement du théorème auquel ces dessins se rapportent.

Pour compléter notre propos au sujet des figures archétypes nous pouvons dire que ces dernières correspondraient à un amalgame de figures prototypes antérieures à l'étude d'une proposition et seraient donc aussi culturelles. Peut-être existe-t-il des archétypes en géométrie indépendants de tout prototype, mais cette hypothèse demanderait à être étudiée sur une vaste échelle, pour des cultures différentes, ce qui n'est pas l'objet de notre travail.

D'autre part, nous savons que les différentes perspectives dans lesquelles les objets géométriques sont perçus par un sujet peuvent être situées sur un gradient de typicalité (Palmer, Rosch et Chase, 1981). En l'occurrence, cette perception est

fonction des écarts que leurs représentations possèdent avec un objet type, reconnu statistiquement comme tel.

Pour tenter de répondre à certaines questions liées aux variations qu'il est possible de faire subir aux figures prototypes pour qu'elles puissent encore être reconnues par une majorité d'élèves, nous définissons deux nouvelles notions liées à l'interprétation globale des dessins. En utilisant le vocabulaire de la médecine, nous parlons de **figures pathologiques**³ et de **figures pathogènes**⁴ liées à l'appréhension perceptive des figures. Nous formulons l'hypothèse que dans certains cas où il lui serait demandé d'identifier un dessin, le sujet ne repérerait pas sur la figure, de par sa déformation, les relations indispensables à sa connaissance. Nous appelons alors ces figures dans laquelle un théorème est susceptible d'être appliqué mais n'est perçue comme telle que par moins de 5% des élèves des **figures pathologiques**. Mais un autre cas pourrait se présenter. La figure serait reconnue mais entraînerait des erreurs caractéristiques et fréquentes à des endroits précis de l'application du théorème de la part des apprenants, qui, par ailleurs, donneraient des réponses correctes à la même question mais posée pour une figure prototype. Dans ce cas, nous la qualifions de **figure pathogène**. Nous allons à présent nous attacher plus spécifiquement au théorème de Thalès.

1.2. Le théorème de Thalès en France : recherche et enseignement

1.2.1. Légitimité du choix

La question qu'il est possible de se poser est de savoir pourquoi fonder une recherche sur un théorème qui peut paraître *a priori* somme toute assez banal ? Nous pouvons tout d'abord avancer l'idée que nous avons choisi de travailler sur ce sujet car il permet de faire une liaison intéressante entre le registre figural et le registre numérico-algébrique. Ainsi, en premier lieu, cette proposition nous sert d'outil pour mettre en évidence l'existence d'objets géométriques que nous définissons initialement, en l'occurrence les archétypes et les prototypes. Dans un second temps, sa mise en œuvre, qui requiert l'articulation du registre figural avec les registres symbolique et numérique, nous permet d'étudier l'influence de la vision d'une figure dans son opérationnalisation.

1.2.2. L'écueil mathématique d'une démonstration du théorème direct et de sa réciproque

Aucune démonstration du théorème de Thalès et de sa réciproque n'est mathématiquement satisfaisante sans l'apport des nombres réels et plus

³ D'après le Littré ; pathologique : "Relatif à l'état de maladie ; qui dénote un mauvais état de santé ; qui s'écarte du type normal d'un organe".

⁴ D'après le Petit Robert ; pathogène : "Qui cause une maladie".

précisément sans la donnée d'un axiome du continu tel que l'axiome de Pasch. Cette remarque est également valable pour établir la formule de l'aire du rectangle d'autant plus que certains auteurs (Matheron, 1994 (b)) pensent pouvoir démontrer ce théorème en faisant l'économie des nombres réels grâce à la formule de l'aire du triangle. Mais le problème réside justement dans le fait que cette formule, pour être établie, nécessite l'apport de ces nombres. En effet, comment démontrer que l'aire du rectangle, utilisée pour démontrer l'expression de l'aire du triangle, est égale à sa longueur multipliée par sa largeur lorsque ces deux segments sont incommensurables ?

Les démonstrations du théorème direct que nous avons pu glaner au cours de l'histoire sont très diverses mais pour la plupart difficilement transposables à l'enseignement actuel. Duval et Egret (1989) ont entrepris une telle démarche en commençant par partager un côté d'un triangle en trois segments de même longueur, en traçant les deux parallèles à un deuxième côté puis en démontrant que ces deux droites coupent le troisième côté en trois segments de même longueur. Dans le cadre de notre ingénierie didactique (2005), nous avons poursuivi cette démarche en partageant le côté en quatre puis en cinq, en passant par le cas d'un rapport fractionnaire pour finir, par la méthode des segments emboîtés, par celui d'un rapport irrationnel.

Ce n'est pas la justification mathématique du théorème qui est envisagée dans cet article mais, comme nous l'avons annoncé en introduction, la recherche de prototypes et d'archétypes liés à cette propriété et aussi sa mise en œuvre dans le cadre de situations présentées aux élèves. Nous tenons simplement à préciser que ces mises en fonctionnement se situent toutes dans l'ensemble des nombres rationnels. Il eut été possible de se poser la question de l'influence que notre travail, mené sur sa démonstration, pourrait avoir sur les applications demandées aux élèves, mais cela serait l'objet de plus amples développements complémentaires à ceux présentés dans le présent article.

1.2.3. L'enseignement actuel du théorème de Thalès

Nous avons également étudié (2005) l'enseignement actuel du théorème de Thalès à travers l'analyse de préparations de cours de professeurs et de manuels scolaires. Nous avons conclu que les activités qui sont censées l'introduire correspondent en fait à une simple familiarisation des élèves avec la propriété. Elles possèdent de faibles niveaux de problématisation et d'a-didacticité.

De plus, ce théorème n'est quasiment jamais démontré dans les ouvrages de 4^e et de 3^e, ce qui est par ailleurs conforme aux programmes en vigueur. En 4^e, les seules tentatives de démonstrations que nous ayons trouvées donnaient comme précurseur le théorème des milieux (démontré à l'aide des propriétés du parallélogramme) et dans un seul cas de préparation de cours, le cosinus joue ce rôle. Le théorème des

milieux est utilisé pour démontrer le théorème dans le cas d'un partage en trois, puis on passe à l'énoncé général sans complément de démonstration. Et le cosinus, lui-même introduit par un constat visuel d'invariance d'un rapport, rend évidente la mise en place du théorème de Thalès qui n'est plus alors qu'un truisme. L'obstacle des nombres irrationnels est évité puisqu'il n'est pas mis en évidence. En 3^e, le cas de la figure papillon est parfois démontré grâce aux propriétés de la symétrie centrale.

La mise en fonctionnement qui est envisagée dans les ouvrages que nous avons analysés et au sein des préparations de cours que nous avons étudiées, consiste à canoniser une procédure à la fois d'application du théorème et de résolution des équations algébriques. Cette procédure de canonisation est favorisée, en partie, par l'approche unique de la proportionnalité et se joue sur deux niveaux : on demande à l'élève d'être capable, d'une part, de reconnaître une figure type, de l'extraire éventuellement d'une configuration complexe afin de lui appliquer le théorème standardisé, ce qui relève d'une visualisation iconique avec ce qu'elle comporte d'inconvénients et d'autre part, il s'agit de mettre le problème en équation et de résoudre cette équation par des techniques adaptées et répétées en classe ; une grande partie du cours étant justement consacrée au recensement et à la résolution de tous les types d'équations possibles. Tout ce processus s'apparente à ce que Vergnaud (1990) appelle un apprentissage d'algorithmes.

« Un algorithme est un ensemble de règles qui permet, en un nombre fini de pas, de trouver la solution d'un problème quelconque de cette classe s'il en a une ou sinon de montrer qu'il n'en a pas. »

De plus, il semblerait que l'on se soit arrangé pour que dans l'enseignement de ce théorème les élèves n'aient affaire qu'à des égalités de rapports perçus comme des blocs. Ainsi, Michonneau et Pfaff (1990) ont montré que devant une difficulté importante de recherche d'une longueur inconnue, les élèves tentent d'appliquer la recherche de la quatrième proportionnelle selon la procédure quaternaire où la proportion est envisagée comme égalité de deux rapports $a/b = c/d$, en tant que quadruplé auquel est rattaché le produit en croix.

Ainsi, nous pouvons déceler un amenuisement de la distance qui sépare l'apprenant et l'enseignant au sujet du savoir. Tout cela nous incite à penser que le théorème de Thalès subit une obsolescence externe (Chevallard, 1991). Cet objet ne vieillit pas par rapport à la durée naturelle d'un cycle d'enseignement mais par rapport à une durée historique. On ne trouve plus de situations problèmes pour lesquelles le théorème est une solution, ni les difficultés théoriques que sa démonstration soulève, ni son utilisation en tant qu'outil pour introduire de nombreuses notions. Il ne reste que ses aspects algébriques et calculatoires qui réduisent cet objet à demeurer un générateur des mises en équations fractionnaires du premier degré. Les titres et le contenu de certains articles sont par ailleurs éloquentes à ce sujet.

Ainsi, dans le texte « *Enoncé de Thalès : support pour le calcul algébrique* », les auteurs Bach et Marot (1995) montrent que l'algèbre devient un outil indispensable à la résolution de tâches liées au théorème de Thalès, ce qui donne au calcul algébrique tout son intérêt. Les auteurs concluent que le théorème de Thalès :

« fournit l'occasion de faire fonctionner les règles de calcul algébriques dans de nouvelles situations, d'accroître l'intérêt de l'algèbre tout en lui donnant du sens, d'élargir le domaine des équations. »

Cela caractérise une inversion pour laquelle la légitimité du théorème de Thalès réside dans le fait qu'il donne du sens à l'algèbre et non dans sa signification géométrique intrinsèque. Nous nous trouvons devant un phénomène de captation de sens qui consiste à imposer une présentation d'un théorème, qui privilégie un type restreint d'applications et engendre un amoindrissement voire une perte de sens. Finalement, nous pouvons citer une phrase de Lebesgue (1931) qui résume et explique les faits observés pour le théorème de Thalès :

« Pour un mathématicien, calculer c'est raisonner, analyser plus profondément les faits géométriques sous-jacents ; pour un jeune élève, calculer c'est laisser aux symboles le soin de raisonner à sa place, c'est oublier tout fait géométrique pour ne plus voir que ces symboles. »

1.2.4. Au niveau de la recherche liée au théorème de Thalès

La richesse de ce théorème entraîne le fait qu'il a été choisi comme outil mais aussi comme objet d'étude. Ainsi, nous avons pu voir que la mise en place du concept de typicalité (Cordier, 1989), les effets d'un enseignement expérimental de l'homothétie (Lémonidis, 1990), l'étude générale de la variable complexité de la figure (Duperret, 1995) ou de l'application concrète de la notion d'organisation praxéologique (Matheron, 2000) ont pu avoir ce théorème pour cadre particulier.

En tant qu'objet, il a malgré tout peu souvent été le thème central de travaux de recherche. Nous pouvons citer d'ores et déjà la thèse de Pfaff (1995) ainsi que le travail collectif publié par l'IREM de Paris VII sous le titre *Autour de Thalès* (1995) au sein duquel les variables de complexité de la figure (Duperret 1995) et l'approche agrandissement réduction (Massot 1995) ont plus particulièrement été étudiées. Nous allons développer plus particulièrement les travaux de Lémonidis et de Pfaff.

Lémonidis (1990) est parti du constat, au sujet de l'enseignement classique pour l'introduction de l'homothétie, d'une insuffisance par rapport à un travail préparatoire sur la variété et la complexité perceptive de toutes les configurations homothétiques possibles. Il a alors réalisé une expérience d'enseignement dans laquelle une grande place est laissée à ce travail préparatoire fondée sur des activités intitulées « trouver le centre », « déterminer les points homologues » ou « construire une figure image ». Un corpus de figures homothétiques est choisi

suivant une classification figurative effectuée par l'auteur et est proposée aux élèves. L'expérimentateur observe la façon dont les élèves perçoivent cet ensemble de figures. Dans une seconde partie l'auteur introduit le rapport numérique et demande sa mise en relation avec l'aspect figuratif correspondant.

Notre travail est différent puisque nous analysons et déterminons la typicalité de dessins qui certes, pour un certain nombre d'entre eux, peuvent se retrouver dans l'étude de Lémonidis, bien que les variables figurales retenues pour les décrire soient distinctes d'une étude à l'autre, mais sont produits plus ou moins spontanément par des élèves avant et après enseignement du théorème de Thalès. De plus, nous enrichissons les figures typiques de données numériques dans le but de procéder à une analyse complète de son opérationnalisation.

Après avoir proposé cet enseignement expérimental sur l'homothétie, Lémonidis a relevé une amélioration dans l'application du théorème de Thalès. Mais il constate malgré tout un ordre décroissant de réussite selon la forme des triangles proposées (gigogne/papillon) et selon les éléments concernés (côtés obliques/3^{ème} côté). Le maintien de cet écart montre que l'interprétation de formes perceptives très différentes à l'aide d'une même formule (égalité de trois rapports) recouvre une tâche qui n'a rien de trivial et qui n'est pas didactiquement négligeable. Le second objectif de notre article est de procéder à une analyse précise du type et du taux d'erreurs commises dans l'application du théorème suivant la distribution des longueurs proposées sur une figure type (gigogne ou papillon).

Les répercussions des changements de programmes depuis 1964 au sujet du théorème de Thalès ont été étudiées par Matheron (1994 (a)). Ce que nous pouvons retenir est le fait que deux principales versions ont alternativement été au programme des classes du secondaire depuis 40 ans. Une version portant sur l'aspect projection ce qui donne le rapport de projection de la droite (AM) sur la droite (AN) suivant : $AN/AM = AC/AB = NC/MB$ et une autre sur l'aspect homothétie aboutissant au rapport du triangle AMN au triangle ABC : $AB/AM = AC/AN = BC/MN$. Justement, les travaux de recherche ayant pris pour objet ce théorème traitent principalement de la double approche projection et homothétie.

Nombre d'entre eux plaident pour un enseignement plus dynamique. Ainsi, Duperret (1995) considère que cette proposition apparaît aux élèves trop rapidement comme une configuration statique qui cache les deux approches précédentes. Cet auteur considère que si les élèves ont à leur disposition le théorème de Thalès projection et homothétie, ils pourraient procéder à deux expertises d'un même problème.

Mais Pfaff (1995) a montré que l'approche projective est très mal maîtrisée par les élèves pour la figure papillon. Par ailleurs, elle a montré que cette figure engendre toujours chez eux un raisonnement de type homothétie que les parallèles soient

prolongées ou non et que les situations appelées T et P, T pour triangles et P pour parallèles (trois parallèles et deux sécantes), favorisent, pour la résolution d'un exercice de calcul de longueur, la mobilisation de la projection au détriment de l'homothétie. Par contre, le calcul d'une longueur d'un des côtés parallèles appelle l'application de l'homothétie. De même, le calcul d'une longueur d'un côté non parallèle paraît plus simple pour les élèves sur un dessin appelé TC (papillon) que sur un dessin T, l'homothétie étant reconnue plus facilement.

A la lumière de ce que conclut Pfaff dans son travail, nous pouvons constater que la mobilisation, de la part de l'élève, de l'une ou de l'autre des versions dépend de la situation proposée dans l'exercice. Les résultats obtenus par Lémonidis inciteraient également à choisir un enseignement en deux parties du théorème de Thalès. De plus, pour enrichir sa prise de sens pour les élèves, il nous semble aussi intéressant, *a priori*, de scinder son étude en deux parties faisant références à deux aspects différents de la proportionnalité. Dans la dernière partie de notre recherche (2005), nous avons fait un choix différent de l'alternative projection/homothétie en optant pour la proportionnalité interne/externe.

La **proportionnalité externe** (Rouche, 1992), ou procédure fonctionnelle (Bekaye Sokoma, 1989), appliquée au théorème de Thalès concerne les rapports de côtés des deux triangles qui apparaissent dans l'énoncé, alors que la **proportionnalité interne** ou scalaire est en relation avec les quotients des différents segments pris, d'une part, d'un "côté" de la figure, et les quotients de différents segments relevés, d'autre part, de l'autre "côté" de la figure. Autrement dit, la proportionnalité externe donne : $AM/AB = AN/AC = MN/BC$ rapports qui relèvent de relations interfigurales relatives à deux triangles, alors qu'avec la proportionnalité interne nous obtenons les égalités suivantes : $AM/MB = AN/NC$; $AM/AB = AN/AC$; $BM/BA = CN/CA$, rapports liés à des relations intrafigurales relatives aux segments [AB] et [AC] qui peuvent se déduire de l'énoncé du théorème sous la forme : toute droite parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés en segments proportionnels. Cette partie révèle son utilité dans notre conclusion.

2. Objectifs des expériences et protocoles expérimentaux

Nous appliquons le concept de typicalité et plus précisément les notions d'archétype et de prototype pour partie au registre figural /symbolique et pour une autre nous le transposons au registre numérique-algébrique. Nous nous sommes en effets intéressés d'une part aux dessins liés au théorème de Thalès que pouvaient produire les élèves plus ou moins spontanément, en différenciant ceux qui apparaissent avant l'enseignement du dit théorème de ceux qui sont produits après, et d'autre part aux effets que ces figures pouvaient avoir dans sa mise en œuvre c'est-à-dire dans l'écriture des rapports littéraux, la mise en équations et leur résolution.

2.1. Problématique liée au registre figural

La première partie de notre problématique est liée aux nouvelles notions que nous avons définies précédemment. Le premier objectif est de montrer la légitimité des figures archétypes et prototypes dans le cas particulier du théorème de Thalès en recensant ces figures auprès des élèves. Nous avons émis l'hypothèse initiale que de telles figures existaient et que l'enseignement influait sur certaines d'entre-elles par l'intermédiaire de paramètres ajoutés ou retenus par les élèves en dehors de toute description explicite de la part de l'enseignant. Plus précisément, nous nous sommes demandé s'il existait, avant l'enseignement du théorème, des configurations souvent reproduites par les élèves liées au parallélisme par exemple. Il s'est agi ensuite de connaître le degré de représentativité, auprès des élèves, des figures géométriques susceptibles d'être utilisées pour l'application du théorème de Thalès après son enseignement.

Nous nous sommes aussi demandés si les archétypes et les prototypes étaient identiques et s'ils n'apparaissaient pas dans des ouvrages scolaires et des préparations de cours d'enseignants.

Nous avons étudié la prégnance que pouvaient avoir les paramètres des figures archétypes et prototypes lors de la reconnaissance de figures et de l'application littérale du théorème. Plus précisément, le second objectif en rapport avec le registre figural est de comprendre en premier lieu jusqu'à quel degré de modification optique et positionnelle les prototypes pouvaient être portées pour qu'une figure ne soit plus reconnue, à tort, par les élèves comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème de Thalès, ce qui relève des figures pathologiques et en second lieu de répertorier les figures dites pathogènes obtenues par changements de certaines valeurs des paramètres des prototypes autorisant tout de même leur reconnaissance par les élèves mais qui engendrent des erreurs caractéristiques dans l'écriture des trois rapports littéraux égaux. Nous avons émis l'hypothèse que les erreurs seraient plus nombreuses et plus significatives lorsque la figure proposée serait pathogène.

2.2. Typicalité des figures

2.2.1. Archétypes et prototypes

Par l'intermédiaire de la première expérience, nous cherchons à savoir s'il existe chez les élèves des figures archétypes dont nous supposons qu'elles dépendent de la méthode de construction et donc de l'approche séquentielle (Duval, 1994) du modèle. Ainsi, nous demandons à une centaine d'élèves de classes de quatrième et à une centaine de troisième d'un collège situé en ZEP dans le Val d'Oise pour lesquelles la propriété étudiée n'avait pas encore été abordée pour les premiers ou révisée pour les seconds, de construire quatre dessins en suivant les quatre

programmes possibles et distincts de construction faisant varier l'ordre d'apparition des tracés et menant chacun à une figure de Thalès : test 1 : un triangle et une parallèle à un côté ; test 2 : deux droites concourantes puis deux parallèles coupant les deux sécantes ; test 3 : deux droites parallèles coupées par deux droites sécantes ; test 4 : deux droites sécantes, une parallèle à l'une et une droite sécante aux trois premières droites.

Dans un second temps, nous mettons en évidence des prototypes. Nous nous sommes en partie inspiré d'une recherche entreprise par Cordier F et J (1991). Ces derniers ont demandés à 40 lycéens d'une classe de seconde de produire, en 30 minutes, 10 dessins caractérisant l'application du théorème de Thalès. Notons que l'énoncé de ce dernier est différent de celui sur lequel nous travaillons puisqu'il concerne deux droites (d) et (d'), trois points A, B et C sur la droite (d) qui sont projetés sur la droite (d') suivant une direction donnée respectivement en A', B' et C', on a alors, en valeurs algébriques : $AB/BC = A'B'/B'C'$.

Nous avons mis en place, avec l'aide de 99 élèves de classes de 3^e et 95 élèves de classes de 4^e ayant déjà étudié le théorème de Thalès, une tâche non plus de reproduction de dessins à partir de programmes de constructions comme précédemment, mais de production de quatre figures distinctes caractéristiques de l'application du théorème de Thalès. Nous émettons l'hypothèse que certaines de ces formes géométriques apparaissent avec une fréquence plus notable que d'autres. Il était demandé aux élèves d'imaginer puis de dessiner, à l'aide du matériel habituel, quatre figures géométriques, dans un ordre imposé sur la feuille de passation, pour lesquelles l'application du théorème de Thalès était pertinente.

En ce qui concerne la recherche de figures fréquemment reproduites dans l'enseignement actuel du théorème de Thalès, nous avons analysé les activités introductrices et les leçons contenues dans cinq ouvrages de quatrième publiés en 1998, dans cinq livres de troisième publiés en 1999 et également à l'intérieur de six préparations de cours de professeurs de trois collèges différents de Paris XX^e et de Villiers le Bel. Nous avons simplement observé si ces activités et séquences d'enseignement faisaient apparaître les mêmes types de figures ou si des variations voire de nouveaux prototypes étaient présents.

2.2.2. Figures pathologiques et pathogènes

Il restait à connaître l'influence que pouvaient avoir certaines déformations de prototypes dans la reconnaissance de la part des élèves de figures dans lesquelles s'applique le théorème et dans l'apparition d'erreurs caractéristiques dans l'écriture de rapports littéraux. Ainsi, au cours de notre deuxième expérience, nous avons fait varier les paramètres qui caractérisaient les figures prototypes pour placer les apprenants dans une situation de reconnaissance de figure afin de tenter de mettre en évidence tout d'abord des figures pathologiques. Sauf pour les cas où seuls deux

choix étaient possibles - comme pour le type de figure papillon ou gigogne - et celui de l'orientation du dessin pour laquelle nous avons choisi quatre options, les autres paramètres ont chacun été modifiés à trois niveaux différents : modéré, moyen et fort. Si nous prenons l'exemple de l'angle A commun aux deux triangles AMN et ABC, nous l'avons réalisé une fois obtus, une deuxième fois un peu plus obtus et une dernière très obtus. Mais cette variable était aussi à croiser avec les autres. Nous donnons plus de détails dans la section méthode d'analyse.

Des cahiers de 17 feuillets ont été constitués. Sur chaque feuille étaient représentées 6 figures différentes. Un exemplaire de chaque cahier a été reproduit cinq fois, c'est-à-dire que cinq élèves, indépendamment les uns des autres, ont réfléchi sur le même exemplaire. La place de chaque figure a été tirée au sort. Ce test a été posé à trois classes de 4^e et à trois classes de 3^e du même établissement.

Les élèves ont eu 3 min 30 s pour traiter une feuille. Dans chacune des six cases de chaque feuille, le texte liminaire était rédigé comme suit : *"Pour chacune des figures qui vont suivre, vous déciderez si la propriété de Thalès est applicable ou pas. Pour cela, vous pourrez, si vous le désirez, utiliser les instruments de la géométrie, prolonger des droites afin de vérifier sur le dessin qu'elles sont ou non parallèles."* et la question prenait la forme suivante : *"On peut appliquer le théorème de Thalès : oui ? non ?"*. L'expérimentateur devait signaler qu'un certain nombre de figures géométriques ne permettaient pas l'application du théorème et que dans ce cas, il fallait l'écrire. Il chronométrait et donnait le signal à chaque changement de page.

Après l'analyse des déformations de prototypes mettant en évidence les figures qui n'ont pas été reconnues par les élèves, un autre cas se présentait qui était celui de la reconnaissance d'un tel dessin malgré des telles modifications. Cette partie de l'expérience consistait à déterminer les figures pathogènes en plaçant les apprenants dans une situation de résolution de problème. Une fois qu'un élève décidait que le théorème était malgré tout applicable, il devait uniquement écrire les rapports littéraux correspondant.

Ainsi, le texte liminaire cité ci-dessus se terminait en fait par : *"Lorsque vous déciderez d'appliquer la propriété de Thalès, vous écrirez les égalités des trois rapports."* et la question complète était *"On peut appliquer le théorème de Thalès : oui ? non ? Si oui : ... = ... ="* Les sujets et les consignes étaient identiques à ce qui précède puisqu'il s'agissait du même test complété par ce dont nous venons de parler.

3. Résultats des expériences sur la notion de typicalité appliquée au registre figural

3.1. A la recherche de figures archétypes dans les productions d'élèves

a) Méthode d'analyse

Notre méthode d'analyse des productions pour rechercher chez les élèves des figures archétypes pour lesquelles le théorème de Thalès s'appliquait est passée par une catégorisation des réponses en rassemblant celles qui étaient jugées de même type. Pour cela, nous avons mis en lumière une certaine fréquence, dans les productions, des valeurs de paramètres tels que :

- (1) l'orientation de la figure ;
- (2) la caractéristique de l'angle commun aux deux triangles : aigu ou obtus ;
- (3) direction des parallèles par rapport aux côtés de la feuille ;
- (4) position relatives des parallèles par rapport au point d'intersection : la figure dominante (papillon ou gigogne) ;
- (5) dans le cas de la figure gigogne, position de la parallèle à un côté par rapport à la droite des milieux (au-dessus ou au-dessous de la droite des milieux) ;
- (6) dans le cas de la figure papillon, position du point d'intersection des deux droites sécantes par rapports aux deux droites parallèles ;
- (7) les dessins font-ils apparaître des droites ou des segments ? Autrement dit, les droites sont-elles prolongées au-delà d'un point d'intersection ou pas ?

Par rapport à ces variables figurales tous les dessins ont été différents mais nous avons regroupé les classes de paramètres voisins pour obtenir une figure médiane représentant ces classes. Nous pouvons dire, par exemple, que lorsque l'angle commun aux deux triangles était aigu pour une majorité de figures avec une mesure comprise entre 25° et 40° , nous avons considéré qu'il s'agissait d'une même classe dont le représentant possédait un angle commun de mesure 30° à 35° . Nous avons raisonné de la même façon pour les sept paramètres précédents.

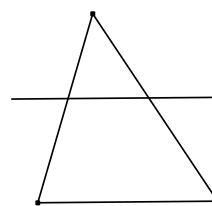
b) Résultats et interprétations

Cinq catégories de figures standard sont apparues parmi lesquelles deux archétypes dont trois variantes ont également été décelées.

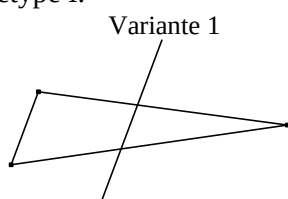
Ainsi, que ce soit en quatrième ou en troisième, dans le cas du programme qui consistait à tracer un triangle et une parallèle à un côté de ce triangle, l'archétype trouvé est du type I.

51% des élèves de troisième et 88% des élèves de quatrième ont produit ce genre d'archétype qui est caractérisé par une droite parallèle à un côté du triangle prolongée au-delà des deux points d'intersection, auxquels s'adjoignent une orientation "verticale" de la figure, un angle commun aux deux triangles que les tracés

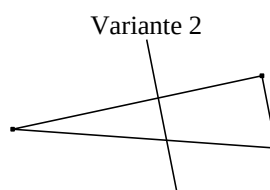
ont fait apparaître aigu et dont la mesure est comprise entre 25° et 40° , les deux parallèles "horizontales" à 10° près et également la parallèle à un côté du triangle au-dessous de la droite des milieux avec un rapport AM/MB compris entre 1,1 et 1,8. Nous constatons que le triangle initial est pratiquement isocèle, la base parallèle aux côtés supérieurs de la feuille ce qui correspond bien à l'archétype triangle que nous avons évalué *a priori*. Deux variantes existent par rapport à l'archétype I.



Archétype I



Variante 1

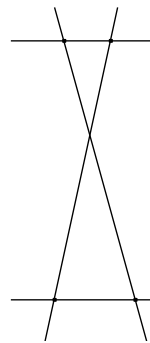


Variante 2

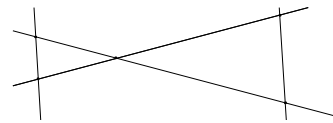
La première a été représentée à 21% par les élèves de troisième et à 30% par ceux de quatrième. Elle consiste à simplement renverser l'archétype I de façon à ce que les deux droites parallèles soient quasiment tout le temps, à 10° près, parallèles aux deux autres bords de la feuille et le sommet commun aux deux triangles à "droite" de ces deux parallèles. La seconde n'est apparue qu'au niveau des élèves de troisième qui l'ont dessinée à 20%. Il s'agit de la même figure que la variante 1 sauf que le sommet commun aux deux triangles est maintenant à "gauche" des parallèles.

Pour les trois autres tests, nous avons trouvé un archétype de la forme II avec des pourcentages d'apparition de 88% et 54% respectivement en troisième et en quatrième pour le test 3, 60% et 50% pour le test 4. Cet archétype a également été obtenu dans le cas du premier test à 27% en troisième et 23% en quatrième. Il est caractérisé par le fait qu'il s'agit d'une figure papillon formée de quatre droites avec une orientation verticale, l'angle commun aux deux triangles aigu toujours avec une mesure comprise entre 25° et 60° , les deux droites parallèles encore "horizontales" à 10° près et le point d'intersection des sécantes à peu près au milieu des deux parallèles.

Archétype II



Variante 3



Mais en ce qui concerne ce test 1, une variante ci-dessus, notée 3, est apparue à 32% et 24%. Cet archétype I est simplement renversé de façon à ce que les deux parallèles soient "verticales" par rapport aux bords de la feuille.

3.2. Des archétypes aux prototypes : à la recherche de prototypes et des effets de l'enseignement sur ces deux types de figures

a) Méthode d'analyse

Nous avons caractérisé les figures prototypes liées aux dessins que produisent les élèves après enseignement du théorème de Thalès en mettant en évidence une certaine fréquence dans la première ou les deux premières productions, des valeurs des sept variables figurales précédentes. Même si les classes de chaque niveau n'ont pas reçu l'enseignement d'un même professeur, nous considérons que la présentation des résultats sous forme de pourcentages d'apparition est suffisante pour faire apparaître des dessins couramment produits par ces élèves. Un pourcentage élevé d'apparition d'un dessin type dans les productions d'élèves de classes distinctes montre d'autant plus que les enseignements tendraient à s'uniformiser au sujet des prototypes qu'ils engendrent.

En classe de troisième, nous avons parlé de figures prototypes pour les dessins les plus fréquemment rencontrés aux deux premières productions. En effet, nous avons jugé nécessaire d'en prendre deux en considération puisque les deux types de figures papillon et gigogne sont au programme de cette classe. Par contre, nous n'avons retenu que la première en classe de 4^e puisqu'une seule, la figure triangles gigognes, était à l'étude. Nous avons considéré que les deux derniers dessins pour les élèves de troisième, et les trois derniers pour ceux de quatrième relevaient de productions moins spontanément réalisées par les élèves s'éloignant ainsi de la

notion de prototype. Parmi ces dernières, nous avons analysé tout de même celles qui étaient dessinées à plus de 10% des cas en particulier pour savoir si les apprenants étaient capables à un moment, en proposant des variantes, de rompre avec les figures prototypes qu'ils avaient initialement produites.

b) Résultats et interprétations

i) Productions et pourcentages d'apparition obtenus

Quatre grandes catégories de figures sont apparues.

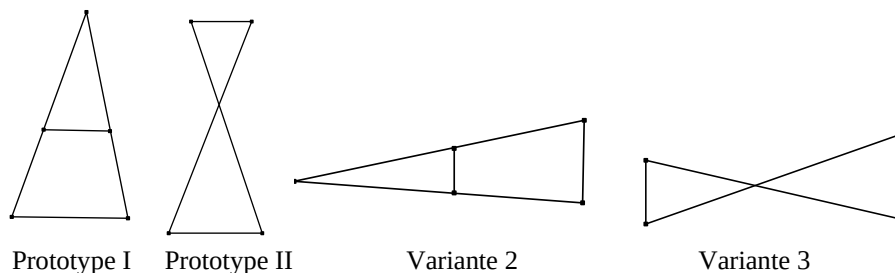


Figure produite	Dessin			
	1 ^{er}	2 ^{ème}	3 ^{ème}	4 ^{ème}
Prototype I	60%	...	28%	32%
Prototype II	...	70%	16%	9%
Variante 2	6%	5%	20%	6%
Variante 3	...	5%	2%	12%

Tableau des pourcentages d'apparition des prototypes

ii) Analyse de ces productions

En ce qui concerne les sept variables figurales que nous avons retenues, pour ces quatre figures, l'angle commun aux deux triangles est aigu et seuls des segments sont représentés et non des droites débordants les points d'intersection.

De plus, deux prototypes forts se sont distingués : celui représenté à 60% au premier dessin et celui représenté à 70% dans le deuxième. Ces deux prototypes ont en commun leur orientation "verticale" et "l'horizontalité" des deux parallèles.

Dans des contextes très différents, des auteurs comme Grenier (1988) ont montré que les élèves éprouvaient des difficultés dans la réalisation de constructions géométriques du fait de la prégnance (Noirfalise, 1991) des directions des bords de la feuille que l'élève intègre comme un repère de verticalité et d'horizontalité. Dans nos deux cas de figures, il ne s'agit pas de difficultés de réalisation mais de prégnance de la verticalité et de l'horizontalité qui influent sur des productions d'élèves de telle façon que nous avons retrouvé statistiquement en grande majorité

les mêmes dessins. Par contre, la position de la parallèle à un côté par rapport au point d'intersection des deux autres côtés distingue les prototypes I et II : dans le premier cas nous avons obtenu la figure gigogne avec la parallèle à un côté d'un triangle juste en dessous de la droite passant par les milieux des deux autres côtés et dans l'autre la figure papillon.

Quelques variations de ces deux prototypes sont apparues. Ainsi, le renversement horizontal - vertical a engendré les variantes fortes 2 et 3. Ce ne sont que les prototypes I et II dont la variable orientation a changée puisqu'elles occupent une position horizontale par rapport aux deux bords supérieurs de la feuille. Nous avons remarqué que pour le prototype I et la variante 2, la parallèle occupait la même position relativement à la droite des milieux : assez près de cette dernière mais au-dessous pour le prototype et à droite pour la variante. Une variante du prototype I (12% au 1^{er} dessin) a consisté tout de même à placer cette parallèle au-dessus de la droite des milieux, tous les autres paramètres demeurant fixes par ailleurs.

Les dessins mettant en évidence la droite des milieux comme parallèle ne sont pas représentés en nombre significatif. Pour d'autres, les fréquences sont également trop basses pour que nous puissions considérer qu'il s'agit de prototypes ou même de l'une de leur variante. Simplement nous pouvons préciser, si nous nous référons aux deux prototypes et à leur variante, que certaines figures sont moins "verticales" que les prototypes ou horizontales par rapport aux variantes et que d'autres dessins font apparaître les parallèles "obliques" c'est-à-dire moins horizontales ou verticales pour les variantes.

Ces résultats sont confirmés pour les quatre classes de 4^{ème} auxquelles nous avons proposé un test similaire, tout au moins pour le prototype I et ses variantes.

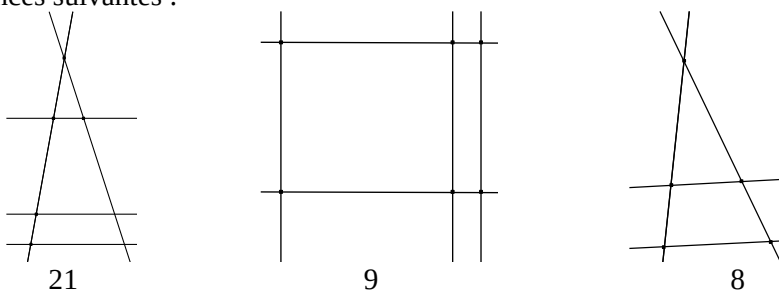
c) Interprétations des résultats

Les résultats que nous avons obtenus signifient que la figure venant le plus spontanément à l'esprit des élèves est le prototype I et qu'en classe de troisième, ils sont arrivés, dans un second temps, à varier de figure en proposant à une très large majorité le prototype II. Il n'y a pas une totale identité entre les archétypes et les prototypes. Ainsi, nous avons retrouvé les deux archétypes I et II précédents mais ordonnés différemment. L'archétype II a beaucoup plus souvent été représenté que l'archétype I alors que l'inverse se produit pour les prototypes. Ce qui est surprenant est le fait qu'après enseignement du théorème en principe en version "droites sécantes", le prototype en 3^{ème} soit de type I sans que les droites débordent des points d'intersection et non de type II comme l'archétype que nous avons trouvé dans ce cas qui, de plus, faisait alors apparaître les droites prolongées. Dans ces conditions, il a été représenté par les élèves à 35% alors que le prototype, c'est-à-dire après enseignement et sans consignes de construction, a été lui dessiné à

60%. Nous en déduisons que l'enseignement renforce l'archétype I, qui est minoritaire chez les élèves par rapport à l'archétype II, qu'il transforme en prototype. Nous nous interrogeons à ce sujet ci-dessous sur des préparations de cours et des ouvrages scolaires.

Par contre, même lorsque nous demandons de varier les figures, les élèves produisent difficilement autre chose que des prototypes I et II aux 3^{ème} et 4^{ème} dessins. Ils arrivent malgré tout à transformer facilement ces deux prototypes en les réorientant de la verticale à l'horizontale pour obtenir les variantes 2 et 3, de façon moins naturelle, à placer la parallèle à un côté d'un triangle non plus au-dessus de la droite des milieux mais au-dessous. En revanche, ils ne rompent pas du tout avec le paramètre de l'angle aigu commun aux deux triangles. Tenir compte des troisièmes et quatrièmes dessins n'a pas apporté de changement dans nos conclusions.

Il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus par Cordier F et J pour une version projective du théorème. Ces auteurs ont conservé la première des dix figures que devait réaliser chaque élève et ont relevé quatre dessins avec les occurrences suivantes :



Trois points devaient être placés sur une droite et être projetés sur une seconde. Il est donc logique qu'un grand nombre de dessins fassent apparaître trois parallèles. Malgré tout, nous remarquons qu'ici aussi le prototype I, représenté à 72,5%, - les versions deux droites parallèles et trois droites parallèles étant confondues - prédomine. Même si le prototype II est très peu représenté, nous notons bien sûr que l'orientation "verticale" est privilégiée, tout au moins pour les dessins 1, 3 et 4.

Ainsi, que ce soit pour la version triangles gigognes, la version droites sécantes ou bien celle liée aux projetés sur une première droite de trois points situés sur une seconde, le prototype I est commun. Il y a une forte prégnance de ce prototype gigogne par rapport au prototype papillon mais il reste à en comprendre la raison.

3.3. Vision institutionnelle : variabilité des prototypes dans les ouvrages scolaires

Notre attention a tout d'abord été attirée par l'institutionnalisation de figures dites "clefs de Thalès". Ces dessins étaient reproduits, à peu de choses près, de la même façon mis à part le fait que dans les activités et les résumés de cours des ouvrages que nous avons analysés, les droites étaient prolongées alors que dans quatre des six préparations de cours d'enseignants elles ne l'étaient pas.

Par ailleurs, ces figures-clés ne correspondaient pas aux objets définis par Houbedine (2005) mais plutôt à ceux que nous avons mis en évidence précédemment. En effet, en plus des tracés *minima* permettant d'aboutir à une figure dans laquelle le théorème s'applique, des paramètres supplémentaires, comme l'orientation de la figure en général et des parallèles en particulier, un angle commun à deux triangles constamment aigu etc., viennent s'ajouter. Ainsi, nous avons remarqué que les prototypes I et II étaient représentés à 75% dans les activités, les cours contenus dans les ouvrages et les diverses préparations analysés mis à part que dans les premiers les droites étaient le plus souvent prolongées. De même, les variantes II et III des prototypes étaient également présentes. Nous avons ainsi constaté le peu de variations des représentations du théorème de Thalès et qu'à l'inverse des figures archétypes, comme nous l'avions pressenti, les figures prototypes sont effectivement institutionnalisées.

Enfin, bien que la version officielle du théorème débute par la donnée de deux droites sécantes elles mêmes coupées par deux droites parallèles, dans quatre préparations de cours, les auteurs ont opté principalement pour une version triangle du théorème c'est-à-dire qu'ils ont amorcé l'énoncé par la donnée d'un triangle coupé par une parallèle à un côté. Il est à noter qu'à l'inverse de ces enseignants, les deux autres qui prolongent les droites sont rentrés en fonction après la mise en vigueur des programmes actuels. Les quatre professeurs plus chevronnés ont choisi l'ancienne version "triangles" consignée dans les programmes de 1989. Ce fait va dans le sens de l'idée que les professeurs conservent leurs propres prototypes dont ils ont du mal à ce départir au grès des changements de programmes.

Finalement, nous pensions trouver les mêmes prototypes dans les ouvrages et les préparations de cours, ce qui a été le cas mis à part ce détail des droites prolongées. Tout ce qui précède corrobore le renforcement chez les élèves des figures archétypes déjà existantes avant enseignement que ce dernier transforme en prototype par l'intermédiaire des propres représentations prototypiques des professeurs. Ce qui explique le renversement de l'ordre des archétypes qui se transforment en prototypes. Les apprenants introduisent rarement d'eux-mêmes une autre variabilité que celle des ouvrages et des préparations de cours.

3.4. Résistances aux déformations ; effets des modifications optiques et positionnelles sur la reconnaissance des figures : figures pathologiques

a) Méthode d'analyse

Nous avons fait varier les paramètres des deux prototypes précédents. Si nous illustrons notre propos du cas "triangles gigognes", quatre orientations ont été sélectionnées : droite, renversée, et celle des variantes 1 et 2 ; deux angles communs : aigu ou obtus et pour chacun trois mesures distinctes ($4 \times 2 \times 3$) ; trois directions des parallèles ($4 \times 2 \times 3 \times 3$) et trois positions d'une parallèle par rapport à la droite des milieux, ce qui a donné $4 \times 2 \times 3 \times 3 = 216$ figures. Nous en avons retenues un peu moins pour le prototype II. Un prototype était proposé comme figure témoin.

Nous avons repéré tout d'abord les élèves pour lesquels les taux de réussite étaient élevés afin de confirmer le caractère prototypique de certains dessins. Puis, pour ces mêmes élèves, nous avons observé l'évolution de ces taux suivant la figure concernée. Nous avons mis en évidence les caractéristiques et les variables de figures pathologiques en comparant les pourcentages de réussite obtenus à leur sujet, c'est-à-dire moins de 5%, par rapport aux pourcentages relevés aux figures prototypes.

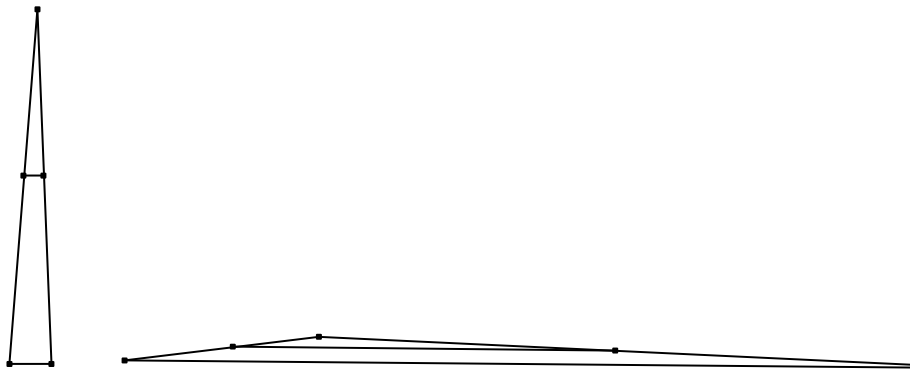
b) Résultats et interprétations

Nous avons noté que les résultats obtenus étaient valables pour les classes de 3^{ème} et de 4^{ème}. En premier lieu, nous avons remarqué que des figures non standards ont été tout de même reconnues par les élèves. Ainsi, certaines variables modifiées n'ont pas perturbé les apprenants dans la reconnaissance de figures ces dernières pouvant être considérées non pathologiques. Plus précisément, celles d'entre elles qui n'ont subi qu'une seule modification et ce de façon moyenne ont été bien acceptées par les élèves. Par exemple, si seul était changé, d'une manière modérée, l'angle commun aux deux triangles dessiné alors obtus ou bien la position de la parallèle à un côté placée plus près de ce dernier ou bien les deux parallèles plus du tout horizontales ou bien encore l'orientation du prototype par renversement, alors la figure était reconnue par les apprenants.

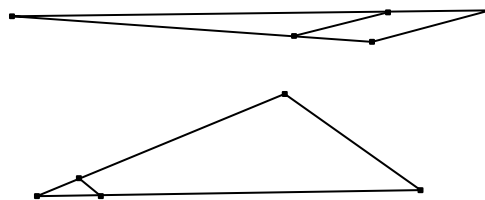
Par contre, ils ont été plus sensibles à d'autres changements qui engendraient une mauvaise reconnaissance des figures de leur part. Celles qui, à tort, ont été reconnues par moins de 5% des élèves comme pouvant faire l'objet d'une application du théorème se classent en trois grandes catégories que nous illustrons de quelques exemples.

- Il y a tout d'abord celles pour lesquelles une seule modification a été apportée par rapport aux paramètres (1), (2), (3) (5) et (6) des deux prototypes mais de façon extrême comme pour les deux exemples ci-

dessous où seul l'angle commun a été changé puisqu'il est très aigu pour le premier et très obtus pour le second :

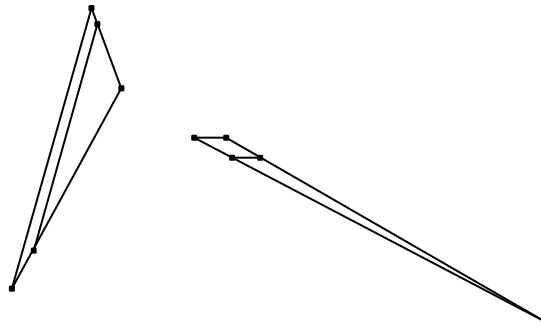


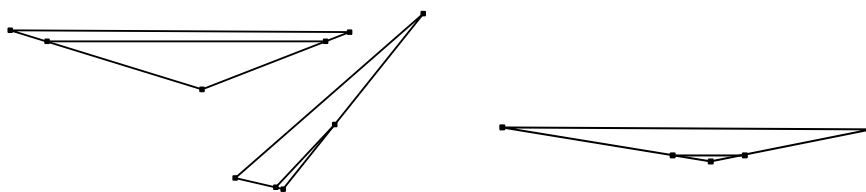
- Puis nous avons trouvées celles pour lesquelles au moins deux variables étaient au moins moyennement modifiées comme par exemple l'orientation et la position de la parallèle :



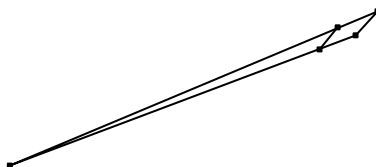
Précisons qu'une figure dont deux variables étaient modérément changées était reconnue.

- Enfin il y a les figures qui ont eu plus de deux variables changées comme l'orientation, l'angle commun et la position de la parallèle :





Il va de soit que lorsque deux ou trois variables étaient fortement modifiées, la figure obtenue était également pathologique.



Il est à noter que parmi les figures des trois catégories précédentes, aucune n'a moins bien été reconnue par les élèves qu'une autre.

3.1.5. Effets des modifications optiques et positionnelles sur l'écriture des rapports littéraux : figures pathogènes

a) Méthode d'analyse

Nous avons mis en évidence les caractéristiques et les variables de figures pathogènes pour lesquelles des erreurs caractéristiques dans l'écriture des rapports littéraux se sont reproduites dans plus de 80% des cas.

b) Résultats et interprétations

Nous avons remarqué dans l'analyse précédente que les figures qui étaient reconnues bien qu'elles aient été déformées étaient celles pour lesquelles une seule variable ou même deux avaient été modifiées mais de façon modérée par rapport au prototype. Parmi ces figures les plus représentées, certaines ont engendré des erreurs que nous avons caractérisées comme suit.

Les prototypes renforcent la tendance naturelle de lecture verticale de haut en bas et horizontale de gauche à droite, ceci conduisant à des écritures de rapports littéraux erronées lorsque l'on s'éloigne des formes prototypiques, d'où l'identification des figures pathogènes A, A', B, C, D et E ci-dessous. Nous avons retenu la figure pathogène B bien que les erreurs commises à son sujet dans l'écriture des rapports littéraux n'aient pas été commises à plus de 80%.

	Proto- type I	patho- gène A	patho- gène A'	patho- gène B	patho- gène C	patho- gène D	patho- gène E
Réussite	83%	13%	12%	57%	13%	15%	18%

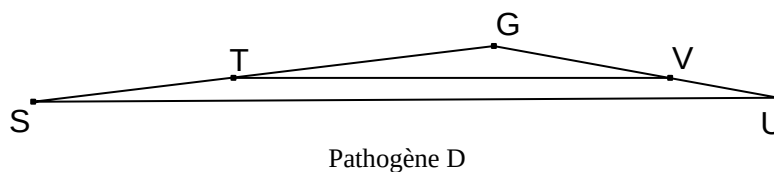
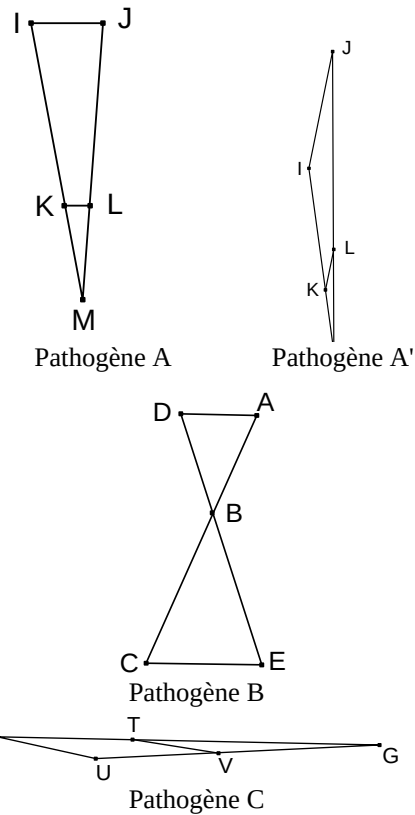
Deux paramètres du prototype I sont source d'erreurs. D'une part, son orientation a une première forme de prégnance sur l'application du théorème. Ainsi, en ce qui concerne la figure pathogène A, les élèves écrivent très souvent : $JL/JM = IK/IM = IJ/KL$. De plus, la présence d'un angle aigu en haut d'une telle figure "renversée" renforce cette erreur (Pathogène A').

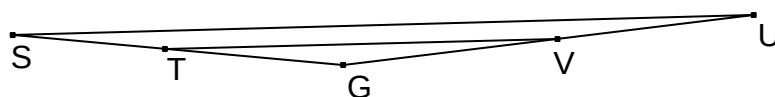
Notons que même s'il ne s'agit pas de dessins renversés ni redressés, un angle aigu situé vers le haut de la feuille entraîne une telle lecture verticale.

Nous avons montré que la lecture verticale est également présente pour la figure papillon. Par conséquent, le prototype I influe d'une nouvelle façon sur le II : $AB/AC = DB/DE = DE/CE$. (Pathogène B)

D'autre part, la variante 2 du prototype I entraîne une lecture de gauche à droite. La présence d'un angle aigu prononcé sur la gauche de la figure et une lecture de gauche à droite génèrent une erreur caractéristique pour trois figures pathogènes.

La figure C qui est caractérisée par un angle aigu sur la gauche et une orientation "allongé", la figure D qui est un prototype I dont l'angle commun est moyennement obtus ce qui engendre la présence d'un angle aigu sur la gauche et la figure E qui est la figure D mais renversée.





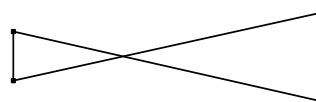
Pathogène E

Pour ces trois figures, les élèves écrivaient l'égalité fausse suivante :

$ST/SG = TV/SU$. Il apparaît une polarisation visuelle pour un angle aigu situé "sur la gauche", qui existe également lorsqu'un angle aigu se trouve en haut. En résumé, nous avons déduit que le prototype I avait une première forme de prégnance : il renforce la tendance naturelle de lecture verticale de haut en bas et horizontale de gauche à droite.

La figure papillon est aussi touchée par cette erreur de lecture de gauche à droite commise, dans le cas de la variante 3, par 62% des élèves. Remarquons enfin qu'une erreur type a été commise lors de l'application du théorème au prototype I.

La figure étant réellement un prototype I, les élèves ont écrit parfois les rapports suivants que nous nommons fragmentés pour les deux premiers : $AM/MD = AN/NE = MN/DE$. En classe de 4^{ème}, cette erreur a été commise par 6% des élèves et correspond à 35% des erreurs. En 3^{ème}, ce taux passe à 12%, soit 50% des erreurs au total.



Pathogène F

Nous émettons l'hypothèse que, d'une part, la fragmentation effective des mesures des longueurs sur le dessin, et d'autre part, la figure papillon accentuent cet obstacle en 3^{ème}.

Conclusion

La notion de figure clé est couramment employée dans l'enseignement français. Nous sommes parti, *a priori*, de l'idée que les figures dites clés pouvaient jouer un rôle facilitateur dans l'application d'un théorème mais aussi perturbateur si des variables figurales superflues viennent s'adjoindre aux variables minimales permettant de les définir.

Dans un premier temps, nous avons été amenés d'une part à déterminer de nouvelles notions, les figures archétypes qui sont produites par les élèves avant enseignement et qui sont ainsi des produits culturels prégnants antérieurs aux objets mathématiques en cours d'étude et les figures prototypes qui apparaissent après, et d'autre part à démontrer l'existence de ces objets dans le cadre particulier de l'enseignement du théorème de Thalès. Nous avons effectivement montré que

les figures prototypes et les figures archétypes représentant les prémisses de cet énoncé pour les élèves ne comprennent pas seulement des caractéristiques essentielles qui facilitent la reconnaissance de configurations et son application, mais également des propriétés contextuelles superflues, réelles ou erronées, ajoutées ou reconnue comme importantes par l'élève en dehors de toute description explicite faite par un enseignant, qui s'y trouvent mêlées au moment de l'apprentissage ou de façon plus naturelle. Une question globale et qui relèverait de plusieurs disciplines serait de savoir s'il existe, dans d'autres domaines que ceux liés au théorème de Thalès, des archétypes indépendants de tout prototype.

Dans un second temps, nous nous sommes attachés à mettre en évidence les influences mutuelles des archétypes et des prototypes et leurs effets dans la mise en œuvre du même théorème. Par ailleurs, nous avons pu, d'une part, déduire de notre étude de cette mise en œuvre et, d'autre part, inférer de l'analyse du contenu d'ouvrages scolaires que la conduite dans l'enseignement actuel de cette proposition consiste à se référer à une figure prototype unique pour former des relations numériques et algébriques qui ensuite sont l'objet de traitements dans lesquels la figure n'intervient plus. Autrement dit, l'activité des élèves est réduite à la reconnaissance d'une configuration typique caractérisée en partie par des variables autres que celles qui ont trait à l'énoncé strict du théorème pour très vite abandonner le registre figural au profit de celui des calculs. Trois formes d'algorithmisation décrivent cette activité. Une première d'ordre méthodologique consiste, en respectant une procédure de repérage d'éléments précis d'un prototype (deux triangles, un sommet en commun aux deux triangles, une parallèle à un côté etc.), à reconnaître ou à extraire une telle figure. La reconnaissance d'un prototype étant effectif, un autre algorithme lié à l'écriture systématique de rapports littéraux (petit côté sur grand côté) est mis en place afin d'éviter ceux qui sont erronés. Enfin, ces deux étapes ayant permis de tenir à distance la figure et de rendre absente une interprétation discursive de cette dernière, il ne reste plus qu'à mettre le problème en équation et à résoudre cette équation grâce à une algorithmisation des calculs algébriques. Les deux questions que nous pouvons alors nous poser sont de savoir comment éviter cette fuite du géométrique au profit de l'algébrique et améliorer les résultats de mise en œuvre du théorème ?

Notre première piste est qu'il semble important d'instaurer dans l'enseignement une variabilité à la fois des prototypes et des types de calculs. En effet, pour éviter que des archétypes se transforment en prototypes à forte prégnance lors de l'application du théorème et qui rendent parfois son exploitation difficile, tout en proposant des outils de reconnaissance de configurations, nous avons conclu qu'une grande variété des paramètres définissant ces prototypes devraient être proposés par les professeurs. Une telle organisation devrait permettre aux apprenants de mieux accepter, dans des situations de résolution de problèmes, des variations

raisonnables par rapport à ce type de figure. Certes la vision botaniste consistant à répertorier initialement les dessins types liés à un théorème pour pouvoir les reconnaître plus facilement dans une figure complexe n'est pas à négliger. Mais cet «herbier» devrait rassembler des prototypes caractérisés par les variables figurales strictement en rapport avec l'énoncé au risque autrement que l'application du théorème s'en trouve biaisée.

Afin d'éviter une visualisation exclusivement iconique liée à la lecture des données numériques sur les dessins qui engendre le fait que les élèves se concentrent sur une tâche calculatoire sans revenir à la figure, la réponse que nous apportons est fondée sur la proportionnalité interne, liée au théorème d'une droite parallèle à deux côtés d'un triangle qui coupe les deux autres côtés en segments proportionnels et sur la proportionnalité externe, en rapport avec le théorème de Thalès actuel. Suivant le type de répartition des mesures de longueurs connues et celle qui est à calculer, l'élève choisit l'une ou l'autre version. Le cheminement est exactement inverse à celui que nous avons décelé dans nos expériences et ne consiste plus à fuir le plus tôt possible le géométrique. L'élève part du géométrique pour repérer une configuration adéquate, analyse les données numériques avec pour objectif de choisir la version du théorème la mieux appropriée pour enfin revenir au registre figural dans le but d'appliquer effectivement cette version. Un retour à la figure en fin de procédure de calcul est à envisager pour vérifier la cohérence du résultat.

De plus, nous avons montré dans un travail antérieur que l'approche du théorème de Thalès par la proportionnalité interne et externe améliorerait des résultats au niveau du registre algébrique. En effet, il semblerait qu'une double approche de la proportionnalité soit profitable à l'enseignement de ce théorème et constitue une remédiation aux erreurs rencontrées du fait que cette méthode diminue celles qui sont commises dans l'écriture des rapports littéraux, la mise en équation et la résolution de ces équations. Mais, à ce sujet, de plus amples détails ne peuvent pas être donnés dans le cadre de cet article.

De nombreuses questions demeurent ouvertes au sujet du théorème de Thalès en particulier celle qui consisterait à comprendre l'influence qu'un travail de démonstration de ce théorème avec les élèves pourrait avoir sur les applications qui leur sont demandées.

Pour finir, il semble tout à fait légitime d'émettre l'hypothèse que des figures archétypes et prototypes existent pour d'autres propositions et que les remarques que nous avons émises au sujet de l'enseignement du théorème de Thalès sont transposables à d'autres résultats. Ainsi, il serait intéressant de détecter de telles figures types pour un théorème donné et de scruter leurs effets sur son enseignement. Les questions générales qu'il serait alors possible de se poser sont de savoir, d'une part,

- si des figures géométriques ne préexistent pas chez les élèves avant l'enseignement d'une notion ou d'un théorème ;
- si l'enseignement ne renforce pas ces hypothétiques dessins ou n'en crée pas de nouveaux par l'intermédiaire de propriétés de figures ajoutées ou retenues par les élèves en dehors de toute description explicite de la part de l'enseignant ;

et d'autre part

- de savoir si de telles figures, en supposant qu'elles existent, ne laissent pas des empreintes lors de l'application numérique du théorème en question.

Enfin, nous pouvons penser que le cheminement qui consiste à passer au plus vite du géométrique au numérique, procédé rendant la visualisation iconique et le discours strictement algébrique, n'est pas un fait réservé au théorème de Thalès mais également à une bonne partie de l'enseignement contemporain de la géométrie. Un réel questionnement est à entreprendre à ce sujet.

Bibliographie

- AUDIBERT G. (1982), *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier, Edition APMEP.
- BACH M-J & MAROT M. (1995), *Énoncé de Thalès : support pour le calcul algébrique*. Autour de Thalès, Commission Inter IREM Premier cycle, Université Paris VII.
- BEKAYE SOKOMA S. (1989), Aspects analytiques et analogiques de la proportionnalité dans une situation de formation, *Petit x* **19**.
- BELLARD N. & LEWILLION M. (2001), *Schémas pour la compréhension des théorèmes pour la classe de quatrième*, Produire et lire des textes de démonstrations, Éditions Ellipses, Paris.
- BROUSSEAU G. (1995), *Promenade avec Thalès entre la maternelle et l'université*. Autour de Thalès, Commission Inter IREM Premier cycle, Université Paris VII.
- CORDIER F. (1989), *Les notions de typicalité et de niveau d'abstraction. Analyse de deux propriétés des représentations cognitives*, Thèse présentée pour le diplôme national d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Sud.
- CORDIER F. & J. (1991), L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle de représentations typiques comme biais cognitif, *Recherche en Didactique des Mathématiques* **11.1**.
- CHEVALLARD Y. (1991), Autours de l'enseignement de la géométrie au collège, *Petit x* **27**, Première partie.
- DUPERRET J C. (1995), *Pour un Thalès dynamique*. Autour de Thalès, Commission Inter IREM Premier cycle, Université Paris VII.
- DUVAL R. (1988), Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* **1**.
- DUVAL R. (1993), Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* **5**.
- DUVAL R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repère IREM* **7**.
- DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* **10**.

EGRET M.-A & DUVAL R. (1989), Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* 2.

EGRET M.-A. (1990), *Proposition pour introduire des élèves à la démonstration*. Publications de l'Institut de Mathématiques de Rennes. Fascicule 5.

EGRET M.-A., GUIN D., KUNTZ G., METEVIER G., VOGEL N. (1988), Réflexion sur l'apprentissage de la démonstration en géométrie en quatrième autour d'un logiciel, *L'Ouvert* 52.

GRENIER (1988), *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6^{ème}*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

HOUBEDINE J. & KERBOEUF M.-P. (2005), Les figures-clés : une idée pour le début de l'apprentissage de la démonstration en quatrième, *Repère IREM* 59.

LAGUERRE E. (2005), *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège*, Thèse de Doctorat, Université Paris VII Denis Diderot.

LEBESGUE H. (1931), *Sur la mesure des grandeurs. L'enseignement mathématique*. Paris et Genève.

LEMONIDIS C. (1990), *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur. Strasbourg.

LE NY J. (1989), *Science cognitive et compréhension du langage*, Presse universitaire de France.

NOIRFALISE R. (1991), Figures prégnantes en géométrie, *Repère IREM* 2.

MATHERON Y. (1994 (a)), Les répercussions des changements de programme entre 1964 et 1989 sur l'enseignement du théorème de Thalès, *Petit x* 34.

MATHERON Y. (1994 (b)), *De la proportionnalité vers le théorème de Thalès, point d'appui et évolution du rapport au savoir*, Mémoire de DEA de sciences de l'éducation, Université d'Aix - Marseille.

MATHERON Y. (2000), Analyse praxéologique. Quelques exemples d'organisations mathématiques, *Petit x* 54.

MONFORT A.-M. (1995), *A propos de l'énoncé de Thalès en 3^{ème}*, Autour de Thalès, Commission Inter IREM Premier cycle, Université Paris VII.

PALMER, ROSCH & CHASE (1981), *Canonical perspective and the perception of objects in, attention and performance*, IX, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hills dale, New Jersey.

PFAFF N. & MICHONNEAU J. (1990), La proportionnalité en géométrie : le théorème de Thalès, *Petit x* **23**.

PFAFF N. (1995), *Processus de conceptualisation autour du théorème de Thalès*, Thèse de Doctorat, Université Paris V René Descartes.

ROSCH E. (1976), *Classification d'objet du monde réel : origine et représentations dans la cognition*, Bulletin de psychologie, Numéro spécial.

ROUCHE N. (1992), *Leçons de la mesure*, Didier Hatier, Bruxelles.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques* **10-2.3**.

WERMUS H. (1976), *Essais de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composante*, Archive de psychologie, **XIV n°171**, Genève.

WERMUS H. (1978), *Esquisse d'un modèle des activités cognitives*, Dialectica, **32 n° 3-4**, Genève.

ÉRIC LAGUERRE
IUFM Versailles
elaguerre@club-internet.fr

LA COMPARAISON DES NOMBRES DÉCIMAUX, CONCEPTION ET EXPÉRIMENTATION D'UNE AIDE AUX ÉLÈVES EN DIFFICULTÉ

Abstract. Comparing decimal numbers: an experiment to help low-level attainers

Comparing decimal numbers is not just a question of how to handle the position of the digits. Yet, teaching often only proposes this kind of procedures. Our research is based upon 400 students, from 10 to 25, as well as adults. We tried to understand which other handlings comparison activity is based upon and we tried too to pinpoint factors related to learning difficulties. We tested an intervention method involving students with learning difficulties. The experiment showed that confronting right or wrong reasoning with concrete representation of decimal numbers might prove very helpful.

Résumé. La procédure de comparaison des nombres décimaux ne repose pas seulement sur un traitement de l'écriture décimale, de la notation, qui consiste à repérer les chiffres et leur position. Pourtant l'enseignement propose souvent des procédures fondées sur ce seul type de traitement. En s'appuyant sur de nombreux travaux antérieurs menés sur ce sujet, une nouvelle recherche portant sur 400 élèves de 10 à 25 ans ainsi que sur des adultes a permis de comprendre quels traitements des nombres sont mis en œuvre dans l'activité de comparaison et de repérer des facteurs liés aux difficultés d'apprentissage. Une expérimentation a été menée par une enseignante avec les élèves les plus en difficulté. Elle a montré qu'une aide conduisant les élèves à mettre en relation plusieurs traitements des nombres dans différentes situations, et à confronter les raisonnements corrects ou erronés qui justifient ces traitements s'avère une intervention efficace pour qu'ils surmontent leurs difficultés.

Mots-clés. Nombres décimaux, représentations des nombres, comparaison des nombres, difficultés d'apprentissage, pratiques enseignantes.

Introduction

Les nombres décimaux sont indispensables au citoyen pour connaître ou estimer la valeur d'un bien, la mesure d'une longueur ou d'une surface, etc. Ils sont les seuls nombres à être affichés par les calculatrices destinées au grand public. Les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux ont produit des connaissances sur les représentations et les procédures des élèves (Brousseau, 1983, Comiti & Neyret, 1979, Grisvard & Léonard, 1981, 1983, Perrin-Glorian, 1986), des ingénieries d'enseignement (Brousseau, 1981, Douady & Perrin-Glorian) et des analyses des pratiques enseignantes (Bolon, 1995, Roditi, 2005).

Les programmes français d'enseignement ont évolué quant aux nombres décimaux. Leur enseignement n'est plus, comme il l'a été, indépendant de celui des nombres rationnels, avec pour seule représentation celle de l'usage social, ce qui avait pour conséquence de faire obstacle à la conceptualisation. Il n'est pas postérieur à celui des fractions et des nombres rationnels, mais il n'en est pas indépendant car les fractions décimales sont introduites très tôt dans l'enseignement. Les commissions d'élaboration des programmes connaissent les recherches et leurs résultats. Elles les prennent en compte, au moins partiellement. Pourtant, les évaluations nationales à l'entrée dans l'enseignement secondaire montrent des difficultés d'apprentissage persistantes des élèves (11 ans). En nous appuyant sur des travaux antérieurs, y compris parmi ceux qui concernent la comparaison des nombres entiers, nous cherchons à mieux comprendre les traitements mis en œuvre dans l'activité de comparaison des nombres décimaux. Nous cherchons aussi à identifier, par des analyses croisées, des relations entre les difficultés à effectuer des comparaisons et les difficultés à effectuer d'autres tâches portant sur les nombres. À partir des résultats obtenus, nous avons conçu un scénario utilisable par les enseignants pour aider leurs élèves à surmonter leurs difficultés. Ce scénario a été expérimenté, nous en proposons ici une évaluation¹.

Dans la première partie de ce texte nous indiquons nos cadres de référence ainsi que les résultats des travaux qui nous conduisent à admettre certaines hypothèses quant à la connaissance du nombre, qu'il soit entier ou décimal, mais aussi à en poser de nouvelles, à tester cette fois, au sein d'une problématique générale concernant les difficultés d'apprentissage des nombres décimaux et les aides qui pourraient être apportées aux élèves qui les rencontrent. Dans la deuxième et la troisième partie nous traitons respectivement des difficultés et des aides : nous spécifions la problématique, nous explicitons la méthodologie adoptée et nous indiquons les résultats obtenus. Nous discutons enfin ces résultats pour en montrer la portée et en indiquer les limites, tant sur la comparaison des nombres décimaux que sur le scénario d'aide que les enseignants pourraient adopter.

1. Cadres et travaux de référence, problématique générale

1.1. La double approche des pratiques enseignantes

Les aides qu'apporte l'enseignant en classe font partie de sa pratique professionnelle. Il nous semble indispensable de les considérer au sein de la globalité de sa pratique, en effet, en référence à la double approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes (Robert & Rogalski, 2002) nous admettons que les pratiques sont à la fois complexes et cohérentes et que cela leur

¹ Cette recherche doit beaucoup à Florence MONFRINI – CRÉPIN que je remercie vivement.

confère une grande stabilité après quelques années d'exercice. Nous avons donc choisi, pour proposer de nouvelles formes d'aides aux enseignants, non seulement de concevoir ces aides en fonction des résultats concernant les élèves et leur apprentissage, mais aussi de les concevoir avec des enseignants, en fonction de leurs pratiques.

Quelques précisions sur ce que recouvre ici l'expression « pratiques enseignantes ». Nous en distinguons cinq composantes dans nos analyses. Les composantes *cognitive* et *médiative* concernent les mathématiques proposées aux élèves et les formes de travail effectives avec les élèves (notamment les aides). Les composantes *institutionnelle*, *sociale*, *personnelle* concernent des déterminants des pratiques, intérieurs ou extérieurs à la classe, qui à la fois contraignent et soutiennent l'enseignant dans son travail. Il s'agit par exemple, pour illustrer ces trois composantes, des programmes et des moyens horaires d'enseignement, des normes professionnelles quant à l'organisation de l'enseignement et la gestion d'une classe, des conceptions de l'enseignant quant aux mathématiques, à leur apprentissage et à leur enseignement. Notre approche des pratiques enseignantes est double car nous les considérons à la fois pour leur contribution à l'apprentissage des élèves, et pour les réponses qu'elles apportent contraintes personnelles et professionnelles.

1.2. Cadres et travaux concernant l'apprentissage des mathématiques

Dans la théorie des champs conceptuels, Vergnaud définit un concept par les situations qui lui donnent du sens (la référence), les invariants sur lesquels repose l'efficacité des schèmes (le signifié), et les formes langagières et non langagières qui lui sont associées (le signifiant). Selon cette théorie, pour tout sujet, le concept de nombre réfère donc aux situations qu'il a rencontrées, situations dont le traitement fait intervenir des nombres. Des situations de dénombrement, de mesure ou de comparaison, ou encore des situations plus complexes conduisant par exemple à composer ou à comparer des mesures de grandeurs et nécessitant d'effectuer des calculs.

Les didacticiens des mathématiques et notamment Brousseau (1998) ont renouvelé la notion de situation en lui conférant en particulier une dimension cognitive. Une situation didactique est ainsi une situation problématique, et le savoir mathématique, éventuellement à construire par l'élève, à adapter ou plus simplement à utiliser, est un moyen de résoudre le problème que pose la situation. Lors de sa construction, le savoir n'est pas reconnu comme tel dans la classe, il est *contextualisé*. C'est la *décontextualisation* qui permet d'identifier le savoir indépendamment de la situation didactique qui a permis sa construction en classe. En référence à Brousseau, et en élargissant ces termes à toutes les tâches

mathématiques proposées aux élèves, nous distinguons dans ce texte, les tâches où les nombres à comparer sont contextualisés de celles où ils ne le sont pas.

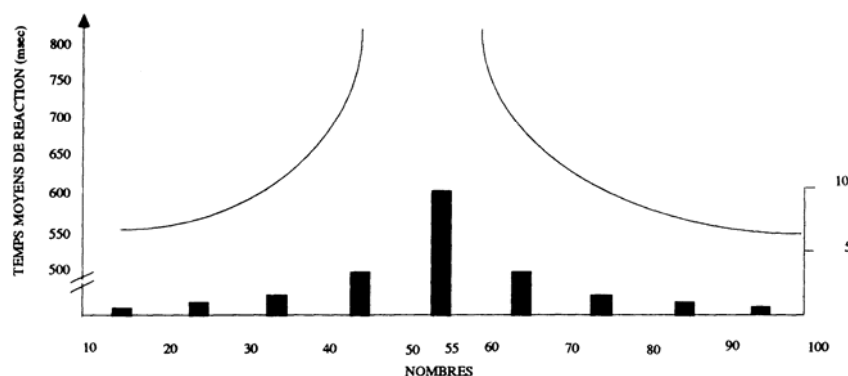
Le cadre de la didactique des mathématiques est notre référence majeure quant à l'apprentissage des mathématiques, nous reprenons les hypothèses généralement admises dans ce champ scientifique. Nous supposons que l'apprentissage dépend des situations étudiées, en classe notamment, pour le contenu mathématique qu'elles comportent, mais aussi pour l'organisation de la rencontre entre l'élève et le savoir. Afin d'analyser cette organisation, nous repérons les dynamiques ancien / nouveau (notamment dans le passage des nombres entiers aux nombres décimaux), les dialectiques outil / objet des savoirs (Douady, 1986), les dynamiques contextualisations / décontextualisation (au sens défini précédemment par référence à Brousseau), les registres de représentations des nombres et les changements qui sont proposés (Duval, 1995). Concernant plus précisément les tâches proposées aux élèves nous repérons la responsabilité mathématique qui lui est réservée (ce que Chevallard, 1999, désigne par le *topos* de l'élève) et nous utilisons pour cela les outils d'analyse de tâches développés par Robert (2005). Nous appuyant sur les travaux de Vygotski (1985), nous supposons également que les médiations jouent un rôle important dans l'apprentissage, notamment les aides individuelles ou collectives pour orienter ou réorienter la réflexion des élèves, en distinguant celles qui visent la réalisation de la tâche proposée de celles qui visent directement l'apprentissage, par exemple l'organisation des connaissances mathématiques.

1.3. Références concernant les nombres et leur apprentissage

Les premières recherches concernant l'acquisition du nombre par l'enfant ont montré que le nombre se construit à la fois suivant ses deux aspects cardinal et ordinal : à la fois le nombre dit combien et se situe par rapport aux autres nombres. MELJAC (2001) explique à ce propos la pensée de Piaget exprimée dans le paragraphe ultime de *La genèse du nombre* : « le nombre doit être appréhendé comme la synthèse de la relation symétrique (égalité) et des différences (relations asymétriques) ... Il s'élabore progressivement grâce à ce que Piaget a appelé l'abstraction réfléchissante. » Des travaux plus récents sur l'apprentissage des entiers montrent l'importance de distinguer les aspects sémantiques (valeur) et syntaxiques (notation) (Perret, 1985) en ce qui concerne les formes langagières associées aux nombres. Newman & Berger (1984) d'une part et DeBlois (1996) d'autre part ont montré que certains enseignements contribuent à développer respectivement un jugement sur la numérosité, et une idée de distance entre les nombres dans des activités de comparaison. Par ailleurs, Collet (2003) a montré l'influence des systèmes de représentation des nombres (orale, décimale, iconique) sur leur conceptualisation.

Les recherches sur les conceptions et les procédures des élèves quant aux nombres décimaux, ont établi que, pour certains élèves, tout se passe comme s'ils traitaient les nombres décimaux comme des couples de deux entiers séparés par une virgule. Constatant par exemple que des enfants écrivent $1,38 < 1,275$, Comiti & Neyret (1979) montrent que l'enseignement favorise l'idée selon laquelle les décimaux sont constitués d'une partie entière et d'une partie fractionnaire qui se traitent comme des entiers. Grisvard & Léonard (1981) ont montré que d'autres élèves écriraient au contraire que $1,38 > 1,475$ en mobilisant une règle implicite selon laquelle la partie décimale est d'autant plus petite que le nombre de ses chiffres est grand. Brousseau (1980) évoque aussi des erreurs de calcul issues d'un traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale comme $2,3 \times 2,3 = 4,9$. Perrin-Glorian (1986) a montré que certains élèves devant représenter 2,3 mobilisent ce qu'elle nomme une conception « galette » des fractions et des décimaux et représentent une galette circulaire séparée en deux parties par un diamètre horizontal où la partie supérieure est partagée en deux et où la partie inférieure est partagée en trois parts, ces parts n'étant même pas équivalentes.

Des travaux menés en psychologie, rappelés par Fayol (1990) dans sa synthèse *L'enfant et le nombre*, ont montré que lorsqu'un contenu est organisé linéairement par une relation d'ordre (ordre des nombres, des lettres ou des événements), toute tâche de jugement portant sur l'ordre de deux éléments de ce contenu fait apparaître un effet dit de « distance symbolique ». Il faut ainsi plus de temps pour comparer 53 et 55 que pour comparer 82 et 55. Hinrichs, Yurko et Hu (1981) ont mesuré le temps de réaction et les erreurs commises dans une tâche de comparaison de nombres variables au nombre fixe 55. Ils obtiennent des résultats représentés par le graphique suivant où figurent la courbe de tendance du nuage des points représentant les temps de réaction obtenus et le diagramme en barres représente les taux d'erreurs moyens.



De tels résultats montrent que pour comparer deux nombres entiers à deux chiffres, l'activité d'un sujet ne se décrit pas par un algorithme syntaxique selon lequel on commence par comparer les chiffres de dizaines puis, en cas d'égalité, on compare les chiffres des unités. En effet, sous une telle hypothèse, les temps de réponse ne devraient pas différer significativement en comparant par exemple 28, 47 ou 89 à 55 (le seul traitement des dizaines suffit), ils devraient en revanche différer significativement pour comparer par exemple 52 à 55 (deux traitements nécessaires : comparaison des dizaines puis des unités).

Ces travaux et d'autres menés en neuropsychologie ont amené Dehaene & Cohen (1995) à élaborer un modèle anatomo-fonctionnel appelé « modèle du triple code » selon lequel les nombres sont représentés dans le cerveau par un code visuel permettant la lecture et l'écriture des nombres, un code verbal pour les entendre et de les dire, et un code analogique pour en connaître la magnitude. Dehaene & Cohen interprètent l'effet de distance symbolique entre les nombres par l'utilisation du code analogique. Selon lui, pour comparer les nombres, les sujets mettent en œuvre un traitement sémantique lié à la magnitude et non un traitement syntaxique. Il n'y a pas, à notre connaissance, d'étude qui permettrait de confirmer ou d'infirmer ce type de résultats quant à la comparaison des décimaux.

Ces résultats portent donc sur les procédures mises en œuvre par des personnes qui ont appris à comparer des entiers et pour lesquelles cette activité ne pose pas de problème. Ils peuvent donc être utilisés pour élucider des éléments du fonctionnement normal d'un sujet ou pour faire état de ses difficultés par comparaison avec la norme. Ils ne nous aident pas en revanche à comprendre comment s'acquièrent ces éléments qui constituent ce fonctionnement normal. Dans le modèle du triple code de Dehaene & Cohen en effet, les nombres ne réfèrent ni aux situations qu'ils permettent de traiter, ni aux schèmes mis en œuvre dans ces traitements ; on est loin de la théorie développementale piagétienne. Ainsi, depuis près d'un siècle, la recherche a accumulé une importante somme de savoirs sur le concept de nombre et sa construction, elle a produit des théories en partie complémentaires et contradictoires. L'analyse et l'interprétation des erreurs, qui sont indispensables pour aider les élèves à surmonter leurs difficultés, dépendent pourtant fortement de ce qui est retenu dans le modèle théorique convoqué pour mener ces analyses et ces interprétations. Comme nous l'avons déjà écrit (Roditi, 2005), « le chantier important qui conduira à une articulation de ces modèles reste encore ouvert ». Cela impose à chaque chercheur d'indiquer précisément ce qu'il retient pour mener ses analyses.

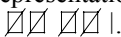
1.4. Hypothèses admises et problématique générale de la recherche

En nous référant aux résultats des travaux que nous avons cités, menés en didactique des mathématiques et en psychologie, nous supposons que l'aspect

sémantique des nombres décimaux porte à la fois sur la valeur exacte du nombre et sur ses approximations. Nous admettons que connaître un nombre, c'est connaître non seulement sa valeur avec ses différentes représentations (orale, iconique, numérale et numérique²), mais aussi le situer par rapport aux autres, y compris dans des situations où le nombre est une mesure. Rejoignant l'analyse de Adjage et Pluvinage (2007) concernant les nombres rationnels, nous considérons que la connaissance d'un nombre décimal est complexe et suppose à la fois de pouvoir le mobiliser dans ses différentes situations de référence, de pouvoir l'utiliser dans les différents registres de représentation sémiotique, et enfin de pouvoir l'utiliser en articulant situations et représentations. Dans la réalisation d'une tâche nous tenons compte à la fois de la production consécutive à la réalisation de la tâche et de la réflexion qui accompagne cette réalisation.

Trois groupes de questions structurent la deuxième partie de l'article suivant. Le premier groupe porte sur l'identification de procédures mises en œuvre dans la comparaison des nombres décimaux. Il s'agit notamment de savoir si, comme dans le cas de la comparaison des nombres entiers, on identifie un effet de distance dans les tâches de comparaison des nombres décimaux ou si, dans ce cas précis, le traitement syntaxique de l'écriture décimale est la procédure dominante. La deuxième question est celle de l'évolution favorable ou défavorable des difficultés avec l'âge : les élèves qui ne suivent plus d'enseignement des nombres décimaux progressent-ils spontanément du fait de la diversité des situations sociales où ils les rencontrent ou au contraire les difficultés rencontrées à l'école se renforcent-elles une fois quittée l'école ? Le troisième groupe de questions porte sur les relations entre la capacité à comparer les nombres décimaux et la capacité à les reconnaître ou à les représenter à l'aide de différentes représentations (numérale verbale ou numérique décimale et fractionnaire) et dans différentes situations, par exemple avec de la monnaie, sur une graduation ou par une fraction de surface.

L'objectif de la recherche est, rappelons-le, de mieux comprendre les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves pour comparer des nombres décimaux, afin de concevoir un scénario d'aide qui pourrait leur être apportée et qu'ils puissent ainsi les surmonter. C'est en fonction des résultats obtenus et de leur interprétation d'une part, et d'éléments concernant les pratiques des enseignants d'autre part, qu'a été élaboré le scénario d'aide aux élèves en difficulté. Il a été expérimenté et nous en proposerons une description et évaluation dans la troisième partie.

² En français, la représentation orale du nombre composé de deux dizaines et d'une unité est « [vɛ̃tœ̃] », sa représentation numérale est « vingt et un » et sa représentation numérique est 21. Une représentation iconique de ce nombre est par exemple : .

2. Procédures et difficultés dans la comparaison des décimaux

Dans cette partie, nous abordons les questions que nous venons d'indiquer sur les procédures de comparaison des nombres décimaux et sur les difficultés que rencontrent les élèves, la partie suivante est consacrée au scénario d'aide. La méthodologie relative à cette partie de la recherche repose sur deux questionnaires. Le premier, informatisé et chronométré, a été soumis à des adultes : ils devaient comparer un nombre décimal variable à un nombre fixe. Les temps de réponses seront interprétés pour rendre compte d'un éventuel « effet distance » dans cette activité. Le second questionnaire a été proposé à 400 élèves âgés de 10 à 25 ans. Il porte sur des activités de comparaison de nombres décimaux, dans des contextes de mesure ou en dehors. Il propose aussi des tâches de reconnaissance et de représentation des nombres décimaux. Les analyses des réponses aux questions permettront de retrouver les résultats des recherches antérieures, les analyses croisées des réponses permettront d'interpréter les difficultés des élèves et de suivre leur évolution avec l'âge.

2.1. Effet distance dans la comparaison des décimaux, interprétations

En nous inspirant de la tâche de comparaison d'un nombre entier au nombre 55, nous avons conçu une épreuve de comparaison d'un nombre variable décimal à un nombre fixe. Cette épreuve chronométrée a été passée par 40 adultes qui n'avaient pas de difficulté pour comparer des décimaux.

2.1.1. Choix des nombres décimaux

Nous voulions proposer des nombres décimaux inférieurs ou supérieurs au nombre fixé, sans que la partie entière soit déterminante. Revient-il au même de comparer 19,35 à 19,72 que de comparer 0,35 à 0,72 ? Si c'est la différence entre les nombres qui est le facteur déterminant, ces comparaisons sont équivalentes, si c'est plutôt leur rapport, alors ces deux comparaisons ne le sont pas. En effet la différence relative entre 19,72 et 19,35 est inférieure à 2% alors que celle entre 0,35 et 0,72 est supérieure à 100%. Cette question relative à la proximité des nombres a déjà été rencontrée lors d'une de nos recherches précédentes où nous demandions à des élèves de placer la virgule au produit de deux décimaux en utilisant les ordres de grandeur de ces nombres (Roditi, 2000). Pour ces raisons, nous avons choisi comme nombre fixe, un nombre de partie entière nulle situé approximativement à égale distance de 0 et 1. Nous n'avons pas choisi 0,5 qui n'a qu'une décimale, nous avons évité 0,55 à cause de la répétition des 5, nous avons finalement choisi 0,56. Il nous a ainsi été possible de le comparer aussi bien à des valeurs supérieures qu'à des valeurs inférieures (valeurs comprises entre 0 et 0,56), en faisant varier de manière importante les différences relatives, tout en gardant des nombres ayant la même partie entière.

La liste de nombres à comparer à 0,56 a été élaborée afin de tester l'effet de distance. Nous avons donc choisi des nombres proches et d'autres plus éloignés de 0,56, par valeur inférieure et supérieure. Nous avons choisi des nombres inférieurs à 0,56 (par exemple 0,097) puis pour chacun d'entre eux nous avons adjoint à la liste le nombre symétrique par rapport à 0,56 (avec le même exemple 0,097 nous avons adjoint 1,023 car $0,56 = (0,097 + 1,023) / 2$) ainsi que le nombre dont le rapport à 0,56 est le même que celui de 0,56 au nombre choisi (avec le même exemple 0,097 nous avons adjoint 3,23 car $3,23/0,56 = 0,56/0,097$). Sans contredire ce principe, nous avons parfois réduit le nombre de décimales pour que les nombres proposés restent comparables quant à leur lisibilité. La liste des nombres ainsi établie est donnée en annexe.

2.1.2. Déroulement de l'épreuve de comparaison

Quarante adultes âgés de 25 à 60 ans ont répondu à notre questionnaire. L'épreuve de comparaison s'est déroulée à l'aide d'un programme informatique qui a été élaboré à cette fin. Comme le montre la copie d'écran ci-contre, le nombre de référence 0,56 est affiché en permanence. Les nombres à lui comparer apparaissent en dessous. Le sujet



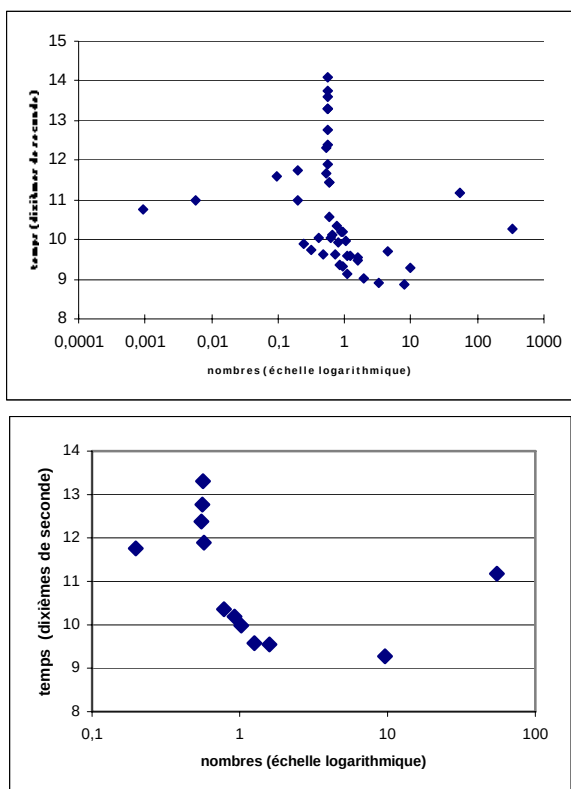
doit alors appuyer sur la touche « A » si le nombre qui apparaît est inférieur à 0,56 et sur la touche « P » si ce nombre est plus grand. Ces touches ont été ainsi choisies, parce qu'elles se situent respectivement à gauche et à droite du clavier, conformément à l'orientation conventionnelle de l'axe numérique. Des travaux antérieurs ont montré que la latéralité des sujets est sans influence sur le temps de réponse.

Les nombres apparaissent trois fois chacun au cours de l'épreuve et dans un ordre aléatoire, de manière à ce que la variation des temps de réponse ne soit pas imputable à l'ordre d'apparition des nombres. Le programme mesure le temps (en dixièmes de seconde), entre l'apparition du nombre sur l'écran et la réponse du sujet. Les temps correspondant à des réponses inexacts n'ont pas été retenus.

2.1.3. Des résultats qui affinent ceux trouvés sur les nombres entiers

Le premier graphique représente des temps moyens de réponse pour chaque nombre proposé. Malgré les irrégularités que nous allons interpréter, l'allure générale confirme l'existence d'un effet distance dans la comparaison des nombres

décimaux : lorsque les valeurs s'éloignent du nombre de référence, les temps de réactions diminuent. Pour proposer des nombres de plus en plus proches de 0,56, il a fallu augmenter le nombre de décimale ; en supposant un traitement syntaxique important dans la procédure de comparaison, on pourrait interpréter le graphique en affirmant le nombre de décimales des nombres à comparer à 0,56 explique l'allongement du temps de réponse au voisinage de 0,56. Mais le second graphique qui représente les temps moyens de réponse pour chaque nombre dont la partie décimale comporte trois chiffres réfute cet argument et conduit à admettre un effet distance.



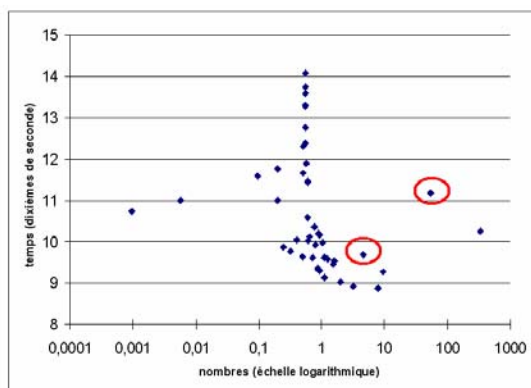
Néanmoins, l'impact du nombre de décimales n'est pas négligeable, il explique certaines irrégularités du graphique. Citons par exemple quelques valeurs éloignées de 0,56 où apparaissent en caractère gras les décimaux dont le nombre de décimales est différent de deux et pour lesquelles on constate une augmentation du temps de réponse ³.

Nombres à comparer à 0,56	0,64	0,72	0,784	0,8	0,87
Temps de réponse (1/10 s)	10,1	9,6	10,4	9,9	9,4

On remarque ensuite les temps de réponse moyens correspondant au plus grand nombre (330,11) comme aux plus petits (0,00095 et 0,0057) sont assez élevés,

³ Dans le tableau suivant, la différence entre deux moyennes consécutives est significative au seuil de 5%.

on peut penser que le nombre de chiffres à lire est un facteur explicatif. On remarque enfin deux irrégularités (entourées dans le graphique ci-contre) qui correspondent aux nombres 4,55 et 55,017. Nous supposons que le « 55 », figurant dans les écritures chiffrées de ces deux nombres, perturbe la comparaison. En effet, bien que 55 soit inférieur à 56, ces deux nombres sont supérieurs à 0,56. Une recherche complémentaire pourrait étudier de manière plus approfondie l'impact de la perception visuelle des nombres sur la prise de sens.



En conclusion, il apparaît que le temps de réponse subit des variations autour d'une tendance générale liée à l'effet distance. Ces variations proviennent de différents facteurs comme le nombre de chiffres des décimaux à comparer ou le nombre de leurs décimales. Le seul traitement sémantique lié à la magnitude repéré dans la comparaison des entiers apparaît comme une conséquence des choix expérimentaux : en restreignant les comparaisons à des nombres entiers à deux chiffres, le facteur issu du traitement syntaxique lié au nombre de chiffre a été fixé. L'effet distance n'est donc pas le seul facteur explicatif du temps de réponse, il apparaît plutôt que dans une activité de comparaison, un traitement sémantique est mis en œuvre simultanément à un traitement syntaxique qui permet la lecture des nombres. C'est l'hypothèse que nous adoptons, et qui nous permet de suggérer une piste interprétative des difficultés des élèves : les méthodes enseignées pour comparer les nombres décimaux convoquent le plus souvent un traitement syntaxique des écritures décimales, sans doute la plupart des élèves se représentent ce faisant les nombres à comparer de manière suffisante pour effectuer la comparaison, mais certains d'entre eux focalisent sur le traitement syntaxique et se retrouvent en difficulté pour comparer des nombres décimaux.

2.2. Étude de facteurs de difficulté à comparer des décimaux

Le deuxième questionnaire a pour objectif de repérer les élèves en difficulté pour comparer des nombres décimaux et de croiser ces difficultés avec différents facteurs dont certains ont déjà été soulignés dans les travaux antérieurs. Les autres facteurs nous sont inspirés par nos choix théoriques, ils concernent notamment les situations qui donnent du sens aux décimaux, et les registres de représentation des nombres. Les facteurs étudiés sont bien sûr les procédures utilisées dans les comparaisons de décimaux donnés hors contexte, le fait que les décimaux soient ou

non donnés dans un contexte qui donne du sens aux nombres, la capacité à reconnaître ou à représenter des décimaux dans différents contextes ou à passer d'un registre de représentation à un autre. Nous étudions aussi l'effet du facteur âge sur la réussite aux tâches de comparaison pour savoir si une fois quittée l'école, les élèves rencontrent dans la vie courante suffisamment de situations où la comparaison de décimaux est nécessaire pour acquérir finalement cette compétence. Ou si au contraire certains élèves restent toujours en difficulté dans cette activité.

Au total 51 questions composent le questionnaire, elles étaient suffisamment faciles pour ne pas décourager les élèves ; 39 portent directement sur la comparaison de deux ou plusieurs nombres décimaux, dont 28 hors contexte, et 12 portent sur les registres de représentation des décimaux. Parmi les 28 hors contexte, 8 questions portent sur la comparaison de deux décimaux donnés oralement.

2.2.1. Choix des élèves interrogés, résultats globaux

Le choix des élèves interrogés est fonction des programmes d'enseignement des nombres décimaux : introduction au CM1 et approfondissement en 4^e avec les puissances de 10. Nous avons questionné des élèves de CM2, 6^e et 5^e (10 à 12 ans pour les élèves sans retard scolaire) ainsi que des élèves de lycée professionnel (16 à 21 ans pour les élèves sans retard scolaire). Nous n'avons interrogé aucun élève de CM1 ou de 4^e pour éviter que les résultats soient influencés par les choix de progression de l'enseignement de leur enseignant. Les élèves de lycée professionnel sont de jeunes adultes, ils ont été choisis afin d'étudier l'effet du facteur âge sur la capacité à comparer des décimaux, sans suivre l'évolution des performances d'une même population durant plusieurs années. L'orientation des élèves en lycée professionnel s'effectue généralement lorsqu'ils sont en difficulté dans l'enseignement secondaire, nous supposons donc que ceux que nous avons interrogés n'étaient pas parmi les élèves les moins en difficulté quand ils avaient de 10 à 12 ans. Au total 402 élèves ont été interrogés dont une centaine par niveau scolaire.

Dans le domaine que nous étudions, la réussite seule n'est pas un critère satisfaisant puisque des réponses correctes peuvent être obtenues avec des démarches erronées. Indiquons néanmoins que sur les 39 questions de comparaison, la réussite moyenne de l'ensemble des élèves interrogés est de 34,2 avec un écart-type de 4,9. Le groupe dont le nombre de réussites est faible (inférieur à la moyenne moins un écart type) comporte 58 élèves, sa composition est donnée par le tableau suivant.

Niveau	CM2	6 ^e	5 ^e	LP	Ensemble
Effectif total	92	117	86	107	402
Groupe faible	24	17	11	6	58
Fréquence	26%	15%	13%	6%	14%

2.2.2. Effet de l'âge « scolaire » sur la réussite aux tâches de comparaison

Afin de rendre compte de l'évolution avec l'âge de la réussite aux tâches de comparaison, nous considérons les quatre groupes d'élèves constitués par le niveau scolaire (CM2, 6^e, 5^e, LP). Le tableau ci-dessous indique l'âge moyen au sein de chaque niveau au moment de la passation du questionnaire et le nombre moyen de réussite aux 39 questions de comparaison.

Niveau	CM2	6 ^e	5 ^e	LP
Âge moyen	10 ans 7 mois	11 ans 6 mois	12 ans 8 mois	18 ans 10 mois
Réussite moyenne m	31,90	33,93	34,64	36,33

On constate que le nombre moyen de réussite est croissant. Un test d'analyse de la variance au seuil de 1% confirme que les réussites moyennes des quatre groupes sont significativement différentes. Nous concluons donc à une amélioration de la comparaison des nombres décimaux avec l'âge « scolaire », et cela bien que les plus âgés aient été choisis dans un type d'établissements qui regroupent des élèves en difficulté d'apprentissage.

Poursuivons l'analyse afin d'évaluer la présence éventuelle d'élèves en difficulté parmi les plus âgés. Nous considérons comme étant en difficulté les élèves de lycée professionnel qui appartiennent au groupe dont le nombre de réussites aux tâches de comparaison est faible. C'est le cas pour 6% d'entre eux. Ainsi, même si le développement et l'expérience des personnes apparaissent comme des facteurs favorables, ils ne sont pas suffisants pour résorber les difficultés.

2.2.3. Règles utilisées pour comparer deux décimaux

Les questions de comparaison de deux décimaux sont posées pour retrouver les résultats des travaux antérieurs et pour les croiser avec deux facteurs : la présence ou non d'un contexte, et l'aptitude à passer d'un registre de représentation des décimaux à un autre. Les « règles implicites » fréquemment utilisées par les élèves pour comparer deux décimaux (dans le cas difficile où les parties entières sont égales et où les parties décimales n'ont pas le même nombre de chiffres) ont déjà été élucidées :

- R1 : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale est la plus petite ;
- R2 : le plus petit nombre est celui dont la partie décimale a le plus de chiffres ;
- R3 : si la partie décimale d'un des nombres a pour premier chiffre 0, c'est le plus petit.

Parmi les douze questions portant sur la comparaison de deux décimaux donnés par écrit, six conduisent à l'erreur en cas de mise en œuvre de la règle R1. Le nombre d'élèves qui commettent une erreur à ces questions varie, suivant les questions, de 20 à 35, c'est-à-dire représente 5% à 9% des élèves interrogés. Parmi les 58 élèves du groupe dont le nombre de réussite est faible, le nombre d'erreurs imputables à R1 varie de 20 à 35, c'est-à-dire concerne 34% à 60% des élèves. Trois questions conduisent à l'erreur en cas de mise en œuvre de la règle R2 ; le nombre d'erreurs à ces questions varie de 11 à 14, et concerne donc 3% des élèves environ. Les trois autres questions portent sur des nombres dont les parties entières étaient différentes. Sur les 58 élèves du groupe faible, les erreurs imputables à R2 varient de 9 à 11 et concernent donc 16% à 19% d'entre eux. Parmi les six questions conduisant à l'erreur en cas d'application de la règle R1, trois questions permettaient de réussir en appliquant la règle R3. Pour suspecter une utilisation de R3 comme amélioration de R1, nous avons déterminé les élèves qui se trompent aux trois questions où R1 conduit à l'erreur et réussissent néanmoins les trois questions où l'application de R3 permet de réussir. On obtient sept élèves (2%) dans ce cas, dix (3%) si l'on accepte une exception à cette combinaison de réponses et vingt-trois (6%) si l'on en accepte deux.

Les résultats confirment donc une utilisation des règles R1, R2 et R3 par certains élèves, pas forcément de manière systématique d'ailleurs. La règle R2 n'a pas jamais été utilisée par les élèves de lycée professionnels. Tout se passe comme si cette règle se construisait pendant l'enseignement, pour pallier les erreurs commises en utilisant la règle R1, mais qu'elle disparaissait une fois quittée l'école. En revanche sur les sept élèves qui utilisent R3 pour améliorer R1, on en trouve quatre en lycée professionnel.

2.2.4. Effet de la présentation orale ou écrite des nombres décimaux

En plus des douze questions de comparaisons de deux nombres décimaux donnés par écrit, huit questions proposent de comparer deux nombres donnés oralement, la consigne étant toujours de repérer le plus grand des deux. La comparaison des résultats montre que la présentation orale accroît la difficulté de la comparaison. Le pourcentage de réponses erronées passe de 5,1% lorsque les nombres sont donnés par écrit à 11,1% lorsqu'ils sont donnés oralement. Un test de comparaison des proportions au seuil de 1%, effectué selon la méthode du khi-2, confirme cette

différence. Il en est de même pour les 58 élèves du groupe faible : le pourcentage d'erreurs dans ce groupe passe de 29,2% lorsque les nombres sont donnés par écrit à 41,4% lorsqu'ils sont donnés oralement.

De ces résultats nous tirons une hypothèse pour la conception du scénario d'aide à apporter aux élèves en difficulté, les aides ne seront pas données seulement oralement, les discours de l'enseignant seront accompagnés de supports visuels, notamment pour communiquer sur les nombres décimaux.

2.2.5. Effet du contexte donnant du sens aux nombres à comparer

Pour certains décimaux dont la comparaison est demandée hors contexte, des questions portent sur leur comparaison dans un contexte qui donne du sens aux nombres, même si l'usage social n'est pas respecté : une longueur ou un prix avec une seule décimale, par exemple. Une question porte ainsi sur la comparaison hors contexte de 14,17 et 14,036 ; une autre est posée dans un contexte : « Léa et Manu comparent leurs moyennes. Celle de Manu est 14,17 et celle de Léa est 14,036. Qui a la meilleure moyenne ? » Une question porte sur la comparaison hors contexte de 1,21 et 1,4 ; une autre est posée dans un contexte : « Manu mesure 1,21 m. Léa mesure 1,4 m. Qui est le plus grand ? » Au total neuf questions hors contexte sont appariées à neuf questions en contexte.

La variation de réussite aux comparaisons de deux décimaux suivant que la question est posée hors contexte ou en contexte, montre que le contexte ne change pas totalement la difficulté rencontrée dans les tâches de comparaison. Néanmoins, on remarque un effet différent suivant que les élèves appartiennent au groupe faible ou non.

	Nombre d'erreurs		Fréquence des erreurs	
	Hors contexte	En contexte	Hors contexte	En contexte
Ensemble (402)	175	240	4,8%	6,6%
Groupe faible (58)	127	109	24,3%	20,8%
Groupe non faible (344)	48	131	1,5%	4,2%

Ainsi les élèves dans leur ensemble commettent plus d'erreurs dans les comparaisons en contexte que dans les comparaisons hors contexte. Les élèves du groupe faible commettent à peu près autant d'erreurs dans les comparaisons en contexte que dans les comparaisons hors contexte (pas de différence significative au seuil de 5%). Ce sont donc les élèves les moins en difficulté qui sont le plus gênés par les comparaisons en contexte, pour lesquelles ils commettent près de trois fois plus d'erreur. Un test d'indépendance selon la méthode du khi-2 au seuil

de 1% confirme que les résultats des élèves du groupe faible sont significativement différents de ceux des autres.

L'interprétation de ces résultats contrastés est difficile, il apparaît que l'accès au sens du nombre ne s'effectue pas de la même façon pour tous les élèves. Deux hypothèses pourraient expliquer cette différence :

- pour les élèves qui ne sont pas en difficulté, l'écriture suffirait à accéder au sens du nombre (combien il dit et comment il est situé par rapport aux autres) et à effectuer des comparaisons, le contexte serait alors un ensemble d'informations supplémentaires à gérer, qui pourraient parfois induire en erreur, par exemple lorsque le contexte facilite l'utilisation de règles inexactes. Pour ces élèves, comparer 1,21 et 1,4 est plus facile que comparer 1,21 m et 1,4 m parce que, comme l'ont montré de nombreux auteurs, le système des unités et des sous-unités induit une utilisation de la règle R1 ;
- pour les élèves du groupe faible, l'écriture seule ne suffirait pas à accéder au sens du nombre (peut-être pour ces élèves est-il difficile de savoir combien il dit, sans savoir de quoi). Le contexte pourrait jouer alors un rôle facilitant, mais pas suffisant pour contrer des règles implicites fortes de traitement syntaxique des écritures numériques. Les réussites ne sont, par conséquent, pas significativement plus nombreuses en contexte que hors contexte.

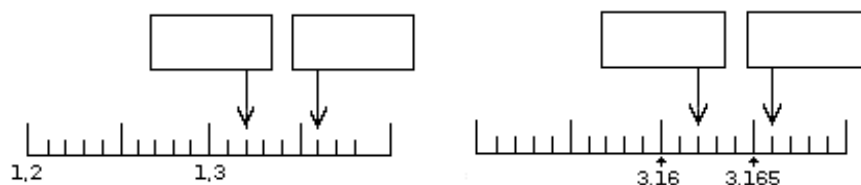
Dans la perspective d'élaboration d'un scénario d'aide aux élèves en difficulté, nous envisageons de proposer aux élèves des situations facilitant l'accès au sens des nombres et permettant simultanément de confronter ce sens à des traitements syntaxiques des écritures numériques, comme les règles R1 ou R2.

2.2.6. Croisement entre comparaison et registres de représentation

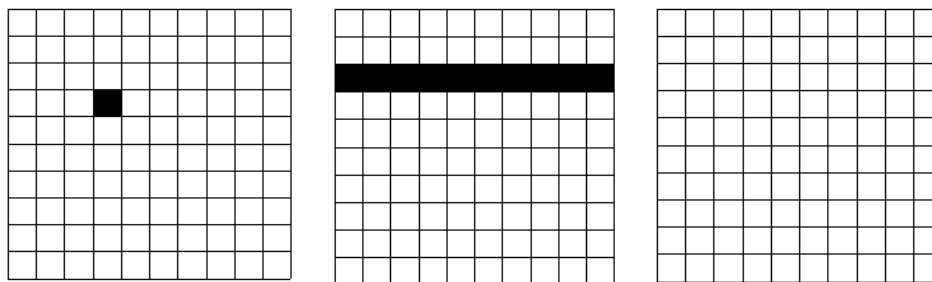
Quatre registres de représentation des nombres décimaux figurent dans le questionnaire, deux symboliques et deux graphiques.

Quatre questions proposent de passer de l'écriture à virgule à une écriture sous forme de somme de fractions décimales ou le contraire. Ainsi par exemple les élèves devaient changer 7,032 en $7 + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000}$, et $13 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100}$ en 13,83.

Trois questions demandent de lire des nombres décimaux représentés par des marques de graduation sur une droite et de les représenter par leur écriture décimale.



Dans cinq questions, un carré quadrillé représente l'unité composée de 100 centièmes. Deux questions demandent de lire un nombre décimal représenté par des petits carrés noirs (0,1 et 0,01), trois questions demandent de représenter des décimaux de manière analogue (0,3 ; 0,05 et 0,12).



Confirmant les résultats des travaux de Perrin-Glorian (1986), la réussite à cette dernière série de questions est beaucoup plus faible que celle obtenue avec les graduations. Ainsi seulement 158 élèves, soit moins de 40%, répartis dans tous les niveaux scolaires, ont répondu correctement à toutes ces questions. Ces élèves obtiennent un pourcentage de réussite très élevé aux questions comparaisons (94%) ; la capacité à utiliser ce registre de représentation apparaît comme particulièrement discriminante.

Bien que la réussite aux questions de changement de registre de représentation garantisse une bonne performance aux tâches de comparaison, nous pensons pourtant qu'il est plus intéressant d'approfondir l'étude des réponses des élèves qui ne réussissent pas particulièrement bien à effectuer les changements de registre. En effet, si ces tâches sont trop sélectives, les faire réussir par les élèves en difficulté pour qu'ils parviennent à comparer des décimaux n'apparaît pas comme un objectif réaliste. Ainsi, on ne s'étonnera pas du fait que les étudiants titulaires d'une licence de mathématiques réussissent à comparer des nombres décimaux, on n'imaginera pas non plus aider les élèves en difficulté en se proposant de leur faire acquérir ce diplôme... En revanche, on s'attendra à ce que les personnes qui ne sont pas titulaires d'une licence de mathématiques réussissent les tâches de comparaison comme l'ensemble de la population. Nous croisons donc la capacité à comparer des décimaux et les capacités à passer du registre de l'écriture décimale à celui des

fractions, des graduations et des quadrillages (ou inversement) de la manière suivante : pour chaque changement de registre de représentation, un groupe fort a été constitué par les élèves n'ayant obtenu aucun échec, et nous analysons comment les élèves qui n'appartiennent pas à ce groupe fort, réussissent aux tâches de comparaison.

En ce qui concerne les changements de registre écriture décimale $\leftrightarrow$ écriture fractionnaire, les élèves qui ne font pas partie du groupe fort réussissent sensiblement moins bien que la normale aux comparaisons de décimaux : ils sont 35% à appartenir au groupe faible, au lieu des 14% constatés sur l'ensemble de la population étudiée. Les résultats vont dans le même sens pour le changement de registre écriture décimale / représentation sur une graduation (27% dans le groupe faible au lieu de 14%) et pour le changement écriture décimale $\leftrightarrow$ représentation sur un quadrillage (23% dans le groupe faible au lieu de 14%). Ces différences de pourcentages sont significatives au seuil de 1%, d'après les tests de comparaison de proportion réalisés selon la méthode du khi-2.

La capacité à comparer les nombres n'est donc pas indépendante de la capacité à les représenter et à changer de représentation. Le fait d'avoir à comparer des nombres exprimés, ou à exprimer, par différents registres de représentation pourrait donc être favorable à l'apprentissage.

En conclusion de cette étude, trois axes sont retenus pour concevoir un scénario d'aide aux élèves en difficulté pour comparer des décimaux : proposer des situations écrites où les nombres décimaux peuvent être lus et pas seulement entendus, favoriser un traitement sémantique des écritures numériques en faisant exprimer les nombres approximativement et par différents registres de représentation, faire expliciter et critiquer des procédures de comparaison.

3. Un scénario d'aide aux élèves en difficulté pour comparer des décimaux

L'expérimentation d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté pour comparer des décimaux, par leur professeur de mathématiques, pose des problèmes méthodologiques importants : contacter suffisamment de professeurs volontaires et les associer au dispositif sur une partie spécifique et limitée du programme d'enseignement, alors que les aides peuvent être apportées à de nombreuses occasions, tout au long de l'année scolaire. L'évaluation d'un tel dispositif serait difficile à réaliser dans le contexte ordinaire d'enseignement parce que les raisons d'apprendre pour les élèves et le temps de leur apprentissage est très variable. Nous avons, pour cette recherche, choisi un autre mode d'expérimentation. Une enseignante intéressée par ces difficultés d'apprentissage et associée à la recherche, a expérimenté le dispositif d'aide avec une partie des vingt-huit élèves de collège qui ont répondu au questionnaire et qui faisaient partie

du groupe faible : ceux dont les erreurs aux comparaisons de deux décimaux donnés à l'écrit étaient massives et dont les parents et les chefs d'établissement ont accepté l'expérimentation. Finalement, onze élèves parmi les 402 ont participé à cette dernière partie de la recherche.

3.1. Description du scénario

Deux séances individuelles d'une demi-heure ont été menées avec chaque élève. Les élèves avaient à comparer des décimaux, ils devaient aussi représenter les nombres à comparer, approximativement ou précisément, et confronter leurs procédures et leurs résultats aux représentations produites d'une part, et à d'autres procédures correctes ou erronées qui leur étaient soumises. Une semaine après, post-test a été réalisé pour évaluer l'effet de ces séances.

3.1.1. Représentation des nombres décimaux

La première séance commence par un court questionnaire de comparaisons de deux décimaux, il s'agit pour l'enseignante de travailler avec l'élève à partir de ses productions. Puis, pour chaque réponse produite, l'enseignante engage l'élève à représenter les nombres comparés. Différents supports de représentation sont proposés : des pièces de monnaie (en lien avec les fractions décimales), des graduations, des carrés quadrillés comme ceux proposés au questionnaire. En outre, du papier blanc, une règle graduée et une paire de ciseaux sont mis à disposition des élèves pour conduire à la comparaison de longueurs. Afin de motiver la représentation des nombres et que l'élève l'utilise pour comparer, l'enseignante pose une question à l'élève, en fonction de sa réponse au questionnaire court du début de séance. Ces questions sont toutes prévues dans le scénario.

Lorsque l'élève s'empare du matériel pour représenter les nombres à comparer, l'enseignante suggère de commencer par une approximation. Ainsi par exemple, pour comparer 8,7 et 8,14, si l'élève choisit d'utiliser une graduation, l'enseignante incitera l'élève à dire si 8,7 est plus près de 8 ou de 9, de même pour 8,14. La réponse de l'élève n'est pas commentée : l'enseignante engage l'élève à poursuivre la représentation.

Voyons maintenant quelles sont les questions posées, c'est-à-dire comment l'enseignante motive la représentation des nombres décimaux et son utilisation pour les comparer.

3.1.2. Explicitation et critique des règles implicites de comparaison

Poursuivons avec l'exemple de la comparaison de 8,7 et 8,14 ; l'élève devait entourer le plus grand des deux nombres. Si l'élève entoure le bon nombre, l'enseignante lui dit : « *L'autre jour, un élève comme toi avec qui je travaillais, m'a dit que comme 7 était plus petit que 14, 8,7 était plus petit que 8,14. Qu'est-ce*

que tu en penses ? Comment pourrais-tu faire pour voir qui a raison avec le matériel qui est là ? » Si l'élève a entouré le mauvais nombre, l'enseignante cherche d'abord à faire expliciter la procédure de l'élève puis l'amène à représenter les nombres et à utiliser ses représentations pour raisonner. Si l'élève n'arrive pas bien à expliciter sa démarche, l'enseignante lui suggère la règle implicite qu'il a certainement utilisée : « *Un élève m'a expliqué que comme 7 était plus petit que 14, 8,7 était plus petit que 8,14. Qu'est-ce que tu en penses ?* » Lorsque l'élève reconnaît sa démarche, l'enseignante lui propose une procédure contradictoire : « *Un autre élève, comme toi avec qui je travaillais m'a dit que 7 dixièmes c'était pareil que 70 centièmes, et que 70 étant plus grand que 14, c'était 8,7 qui était plus grand que 8,14. Qu'est-ce que tu en penses ? Comment pourrais-tu faire, avec le matériel qui est là, pour voir qui a raison ?* ».

Il ne s'agit donc pas de « refaire » le cours. À aucun moment elle ne rappelle les méthodes enseignées pour comparer deux décimaux, au contraire, elle les met en discussion en introduisant son propos par « *L'autre jour, un élève comme toi avec qui je travaillais, m'a dit que...* ». Ainsi l'élève ne peut pas préjuger l'exactitude du raisonnement proposé. Pour que l'élève accepte de s'engager dans ces tâches assez complexes, et éviter qu'il ne se sente en situation d'échec, l'enseignante choisit de travailler sur les réponses produites sans respecter l'ordre du questionnaire et commence toujours par une comparaison réussie. Sur le modèle présenté, les interventions de l'enseignante sont prévues dans le scénario et adaptées aux comparaisons et aux règles implicites qui peuvent être mises en œuvre.

Ce scénario est celui de la première séance. Durant la deuxième séance, l'enseignante propose une première série de comparaisons où l'élève doit à chaque fois utiliser le matériel avant de décider lequel des deux nombres est le plus grand, puis une série où le matériel n'est pas disponible, mais où l'enseignante demande à l'élève de se référer à une représentation autre que l'écriture décimale pour justifier sa réponse.

3.2. Justification du scénario

Dans sa conception, le scénario d'aide reprend les résultats obtenus grâce aux questionnaires soumis aux adultes et aux élèves. Dans les tâches proposées, les nombres décimaux sont écrits, et ce qui est dit est en relation avec ce qui est écrit. Les consignes données par l'enseignante favorisent un traitement sémantique reposant à la fois sur la recherche de valeurs approchées et sur le changement par registres de représentation. Les questions posées poussent les élèves à expliciter et à critiquer les procédures qu'ils utilisent pour comparer des décimaux.

Un autre type de justification nous semble essentiel : une justification par rapport au travail de l'enseignant. Si les ingénieries didactiques très complètes, construites par Brousseau (1981) ou par Douady & Perrin-Glorian (1986), ne sont pas utilisées

dans l'enseignement ordinaire, les manières d'enseigner les nombres décimaux ont tout de même évolué : les programmes ont changé de façon importante et, vingt ans après leur formulation, les propositions de Comiti et Neyret (1979) ont globalement été suivies. Les manuels scolaires sont conformes aux programmes, et le plus souvent les enseignants les suivent pour concevoir leur enseignement. Pourtant les difficultés d'apprentissage des élèves persistent... Les causes qui peuvent être évoquées sont nombreuses, l'une d'entre elles nous semble essentielle : changer l'enseignement, c'est changer les pratiques des enseignants, et les pratiques enseignantes ne se réduisent pas à la composante institutionnelle et à la composante cognitive. La composante médiative est fondamentale : les modalités de travail proposées aux élèves et les interactions verbales en classe comptent énormément dans la relation enseignement - apprentissage. Les pratiques sont aussi personnelles et sociales, elles évoluent lorsqu'un enseignant élargit l'ensemble de ses possibilités d'agir, et pour cela il faut que l'enseignant ne soit pas seul, c'est ce que nous avons montré dans Roditi (2004).

Nous avons donc élaboré un scénario d'aide parce que nous avons cherché à proposer aux enseignants des moyens d'intervenir autrement auprès de leurs élèves, tout en restant dans le cadre des programmes actuels d'enseignement des nombres décimaux, à la fois parce que c'est pour eux une obligation liée à leur métier, mais aussi parce que ces programmes semblent aujourd'hui adaptés. La modalité d'aide est particulière, elle n'est pas fréquente dans les classes : la recherche menée par Chapet-Pariès (2004) montre que les échanges verbaux des enseignants avec leurs élèves laissent peu d'initiative à ces derniers. Autrement dit, nous avons cherché à concevoir des possibilités nouvelles pour l'enseignement, en focalisant non pas sur la composante institutionnelle pour élaborer des propositions de modification de programmes, ni sur la composante cognitive pour concevoir une nouvelle situation d'enseignement-apprentissage, mais sur la composante médiative pour donner aux enseignants des moyens supplémentaires d'aider leurs élèves lorsqu'ils sont en difficulté. Pour intervenir autrement qu'en expliquant une fois de plus la leçon qui n'a toujours pas été comprise, autrement qu'en donnant la réponse ou en la faisant donner par un bon élève, pour intervenir en partant de l'activité de l'élève en difficulté (ce qu'il fait, ce qu'il dit, ce qu'il pense) et en favorisant le développement et l'organisation de ses connaissances sur les décimaux.

Pour terminer cette justification du scénario d'aide, soulignons un dernier argument qui a été un vecteur important dans sa conception, et remercions l'enseignante pour sa contribution à l'élaboration de ces questions. Le lecteur a sans doute pensé que les questions étaient très inspirées des argumentations et contre-argumentations que PIAGET lui-même proposait dans ses entretiens avec les enfants pour évaluer, par exemple, la conservation des quantités discrètes. Nous ne contestons pas

l'inspiration, les connaissances des élèves ne se réduisent pas à ce qu'ils peuvent produire, la pensée qui accompagne cette production est importante, y compris la capacité à prendre en compte les arguments d'autrui, pour évoluer ou pour les réfuter. Les raisons qui nous ont fait choisir ces questions tiennent aussi à notre analyse du métier d'enseignant et à ses pratiques ordinaires (Roditi, 2005). Les enseignants interviennent en classe, souvent, et le plus souvent sous la forme d'un échange direct avec l'élève. Les questions élaborées pour le scénario permettent d'une part de laisser l'enseignant prendre des initiatives pour aider ses élèves et permettent aussi, dans la situation de classe, de faire intervenir les autres élèves. L'enseignant peut remplacer « *L'autre jour, un élève comme toi avec qui je travaillais, m'a dit que...* » par l'intervention d'un autre élève de la classe dont il a repéré à l'avance la production et les arguments. Avec ce type d'interventions, prévues, on échappe au modèle trop caricatural selon lequel le bon enseignant serait celui qui propose une bonne situation, et qui se tait pour laisser les élèves construire leurs connaissances par la seule réalisation des tâches proposées avec la situation. Un modèle que l'enseignant peut tenir un moment, lorsque les élèves se confrontent avec le problème mathématique, un modèle dont l'enseignant peut aussi sortir avec une autre alternative que celle du cours magistral.

3.3. Évaluation du scénario

L'enseignante a fait un bilan de ses interventions. Elle retient que la réussite à une comparaison ne prouve pas l'apprentissage et que les explications fournies, même lorsqu'elles sont correctes, sont souvent fragiles lorsqu'elles portent sur l'écriture seulement : « *je dois rajouter un zéro avant de comparer* » ou encore « *le premier chiffre après la virgule est plus grand* ». Les élèves qui ne tiennent pas compte de la partie entière pour comparer des décimaux rectifient toujours spontanément leur réponse lorsqu'elle leur demande de la justifier. Les raisonnements qui reposent sur la règle R1 du « couple d'entiers » sont clairement explicités par ceux qui se trompent et déstabilisent les autres. En revanche, la règle R2 de la longueur de la partie décimale n'est pas explicitée, mais elle est reconnue par les élèves qui l'utilisent.

En ce qui concerne le recours aux représentations des décimaux, l'enseignante a constaté que l'argent était bien manipulé par les élèves, même si la pièce de 0,1 euro n'est pas une pièce de 1 « décime » mais une pièce de 10 centimes c'est-à-dire 0,10 euro. En revanche, les représentations graphiques posaient problème pour six des onze collégiens : ils traçaient des segments de 9,4 cm pour représenter 8,14 en comptant 14 graduations après 8.

Le post-test proposait 15 comparaisons de décimaux analogues à celles des 12 questions du premier questionnaire que nous considérons ici comme un pré-test. L'évolution éventuelle du nombre moyen d'erreurs permet d'évaluer les effets de

l'aide apportée par l'enseignante. Les 11 élèves qui ont bénéficié de l'aide avaient commis 47 erreurs aux 12 questions, ce qui correspond à 35,6% de réponses fausses. Au post-test, sur les 15 questions, une seule erreur a été commise, cela correspond à 0,6% de réponses fausses. Les élèves ont donc réalisé un progrès : ils ne font pour ainsi dire plus de faute en comparant deux décimaux. Un test de comparaison de proportion au seuil de 1% a été réalisé selon la méthode du khi-2, il confirme que la différence de pourcentage est significative. Néanmoins, il est préférable de rester prudent quant à ces résultats pour plusieurs raisons qui tiennent à la méthodologie mise en œuvre. Le post-test a été réalisé seulement une semaine après les séances d'aide, les représentations évoquées lors de ces séances être encore très présentes dans l'esprit des élèves. Le déroulement du scénario d'aide a été confié à une seule enseignante, si bien qu'on ne peut exclure certains facteurs personnels qui ne sont pas pris en compte dans la recherche. Bien que tous en grande difficulté et ayant réalisé des progrès importants, le nombre d'élèves qui ont suivi le dispositif d'aide est faible, et les résultats demandent à être confirmés avec un effectif plus important. Enfin, la transposition en classe du scénario d'aide n'a pas été réalisée, et malgré le soin apporté dans sa conception pour le rendre utilisable par les enseignants, une évaluation dans les conditions ordinaires d'enseignement reste nécessaire.

Conclusions et perspectives

La procédure de comparaison des nombres décimaux ne repose pas seulement sur un traitement syntaxique de l'écriture décimale, elle repose aussi simultanément sur un traitement sémantique qui met en jeu l'ordre de grandeur des nombres à comparer. Pourtant, l'enseignement propose souvent, comme seule approche, un traitement de l'écriture numérique qui vise à comparer les chiffres de la partie décimale ou à compléter par des zéros pour que les parties décimales des décimaux à comparer aient le même nombre de chiffres. Les élèves en difficulté utilisent des règles implicites inexactes, par exemple traiter la partie décimale comme on traite un entier, ce qui les conduit à affirmer que 3,14 est supérieur à 3,5 au motif que 14 est supérieur à 5. D'ailleurs, lorsque les nombres sont donnés oralement, en disant la partie entière, puis « virgule », puis la partie décimale, les erreurs des élèves en difficultés sont beaucoup plus nombreuses que lorsque les nombres sont donnés par écrit.

La capacité à comparer des décimaux dépend aussi de la qualité de la connaissance de ces nombres : non seulement les élèves qui savent changer de registre de représentation des nombres décimaux les comparent sans se tromper, mais ceux qui ne savent pas bien le faire se trompent beaucoup plus souvent. Lorsque les nombres à comparer sont présentés dans une situation, les élèves en difficulté réussissent mieux les comparaisons, comme s'ils utilisaient la situation pour donner du sens

aux nombres à comparer. Au contraire, les élèves qui n'ont pas de difficulté ne réussissent pas mieux, voire même seraient parfois gênés pour gérer ces informations supplémentaires. Enfin, les élèves les plus âgés réussissent mieux que les jeunes ; la capacité à comparer des nombres décimaux évolue donc favorablement avec l'âge et l'utilisation de ces nombres dans des contextes variés. Cependant, il reste des élèves en difficulté, même parmi les plus âgés, qui ne pourront pas progresser sans une aide spécifique.

La compréhension des difficultés rencontrées par certains élèves laisse supposer qu'une aide efficace pourrait leur être apportée en les conduisant à changer de registre de représentation des décimaux (monnaie, graduation, etc.) et à mettre en relation ces représentations des nombres et différentes procédures pour comparer les décimaux. Une expérimentation menée par une enseignante avec les élèves de 11-12 ans les plus en difficulté laisse penser qu'un tel travail est efficace. Une expérimentation complémentaire portant sur plus d'élèves, avec plus d'enseignants, réalisés dans les conditions ordinaires de la classe, et avec des évaluations à court, moyen et long terme reste nécessaire pour confirmer ces premiers résultats.

Bien que cette recherche ait mis au jour des éléments nouveaux sur la compréhension de l'activité de comparaison des décimaux, par des adultes qui n'éprouvent pas de difficulté comme par des élèves qui en rencontrent, elle ne propose pas directement de situation nouvelle pour enseigner les nombres décimaux et leur comparaison. Le scénario d'aide a en effet été élaboré principalement en articulant les résultats de recherches précédentes menées depuis plus de vingt ans en didactique des mathématiques sur ce contenu particulier. Pourtant, une partie de cette recherche porte directement sur la relation enseignement apprentissage, elle focalise sur la composante *médiative* des pratiques enseignantes en proposant aux enseignants des moyens supplémentaires d'aider leurs élèves. Des modalités d'interaction entre l'enseignant et ses élèves, précisément définies, ont été expérimentées. Elles offrent des possibilités nouvelles pour intervenir auprès de ceux qui restent en difficulté après l'institutionnalisation des procédures à mettre en œuvre pour comparer des nombres décimaux, elles visent simultanément le développement et l'organisation de leurs connaissances sur ces nombres.

Annexe 1 : Liste des nombres donnés à comparer à 0,56

0,001 0,0057 0,097 0,198 0,2 0,25 0,32 0,4 0,49
 0,5199 0,5258 0,549 0,557 0,5599 0,5601 0,563 0,571 0,5942 0,5964
 0,6001 0,63 0,64 0,72 0,784 0,8 0,87 0,9 0,92 0,922
 1,023 1,1143 1,1191 1,254 1,56 1,583 2 3,23 4,55 7,9328 9,634
 55,017 330,11

Annexe 2 : Extraits des 51 questions du questionnaire**Entoure le nombre le plus GRAND**

1,97 et 4,28	8,7 et 8,14	12,27 et 12,1	14,036 et 14,17
12,15 et 3,704	1,21 et 1,4	11,38 et 11,478	3,3 et 3,04
15,08 et 7,956	2,39 et 2,6	17,54 et 17,625	28,125 et 28,0326

Réponds aux questions suivantes

Manu mesure 1,21m. Léa mesure 1,4m. Qui est le plus grand ?

Lors d'une épreuve de saut en longueur, Pablo a sauté 3,3m et Bixente a sauté 3,04m. Qui a sauté le plus loin ?

Le segment [AB] mesure 12,15cm. Le segment [CD] mesure 3,704cm. Quel est le segment le plus grand ?

Léa et Manu comparent leurs moyennes. Celle de Manu est 14,17 et celle de Léa est 14,036. Qui a la meilleure moyenne ?

La moyenne de Pablo en Espagnol est 15,08 et celle de Bixente est 7,956. Qui a la meilleure moyenne ?

La moyenne en 6^eA est 11,38. La moyenne en 6^eB est 11,478. Quelle classe a la meilleure moyenne ?

Pour s'acheter des bonbons, Léa dispose de 2,39 euros et Manu dispose de 2,6 euros. Qui pourra s'acheter le plus de bonbons ?

Dans son porte-monnaie, Bixente a 1,97 euros. Pablo a 4,28 euros. Qui a le plus d'argent ?

Réponds aux questions suivantes

La réponse exacte à un problème est 10,24. Des élèves ont fait ce problème, voici leurs résultats : Juliette a trouvé 10,2399, Adrien a trouvé 10,241, Thibaud a trouvé 10,238 et Julien a trouvé 10,25.

Qui est l'élève qui a trouvé le résultat le plus proche du résultat exact ?

Qui est l'élève qui a trouvé le résultat le plus éloigné du résultat exact ?

Bibliographie

ADJIAGE R. & PLUVINAGE F. (2007), An experiment in teaching ratio and proportion, *Educational Studies in Mathematics* **65**, 149–175.

BOLON J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école - collège*, Thèse de didactique des mathématiques de l'Université Paris 5.

BROUSSEAU G. (1980), Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **1.1**.

BROUSSEAU G. (1981), Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **2.1**, 37-127.

BROUSSEAU G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **4.2**, 165-198.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble.

CHAPET-PARIÈS M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **24.2-3**, 251-284

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, **19.2**.

COLLET M. (2003), Le développement du système en base 10 chez des élèves de 2ème et de 3ème année primaire, une étude exploratoire, *Éducation et francophonie* **31.2**, 218-241.

COMITI C. & NEYRET R. (1979), À propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de cours moyen, *Grand N* **18**, 5-20.

DEBLOIS L. (1996), Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16.1**, 71-127.

DEHAENE S. & COHEN L. (1995), Towards an anatomical and functional model of number processing, *Mathematical Cognition* **1**, 83-120.

DOUADY R. & PERRIN M.-J. (1986), *Liaison école - collège : Nombres décimaux*, Brochure n°62, Paris : IREM de Paris 7.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7.2**.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

FAYOL M. (1990), *L'enfant et le nombre*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

- GRISVARD C. & LEONARD F. (1981), Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs, *Bulletin de l'APMEP* **327**.
- GRISVARD C. & LEONARD F. (1983), Résurgence de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux, *Bulletin de l'APMEP* **340**.
- HINRICH S. J.V., YURKO D.S. & HU J.M. (1981), Two-digit number comparison: Use of place information. *Journal of Experimental Psychology : Human Perception and Performance* **7.4**, 890-901.
- MELJAC C. (2001), Piaget, Broca, Poincaré, Mc Closkey et quelques autres, in *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*, (Eds Van Hout A. & Meljac C.), 118-135, Paris : Masson.
- NEWMAN, R. S. & BERGER, C. F. (1984). Children's numerical estimation: Flexibility in the use of counting. *Journal of Educational Psychology*, 76.1, 55-64.
- NEYRET R. (1979), Décimaux, *Grand N* **17**, 5-20.
- PERRET J.-F. (1985), *Comprendre l'écriture des nombres*, Peter Lang, Berne.
- PERRIN-GLORIAN M.-J. (1986), Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège, *Petit x* **10**.
- ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* **2.4**, 505-528.
- ROBERT A. & ROGALSKI J. (2005), A Cross-Analysis of the Mathematics Teacher's Activity. An Example in a French 10th-Grade Class, *Educational Studies in Mathematics* 59.1-3, 269-298.
- ROBERT A. (2005), Quelles différences y a-t-il...? Exemples d'analyses didactiques d'exercices et d'activités d'élèves, *Bulletin de l'APMEP* **457**, 226-238.
- RODITI E. (2000), Ordre de grandeur et multiplication des décimaux, *Bulletin vert APMEP* **431**, 719-727.
- RODITI E. (2004), *Former par la résolution de problèmes professionnels*, Cahier DIDIREM n°48, Paris, IREM de Paris 7.
- RODITI E. (2005), Les pratiques enseignantes en mathématiques – Entre contraintes et liberté pédagogique, L'Harmattan, Paris.
- VYGOTSKI L. (1985), *Pensée et langage*, Paris, Messidor.

ÉRIC RODITI

Université Paris 5 – Sorbonne, équipe EDA (Éducation et apprentissages)
24, rue de la Justice 75020 Paris - France
eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

PHILIPPE R. RICHARD ET JOSEP M. FORTUNY

AMÉLIORATION DES COMPÉTENCES ARGUMENTATIVES À L'AIDE
D'UN SYSTÈME TUTORIEL EN CLASSE DE MATHÉMATIQUE AU
SECONDAIRE

Abstract. Tutoring System for Improvement of Argumentative Competencies in High School Mathematics

This article tries to show how secondary school pupils can improve their argument skills with the help of tutorial systems intended for learning geometry. After having established the conceptual framework at the intersection of mathematics teaching and computer environments for human learning, the article compares the heuristic and discursive features of some tutorial systems, including the systems developed by our research team. It then deals with the issue of the complementary nature of knowledge and skills in order to aim at a strategy for assessing argument skills based on relationships in the subject-environment system. The text particularly includes cognitive control, semiotic and situational structures associated with the development of argument skills in such environments. It also tackles the specific nature of reference knowledge, the decontextualization of learning, the instrumentation of resources, the idea of mathematical proof and the role of teaching agents.

Keywords. Learning of geometry, tutorial system, model of knowledge, mathematical competences, argumentative competence evaluation

Résumé. Cet article vise à montrer comment l'élève de l'école secondaire peut améliorer ses compétences argumentatives à l'aide de systèmes tutoriels destinés à l'apprentissage de la géométrie. Après avoir situé le cadre conceptuel à l'intersection de la didactique des mathématiques et des environnements informatiques d'apprentissage humain, l'article compare les caractéristiques heuristiques et discursives de quelques systèmes tutoriels, dont les systèmes développés par notre équipe de recherche. Il traite ensuite la question de complémentarité entre connaissances et compétences pour se diriger vers une stratégie d'évaluation des compétences argumentatives sur la base des rapports du système sujet-milieu. Le texte intègre, en particulier, les structures de contrôle cognitif, sémiotique et situationnel associées au développement d'une compétence argumentative dans de tels environnements. Il aborde aussi la spécificité des connaissances de référence, la décontextualisation des apprentissages, l'instrumentation des ressources, l'idée de démonstration mathématique ainsi que le rôle d'agents didactiques.

Mots-clés. Apprentissage de la géométrie, système tutoriel, modèle de connaissances, compétences mathématiques, évaluation de compétences argumentatives

Introduction

À partir des années 1980, plusieurs programmes d'études au secondaire se présentaient sous forme d'objectifs d'apprentissage (v.g. Québec, Catalogne), dépassant la tradition des contenus et des méthodes disciplinaires. Les objectifs généraux se ventilaient alors en objectifs spécifiques, intermédiaires ou terminaux, ce qui devait faciliter à la fois la programmation de l'enseignement et l'évaluation des apprentissages. Bien que cette nouvelle approche fournît au monde de l'éducation des éléments de référence utiles sur les concepts, processus et attitudes mathématiques à étudier, on en a souvent retenu que l'apprentissage procédait par simple addition ou juxtaposition d'éléments. C'est dans un tel contexte qu'apparaît la notion de compétence. Définie comme un savoir-agir, la compétence se manifeste lors de situations d'une certaine complexité, son degré de maîtrise pouvant progresser tout au long du parcours scolaire et même au delà de celui-ci. Privilégier les compétences en classe de mathématique, c'est donc inviter à établir un rapport différent aux savoirs traditionnels et à se recentrer sur la formation de la pensée et le développement de l'autonomie.

Même si le développement d'une compétence est un travail de longue haleine, les situations de résolution de problèmes continuent d'être au cœur de l'apprentissage des mathématiques. C'est d'ailleurs, selon la théorie des situations didactiques, la seule façon de «faire des mathématiques» (Brousseau, 1998). Il ne s'agit pas tant de trouver une classe de problèmes pertinents à résoudre dont l'aboutissement présuppose un apprentissage satisfaisant, ni d'élaborer un curriculum de situations organisées de façon diagnostique. C'est-à-dire, dans le premier cas, se centrer sur les situations-problèmes qui rendent raisonnablement signifiant l'apprentissage d'un concept, ou, dans le second cas, prévoir que si l'élève rencontre une difficulté dans un problème donné, y remédier en lui demandant de résoudre un sous-problème associé ou en l'orientant vers une suite d'exercices adaptés¹. Ce que nous retenons de la modélisation du système éducatif de Brousseau (1998) c'est que l'enseignant agit sur le «milieu d'apprentissage» de l'élève – c'est lui qui choisit les problèmes à résoudre et les conditions du processus de résolution – et que l'interaction de l'élève dans ce milieu apporte des informations et des rétroactions à tout agent didactique (l'enseignant, un agent pédagogique virtuel, voire un chercheur, un évaluateur ou autre observateur).

Dans notre étude, le développement de compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel n'est pas un objectif en soi. On peut certes évoquer une sorte de tuteur «compétentiel», à l'image des tuteurs cognitifs (v.g. Carnegie Learning, 2006), qui proposent des situations-problèmes organisées dans un ensemble

¹ Il s'agit ici de ce qui était connu en France dans les années 1980 sous le nom d'«enseignement programmé».

structuré d'objectifs, d'éléments d'apprentissage ou d'activités pédagogiques constituant un système de référence curriculaire. L'amélioration de la compétence de l'élève cheminerait alors selon les réalisations ou les difficultés que l'élève rencontrerait par rapport au système programmé. Toutefois, la formation d'une compétence se substituerait à l'objectif d'étude, risquant au passage de subordonner les concepts, les processus et les attitudes mathématiques au développement de la compétence-objet. Nous considérons plutôt que l'évolution d'une compétence est conjointe à la progression des connaissances mathématiques et que le système tutoriel est capable d'agir, à la manière d'un enseignant compétent, par rapport à l'interaction de l'élève dans un milieu – pour favoriser la formation de la pensée et le développement de l'autonomie. Lorsque le système tutoriel s'inscrit dans un Environnement Informatique d'Apprentissage Humain (EIAH), l'amélioration de compétences argumentatives peut s'opérer en autant que le système tutoriel admet des structures de contrôle cognitif (pour assurer la progression cohérente des connaissances), sémiotique (pour assurer la représentation, le traitement et la communication) et situationnel (pour assurer la dévolution et l'institutionnalisation).

Le caractère multidisciplinaire de l'article nous incite à entamer celui-ci par une section préliminaire qui propose une description fonctionnelle d'un des systèmes tutoriels développés par notre équipe de recherche (section *Le système Turing*). Cette section devrait faciliter la compréhension des enjeux du cadre conceptuel (section *Construction d'EIAH et didactique des mathématiques*) et la comparaison des caractéristiques heuristiques et discursives de quelques systèmes actuels (section *Les systèmes tutoriels connexes*). Nous traitons ensuite la question de complémentarité entre connaissances et compétences en classe de mathématique (section *Connaissances et compétences*) puis nous proposons une stratégie d'évaluation des compétences argumentatives à partir des systèmes Turing et AgentGeom (section *Évaluation des compétences argumentatives*).

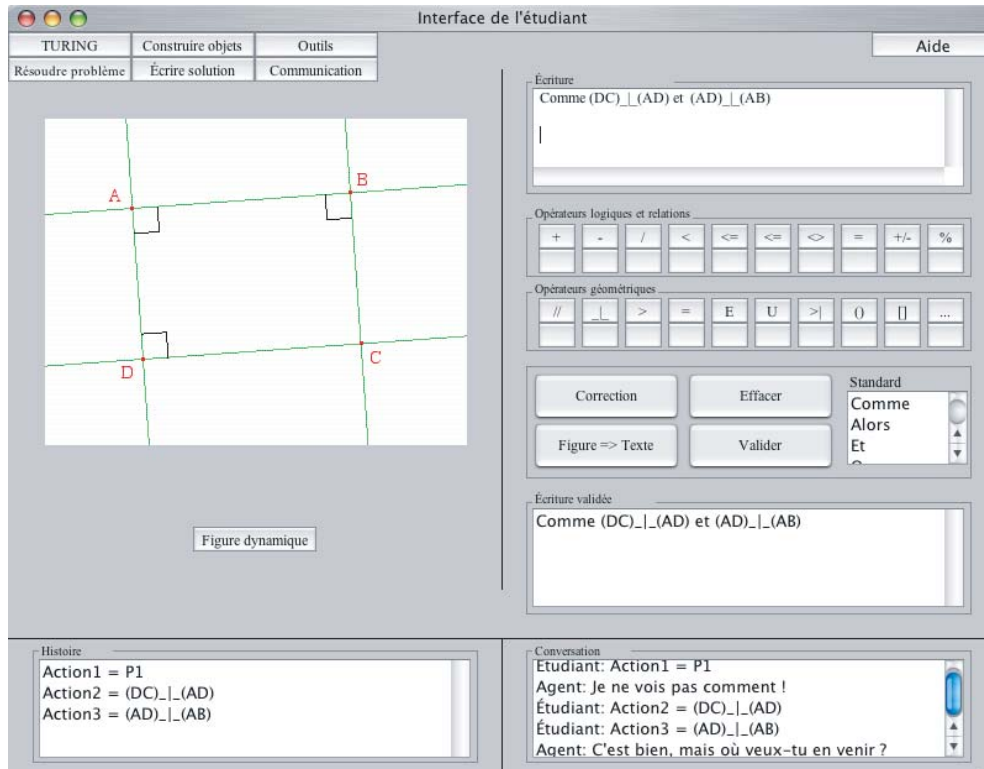


Figure 1 : Capture d'écran de l'environnement de l'élève. On aperçoit à gauche la zone graphique, un applet Java qui donne une figure dynamique, et, à droite, la zone discursive pour l'écriture des propositions. L'historique des actions de l'élève et les messages de l'agent tuteur se trouvent en bas.

Le système Turing

Le mot TURING, acronyme de TUTOriel INtelligent en Géométrie, se réfère à la fois à l'exécution d'un projet de recherche et à la réalisation d'un système tutoriel qui se destine à l'apprentissage de la géométrie (Richard & al., 2005). La version actuelle du système est un logiciel d'application, programmé en langage Java dans un environnement client-serveur. Nous illustrons d'abord le fonctionnement du logiciel à partir de deux captures d'écran et nous poursuivons ensuite avec la description de l'architecture du système.

Pour la résolution d'un problème donné dans Turing, l'élève construit un élément de figure, dégage du dessin des propositions graphiques ou écrit des propositions discursives pour produire un calcul ou une inférence structurée à l'interface de l'étudiant (figure 1). Le système tutoriel répond aux actions de l'élève, si

nécessaire et en temps réel, à l'aide de messages. Ces messages ont d'abord été programmés à l'interface du didacticien (figure 2) en fonction du graphe qui contient l'ensemble des inférences possibles dans la logique du problème. Pour le maître ou le chercheur, il est possible d'adapter les inférences du graphe et leurs messages associés aux habitudes d'un contrat didactique spécifique – comme ceux qui admettent la contradiction en partie intégrante du processus de résolution ou qui acceptent les propositions graphiques dans la structure du raisonnement. Dans ce qui suit, une stratégie est un chemin du graphe qui part des hypothèses du problème et qui termine par sa conclusion, à ne pas confondre avec le processus de résolution de l'élève (voir paragraphe *Sur le discours* dans la section suivante).

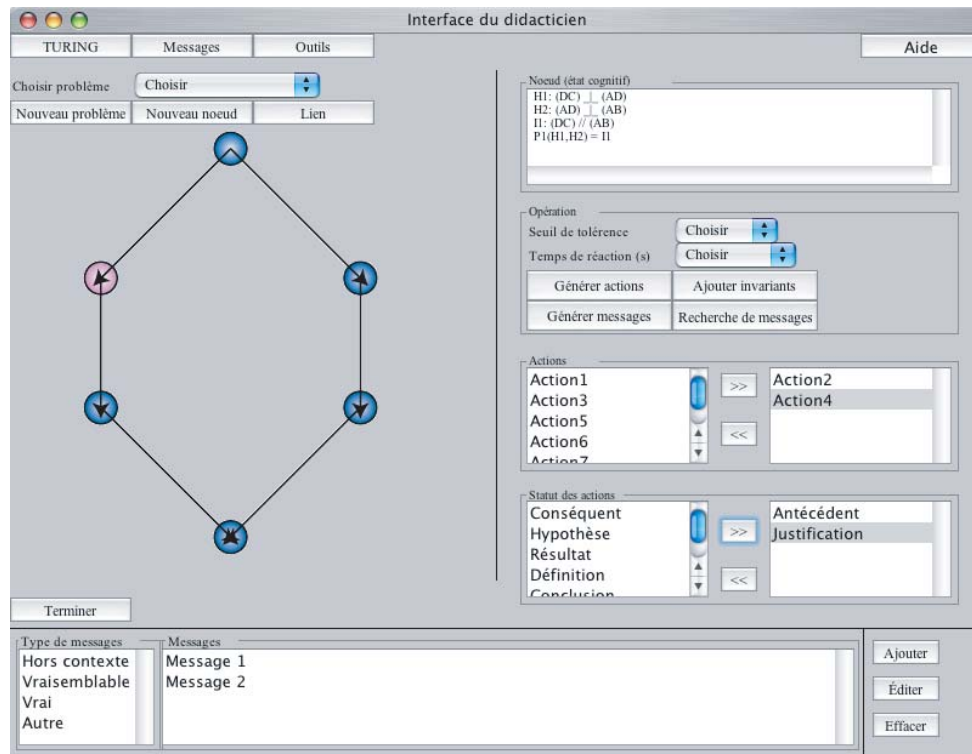


Figure 2 : Capture d'écran de l'environnement du maître ou du chercheur. L'interface dit du didacticien se destine à la construction du graphe inférentiel (à gauche) et à la gestion des messages qui lui sont associés (à droite). C'est à partir de cette interface que le maître ou le chercheur constitue, pour chaque problème, la base de référence de l'agent tuteur.

L'organisation physique et logique du système Turing comprend quatre agents principaux (schéma 3) :

- *l'agent apprenant* permet à l'élève de résoudre un problème et il l'aide dans son cheminement en montrant les messages de l'agent tuteur. Cet agent valide et corrige la syntaxe des propositions discursives écrites par l'élève et il autorise la conversion des actions graphiques en actions discursives ;
- *l'agent enseignant* montre au maître l'ensemble des stratégies et des messages disponibles. Il lui permet de choisir différents seuils de tolérance pour l'envoi des messages, dont celui du temps d'attente pour l'élève bloqué, et de modifier le contenu des messages même lorsqu'un élève est en plein processus de résolution. Les seuils de tolérance se rapportent aux niveaux de contrôle de la section *Évaluation des compétences argumentatives* ;
- *l'agent expert* autorise la création de graphes inférentiels et la programmation d'un ensemble de messages par défaut. Contrairement à l'agent enseignant, cet agent permet au chercheur de modifier des éléments de stratégie du graphe et de gérer l'organisation des messages. Au schéma 3, les relations du maître et du chercheur, vers les agents enseignant ou expert, renvoient à une distinction toute relative du statut de chacun. Un enseignant (maître) peut très bien adopter une position réflexive par rapport au milieu et au contrat didactique, par exemple pour ajouter au graphe une stratégie commune à un groupe d'élève, ce qui le place de facto dans une position de chercheur ;
- *l'agent tuteur* est le moteur du système Turing. Il fonctionne à la fois du côté client et du côté serveur pour le traitement de problèmes complexes. À partir d'une action de l'élève, l'agent tuteur retourne le message le plus approprié à la situation, ce qui inclut l'absence de message. Il relève également les patrons de conduite dans le processus de résolution, c'est-à-dire les successions récurrentes de propositions ou les ensembles invariants d'actions, pour adapter automatiquement le seuil de tolérance – comme l'élève qui construit systématiquement ses inférences de façon structurée ou, à l'inverse, qui abuse d'actions éparses, voire hors sujet.

Du point de vue informatique, si l'on abstrait l'aide à la production de propositions discursives, de graphes et de messages bien formés, les agents apprenant, enseignant et expert sont essentiellement des agents réactifs. Le comportement «intelligent» du système provient d'abord de l'interaction entre ces agents et en fait un système robuste. Par contre, en disposant d'un mode de représentation exclusif (gestion de la base de données), en tenant compte des événements passés (recherche de fichiers journaux) et en planifiant ses actions futures (générateur de messages), l'agent tuteur est plutôt un agent cognitif. L'adaptation autonome de

l'agent tuteur par rapport à l'intention programmée, c'est-à-dire que l'envoi des messages dépend aussi d'une prise de décision par l'agent, lui donne une intelligence propre.

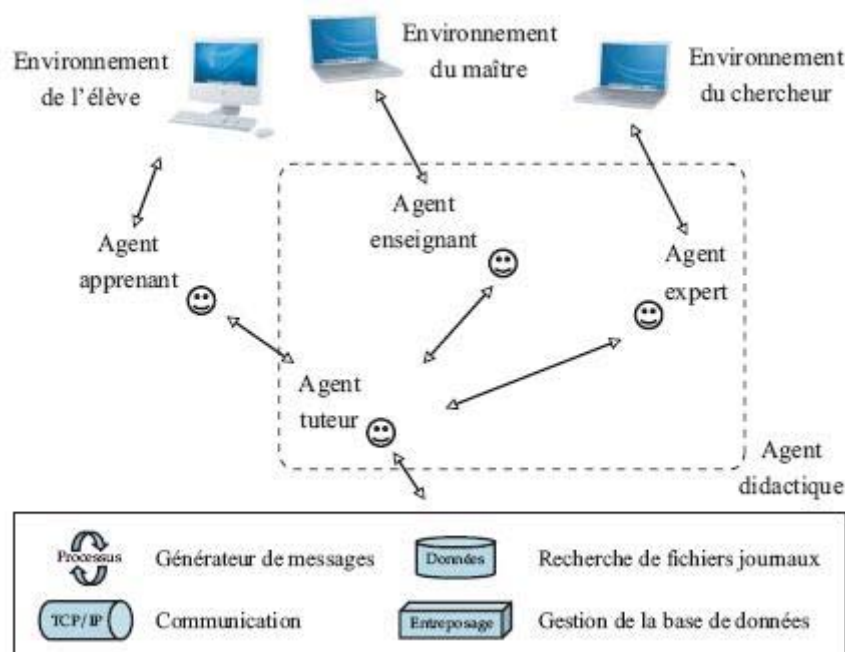


Schéma 3 : Architecture du système Turing.

Les agents tuteur, enseignant et expert, avec peut-être l'aide à l'écriture des propositions discursives de l'agent apprenant, se comportent comme une entité virtuelle entre l'élève et l'interface auquel il a accès. On sait bien que l'utilisateur n'est généralement pas conscient des modèles qui sous-tendent l'exercice de programmation et ce qui reste le plus apparent est l'interaction avec la machine. Nous appelons agent didactique l'entité virtuelle qui simule le comportement d'un tuteur humain par l'envoi de messages, c'est-à-dire l'«agent interlocuteur» de l'élève. À la section *Évaluation des compétences argumentatives* nous distinguons la relation didactique simulée de la relation didactique réelle et nous introduisons le système Turing dans le système didactique de Brousseau (1998).

1. Construction d'EIAH et didactique des mathématiques

Lorsqu'on s'intéresse à la conception d'un système tutoriel, qui se destine à soutenir l'élève en résolution de situations-problèmes à l'aide d'interactions discursives (messages), il faut trouver une façon de rationaliser l'analyse a priori. C'est-à-dire que par rapport aux conditions particulières d'une situation-problème

et dans un contrat didactique donné, le chercheur-concepteur doit à la fois trouver l'ensemble des stratégies qui seront mobilisées par l'élève-résolveur et l'ensemble des messages mis à la disposition de l'agent tuteur. Ce travail d'analyse est habituel en didactique des mathématiques, quoique la gestion des messages qui répondent aux interactions de l'élève est généralement peu considérée. On sait traiter les échanges discursifs a posteriori, notamment entre un élève et un enseignant, ou répondre à la toute dernière action de l'élève à l'interface, mais la prévision d'authentiques stratégies argumentatives semble relever d'une entreprise perdue d'avance.

1.1. Sur le débat social simulé

Dans une perspective plus générale, les EIAH disponibles actuellement pour la géométrie de l'école secondaire ne considèrent pas le débat social simulé dans la construction des connaissances. En résolution de problème par exemple, on admet volontiers qu'il est possible de provoquer un débat de façon synchronique ou asynchrone à l'aide d'un forum de discussion ou d'un logiciel de courriel. Dans ces cas, la construction et le contrôle des connaissances s'effectuent lors du processus collaboratif de résolution (entre élèves) ou grâce à l'intervention d'un tuteur humain (généralement l'enseignant ordinaire). Mais si ce type d'EIAH est utile pour gérer les situations particulières qui exigent un apprentissage à distance (élèves hospitalisés, entraînement sportif d'élite, éloignement temporaire de la famille, ...), son profit s'estompe dans l'enseignement habituel. Car les compagnons de classe ou l'enseignant sont toujours présents pour alimenter un éventuel débat, le milieu informatique devenant davantage un outil qu'un instrument de médiation pour l'apprentissage (Rabardel, 1995, Laborde, 2001a, b et Trouche, 2002). Or, l'attention personnalisée et l'animation de débats en classe est didactiquement coûteuse. Non seulement le temps à y consacrer est souvent dissuasif, mais il y a aussi la question des moyens pédagogiques à mobiliser pour s'assurer que les élèves travaillent dans la même situation-problème que celle qui est en jeu et qu'ils en respectent la logique interne. En outre, certaines habitudes socioculturelles entretiennent un authentique sentiment de méfiance face aux débats. On n'a qu'à penser au bris des règles de vie en commun, de l'harmonie sociale (v.g. au Québec : Cornellier, 2003 ; au Japon : Sekiguchi et Miyazaki, 2000) ou à l'impression qu'un argument contradictoire masque en fait une attaque personnelle. On comprend pourquoi la pratique enseignante n'y recourt qu'occasionnellement.

Pourtant, alors que les points de vue traditionnels en psychologie (v.g. Festinger, 1957, 1989 ; Vygotsky, 1978) accordent déjà au débat social un rôle déterminant dans l'acquisition des connaissances, les points de vue épistémologique (Lakatos, 1984), sémiotique (Duval, 1995) et situationnel (Brousseau, 1998) le situent de façon nécessaire par rapport à l'apprentissage des mathématiques. Par débat social

simulé dans un EIAH nous entendons une discussion organisée et dirigée dans laquelle les interlocuteurs sont un agent apprenant, ou un élève, et un agent didactique. Ainsi, contrairement à l'activité d'apprentissage instrumentée ou au débat qui peut délayer la responsabilité de l'élève dans l'ensemble d'une classe – le système tutoriel ou l'interlocuteur gère en quelque sorte une partie des connaissances en jeu –, le débat social simulé que nous préconisons accorde à l'élève un rôle de premier plan. C'est-à-dire que l'élève est responsable de l'application des connaissances et que la progression du débat dépend essentiellement de ses actions à l'interface, même durant la gestion des impasses par le système tutoriel (Cobo & al., 2007). Dans un débat social simulé, nous devons souligner que l'agent didactique est particulièrement utile pour appuyer la gestion du sens, de la représentation et du respect de la logique interne (Richard & al., 2003). En cas de besoin, le système tutoriel permet de s'assurer que les symboles utilisés par le dispositif informatique ont le même sens pour l'élève que celui qu'il est censé avoir (contrôle sémiotique), que les concepts en jeu se réfèrent effectivement aux modèles prétendus (contrôle cognitif) et que l'élève travaille dans la même situation-problème que celle qui est proposée (contrôle situationnel).

1.2. Sur le discours

Pour simuler la conversation et permettre la rédaction de solutions, nos systèmes tutoriels utilisent une approche structurale du raisonnement qui se fonde sur les notions d'expansion discursive de Duval (1995) et d'expansion graphique de Richard (2004a). Pour Duval, le raisonnement se structure en pas de raisonnement – que nous appelons génériquement «*inférences*» pour les besoins de notre exposé – dans un processus logique (ex. déductions, syllogismes aristotéliens) ou dialogique (ex. inférences sémantiques, inférences discursives). Selon Richard, ces pas peuvent mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotique (ex. l'inférence figurale dans un pas de raisonnement discursivo-graphique) et, peu importe l'inférence mise en œuvre, le raisonnement progresse par construction ou accumulation de résultats intermédiaires (conséquences discursives). Pour assurer la continuité d'un raisonnement, les inférences s'enchaînent par recyclage de propositions ou elles se renforcent ou s'opposent par leur contenu en présentant une cohérence thématique pour appuyer ou aller à l'encontre de la thèse discutée, comme dans la dialectique de Lakatos (1976). Dans ce qui suit, nous comparons le raisonnement humain et la programmation informatique en montrant comment cela se répercute sur l'idée de modèle mathématique a priori, puis nous introduisons la notion de graphe inférentiel dans nos systèmes.

Les premiers systèmes tutoriels ont mis en évidence la forme d'expansion formelle du raisonnement en insistant sur la structure fonctionnelle des propositions discursives. Pourtant, outre les processus calculatoires (logiques, arithmétiques ou algébriques), l'expansion cognitive constitue la forme d'expansion discursive

privilégiée en classe de mathématique. Un raisonnement qui procède par expansion cognitive exige la connaissance de définitions, règles ou lois pour un domaine d'objets (Duval, 1995), sans que celles-ci n'aient besoin d'appartenir à une théorie formelle. Au regard d'un modèle mathématique, il se peut que l'usage d'une définition ou d'une propriété pour justifier une inférence manque de cohérence globale, mais que l'inférence soit structurellement cohérente par le sens des propositions mobilisées. Ce phénomène est courant en géométrie lorsque le raisonnement se fonde sur des propriétés visuellement acceptables, c'est-à-dire qui paraissent vraies parce que le dessin se considère comme son propre modèle (Richard, 2004a), mais qui demeurent fausses par rapport au modèle géométrique sous-jacent. En privilégiant d'emblée un modèle mathématique comme cadre de référence pour la programmation informatique, ce qui suppose la détermination d'un ensemble de définitions et de propriétés globalement cohérentes dans le modèle, on empêche la découverte de contradictions qui pourraient appartenir à une stratégie de l'élève.

Lorsque nous parlons de géométrie cognitive, c'est parce que le point de comparaison de nos systèmes tutoriels est un graphe inférentiel qui se forme par expansion cognitive. Ce graphe admet certaines propriétés en usage dans un contrat didactique donné, comme les raccourcis inférentiels – macropropriétés de Richard (2004b) ou macroopérateurs d'Anderson (Koedinger & Anderson, 1993) – ou les propriétés qui demeurent localement cohérentes pour la découverte de contradictions. L'approche structurale du raisonnement réconcilie la difficulté de programmer la résolution de problèmes et la réalisation de preuve qui procèdent par expansion cognitive. D'abord parce que l'ensemble des règles d'inférence prévues peut s'adapter à la logique du problème et aux stratégies mises en œuvre dans un contrat didactique donné. Ensuite, parce que les messages véhiculés par l'agent tuteur permettent de simuler l'argumentation sur la base des connaissances relatives aux règles d'inférences. Encore, parce que si la réalisation d'une preuve devient nécessaire à la suite d'un processus de résolution, le graphe est disponible pour la rédaction d'une solution structurée. Enfin, l'approche structurale permet au système de considérer des structures de contrôle dans la logique du problème.

S'il n'y a pas de théorie formelle ou de théorie cognitive – au sens d'une théorie signifiante qui interprète une théorie formelle – sur lesquelles notre système se fonde a priori, celui-ci engendre un modèle à partir du graphe inférentiel et de l'algorithme (moteur) qui détermine les messages à retourner (voir section *Évaluation des compétences argumentatives*). Le graphe se constitue et il se modifie par un expert (maître, chercheur), ce qui suppose un choix dans les hypothèses et les règles d'inférence acceptées dans un problème donné. Par exemple, la considération simultanée d'hypothèses vraies et fausses dans le contexte d'un problème, mais dont les règles d'inférence acceptées sont toutes

cognitivement valables, autorise la venue de contradictions. Lorsque l'élève ne perçoit pas la contradiction, l'algorithme peut se situer par rapport au graphe et fournir un message adapté. En fait, si l'approche structurale permet de doter le système tutoriel d'un ensemble complet de messages par défaut (v.g. El-Khoury & al., 2005), l'expert doit pouvoir adapter le contenu de chaque message au besoin. Ainsi, suite à la venue d'une contradiction – représentée dans le graphe par une inférence qui ne débouche pas vers la conclusion –, les messages peuvent se reformuler et porter sur une prise en compte de la contradiction. Lorsque l'élève écrit ou choisi une proposition et que l'agent tuteur retourne un message, on peut dire alors qu'ils collaborent au processus de résolution. C'est-à-dire que tous les deux traitent avec le même contenu, voire la même inférence. Néanmoins, selon leurs stratégies respectives, il s'agit plutôt d'un processus coopératif. L'algorithme ne suit pas le cheminement de l'élève par anticipation, mais il compare son action au graphe pour vérifier la cohérence des inférences et la stabilité des actions de l'élève, telle une abeille qui butine dans un champ proceptuel – au sens que nous avons développé dans Richard (2004b). L'ensemble des actions de l'élève et les messages de l'agent tuteur forment trois couches d'interactions que nous avons développées dans Cobo & al. (2007) et qui concernent les actions significatives à l'interface, le discours de l'élève et la médiation du milieu social.

2. Les systèmes tutoriels connexes

Notre équipe de recherche travaille conjointement sur les projets *AgentGeom* (Cobo & al., 2007) et *Turing* (Richard & al., 2005). Mis à part quelques différences mineures sur l'approche de recherche, la configuration des interfaces et l'usage des modèles relatifs à l'exercice de programmation, ces deux projets visent la construction et l'étude d'EIAH pour l'amélioration des compétences en mathématiques au secondaire. D'autres systèmes tutoriels se destinent déjà à soutenir l'élève à l'aide de messages en résolution de problèmes, notamment lors de problèmes de preuve. Nous les résumons au tableau 4.

Comme dans les systèmes tutoriels connexes, *AgentGeom* et *Turing* utilisent la construction d'une figure géométrique pour générer les interactions entre l'élève et le milieu, même si, dans son énoncé, la situation-problème n'est pas déjà modélisée par une figure géométrique. Ce point rejoint les questions de décontextualisation, de transfert ou encore d'acceptation du caractère contextuel de la connaissance à construire et il suppose que si les propriétés des connaissances construites par l'élève dépendent de ses connaissances antérieures, elles dépendent aussi des caractéristiques du milieu avec lequel il interagit et des compétences qu'il sait exercer. Par contre, les modèles géométriques sous-jacents aux systèmes *Baghera*, *Cabri-Euclide* et *Geometry Explanation Tutor* sont essentiellement des modèles formels, ce qui marque le cheminement de l'élève et l'intervention de l'agent

tuteur. Le fait de concevoir un système tutoriel en géométrie cognitive permet de construire une architecture ouverte qui s'adapte non pas à un modèle géométrique préexistant, mais à une réalité socioculturelle propre à la particularité d'un contrat didactique. C'est-à-dire que dans un graphe inférentiel qui n'est pas nécessairement formel, non seulement chaque inférence peut représenter un état cognitif, sémiotique et situationnel fondés sur l'analyse didactique a priori, mais les messages qui s'y fondent permettent d'agir dans l'interaction sujet-milieu et donc, sur l'évolution des compétences mathématiques. De plus, selon Guin (1996), l'efficacité d'un EIAH dépend d'une modélisation du comportement humain qui est à la fois antérieur et postérieur à la conception de l'environnement. Parce que le couple sujet-milieu engendre un modèle qui lui est propre, le dispositif informatique même doit permettre un aménagement des caractéristiques heuristiques et discursives (rôle de l'agent didactique ; programmation des répliques, des stratégies, des systèmes de signes disponibles) selon le comportement instrumenté de l'élève (Richard & al., 2005).

	Modèle géométrique sous-jacent	Intervention de l'agent tuteur
Baghera (Laboratoire Leibniz, 2003)	Géométrie formelle	L'élève écrit une solution et un démonstrateur (moteur déductif en logique du premier ordre) la vérifie. Le fichier retour contient une preuve annotée, chaque étape de raisonnement est suivie d'une annotation qui atteste si celle-ci est correcte ou non. Ce fichier contient également une série d'annotations globales qui indiquent si la preuve est correcte relativement aux hypothèses du problème.
Cabri-Euclide (Luengo, 2005)	Géométrie formelle	Pour chaque énoncé écrit par l'élève, le système vérifie d'abord si l'énoncé se réfère à un objet construit dans la figure ou si la propriété se vérifie par un oracle du Cabri-géomètre. Lorsque l'élève invoque une définition ou un théorème, le système vérifie ensuite la cohérence des déductions ou la constance de la démonstration, de façon automatique ou à la demande de l'élève.
Geometry Explanation Tutor (Aleven & al., 2002)	Géométrie formelle	Fondé sur les standards des tuteurs cognitifs, le système considère une sorte d'écart par rapport au bon cheminement prévu dans l'architecture curriculaire. Lorsque l'élève écrit la justification d'une inférence par exemple, le système lui retourne un message selon un ensemble d'explications «correctes» ou «partiellement correctes».
AgentGeom (Cobo & al., 2007) et Turing (Richard & al., 2005)	Géométrie cognitive	Conçu par rapport à la particularité d'une situation-problème et d'un contrat didactique, le système retourne un message selon la nature du processus en cours (résolution ou rédaction), la valeur heuristique ou discursive de l'action de l'élève et le niveau de contrôle suggéré (voir <i>Évaluation des compétences argumentatives</i>).

Tableau 4 : Systèmes tutoriels en géométrie au secondaire.

3. Connaissances et compétences

La compétence argumentative à l'interface du système est une virtualité dont l'écriture de propositions discursives par l'élève et le retour des messages de l'agent didactique constituent la réalisation de l'acte argumentatif. Mais avant d'examiner toute contribution de l'acte même (voir section *Évaluation des compétences argumentatives*), il faut s'assurer que l'élève et l'agent didactique se rejoignent dans cette virtualité. C'est-à-dire que la puissance des situations-problèmes, du processus de résolution, de son expression et de sa régulation, notamment par les messages de l'agent, porte véritablement sur la construction des connaissances de l'élève et le développement de ses compétences mathématiques. Or, la plupart des modèles de connaissances sont développés sans contrepartie «compétentielle», ou si on y trouve une intention d'intégration manifeste, le modèle résultant fait abstraction de la particularité du contenu et des méthodes mathématiques. Pourtant, connaissances et compétences se complètent. Les savoirs utiles à l'exercice d'une compétence sont ceux qui se construisent par un élève intellectuellement actif, et l'étendue de la compétence dépend directement de la pertinence et de l'ampleur des savoirs qui l'alimentent. Parce que si les connaissances sont des ressources essentielles qui permettent d'agir adéquatement dans une situation complexe, le savoir-agir propre à une compétence suppose une appropriation et une utilisation intentionnelles des notions et des habiletés en cause. La séquence de développement d'une compétence ne chemine pas du simple au complexe ou des parties vers le tout, comme dans un éventuel tuteur «compétentiel». Elle se construit plutôt en fonction des dimensions multiples d'une situation et du contexte d'intervention. Le point de départ pour l'utilisation et le développement d'une compétence se situe dans la globalité du défi à relever et le point d'arrivée, c'est-à-dire dans une solution adaptée au problème de départ. Ainsi, de façon analogique, nous considérons que l'apprentissage des mathématiques épouse un mouvement en spirale à l'intérieur duquel les compétences servent à l'acquisition de nouvelles connaissances qui, à leur tour, font évoluer les compétences. Afin de dégager les rapports évolutifs qui s'attachent aux compétences argumentatives, nous spécifions la nature de l'ensemble des rapports qui relient les éléments d'un modèle de connaissances aux composantes de trois modèles de compétences mathématiques. Mais auparavant, nous exposons ces modèles dans leurs grandes lignes.

Dans un modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques et l'évaluation des conceptions de l'élève, dit modèle cKç, Balacheff et Margolinas (2005) montrent que la conception apparaît comme un outil pour la construction d'un concept permettant la modélisation de l'élève comme agent apprenant, en relation avec un agent didactique et un lieu d'inscription de l'interaction et des productions. Ils considèrent que «la conception est l'état d'équilibre d'un système,

et plus précisément l'état d'équilibre d'une boucle action/rétroaction du système sujet-milieu sous des contraintes proscriptives de viabilité»² (p. 6). Le terme de proscriptif réfère à la nécessité des conditions qui assurent l'équilibre du système, qui ne sont pas prescriptives parce qu'elles ne requièrent pas un processus particulier pour revenir à l'équilibre recherché. Ces contraintes proscriptives ne renvoient pas à la façon dont l'équilibre est atteint, mais aux critères de cet équilibre, comme ceux qui se rapportent au potentiel de développement d'une compétence argumentative. Soulignant le caractère local d'une conception, ces auteurs caractérisent la conception par un ensemble définitoire de problèmes (P) pour lesquels elle apporte des outils de résolution (R) en s'appuyant sur des systèmes de représentation (L) et une structure de contrôle (Σ) qui permet jugements et décisions³. Ainsi, lorsque s'exerce la conception C durant la résolution d'un problème P suivant un raisonnement discursif ou graphique, R est l'expression du raisonnement, rendu avec le type de langage L et issu du type de rationalité Σ . Faut-il noter que le modèle cK ϕ est compatible avec les trois couches d'interactions que nous avons évoquées au paragraphe *Sur le discours* (section *Construction d'EIAH et didactique des mathématiques*) et que ses éléments permettent de situer le raisonnement qui s'exprime dans l'action (au sens de Richard, 2006).

² Dans ce modèle, le sujet et le milieu se définissent mutuellement et dialectiquement par la nature et la dynamique du jeu de leurs actions et rétroactions. C'est-à-dire que le système cognitif n'est pas le sujet psychologique, mais le système sujet-milieu pris comme un tout. Puisqu'avec Turing nous introduisons un agent tuteur au système sujet-milieu, nous devons revenir sur cette question (voir section *Évaluation des compétences argumentatives*).

³ La conception C se formalise alors par l'égalité $C = (P, R, L, \Sigma)$ de façon à définir l'objet d'une conception par une classe d'équivalence de conceptions relativement à l'une d'entre elles. Lorsqu'une conception (C_μ) rend compte du texte du savoir mathématique, elle définit un μ -objet (objet mathématique), c'est-à-dire la classe d'équivalence de conception C_μ . Une connaissance est donc un ensemble de conceptions ayant le même μ -objet.

MÉLS Programme de formation en mathématiques au secondaire	TUNING Programme de formation en mathématiques de premier cycle universitaire	PISA Évaluation de connaissances et compétences en mathématiques au secondaire
– Résoudre une situation-problème (P) ; – déployer un raisonnement mathématique (R, Σ) ; – communiquer à l'aide du langage mathématique (L).	– Concevoir des démonstrations (R, Σ) ; – modéliser mathématiquement une situation (L, T*) ; – résoudre des problèmes avec des techniques mathématiques (P).	– Pensée et raisonnement mathématique (R, Σ) ; – argumentation mathématique (R, Σ) ; – communication mathématique (L) ; – modélisation (L, T*) ; – création et résolution de problèmes (P, T*) ; – représentation (L) ; – utilisation d'un langage et d'opérations de nature symbolique, formelle et technique (R, Σ) ; – utilisation d'instruments et d'outils (R, Σ).

Tableau 5 : Relations entre les éléments du modèle cK Φ et les composantes de trois modèles de compétences mathématiques. Comme les éléments du modèle cK Φ sont indissociables pour une conception, ces relations témoignent du fait que les compétences mathématiques se définissent non pas de façon disjointe, mais selon des caractéristiques dominantes.

Les modèles de compétences sont nombreux et variés. Ils s'organisent habituellement en compétences générales ou transversales, de même qu'en compétences disciplinaires et transdisciplinaires. Ils varient souvent en fonction du niveau scolaire visé (élémentaire versus supérieur) et de son domaine d'application (définition d'un programme de formation, évaluation d'acquis entre réalités socioculturelles). Toutefois, par leur degré élevé de généralité, les compétences transversales se comportent presque de façon holiste pour rendre compte du caractère local des conceptions. On peut certes imaginer une décomposition des compétences transversales en éléments constitutifs, mais encore, les conceptions résultantes s'éloigneraient de la spécificité disciplinaire et y perdraient en pouvoir d'explication. En revanche, l'idée de compétences transdisciplinaires mérite d'être considérée, ne serait-ce parce que le développement d'une culture mathématique passe par la résolution (au sens large) de situations-problèmes issues de contextes scientifiques (Kahane, 2002). C'est pourquoi nous avons retenu les modèles de compétences mathématiques du ministère de l'Éducation des loisirs et du sport du Québec (Méls, 2003, 2006), du projet européen Tuning Educational Structures (Tuning, 2003) et du Programme international OCDE/PISA (Pisa, 2003), dont la

définition des compétences s'inspire des travaux de Niss (1999, 2002) et de ses collègues danois. Au tableau 5, nous dressons la liste des compétences de chaque modèle, et, pour chacune d'elles, nous associons les éléments correspondants qui proviennent du modèle de Balacheff et Margolinas (2005). Par T^* , nous intégrons les processus «extra-mathématiques» de transfert et de décontextualisation qui ne sont pas considérés formellement dans le modèle $cK\phi$. Ces processus nous semblent nécessaires pour adjoindre l'exercice de modélisation au modèle de connaissances, sans restreindre celui-ci à un exercice de traduction entre systèmes de représentation mathématique (voir les trois compétences concernées au tableau 5). Le transfert et la décontextualisation appartiennent au processus plus large de mathématisation (au sens de Pisa, 2003) et relèvent de structures de contrôle qui vont au delà du domaine proprement mathématique, tant en termes de contenu (situations de la vie réelle impliquant un transfert des acquis scolaires) qu'en termes de contexte (environnements complexes et dynamiques de la vie réelle ainsi qu'aux tâches de raisonnement)⁴.

L'argumentation mathématique apparaît expressément dans Pisa (2003) (voir tableau 5) ; dans Méls (2003, 2006), elle s'inscrit dans la compétence «déployer un raisonnement mathématique», mais dans Tuning (2003), on n'en retrouve aucune mention explicite. Pourtant, les auteurs du projet parlent de «concevoir des démonstrations» de façon progressive à travers des situations diverses qui s'étalent sur plusieurs cours, intention qu'ils opposent à «faire des démonstrations» avec l'idée d'acquérir l'habileté démonstrative de façon immédiate dans une sorte de cours éponyme (p. 188). Puisque les rapports de l'argumentation dans la conception de démonstration sont bien connus dans la littérature classique (v.g. Hanna, 1991 ; Boero, 1999), il en ressort que c'est surtout au niveau des opérateurs et des contrôles que l'élève et l'agent didactique sont susceptibles de se rejoindre. Or, la distinction entre opérateurs et contrôles n'est pas absolue, mais relative à une conception. En géométrie, l'opérateur peut être la réalisation explicite et fonctionnelle d'un contrôle, ce qui est le cas lorsqu'on justifie une inférence avec :

- la sélection d'une propriété dans un menu déroulant (action) ;
- l'écriture du nom d'une définition ou l'énumération de celle-ci (discursif) ;
- le déplacement d'éléments d'un dessin dynamique dans une zone signifiante pour représenter la propriété qui demeure invariante dans le mouvement (graphique).

⁴ À la limite, parce que les contrôles restent le plus souvent implicites et qu'ils rassemblent, entre autres, les métaconnaissances (Balacheff & Margolinas, 2005), nous aurions pu inclure par extension ces processus dans Σ . Par contre, les exemples donnés par ces auteurs sont tous déjà modélisés mathématiquement et il semble qu'il s'agit là d'une intention du modèle $cK\phi$.

Faut-il signaler qu'ici, l'opérateur ne se considère pas dans une relation de représentation sémiotique, c'est-à-dire pour ce qui regarde le système L, mais selon des rapports logiques ou dialogiques à d'autres propositions. Que l'opérateur soit formulé graphiquement, discursivement ou dans l'action, ce qui compte est son choix et le rôle qu'il joue dans une inférence, un raisonnement ou une argumentation. Ainsi, en résolution de problèmes, lorsque le système tutoriel a déjà posé les caractéristiques heuristiques et discursives du milieu – dans Turing, les contrôles a priori renvoient au graphe inférentiel et aux messages disponibles –, l'agent didactique stimule le raisonnement de l'élève et agit sur ses compétences argumentatives lorsqu'il intervient par rapport aux opérateurs et aux structures de contrôle afférents au système.

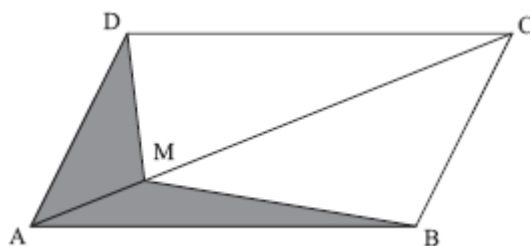
Malgré l'importance des problèmes envers les conceptions, l'amélioration de compétences argumentatives ne réside donc pas tant dans le choix d'une classe de problèmes P, mais dans la qualité d'un processus argumentatif qui se fonde sur les conditions particulières de chaque problème. Il se peut même que la qualité d'une argumentation interfère avec l'enjeu de l'apprentissage. Par exemple, si l'agent didactique retournait un oracle, ce message aiderait probablement l'élève dans son raisonnement ou, à tout le moins, encouragerait le processus argumentatif. Mais il risquerait en même temps de modifier la conception cible de la situation. Par contre, si l'élève refusait, évitait ou ne résolvait pas le problème, l'agent didactique serait dans l'obligation d'aider l'élève dans son cheminement, à l'image de l'enseignant, ce qui légitime l'emploi occasionnel d'oracles. Pour reprendre l'idée de contraintes proscriptives de viabilité, il faut comprendre que la notion de qualité ne vise pas l'enrichissement de la méthode argumentative, mais que les messages de l'agent didactique permettent au système tutoriel de s'assurer que l'agent apprenant travaille dans la même situation-problème que celle qui est proposée et qu'il en respecte la logique interne – deux conditions indispensables pour le développement de l'autonomie chez l'élève (v.g. Cobo & al., 2007).

4. Évaluation des compétences argumentatives

Nos systèmes tutoriels s'intègrent au système didactique qui comprend l'enseignant. Dans cette perspective, chaque système tutoriel est un milieu adidactique sur lequel l'enseignant peut agir en modifiant les caractéristiques heuristiques et discursives du milieu. Toutefois, la présence d'un agent tuteur au sein du système sujet-milieu engendre un sous-système didactique dans lequel l'agent tuteur se substitue momentanément à l'enseignant habituel. En simulant l'argumentation à l'aide de messages, le milieu ne se réduit donc pas à un lieu de production et d'interactions puisque le processus argumentatif même agit sur la conception du sujet, notamment au niveau des opérateurs et du contrôle. L'évaluation de compétences argumentatives doit alors se réaliser sur deux plans,

celui de la relation didactique réelle et celui de la relation didactique simulée. Dans le premier cas, l'évaluation résulterait de la comparaison d'environnements (v.g. EIAH versus papier-crayon) ou de milieux (v.g. AgentGeom versus Turing), comme si c'était la performance de l'apprenant que le système permet d'évaluer qui était responsable de l'évolution des compétences. Mais pour réaliser ce type de comparaison, s'il faut déjà mobiliser des moyens d'analyse qui débordent largement le cadre d'étude actuel, la comparaison demeure tributaire d'une évaluation à l'interface d'un même système tutoriel. C'est-à-dire une évaluation dans le second plan, qui considère la progression de l'acte argumentatif durant la résolution d'une séquence de situations-problèmes appropriées au système tutoriel. Bien que pour un élève donné, cette progression peut se relativiser par une sorte de rapprochement à un résultat optimal ou selon les résultats d'autres élèves, les critères d'évolution restent internes au système sujet-milieu.

Si M est un point quelconque de la diagonale $[AC]$ du parallélogramme ci-contre, quelle relation y a-t-il entre les aires des triangles ombrés ?



Situation 6 : Énoncé du problème du parallélogramme.

4.1. Résolution du problème du parallélogramme

Afin d'illustrer l'évaluation dans le second plan et, notamment, les critères d'évolution de l'acte argumentatif, nous proposons un exemple de résolution du *problème du parallélogramme* (situation 6) qui provient d'une phase de prototypage avec Turing. Le graphe inférentiel a été construit à partir de l'espace-solution du problème⁵ (Cobo & Fortuny, 2000) et l'ensemble des messages a été retenu au terme de la programmation des messages par défaut. Pour la résolution du problème, nous avons autorisé, dans la zone graphique, trois primitives de construction :

- créer une parallèle passant par un point (C_1) ;
- créer une perpendiculaire passant par un point (C_2) ;
- tracer un segment (C_3) ;

⁵ De l'anglais «basic space of the problem».

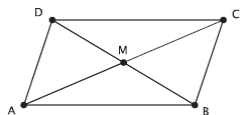
et, dans la zone discursive, les règles d'inférence suivantes⁶ :

- les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu (P1) ;
- propriété de Thalès (P2) ;
- deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles (P3) ;
- deux triangles de même base et de même hauteur ont la même aire (P4) ;
- si on enlève la même aire dans deux figures de même aire, alors il reste deux figures de même aire (P5) ;
- la médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire (P6) ;
- définition de la médiane d'un triangle (D1).

Discours de l'élève (par expansion discursivo-graphique)		Médiation du milieu social
Actions graphiques	Actions discursives	Messages de l'agent didactique
	$A_1 : \text{Aire}[A, D, M] > \text{Aire}[A, M, B]$. $A_2 : \text{Aire}[A, D, M] < \text{Aire}[A, M, B]$. $A_3 : \text{Aire}[A, D, M] = \text{Aire}[A, M, B]$.	M_{10} : «Es-tu bien sûr que c'est ce que tu penses ?» M_{20} : «Est-ce que tu réfléchis sur le dessin ou tu ne fais que le regarder ?» M_{30} : «Je ne vois pas pourquoi.» M_{31} : «Tu écris un énoncé, mais d'où vient-il ?» M_{32} : «Tu dis que $\text{Aire}[A, D, M] = \text{Aire}[A, M, B]$, mais je ne vois pas comment tu arrives à ce résultat.» M_{33} : «Peut-être devrais-tu consulter l'information suivante : • <u>La résolution d'un problème</u> • <u>Le fonctionnement d'une déduction</u> • <u>Le calcul d'aire</u>
• Accès au lien <u>Le fonctionnement d'une déduction</u>. • Accès au lien <u>La résolution d'un problème</u>.		M_{34} : «Si $\text{Aire}[A, D, M] = \text{Aire}[A, M, B]$, c'est peut-être en partie parce que

⁶ Aucune inférence autorisée se rapporte aux propriétés de la symétrie centrale car cette notion n'avait pas encore été à l'étude au moment de notre expérience.

- Déplacement du point M sur [AC] ; M est laissé dans le voisinage du milieu de ce segment.



A₄ : Sélection de la propriété :
«Si on enlève la même aire dans deux figures de même aire, alors il reste deux figures de même aire».

- Déplacement du point M sur [AC] ; M est laissé près de C.

- Accès au lien [La construction de figures intermédiaires](#).

A₅ : Construction de [DB].

A₆ : Définition de O, milieu de [DB].

A₇ : «O est le milieu de Segment[DB]».

A₈ : Sélection de la propriété :
«Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu».

A₉ : «O est le milieu de Segment[DB]».

A₁₀ : «Dans Polygone [A, B, D],

Segment[AM] est une base commune.»

M_{3/5} : «Si tu n'es pas en train de réfléchir, il faut que tu demandes de l'aide à un compagnon.»

M_{4/0} : «Je veux bien, mais pourquoi ?»

M_{4/1} : «Tu déduis la conclusion à partir d'une propriété, mais sur quel énoncé te bases-tu ?»

M_{4/2} : «Tu dis que Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B], selon la propriété qui dit que si on enlève la même aire dans deux figures de même aire, alors il reste deux figures de même aire, mais je ne vois pas sur quoi tu fondes ce résultat.»

M_{4/3} : «Peut-être devrais-tu consulter l'information suivante :

- [La construction de figures](#)

[intermédiaires](#)

- [Le fonctionnement d'une déduction](#)

- [L'égalité d'aires](#)»

M_{7/0} : «Je ne vois pas pourquoi.»

M_{7/1} : «Tu semble déduire un énoncé, mais à partir de quelle hypothèse et selon quelle propriété ?»

M_{9/0} : «Je le sais, tu l'as déjà dit, mais où veux-tu en venir au juste ?»

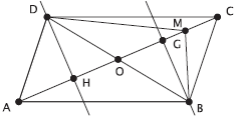
A₁₄ : Construction de [DH] perpendiculairement à [AC], H ∈ [AC]. A₁₅ : Construction de [BG] perpendiculairement à [AC], G ∈ [AC]. 	Segment[AO] est la médiane issue de A». A₁₁ : Sélection de la définition de la médiane. A₁₂ : Sélection de la propriété : «La médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire». A₁₃ : «Aire[A, D, O] = Aire[A, B, O]». A₁₆ : «Segment[AO] est une base commune». A₁₇ : Sélection de la propriété : «Deux triangles de même base et de même hauteur ont la même aire». A₁₈ : «Segment[DH] = Segment[BG]». A₁₉ : «Segment[AM] est une base commune.» A₂₀ : Sélection de la propriété : «Deux triangles de même base et de même hauteur ont la même aire». A₂₁ : «Polygone[ABCD] est un parallélogramme».	M₁₀₀ : «Pourquoi ?» M₂₀₀ : «...et donc Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B].» M₂₀₁ : «C'est très bien, mais il y a encore une déduction que je ne comprends pas.» M₂₀₂ : «Tu dis que O est le milieu de Segment[DB], selon la propriété qui dit que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, mais je ne vois pas comment tu fondes ce résultat.» M₂₁₀ : «Bravo! À mon avis, on tient une solution.»
---	--	---

Tableau 7 : Acte argumentatif dans la résolution du problème du parallélogramme avec Turing.

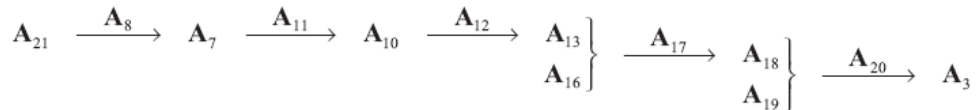
Le tableau 7 résume l'argumentation qui découle du processus de résolution d'un élève de 14 ans. Son discours, qui s'exprime par expansion discursivo-graphique, se constitue par la suite des actions signifiantes A_i , pour $1 \leq i \leq 21$, tandis que la médiation du milieu social s'offre avec les messages $M_{m|n}$ de l'agent didactique, pour $m \in \{1, 2, \dots, 21\}$ et $0 \leq n \leq 5$. De façon générale, on peut dire que l'agent didactique est réactif⁷. Mis à part les formules usuelles de salutation, l'agent didactique attend une action signifiante de l'élève avant d'envoyer un message. Il compare l'action du moment aux inférences du graphe et aux actions déjà enregistrées, et, s'il y a lieu, il retourne un message, selon la valeur heuristique de l'action et le niveau de contrôle souhaité. Ainsi, lorsque l'action correspond à une inférence du graphe, la suggestion est au niveau :

- 0 (ou «situationnel») lorsque le message porte sur les constituants de la relation didactique, dont le milieu, le contrat ou le rôle des agents. Les messages qui visent à entretenir la conversation, sans apport d'information, appartiennent à ce niveau ;
- 1 (ou «essentiellement sémiotique») lorsqu'il contient une suggestion métamathématique de type descriptif, que ce soit par rapport à P, R, L ou Σ . En particulier, les suggestions qui renvoient à R ou Σ se réfèrent essentiellement au statut des actions dans une inférence ou dans l'articulation d'un raisonnement complet ;
- 2 (ou «essentiellement cognitif») lorsqu'il porte sur le contenu mathématique de la situation-problème (concepts et processus), dont le contenu relatif à la conception-cible, c'est-à-dire l'enjeu de l'apprentissage ;
- 3 (ou «ressources») lorsqu'il oriente l'élève vers une source d'information connexe. Il s'agit principalement de liens hypertextes, susceptibles d'être alloués à plusieurs élèves en même temps, et qui débouchent vers des fiches explicatives avec contenu multimédia (textuel, visuel ou sonore) ;
- 4 (ou «relance») lorsqu'il contient des éléments ou une piste de solution qui visent à remettre en marche le processus de résolution. Ces suggestions sont de nature et de fonction variées, comme proposer verbalement une relation entre énoncés, un pas de construction figurale ou le déplacement d'un point mobile sur un objet-trajectoire géométrique, donner un dessin en définissant de nouveaux objets ou en ramenant l'intérêt sur un cas de figure particulier, ou répondre simplement avec un oracle ;

⁷ Ici l'adjectif «réactif» est pris dans son sens courant. Il se distingue du sens informatique employé à la section *Le système Turing*.

- 5 (ou «appel à l'aide externe») pour ouvrir le système sujet-milieu à la relation didactique réelle de façon à limiter toute intervention providentielle de l'agent didactique, tel un *deus ex machina*.

Autrement dit, l'agent didactique ne cherche pas à diriger séquentiellement l'élève dans une stratégie. D'une part, il s'assure progressivement de la cohérence des inférences et de la stabilité du cheminement de l'élève dans au moins une stratégie disponible. Du point de vue de l'évaluation, cela permet de considérer distinctement raisonnement et discours, le raisonnement de l'élève devenant un arrangement structuré de son discours :



En outre, le raisonnement d'un élève peut servir de base pour la rédaction d'une solution a posteriori et, ainsi, constituer un moyen de contrôle didactique sur l'à-propos de la médiation par l'agent didactique, ne serait-ce qu'en termes d'opérateurs et de contrôles. D'autre part, l'agent didactique communique avec l'élève à partir des actions de celui-ci, ce qui constitue une part d'adaptation du milieu au sujet – comme avec un interlocuteur humain qui collabore au processus de résolution-découverte. Si l'adaptation du milieu au sujet relève de la relation didactique simulée, elle se traduit en contraintes proscriptives de viabilité dans la relation didactique réelle.

4.2. Précisions sur l'acte argumentatif

En offrant au maître ou au chercheur la possibilité de modifier le graphe inférentiel et les messages de l'agent didactique, l'illustration du tableau 7 se fonde en fait sur un ensemble de contraintes particulier. Pour éviter l'effet trop relatif de l'exemple, nous commentons l'acte argumentatif dans une perspective qui s'ouvre également sur la relation didactique réelle. Néanmoins, les critères d'évaluation de l'acte même restent sur le plan de la relation didactique simulée.

L'élève commence avec une action signifiante difficile à interpréter ($\mathbf{A}_1$: «Aire[A, D, M] > Aire[A, M, B]»). Même si on peut supposer qu'il s'agit d'une première conjecture, on ne sait pas si elle est issue d'un raisonnement préalable, d'une perception visuelle ou d'un essai trichotomique dans la comparaison d'aires. L'agent didactique, lui, la considère comme une action «hors-sujet», c'est-à-dire une action signifiante qui n'apparaît pas dans le graphe inférentiel. Il retourne le message $\mathbf{M}_{1|0}$ («Es-tu bien sûr que c'est ce que tu penses ?»), soit un message de niveau 0 qui suit l'action $\mathbf{A}_1$ et qui appartient à la catégorie «hors-sujet». Devant le doute amené par $\mathbf{M}_{1|0}$, l'élève revient avec une seconde conjecture ($\mathbf{A}_2$: «Aire[A,

$D, M] < Aire[A, M, B]]$). On ne connaît encore rien sur ce qui fonde cette dernière, mais le système retourne un second message «hors-sujet» ($M_{2|0}$: «Est-ce que tu réfléchis sur le dessin ou tu ne fais que le regarder ?»). Il s'agit d'un message choisi dans un ensemble de messages équivalents («hors-sujet» de niveau 0), ensemble dont la constitution vise à maintenir, d'un message à l'autre, une même valeur logique, sociale ou épistémique (au sens de Duval, 1995, p. 112). Par contre, du point de vue de l'argumentation, le seul fait de voir apparaître un second message, même de facture équivalente, est susceptible de modifier momentanément la valeur épistémique de la conjecture du problème. Ne serait-ce parce qu'indirectement, le message n'approuve pas l'action. L'acte argumentatif est bien enclenché ; l'agent didactique agit déjà sur R.

On aurait pu lancer, après les actions A_1 ou A_2 , une dialectique du contre-exemple (Lakatos, 1984) en ajoutant au graphe inférentiel une sous-stratégie qui débouche sur une conclusion fausse. Comme avec une suite d'inférences qui partent d'hypothèses logiquement incompatibles entre-elles, mais dont la conclusion paraît vraisemblable à cause de l'apparence visuelle du dessin (voir paragraphe *Sur le discours à la section Construction d'EIAH et didactique des mathématiques*). Dans ce cas, les messages par défaut demeurent les mêmes, mais ceux qui se rapportent à une telle conclusion appartiennent à une catégorie différente de la conclusion du problème. Du point de vue heuristique, cette disposition soutient la révélation d'une contradiction pour amener l'élève à invalider une action ou un groupe d'actions dans la logique du problème. Du point de vue argumentatif, cela permet :

- d'éprouver la valeur épistémique attachée à la conjecture, notamment en retournant graduellement des messages de type «en es-tu sûr ?», «en es-tu bien sûr ?», «en es-tu tout à fait sûr ?» (messages de niveau 0) ;
- d'expérimenter la conséquence d'un contre-exemple sur la conjecture, sa preuve (la sous-stratégie), ou bien encore par rapport à la conception-cible (C) ou ses fondements rationnels (Σ).

L'effet d'un message peut être fort différent selon le type de relation que l'élève entretient avec l'agent et la réalité socioculturelle dans lequel il se trouve (voir paragraphe *Sur le débat social simulé à la section Construction d'EIAH et didactique des mathématiques*). Avec «en es-tu sûr ?» par exemple, si l'élève perçoit une relation d'autorité, cela risque de produire une remise en cause de son affirmation, alors que s'il a l'impression d'agir de connivence avec l'agent, c'est plutôt l'explication qui devrait s'ensuivre. En fait, les sous-stratégies sont idéales pour tester la confiance en soi (au sens de la dissonance cognitive de Festinger, 1957). En cherchant sciemment à déséquilibrer l'élève par des messages adaptés, l'agent didactique assumerait conjointement plusieurs rôles (tuteur, compagnon ou perturbateur, pris ici au sens de Aïmeur & al., 2000), tout en se définissant de façon

distincte par rapport à chacun d'eux. Qu'on intègre ou non au système sujet-milieu la dialectique de Lakatos ou la dissonance de Festinger, l'agent didactique est forcément un être de nature autonome par rapport à ce que devrait être un modèle humain traditionnel.

L'élève poursuit en écrivant la dernière conjecture possible (A_3 : «Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B]») puis, il attend. Peut-être souhaite-il recevoir un peu d'aide, un mot d'encouragement ou un message d'approbation. Toujours est-il que cette attitude laisse présumer une incapacité, pour le moment, à défendre la conjecture du problème. C'est pourquoi l'agent didactique envoie graduellement les messages $M_{3|n}$, pour $0 \leq n \leq 3$. À chaque fois, il attend une action signifiante de l'élève. Si elle ne se produit pas au bout d'un certain temps, le marqueur de niveau s'incrémente d'une unité ($n + 1 \rightarrow n$) et l'agent didactique retourne une nouvelle suggestion. Les trois premiers messages de la suite ($M_{3|0}$, $M_{3|1}$ et $M_{3|2}$) ne semblent pas produire de réaction. Il faut attendre au quatrième message ($M_{3|3}$) pour que l'élève consulte successivement deux liens hypertextes. Bien qu'en l'occurrence, ces actions ne sont ni graphiques, ni significatives, nous les indiquons à gauche, dans la colonne du discours de l'élève (tableau 7), parce qu'elles demeurent pertinentes pour comprendre l'effet des messages. L'élève ne produit toujours pas d'action signifiante. L'agent didactique retourne d'abord un message de relance ($M_{3|4}$: «Si Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B], c'est peut-être en partie parce que Segment[AM] est une base commune.») et, ensuite, un message d'appel à l'aide externe ($M_{3|5}$: «Si tu n'es pas en train de réfléchir, il faut que tu demandes de l'aide à un compagnon.»). Sans demander l'assistance de quiconque, l'élève décide de déplacer le point M sur [AC] et le laisse dans le voisinage du milieu de celui-ci. Il sélectionne enfin une propriété (A_4 : Sélection de la propriété P_5) puis se met à attendre de nouveau. Le choix soudain de cette propriété peut paraître étonnant. Mais si on interprète le déplacement du point M comme la considération d'un cas de figure et que l'on recoupe celui-ci avec l'information contenue dans les liens hypertextes consultés⁸, il est raisonnable de croire que l'élève cherche maintenant à justifier A_3 , ne serait-ce qu'avec un argument massue. L'acte argumentatif se continue ; l'agent didactique agit aussi sur Σ .

Contrairement aux actions «hors-sujet», le déplacement du point M n'est pas une action signifiante parce que l'agent didactique ne peut pas l'interpréter. Il aurait été possible de prévoir une zone de sensibilité pour reconnaître un objet géométrique qui se déplace vers un lieu déterminé (le point M au voisinage du milieu de [AC]). Autrement dit, permettre à l'élève de produire dynamiquement une action graphique signifiante uniquement par expansion graphique, et non pas seulement

⁸ Pour éviter d'alourdir l'article, nous ne reproduisons pas les fiches d'information. Elles s'inspirent toutefois du travail réalisé par notre équipe lors du projet Intermates (voir <http://www.edu365.com/aulanet/intermates/index.htm>).

en construisant de nouveaux objets géométriques. Les actions graphiques significantes peuvent aussi s'étendre au fait de :

- suivre un parcours déterminé qui n'est pas un objet-trajectoire géométrique apparent, mais auquel s'attache une action signifiante dans la logique du problème ;
- laisser une sous-figure dans un état ou une position particulière, notamment à la suite d'une transformation géométrique qui n'est pas soutenue par une primitive de construction – ce qui exclut d'emblée les isométries ou les homothéties typiques des applets de géométrie dynamique.

On peut même songer à détecter certains parcours invariants empruntés par le curseur via la souris, ou bien encore suivre les yeux ou l'expression de l'élève lorsqu'il réfléchit sur le dessin (v.g. IBM-ARS, 2006a, b). Il s'agit certes de réalisations ou de projets technologiques qui ne sont pas implantés dans Turing mais, quoi qu'il en soit, cela montre jusqu'à quel point la notion d'expansion graphique est utile à la reconnaissance, par le système, d'actions graphiques significantes. En les incluant à une sous-stratégie, ce genre d'action facilite le traitement de cas de figure dont la résolution repose sur la particularité du cas avec, éventuellement, l'intégration d'une dialectique du contre-exemple au processus.

Après A_4 , l'agent didactique envoie les messages $M_{4|0}$, $M_{4|1}$ et $M_{4|2}$. À la suite de la dernière suggestion, qui rapproche A_3 et A_4 ⁹, l'élève déplace de nouveau le point M pour le laisser proche du point C. L'agent continue avec un message de niveau 3, ce qui entraîne la consultation du lien sur la construction de figures intermédiaires. Manifestement, le message $M_{4|3}$ est fructueux. L'élève construit le segment [DB] dans la zone graphique (A_5), il y définit le point O en son milieu (A_6), puis il convertit cette action graphique en action discursive (A_7) – non pas à l'aide du bouton «figure $\Rightarrow$ texte», mais en la réécrivant dans la zone discursive. On peut se demander si la suite d'actions A_5 , A_6 et A_7 n'est qu'un essai, comme ce qui semble être le cas avec les actions précédentes, ou si elles obéissent maintenant à un plan. En les recoupant avec les actions subséquentes, on comprend qu'une intention se dessine à partir des aires des triangles de la conjecture (A_3). C'est-à-dire qu'en plaçant le point M près de C, l'élève rend plus facile l'appréhension visuelle d'une base et d'une hauteur dans chacun des triangles ADM et AMB, ce qui est confirmé un peu plus tard par la suite d'actions A_i , pour $14 \leq i \leq 20$. Et qu'en venant de définir le point O, il peut déjà considérer la médiane du triangle ABD (A_{10}).

⁹ Ce rapprochement n'est pas dû à la proximité des actions dans l'acte argumentatif, mais à la présence de deux inférences du graphe qui les accepte.

En termes de raisonnement (voir paragraphe *Résolution du problème du parallélogramme*), l'action A_7 est une rupture. L'élève passe de la conclusion (A_3) à une proposition qui s'attache aux hypothèses :

$$A_{21} \xrightarrow{A_8} A_7$$

Toutefois, il suit maintenant le fil de ses idées. Avec la production de dix actions signifiantes sans médiation (A_{11} à A_{20}), l'élève commande essentiellement le reste de l'acte argumentatif. Les messages M_{70} et M_{71} visaient la cohérence de l'inférence :

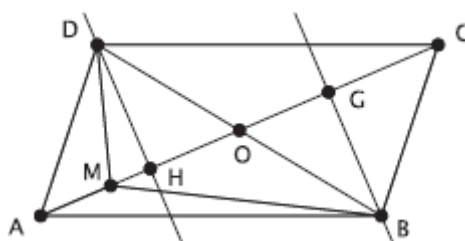
$$\text{ABCD est un parallélogramme} \xrightarrow{P_1} \text{O est le milieu de [DB]}$$

mais l'élève ne répond tout de suite qu'à l'exigence de la justification (A_8). Peut-être qu'en réécrivant «O est le milieu de Segment[DB]» (A_9), il voulait signifier qu'il s'agit là de l'hypothèse cherchée. Après tout, le point O avait déjà été défini graphiquement (A_6). Mais pour l'agent didactique, A_9 est une action discursive redondante qu'il traite comme telle (M_{90} : «Je le sais, tu l'as déjà dit, mais où veux-tu en venir au juste ?»). D'ailleurs, il faut attendre tout à la fin pour que l'agent didactique semble «reprenne le contrôle» de l'argumentation (messages M_{200} , M_{201} et M_{202}). Pour assurer la stabilité du cheminement de l'élève, l'agent didactique revient sur les inférences incomplètes. Ici, comme il ne restait qu'une inférence à satisfaire dans la stratégie, l'élève a su compléter avec l'hypothèse manquante (A_{21} : «Polygone[ABCD] est un parallélogramme»).

On aurait pu souhaiter qu'à la suite des actions A_3 et A_4 , l'agent didactique oriente déjà l'élève vers une stratégie donnée en «forçant» ni plus ni moins une des relations d'inférence du graphe, comme avec celle-ci :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Aire}[A, D, C] = \text{Aire}[A, B, C] \\ \text{Aire}[D, M, C] = \text{Aire}[B, M, C] \end{array} \right\} \xrightarrow{P_5} \text{Aire}[A, D, M] = \text{Aire}[A, M, B]$$

Si l'élève n'avait pas produit l'action signifiante A_5 , le message de relance $M_{4|4}$ prévoyait, entre autres, un rapprochement des actions A_3 et A_4 avec la proposition «Aire[A, D, M] = Aire[A, M, B]». Cependant, une des difficultés du problème est due à la représentation (L). Déjà que l'appréhension visuelle d'éléments de figure appropriés n'est pas évidente en soi, encore faut-il avoir construit ou défini les points remarquables nécessaires à leur expression (milieu O, pieds H et G des hauteurs issues de D et B). En guise de message $M_{4|4}$, l'agent didactique aurait pu retourner un dessin complet comme celui-ci :



qui ne situe pas les hauteurs (DH) et (BG) à l'intérieur des triangles ADM et AMB respectivement (cf. figure de l'élève au tableau 7, en dessous de A_{15}). Or, on sait que comparativement au discours, les représentations graphiques cachent le raisonnement que ses propositions sont censées articuler (Richard, 2004a). L'agent didactique rendrait alors l'expression possible – il s'exprimerait lui-même par expansion discursivo-graphique –, sans donner inévitablement d'indication spécifique sur le raisonnement véhiculé par le dessin.

Le fonctionnement de l'agent didactique autorise le chevauchement de stratégies et il laisse à l'élève l'initiative dans l'acte argumentatif. Au sein du système sujet-milieu, on peut imaginer un décompte de «points d'autonomie» de l'élève à partir du nombre et des niveaux de messages nécessaires à la résolution du problème. Ainsi, le recours fréquent aux suggestions de niveaux élevés («relance» et «appel à l'aide externe») se traduirait par un degré d'autonomie faible. À l'inverse, si les niveaux restaient principalement bas, cela indiquerait non seulement que l'autonomie de l'élève est élevée, mais que le problème de dévolution s'attache davantage à des effets de contrat didactique qu'à des obstacles proprement mathématiques. On peut aussi songer à une mesure de l'efficacité heuristique de l'élève en relevant le nombre de stratégies explorées à la fin d'un processus de résolution. L'élève «heuristiquement efficace» serait celui dont la tendance consiste à résoudre les situations-problèmes en explorant le moins de stratégies possibles. Ou encore, penser à évaluer la continuité du discours de l'élève en comparant le nombre d'actions signifiantes de son cheminement avec celui du raisonnement correspondant, même si celui-ci se rapporte partiellement à plusieurs stratégies. La continuité dans les arguments fournis par l'élève constitue un critère privilégié pour rendre compte de l'amélioration de compétences argumentatives. Ce n'est donc pas tant la difficulté d'une situation-problème pour un groupe d'élèves qui représente un obstacle au développement de ces compétences, mais une disposition au manque d'enchaînement cohérent dans une suite d'idées.

5. Conclusion

En choisissant une approche structurale en géométrie cognitive, nous avons pu donner une forme à un système tutoriel qui permet à la fois le raisonnement, la

construction de figures, l'argumentation et autres combinaisons de moyens interactifs pour la résolution de situations-problèmes complexes. Si la modélisation de connaissances et de compétences est nécessaire à la conception contrôlée du système, elle l'est tout autant pour valider un apprentissage ou pour assurer la formation d'une compétence. Nos systèmes tutoriels n'ambitionnent pas l'automatisation de la relation didactique. D'autant plus que, dans son ensemble, l'amélioration de compétences argumentatives exige déjà la présence d'interlocuteurs humains. Et qu'à l'image du caractère local de la conception, qui demeure indispensable pour l'acquisition de connaissances mathématiques plus vastes, une telle amélioration s'opère progressivement par petites touches, à partir de situations-problèmes variées qui profitent de l'enrichissement mutuel des conceptions. Au contraire, laissant au maître la possibilité d'adapter certaines réactions de l'agent tuteur, nos systèmes s'intègrent à la relation didactique de façon à en respecter les habitudes heuristiques et discursives. Toutefois, pour garantir la complétude de son organisation logique, de même que pour rendre le processus argumentatif conséquent, nos systèmes sont pourvus d'un ensemble de messages par défaut qui se fondent essentiellement sur un graphe inférentiel conçu dans l'esprit de la recherche en didactique – dont l'étude des effets cognitifs, sémiotiques et situationnels de l'interaction sociale en résolution de problèmes. Ces messages s'articulent selon des niveaux de contrôles qui visent à soutenir l'élève dans son cheminement, surtout lorsqu'il se trouve dans une impasse, sans que l'aide proposée n'en vienne à diluer la responsabilité de l'élève pour le développement de son autonomie.

De façon plus générale, nous avons voulu créer un environnement informatique dans lequel la modélisation du comportement humain était conjointe et réciproque à la conception du système. Cela nous paraissait souhaitable puisque, pour pasticher Balacheff et Margolinas (2005)¹⁰, la «modélisation du comportement de l'élève» et le «système informatique disponible» se définissent mutuellement et dialectiquement par la nature et la dynamique du jeu des actions de l'élève et rétroactions du système. En outre, nous savions d'emblée que les structures de contrôle relatives aux conceptions de l'élève et celles qui sont implémentées dans notre système informatique se réfèrent à des modèles mathématiques distincts, dont le modèle de l'agent didactique programmé par l'expert. C'est pourquoi, lorsque l'agent didactique retourne des messages pour soutenir l'élève, il procède déjà avec des moyens heuristiques et discursifs différents. Et l'interaction sociale issue des échanges «élève ↔ agent didactique» se trouve également soumise à des contraintes qui évoquent, d'une certaine façon, les problèmes typiques de l'acte de communication. Pourtant, nous constatons dans cette recherche que l'agent didactique aide effectivement l'élève dans sa démarche et cela, sans besoin d'être

¹⁰ Voir note à la section *Connaissances et compétences*.

directif. On peut certes envisager que même si le sens du message de l'agent renvoie à un modèle différent de celui qui sous-tend l'action signifiante de l'élève, ou que celui-ci ne comprend tout simplement pas ce qu'on lui dit, l'acte même est susceptible de stimuler le processus de résolution, ne serait-ce parce que le message entretient l'interaction sociale. Mais c'est sûrement insuffisant.

Faut-il souligner que le modèle comportemental engendré par l'agent didactique n'est pas déterministe. Car cet agent réagit bien plus aux actions signifiantes de l'élève qu'il n'en prend l'initiative par anticipation. Dans un cas extrême, on peut se demander si cette disposition n'engendre pas une tendance à rendre cohérente chaque inférence d'un raisonnement, sans nécessairement s'accompagner de la prise en charge d'une solution complète. Toutefois, malgré ce risque, malgré les problèmes inhérents à la communication et malgré l'écart incontournable entre les modèles mathématiques de référence, nous croyons que l'élève et l'agent didactique se rejoignent sensiblement dans l'effort de produire des connaissances non contradictoires. C'est-à-dire que l'absence implicite de contradictions dans les modèles de l'expert semble se transférer implicitement avec l'approche structurale du raisonnement qui fonde notre système tutoriel. Nous n'avons pas encore vérifié cette hypothèse, mais nous estimons que toute réponse positive constituerait une clef de voûte dans l'explication de plusieurs questions didactiques. Ainsi, comment l'élève arrive-t-il à produire des réponses adéquates, manifestant par là le succès au moins apparent du tutorat, alors qu'il ne dispose pas (encore) des moyens discursifs ou heuristiques nécessaires ? Pourquoi le maître soucieux du développement de l'autonomie de l'élève réussit-il à le soutenir, envers et contre tous, alors que ses messages ne lui apportent pas toujours l'information convoitée ? Enfin, pourquoi l'élève peut-il développer ses compétences mathématiques, alors que l'évaluation de celles-ci repose subjectivement sur la compétence professionnelle et l'idéologie du maître ?

Remerciements

Le développement de cette recherche a été possible grâce à une subvention du *Fonds québécois de la recherche sur la société et la culture* (FQRSC 2005-AI-97435, Gouvernement du Québec) et au support logistique du *Laboratoire Turing* (<http://turing.scedu.umontreal.ca>).

Références

- AÏMEUR E., FRASSON C. & DUFORT H. (2000), Cooperative Learning Strategies for Intelligent Tutoring Systems, *Applied Artificial Intelligence. An International Journal* **14** (5), 465-490.
- ALEVEN V., POPESCU O. & KOEDINGER K. (2002), Towards Tutorial Dialog to Support Self-Explanation : Adding Natural Language Understanding to a Cognitive Tutor. In Moore, J.D., Redfield, C.L. & Johnson, W.L. (Eds.), *Artificial Intelligence in Education : AI-ED in the Wired and Wireless Future, Proceedings of AI-ED 2001*, 246-255. Amsterdam : IOS Press.
- BALACHEFF N. & MARGOLINAS C. (2005), Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In Mercier, A. & Margolinas, C. (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*, 75-106.
- BOERO P. (1999, juillet-août), Argomentazione e dimostrazione: una relazione complessa, produttiva e inevitabile nella matematica e nella didattica della matematica. *La lettre de la preuve – International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans <http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/990708.html>.
- BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- CARNEGIE LEARNING (2006), *Carnegie Learning's Cognitive Tutor mathematics solutions*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans http://www.carnegielearning.com/approach_cognitive_tutor.cfm.
- COBO P. & FORTUNY J. M. (2000), Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, **42**, 115-140.
- COBO P., FORTUNY J. M., PUERTAS E. & RICHARD P. R. (2007), AgentGeom : a multiagent system for pedagogical support in a geometric proof problem. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **12**, 57-79.
- CORNELLIER L. (2003), *À brûle-pourpoint : interventions critiques*, Sillery, Septentrion.
- DUVAL D. (1995), *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Berne, Peter Lang.
- EL-KHOURY, S., AÏMEUR E., RICHARD P.R. & FORTUNY J.M. (2005), Development of an Intelligent Tutorial System to Enhance Students' Mathematical Competence in Problem Solving. In Richards, G. (Ed.), *Proceedings of World*

Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2005, 2042-2049. Chesapeake, VA : AACE.

FESTINGER L. (1957), *A Theory of Cognitive Dissonance*, Stanford, Stanford University Press.

FESTINGER L. (1989), The arousal and reduction of dissonance in social contexts. In Schachter, S. et Gazzaniga, M. (Éds.) *Extending Psychological Frontiers : Selected Works on Leon Festinger*, 238-257, New York, Russell Sage Foundation.

GUIN D. (1996), A Cognitive Analysis of Geometry Proof Focused on Intelligent Tutoring Systems. In J. M. Laborde (Éd.), *Intelligent Learning Environments : the Case of Geometry*, 82-93, Berlin, Springer Verlag.

HANNA J. (1991), Mathematical Proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 54-61, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

IBM ALMADEN RESEARCH CENTER (2006a), *Eye-Gaze Tracking*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans <http://www.almaden.ibm.com/software/projects/eyegaze/index.shtml>.

IBM Almaden Research Center (2006b), *Creating computers that know how you feel*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans <http://www.almaden.ibm.com/cs/BlueEyes/index.html>.

KAHANE J.-P. (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Éditions Odile Jacob et CNDP.

KOEDINGER K. & ANDERSON J. R. (1993), Reifying implicit planning in geometry: Guidelines for model-based intelligent tutoring system design. In Lajoie, S. P. & Derry, S. J. (Eds.) *Computers as cognitive tools*, 15-46. Hillsdale, NJ, Erlbaum.

LABORATOIRE LEIBNIZ (2003), Baghera Assessment Project : Designing an hybrid and emergent educational society. In Soury-Lavergne S. (Ed.), *Rapport pour la commission européenne, Programme IST, Les Cahiers du Laboratoire Leibniz n° 81*, Grenoble.

LABORDE C. (2001a), Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. *Educational Studies in Mathematics* **44** (1), 151-161.

LABORDE C. (2001b), Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 283-317.

LAKATOS I. (1984), *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*, Paris, Hermann.

LUENGO V. (2005), Some Didactical and Epistemological Consideration in the Design of Educational Software : The Cabri-Euclide Example. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **10**, 1-29.

MÉLS (2003), Chapitre 6 : Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie. *Programme de formation de l'école québécoise, enseignement secondaire*, Publication du Gouvernement du Québec.

MÉLS (2006), *Programme de mathématique au secondaire, 2^e cycle*, Document à usage restreint du ministère de l'Éducation des loisirs et du sport du Québec, version approuvée du 3 juillet 2006.

NISS M. (1999), « Kompetencer og Uddannelsesbeskrivelse » (Competencies and subject description). *Uddanneise* **9**, 21-29.

NISS M. (2002), *Mathematical competencies and the learning of mathematics : the Danish KOM project*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf.

PISA (2003), *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*, Publication de l'Organisation de coopération et de développement économiques.

RABARDEL P. (1995), *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*, Paris, Armand Colin.

RICHARD P.R. (2004a), L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique, *Educational Studies in Mathematics* **57**, 229-263.

RICHARD P.R. (2004b), *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*, Berne, Peter Lang.

RICHARD, P.R. (2006), *Intégration des figures dynamiques dans l'expression écrite du raisonnement mathématique*, Actes du Colloque 2005 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec, 167-181, Montréal, GDM.

RICHARD P.R., EL-KHOURY S., FORTUNY J.M. & AÎMEUR E. (2005), An Open Architecture to Improve the Mathematical Competences in High School. In Kommers, P. & Richards, G. (Eds.), *Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications 2005*, 3395-3402. Chesapeake, VA, AACE.

RICHARD P.R., FORTUNY J.M., COBO P. & AÎMEUR E. (2003), Stratégie argumentative et système tutoriel pour l'apprentissage interactif de la géométrie, *Actes de l'Espace mathématique francophone 2003*, Tozeur, EMF.

SEKIGUCHI Y. & MIYAZAKI M. (2000, janvier), Argumentation et démonstration au Japon. *La lettre de la preuve – International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. Récupéré le 17 juillet 2006 dans <http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/000102.html>.

TROUCHE L. (2002), Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques. In Trouche, L. & Guin, D. (Éds) *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique : un problème didactique*, 187-214.

TUNING (2003), *Tuning Educational Structures in Europe. Informe final. Fase Uno*, Publication de la Commission européenne dans le cadre du programme Socrates, édité par González, J., & Wagenaar, R. Bilbao, Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.

VYGOTSKY L.S. (1978), *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Process*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press.

PHILIPPE R. RICHARD

Département de didactique

Université de Montréal

Canada

philippe.r.richard@umontreal.ca

JOSEP M. FORTUNY

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Universitat Autònoma de Barcelona

Espanya

JosepMaria.Fortuny@uab.es

IDENTITÉ ET FACTEURS AFFECTIFS
DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Abstract. Identity and Affect in Mathematics Learning

In this paper, a high school class is observed in mathematics within a socio-cultural and an affective perspective. The goal of the research is to gain a better understanding of learning mathematics among students belonging to cultural minorities. Relevant relationships between cognitive and affective dimensions – local and global – are established and described within the qualitative micro-ethnographic approach and with help of case study. We also try to use the notions of social identity and cultural identity for interpreting how students engaged in this training emotionally react.

Résumé. L'article présente une observation de classe en cours de mathématiques dans l'enseignement secondaire selon une perspective socioculturelle et affective. L'objectif d'une telle recherche est de mieux comprendre l'apprentissage de la mathématique en contexte multiculturel par des élèves appartenant à des minorités culturelles. Il s'agira, par une approche méthodologique qualitative micro-ethnographique et l'étude de cas, d'établir et de décrire des relations entre les domaines cognitif et affectif (local et global) significatives pour l'apprentissage mathématique. On tente aussi d'interpréter en termes d'identité sociale et d'identité culturelle les réactions émotionnelles des élèves engagés dans cet apprentissage.

Mots-clés. Aspects socioculturels en éducation, facteurs cognitifs et affectifs en mathématiques, identité culturelle, micro-ethnographie, théories sociales de l'apprentissage.

Introduction

Les recherches récentes mettent un accent croissant sur des aspects socioculturels et affectifs de l'enseignement des mathématiques. Les études qui conçoivent l'apprentissage mathématique comme une forme de participation sociale (Abreu, 1998 et 2002 ; Abreu et Cline, 2003 ; Gómez-Chacón, 1998) ont mis en relief la nécessité de prêter attention à la pluralité de significations, de valorisations, de légitimités et d'identités qui coexistent dans la classe et, de façon simultanée, à la gestion sociale de cette pluralité. Dans ces travaux, l'élève apparaît comme quelqu'un pour qui les significations personnelles ne coïncident pas toujours avec celles qui sont légitimées dans la classe, quelqu'un qui se trouve soumis aux influences des valorisations de son entourage et qui, de plus, est en perpétuelle reconstruction de son identité en fonction des pratiques auxquelles il participe.

Dans l'étude des processus d'apprentissage des mathématiques, c'est jusque dans un passé récent une vision essentiellement cognitive et interne à l'individu qui prédominait, mettant en relief les obstacles cognitifs. Mais il est nécessaire de mettre en évidence, à côté de ces obstacles, tout ce qui peut résulter des formes de participation, de l'engagement et de la légitimation du savoir dans les situations de classe, ainsi que la manière dont les espaces d'apprentissage sont des espaces de négociation d'une identité sociale et culturelle. Des recherches en classe conduites selon une perspective socioculturelle et affective ont mis ces aspects en lumière.

Notre regard s'est focalisé sur la dimension affective rapportée au contexte social, afin de chercher à mieux comprendre les élèves plongés dans des contextes scolaires multiculturels. On a voulu explorer et décrire des tensions, des conflits, des résistances, qui se présentent dans l'apprentissage des mathématiques dans des contextes multiculturels et qui dérivent du positionnement des élèves par rapport aux représentations sociales de leur groupe socioculturel d'appartenance.

Les objectifs de cette recherche ont été :

- d'établir et de décrire des relations entre les domaines cognitif et affectif (local et global) significatives pour l'apprentissage mathématique ;
- d'analyser la possibilité d'interpréter les réactions émotionnelles du point de vue de l'identité sociale et de l'identité culturelle, en soulignant les scénarios émotionnels où l'identité socioculturelle se manifeste dans l'apprentissage des mathématiques et comment cette identité configure les facteurs affectifs.

1. Cadre théorique

Notre travail concerne deux domaines de recherche différents mais liés. D'un côté, on trouve les facteurs affectifs dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et, d'un autre côté, le concept de l'identité dans l'apprentissage. C'est pour cela que nous allons structurer le travail en deux parties.

1.1. L'affectif en mathématiques

Les facteurs affectifs ont été considérés comme un sujet d'intérêt dans le domaine de la recherche de l'enseignement des mathématiques (McLeod, 1992). Une ligne de recherche s'est centrée sur le rôle des émotions dans la pensée mathématique, et en particulier sur la résolution de problèmes. Une autre ligne d'investigation a été concentrée sur le rôle de l'affectif dans l'apprentissage, et son rôle dans le contexte social de la classe. Dans ces études les variables affectives ont été considérées comme des éléments significatifs pour les résultats de l'apprentissage ou comme des indicateurs de succès futur. Cela est dû en partie à la diversité des recherches

menées et aux diverses perspectives épistémologiques adoptées par les chercheurs. On trouve donc une grande diversité de cadres théoriques de référence (théories cognitives de l'émotion (Goldin, 1988 et 2000 ; DeBellis & Goldin, 1997), théories constructivistes sociales et Interactionnisme (Cobb, Yackel & Wood, 1989) ; théorie psychanalytique (Nimier, 1988 ; Evans, 2000 ; Blanchard-Laville, 2003))

McLeod (1992) a identifié trois concepts qui sont utilisés dans la recherche qui concernent l'affectif en mathématiques : conceptions, attitudes et émotions, et les a classifiés en décrivant les émotions comme la dimension la plus intense et la moins stable, les conceptions comme la dimension la moins intense et la plus stable, et en plaçant les attitudes entre les deux. Plus tard, Lafortune et St. Pierre (1994) et DeBellis et Goldin (1997) ont ajouté un autre élément : les valeurs. La plupart des chercheurs qui ont abordé le domaine affectif, même s'ils se sont rapportés à divers cadres de référence, ont utilisé ces concepts.

Les émotions sont probablement un des concepts les plus essentiels débattus à propos du domaine affectif. Les chercheurs qui ont étudié la psychologie de l'émotion ont utilisé des points de vue différents mais ne sont pas parvenus à un accord sur ce qu'est l'émotion. Cependant, ils sont d'accord sur quelques aspects. Premièrement, les émotions sont liées aux buts personnels et aux systèmes de valeurs. Deuxièmement, les émotions ont des conséquences physiologiques et se distinguent de la partie non-émotionnelle de la cognition. Et troisièmement, on porte un regard fonctionnel sur les émotions, car leur rôle est important dans la dimension adaptative de l'homme (Evans et al, 2003 ; Mandler, 1989).

En analysant les recherches effectuées, nous avons pu noter que les tendances cognitivistes (sociocognitives) et constructivistes constituent le principal substrat théorique en ce qui concerne l'émotion. On explique l'émotion comme l'interruption d'un projet et comme le résultat de divers processus cognitifs : évaluation de situation, attribution de causalité, évaluation d'attentes et de buts.

Les théories traditionnelles concernant l'émotion semblent être caractérisées par les polarisations ou dichotomies qu'elles suscitent (Scherer, 2000) : innée ou construite, subjective ou sociale, statique ou dynamique. La caractérisation des émotions au sein d'une théorie socioconstructiviste de l'apprentissage essaie de faire interagir ces pôles. Dans la recherche décrite ici, nous avons tenu compte de la conception systématique développée par Mascolo, Harkins et Harakal (2000 : 127) pour la prise en compte de l'affectif et le développement de la motivation en mathématiques. Cette conception est aussi utilisée dans le domaine de l'enseignement des mathématiques par d'autres auteurs comme Opt ' Eynde et De Corte (2002), Gómez-Chacón (2004 et 2005). Par rapport à ce développement émotionnel, Mascolo Harkins et Harakal proposent un point de vue systématique constitué par quatre affirmations :

- les états et expériences émotionnelles comportent des processus formés par de nombreux éléments ;
- les expériences émotionnelles émergent grâce aux réglages mutuels des éléments du système dans le temps et à l'intérieur des contextes ;
- un élément du système est constitué des contextes sensitifs, qui non seulement agissent et s'adaptent eux-mêmes, mais sont sujets à divers changements dans le contexte social ;
- les expériences émotionnelles s'ordonnent selon l'ampleur des variations, en des modèles plus ou moins stables (ou *attractors*).

Ainsi cette approche décrit l'émotion comme un processus aux composantes multiples : le système de valorisation, le système affectif et le système d'action (Mascolo et autres, 2000). Nous considérons qu'un constituant essentiel de l'expérience émotionnelle est l'interaction coordonnée entre tous ces systèmes pour atteindre une conceptualisation intégrée des émotions (Gómez-Chacón, 2000).

Les principaux fondements de notre approche sont au nombre de trois :

1) *L'accent est mis sur le processus de l'émotion.* Les émotions font partie d'un épisode émotionnel dans lequel les systèmes de valorisation, le système affectif et le système du comportement (action) agissent au même temps. Donc, les émotions émergent grâce aux interactions entre ce qui est cognitif (valorisations -*appraisal*-), l'affectif (SN et système d'orientation et ce qui est conatif (moteur et motivationnel). Par conséquent, les émotions ne sont pas des réponses automatiques biologiquement données mais résultent de l'interaction sociale, en particulier de la façon dans laquelle les individus évaluent et utilisent leurs réponses émotionnelles, à partir des idéologies et des normes qu'ils suivent. Cet usage n'est pas limité à l'expression mais il comporte aussi l'expérimentation émotionnelle même. Les émotions sont le produit des évaluations et des réévaluations réalisées par les individus à partir de leur expérience, leurs formes de soutien et d'affrontement social avec des stimulants donnés.

2) *Le point de vue du système n'est pas chaotique mais il suit une ontologie des contextes spécifiques.* Les émotions tendent à s'organiser par elles-mêmes en un nombre fini de modèles, à savoir les émotions basiques. Mais il existe une différenciation individuelle marquée. Les émotions ne seraient pas des réponses automatiques ou des conséquences des activations physiologiques, mais le résultat complexe de l'apprentissage, de l'influence sociale et l'interprétation individuelle.

3) *La perspective systémique tient compte de l'expérience émotionnelle au sein d'un contexte socio-historique.* Les émotions sont une construction sociocognitive, c'est-à-dire qu'elles ont une origine et une réalité sociale, et elles se constituent

comme attitudes et rôles sociaux transitoires, vécus comme des passions, à partir du langage et la morale d'une culture donnée.

Un aspect important de la recherche sur le domaine affectif est la compréhension de son interaction avec le domaine cognitif. Il existe des approches comme celles de Goldin (2000) qui interprètent l'affectif comme un système de représentation – parallèle au système cognitif – intervenant dans les processus de résolution de problèmes. D'autres approches mettent l'accent sur la dimension sociale. D'une perspective socioconstructiviste, ce qui est défini un premier lieu est le contexte (Op't Eynde, De Corte, Verschaffel, 2001). Les théories qui analysent le discours pratique mettent l'accent sur les attitudes adoptées dans un contexte social (Evans, 2000). Selon le point de vue de Vygotsky, les émotions constituent une dimension de la *zone de proche développement* (Nelmes, 2003). Une autre approche se base sur les apports dérivés de la neuroscience et la pensée mathématique (Schlöglmann, 2002) ou ceux qui incorporent la perspective de l'autorégulation (Malmivuori, 2001) ou les théories psychanalytiques (Evans, 2000 ; Blanchard-Laville, 2003).

Dans cette recherche nous étudions l'interaction entre cognition et domaine affectif depuis une perspective socioconstructiviste et depuis la dimension de l'identité sociale. Explicitons à présent quelques concepts.

1.2. Identité sociale et culturelle dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

La recherche sur l'identité sociale des étudiants et sur la question de la signification que les mathématiques et leur apprentissage ont pour eux nous suggère que l'on peut aborder (formuler) de manière nouvelle la dimension affective en mathématiques, du moins pour des populations semblables (populations multiculturelles et populations à identité marquée négativement). Grâce aux résultats de recherches précédentes nous pouvons affirmer : L'identité de ces étudiants a, de fait dans son contexte, des caractéristiques équivalentes à un réseau de sens ; ce réseau est pertinent pour l'identité des étudiants et est susceptible de se manifester dans l'apprentissage des mathématiques. La structure du *concept de soi comme apprenant en mathématiques* est liée à leurs attitudes, leurs émotions dans des situations d'apprentissage, la perspective du monde mathématique et aussi à leur identité sociale (Abreu, 1998 ; Gómez-Chacón, 1998 et 2000).

Par conséquent, pour construire un bon cadre interprétatif, qui prenne en considération la dimension émotionnelle de la personne dans son contexte, il faut conceptualiser les aspects de l'identité sociale. L'idée d'identité sociale, liée à l'appartenance à un groupe, se base sur la théorie intergroupe de Tajfel (1978, 1981). Selon cette théorie, le concept de l'identité sociale est circonscrit à « la partie du concept de soi provenant de ce que l'individu se reconnaît comme membre d'un groupe social (ou plusieurs) et attribue à cette appartenance une

valeur et un sens émotionnel » (Tajfel, 1978 : 63). Dans notre recherche, nous avons aussi pris pour point d'appui la conception apportée par le courant de l'interaction symbolique, qui met l'accent sur les processus de construction de l'identité et qui conçoit les identités comme des *stratégies identitaires*¹ (Camilleri et autres, 1990). Ce point de vue souligne l'importance du système de communication symbolique dans les relations sociales.

Nous avons déjà utilisé ce point de vue pour étudier les processus d'apprentissage des mathématiques d'élèves espagnols du Secondaire (Gómez-Chacón, 2000) et nous avons défini quelques concepts que nous utilisons dans cet étude : domaine affectif global et local, scénario.

Dans la catégorie affective nous considérons deux structures significatives dans la dimension affective de la personne: l'affectivité locale et l'affectivité globale (Gómez-Chacón, 2000).

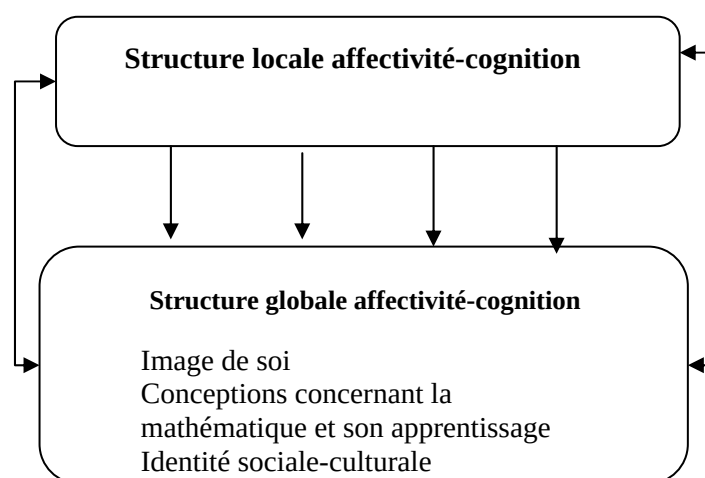


Figure 1 : Interaction entre la structure d'affectivité-cognition locale et globale.

Pour l'étude de l'affectivité locale, c'est-à-dire les changements dans les sentiments ou réactions émotionnelles pendant la résolution d'une activité mathématique en cours, l'élève est considéré seul en scène, ce qui nous a permis d'établir la structure locale affectivité-cognition. La structure est formée par les relations conjecturées

¹ Les auteurs cités ont donné la suivante définition opérationnelle pour les stratégies identitaires : « *processus ou procédés mis en œuvre (de manière consciente ou non) par un acteur (individuel ou collectif) pour atteindre un ou plusieurs buts (définis explicitement ou situés au niveau inconscient) ; procédés élaborés en fonction de la situation d'interaction, à savoir en fonction des différentes déterminations (socio-historiques, culturelles, psychologiques) de cette situation* » (Camilleri, et autres, 1990 : 24).

entre réactions émotionnelles et processus cognitifs², qui correspondent aux différentes phases de résolution de tâche mathématique. La structure fut élaborée à partir des données compilées et de l'analyse de l'affectivité locale lors des différentes sessions de classe extra scolaire et des entretiens faits à leur sujet. La structure locale exprime les types d'interaction quand le code émotionnel interagit avec le système cognitif : interruptions, déviations, raccourcis cognitifs, lesquels peuvent emprunter divers chemins pour s'exprimer.

Pour étudier l'affectivité globale, conséquence de l'influence que l'affectivité locale a eue sur l'individu, l'élève est considéré dans son contexte socioculturel et ses échanges avec autrui entrent en scène. Les chemins rencontrés du point de vue de l'affectivité locale ont résulté du système cognitif individuel et ont contribué à la construction de structures générales de l'image de soi³ et à la mise en place des conceptions sur les mathématiques et leur apprentissage. Elles tiennent compte de l'apprentissage des mathématiques comme construction de l'identité sociale du jeune et resituent les réactions émotionnelles dans le milieu social où elles se produisent.

Notons les implications dans les deux sens entre affectivité locale et affectivité globale. Pour nous, l'affectivité locale laisse des traces globales, les liaisons dans les deux sens entre affectivités globale et locale donnent lieu à l'image de soi, les conceptions sur les mathématiques et leur apprentissage influent sur la détermination des chemins suivis dans l'affectivité locale. L'affectivité globale configure pour le sujet sa structure locale d'affectivité-cognition.

Dans la dénomination "les scénarios les plus complexes", nous utilisons le concept sociologique de "scénario". En conséquence, parler de "scénarios" est plutôt parler de ce qui fait qu'une scène s'organise telle qu'elle s'organise, et très particulièrement, parler de ce qui est mis en jeu dans un domaine et un temps concrets, avec des ressources déterminées. A chaque remise en jeu dans des circonstances identiques, les individus qui y participent se conduiront de la même façon, puisque son apprentissage individuel et social les y prédispose.

Par conséquent, pour évaluer la dimension émotionnelle des individus, nous suggérons deux chemins à prendre en compte dans les processus cognitifs et affectifs dans l'apprentissage des mathématiques : l'un à travers la représentation de l'information portant sur les réactions émotionnelles qui affectent en permanence le traitement conscient (*affectif local*), et l'autre, qui est lié aux

² Il s'agit des exigences cognitives nécessaires dans le processus en exécution et l'activité mathématique du moment.

³ Il s'agit de l'image que l'élève a de lui-même sur son aptitude à résoudre des problèmes, du succès ou de l'échec attendu face à un problème mathématique, de l'anticipation des sentiments, émotions en début ou fin d'activité mathématique, de son identité sociale, etc.

influences socioculturelles dans l'individu et à sa façon d'intérioriser cette information et de former sa structure de croyances émotionnelles (*affectif global*).

La théorie de l'identité sociale de Tajfel (1981) décrit la cognition collective comme les croyances et les valeurs, en termes de caractéristiques personnelles et émotionnelles liées à certains groupes sociaux. Cette interprétation a été validée dans notre cadre théorique. Les valeurs forment les identités puisqu'elles sont un phénomène individuel et social.

Concernant la conception des étudiants qui ne résident pas dans leur lieu culturel d'origine, le processus de l'apprentissage des mathématiques doit être quelque chose de plus que d'acquérir des fragments donnés d'une connaissance culturelle: Il devra signifier l'appartenance à un groupe social spécifique. L'apprentissage des mathématiques doit faire partie du processus de construction de leur identité sociale.

Pour finir cette point, nous réinterprétons, pour les utiliser dans cette recherche, la définition et la classification des normes du cours de mathématiques établies par Yackel et Cobb (1996): norme sociale, norme mathématique, norme sociomathématique.

On peut considérer les normes comme des obligations établies dans la classe par le professeur en tant que détenteur de l'autorité et de la capacité de légitimation (Voigt 1994). L'établissement des normes peut résulter de :

- la perspective psychologique du sujet qui les interprète et leur attribue une valeur en tant qu'individu ;
- la perspective microsociologique de la communauté qui les légitime ;
- la perspective macrosociologique du groupe qui dessine l'identité du sujet qui les interprète et leur attribue une valeur.

Il y a d'un côté l'élève membre tour à tour de la classe et d'un groupe socioculturel plus large, d'un autre côté la communauté-classe en tant que milieu dans lequel valeurs et sens sont en perpétuelle reconstruction.

2. Méthodologie de la recherche

Nous avons eu recours à une méthodologie qualitative, combinant les techniques ethnographiques et l'étude de cas. L'observation a été conduite à Bruxelles (Belgique) durant cinq mois auprès d'élèves portugais ou d'origine portugaise (population en déplacement ou immigrants). Le groupe étudié comportait 40 élèves des 4^e, 5^e et 6^e années de l'enseignement belge du second degré, de la branche

Technique de Qualification et de la branche Professionnelle. Leur âge allait de 16 à 18 ans⁴.

Le suivi micro-ethnographique de ces élèves s'est fait en :

- classes de lycées belges de la communauté francophone (2 groupes ayant un horaire hebdomadaire de mathématiques de 4 heures régulières et 1 heure extra) ;
- classes de Langue et de Culture portugaise de l'ambassade (3 groupes, à raison d'une fois par semaine pour chaque groupe)⁵.

Les classes fréquentées par ces élèves étaient multiculturelles, les nationalités d'origine représentées étant : portugaise, belge, camerounaise, turque, albanaise, italienne, marocaine, avec aussi des élèves issus de familles binationales : belgo-italienne, turco-albanaise, italo-américaine, etc. La caractéristique commune aux classes observées est que le groupe le plus nombreux était constitué des portugais.

Le recueil de données provient :

- de questionnaires aux élèves, parents et professeurs ;
- d'entretiens avec les étudiants sur leurs conceptions à propos des mathématiques (Gómez & Chacón, 1998 et 2000) ;
- d'analyse de discussion de cas avec les élèves ;
- du graphique émotionnel et de la carte d'humeur des problèmes (Gómez & Chacón, 2000a et b) ;
- des activités mathématiques préparées pour la classe ;
- des notes de terrain ou journal de la recherche.

En conformité avec la description que nous avons présentée, nous considérons comme pertinent tant le groupe humain avec sa culture, son système de communication et sa structure institutionnelle (la considération des phénomènes de l'enseignement mathématique prioritairement comme sociaux et anthropologiques), que l'individu, avec les aspects personnels de connaissance et les rapports avec le psychisme.

⁴ Parmi les élèves de l'étude, 64% étaient nés en Portugal et plus de la moitié de ceux-ci (56%) avaient plus de cinq ans à leur arrivée en Belgique.

⁵ L'enseignement de portugais est inscrit au programme du *Núcleo do Ensino Português no Estrangeiro* qui dépend du *Departamento da Educação Básica do Ministério da Educação* et est coordonné par les services d'Enseignement de l'Ambassade du Portugal en Belgique.

C'est cette triple approche qui nous conduit à aborder méthodologiquement l'interaction en classe à partir de trois catégories d'analyses :

- 1) Catégorie culturelle : normes utilisées ou suggérées dans la classe durant la période de participation de l'élève, différentes de celles qu'il attendait ou éloignées de sa culture d'origine ; domaines des langues (français par rapport au portugais) ; situations de contenu mathématique incluant des éléments de la culture d'origine, stratégies didactiques fondées sur le dialogue culturel ;
- 2) Catégorie sociale : données biographiques et familiales sur des aspects liés à l'expérience de l'élève et situation d'apprentissage pour un "groupe déplacé" ; quelle a été son expérience de l'école belge, comment s'est déroulée sa scolarité dans les deux pays, quelles valorisations a-t-il reçu dans le cadre scolaire, comment est marquée son appartenance à son groupe social et comment se négocie son identité sociale ; quels systèmes de conceptions les membres d'un groupe partagent sur eux-mêmes et sur les autres et comment ils contribuent à l'apprentissage mathématique ;
- 3) Catégorie affective : conceptions et réponses émotionnelles manifestées par l'élève au moment d'un travail mathématique ou en rapport avec le fonctionnement mathématique.

Pour illustrer notre manière de procéder avec les instruments et nos analyses, nous allons présenter l'un des instruments utilisés pour explorer l'affectif local : le graphique émotionnel (Tableau 1) se compose de six questions, trois d'elles portant sur le transfert et l'apprentissage dans l'atelier et dans la vie quotidienne. Nous les avons présentées après des énoncés de problèmes ou d'activités mathématiques. L'objectif de l'utilisation de l'instrument est de recueillir de l'information grâce au graphique des réactions affectives des étudiants : importance, direction, conscience, contrôle et cause des émotions (dynamique d'interaction entre les facteurs affectifs et cognitifs). L'importance, la direction et la conscience sont des dimensions explicitées grâce aux traits dessinés par l'élève dans le graphique de ses *émotions* et aux annotations sur les exigences cognitives nécessaires pour résoudre les tâches que nous lui avons proposées.

De plus, les données ainsi recueillies ont été complétées et confrontées par le chercheur avec les observations et enregistrements de la séance de classe. L'information apportée par l'élève a été précisée par un entretien. L'objectif principal de cet entretien était de confirmer les aspects préalablement repérés, surtout les réactions émotionnelles qui sont les plus apparentes et qui sont interactives au sein de l'expérience de l'élève. On cherchait à ce que l'élève soit plus explicite sur ses origines, et que se produise une prise de conscience pour une régulation et un contrôle ultérieurs de ses émotions.

Les catégories que nous avons prises en compte pour explorer la dimension de l'affectivité locale sont les suivantes : annotations d'émotion positive et négative de l'élève, traces d'émotion recueillies par le professeur, processus cognitifs dans l'activité mathématique, interactions sociales dans la classe et processus métacognitifs et méta-affectifs.

Les données résultant des observations et des séances de classe et de l'instrument de résolution de problèmes ont été reportées sur une fiche de synthèse puis analysées. Dans le tableau 2 on peut trouver le protocole d'analyse d'une séance de classe. Les lignes horizontales déterminent les épisodes émotionnels de l'élève et composent l'unité d'analyse explicative (unités de réaction émotionnelle URE). Ces unités sont définies pour chaque période de temps durant laquelle l'élève garde la même position émotionnelle. En conséquence, elles caractérisent l'importance, la direction, le niveau de gestion de l'activité émotionnelle (conscience, contrôle) et l'interaction avec les processus cognitifs.

Grâce à ces dernières analyses des diverses séances de classe (15 séances par élève en moyenne), avec l'objectif de décrire les routes individuelles significatives que l'interaction affectif-cognitif semble suivre, nous avons essayé de répondre pour chacun des élèves aux questions suivantes : En ce qui concerne la tâche, quelle est l'attitude affective initiale ? Pourquoi y a-t-il des interruptions (ou des sauts) dans l'interaction affectif-cognitif ? Comment s'articulent-elles avec le processus de résolution de problèmes ? Quelles sont les réactions émotionnelles les plus fréquentes ? Comment peut-on cataloguer les tendances cognitives et affectives ?

Toute cette information, synthèse des annotations de l'élève et des observations des chercheurs, nous a permis de définir le profil de chaque élève, ce que nous avons dénommé cartes ou routes d'affectivité-cognition.

En cherchant une compréhension plus profonde de l'origine des réactions affectives des élèves en contexte, nous avons enrichi les données issues des séances de résolution de problèmes et nous les avons confrontées avec celles obtenues dans les entretiens portant sur les conceptions sur les mathématiques et l'apprentissage, dans les entretiens sur les contextes culturels et familiaux ; pour l'observation de l'interaction dans la classe, nous avons davantage orienté le projecteur sur les normes mathématiques et socio-mathématiques. La synthèse de ces données nous a permis d'obtenir une compréhension plus intégrée de l'affectivité globale.

Tableau 1 : Instrument Graphique Émotionnel.**Graphique émotionnel**

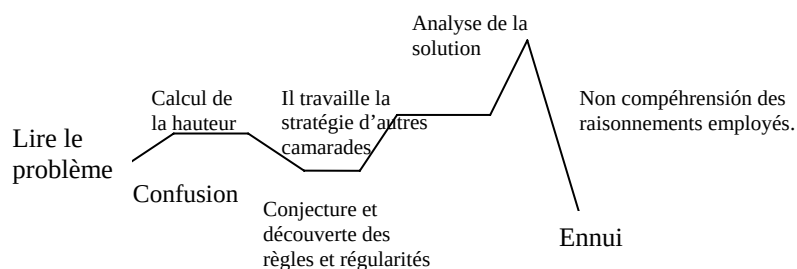
1. Comment vous sentez vous après avoir fait le problème?

Très satisfait Satisfait Insatisfait ...X... Très insatisfait

2. Racontez brièvement pourquoi vous vous sentez ainsi.

J'étais longtemps bloqué ce qui m'a fait désespérer.

3. Représentez, avec un graphique, vos sentiments et réactions dans le processus de résolution du problème.



4. Vous souvenez-vous d'une situation qui vous est arrivée en cours? Expliquez brièvement votre réponse.

Ça me rappelle ce qu'on calculait en géométrie au sujet de la hauteur d'un triangle. J'écoutais mes camarades et ils avaient quelques stratégies, mais moi...pas du tout !

5. Ce que vous avez appris avec ce problème vous sert-il pour la vie quotidienne?

Oui, je crois que ce serait utile pour la vie quotidienne, c'est comme la sculpture qui est près du lycée, peut-être peut-on l'utiliser pour le travail ; en plus, en mathématiques ce qu'il faut est un esprit logique...

6. Pourriez-vous donner quelque suggestion pour compléter cette activité?

Je n'ai pas de suggestions, excepté que les professeurs enseignent davantage la démarche logique.

Tableau 2.- Données de l'élève Antonio correspondant à la séance S-7

Annotations de l'élève émotion positive dans le graphique	Traces d'émotion positive enregistrées par le chercheur	Étapes de résolution de problèmes	Méta-Cognition	Méta-Affection	Processus cognitifs	Traces d'émotion négative enregistrées par le chercheur	Annotations de l'élève émotion négative dans le graphique
		Entrée			Lecture du problème Associe ou mets en relation Positionnement vers le problème	Insécurité	Contus
Bien	Tranquille				Calcul de la hauteur		Accablé
					Clarifie la situation de laquelle il commence et à laquelle il arrive		
					Observe différentes stratégies volume et aire	Frustration	Mal
					Conjectures		Sans idées
		Attaque, en entrant en matière			Travaille avec d'autres camarades		
				Conscience émotionnelle	Trouve des règles, régularités Visualisation	Insécurité	ennui
Bien					Ténacité dans la recherche des calculs de l'aire	bloqué	Accablé
					Exploite les idées initiales		confus
		Continue à avancer			Flexibilité dans la recherche de la solution Analyse de la solution Réflexion sur le moment clé		
Heureux	Animé	États d'âme à la fin du processus	Régulation		Enregistre le processus de pensée		
					Ne comprend pas les raisonnements utilisés pour le développement de la figure géométrique, le volume, l'aire	Déçu	Contus

3. Résultats de la recherche

Une étude de cas nous servira d'exemple pour la présentation des résultats de nos recherches. Pour mieux comprendre ce cas, nous ferons à certains moments référence à des résultats plus généraux relatifs au groupe étudié.

Le cas d'Antonio

Antonio a participé à toutes les séances de la recherche, soit 47 séances d'une heure pendant cinq mois. Les données qui vont justifier notre étude sont les suivantes : les graphiques émotionnels de 15 séances en classe ; l'étude exhaustive de 7 séances de classe espacées dans le temps, enregistrées sur bande, ayant donné lieu à des recueils de l'émotion et à une typologie d'activité mathématique différents et faisant apparaître les réactions émotionnelles les plus nettes pour définir les caractéristiques de l'élève ; les protocoles de résolution de problèmes ; un entretien sur des situations concernant des conceptions mathématiques.

3.1. Dimension culturelle

Ce paragraphe présente quelques résultats concernant l'identité culturelle, l'appréciation de la culture du pays d'accueil et quelques éléments relatifs à la culture scolaire dans lesquels l'élève a expérimenté des résistances et interruptions de longue durée dans son parcours d'apprentissage mathématique.

Antonio a 18 ans, il est en quatrième du lycée belge francophone MaC (études Techniques de qualification de secrétariat et tourisme) et en cinquième de Langue et culture portugaise de l'ambassade. Par conséquent, nous avons mené un double suivi de cet élève. A la suite de sa collaboration à la recherche, il est devenu l'un de nos informateurs clés.

Il est né au Portugal et il est venu à Bruxelles à l'âge de sept ans. Il pense qu'il comprend et parle bien les deux langues (le portugais et le français). Chez lui, il parle le portugais et le français, en classe il parle français et portugais avec les camarades portugais et français avec les autres.

Il ne pense pas que la langue ait été un problème pour son intégration et l'apprentissage. Cependant, les données recueillies dans l'entretien avec la professeure et dans son dossier académique montrent qu'il a perdu une année scolaire à cause de la langue. Néanmoins, il résiste à reconnaître que cela soit une difficulté.

Antonio assiste aussi aux classes de portugais « parce qu'il ne veut pas se séparer de sa culture d'origine et parce qu'il voudrait suivre ses études universitaires au Portugal ». Il manifeste qu'il éprouve un certain sentiment de persécution et de racisme du côté des élèves belges : « j'ai du mal à admettre que soient harcelés ceux qui ne devraient pas l'être » et que les portugais soient représentés comme des

brutes manquant de facultés de réflexion seulement parce que la plupart d'entre eux n'a pas du tout ou pas suffisamment suivi d'études. Il essaie de valoriser sa culture d'origine en montrant quelques données de l'histoire de son pays « par les découvertes et toute cette époque au cours de laquelle les portugais ont montré leur intelligence dans nombreux domaines ». Il se considère portugais et il aimerait à l'avenir habiter au Portugal. De son expérience de la vie en commun avec des cultures différentes, ce qu'il considère le plus positif est le fait d'apprendre du nouveau et des éléments liés à d'autres cultures, et le plus difficile les contacts avec des inconnus.

Ci-après nous décrivons la culture de la classe de mathématiques à laquelle cet élève a participé et nous prenons en compte la réaction qu'il a face aux normes utilisées ou proposées dans la classe. Le style d'enseignement de la professeure est assez directif et se base sur l'utilisation de fiches photocopiées, avec un petit résumé de la matière et avec des exercices mécaniques et routiniers à résoudre. La séquence scolaire se déroule ainsi : les élèves complètent la fiche et ensuite les élèves eux-mêmes ou la professeure corrigent les exercices au tableau.

Dans le Tableau 3 on peut identifier des normes sociales, mathématiques et sociomathématiques, recueillies dans les séances de classe auxquelles Antonio a participé. Nous avons signalé par un astérisque celles qui indiquent des interruptions dans l'apprentissage mathématique de cet élève et qui sont liées à son identité sociale. L'élaboration de ces tableaux nous a permis de repérer des distances culturelles de l'élève avec d'autres participants. Avant de constater des interruptions ou des changements du degré d'importance de l'émotion, nous avons constaté trois divergences entre élèves sur l'interprétation des normes de la classe, liées à la négation de l'identité socioculturelle de l'élève : au sujet de l'usage de la langue véhiculaire et la distribution de la classe ; au sujet du rôle du professeur en classe de mathématiques et au sujet de la norme mathématique qui détermine des critères de légitimation d'un processus de résolution mathématique.

Tableau 3 : Identification des règles sociales, mathématiques et socio-mathématiques en classe (typologies des règles et d'apparition : mêmes catégories).

Typologie des règles	Typologie d'apparition	Situation donnée (projetée ou assumée par le professeur)	Situation reconstruite (introduite par les élèves dans la classe)
Norme sociale 1. Organisation et contrôle du temps 2. Utilisation de la langue véhiculaire 3. Distribution de la salle de classe 4. Utilisation des ressources matérielles 5. Routine de participation et climat de classe 6. Dynamique de travail		1. Non flexibilité du temps 2. Français 3. Distribution traditionnelle et fixe 4. Fiches préparées, pas de ressources dynamiques 5. Apprentissage bidirectionnel, centré sur le professeur 6. Travail individuel et en grand groupe	1. Expérience belge de l'organisation du temps 2. Utilisation parfois de la langue maternelle ** 3. Rejet des formes d'organisation du cours ** 4. Expérience vécue de difficultés linguistiques 5. Appréciation de la communauté interculturelle
Norme sociomathématique 1. Rôle du professeur en classe de mathématiques 2. Règles de conduite face à l'activité mathématique 3. Rapport entre l'élève et les connaissances apportées par d'autres élèves 4. Expérience vécue par l'élève de son rapport avec les connaissances mathématiques		1. Rôle directif 2. Correction au tableau par l'élève ou le professeur 3. Douteuse légitimation de l'élève comme interlocuteur 4. Tendance à une non-légitimation de l'élève comme communicateur mathématique	1. Attendent autre chose du professeur** 2. Non explicitation des différentes conduites face à l'activité mathématique 3. Relation de quelques élèves avec les connaissances apportées par d'autres 4. Expérience vécue de quelques élèves des connaissances apportées par eux-mêmes
Norme mathématique 1. Critères de légitimation d'un processus de résolution mathématique		1. Acceptation de tout processus justifié accompagné de résultat	2. Solutions algorithmiques et routinières**

Les différences manifestées en classe et reflétées dans nos observations ont été précisées lors d'entretiens avec la professeure de l'élève. Nous avons pu constater que, dans de nombreux cas, elles n'étaient pas perçues par la professeure, en argumentant que l'adaptation des élèves à l'école (au lycée) est vue principalement

en termes cognitifs et linguistiques, en l'absence de débat mieux documenté sur le rôle que jouent les milieux éducatifs pour façonner les identités culturelles.

Du point de vue de l'enseignement-apprentissage des mathématiques et de son rapport avec l'identité culturelle et sociale des élèves, on a remarqué que :

- aucune activité de résolution de problèmes, d'exercices, ne faisait référence à l'histoire des mathématiques, ni aux mathématiques comme un ensemble construit et culturel ;
- il n'y avait pas d'activités de recherche et de résolution de problèmes ;
- il n'y avait pas d'applications et de ressources didactiques ou dynamiques.

La réalisation de ce type d'activités aurait pu permettre l'intégration et le contact avec les mathématiques depuis une perspective plus culturelle et à partir de l'identité culturelle et sociale.

3.2. Dimension sociale

Cette catégorie nous permettra de prendre en considération les sentiments et les attitudes qui renforcent les structures des conceptions et leur origine (affectivité globale), et c'est justement pour cela qu'elle est étroitement liée à la dimension émotionnelle. Nous remarquons comme éléments trouvés dans le groupe d'étude :

- - les réactions émotionnelles définies par l'appartenance à un groupe social déterminé ;
- - les appréciations et les conceptions associées aux différentes formes de connaissance mathématique.

Comme indiqué au début de l'article, nous nous demandons dans cette étude comment l'identité sociale se manifeste dans l'apprentissage des mathématiques et comment elle configure ses dimensions émotionnelles. Par rapport à l'identité, les informations et les expériences ont été variées. Par expérience, nous entendons l'expérience individuelle dans chaque domaine de la pratique mathématique : expérience scolaire, au lycée, dans l'atelier en cours extrascolaire et aussi l'expérience en classe de langue et culture étrangère. Et par information, celle qu'a l'élève sur le contenu mathématique et sur les significations sociales (code sémiotique) des différents types de mathématiques qui coexistent dans les groupes sociaux d'appartenance : connaissance sur les mathématiques de la culture professionnelle, connaissance sur la signification sociale, *etc.*

Antonio semblait ne pas appliquer la signification sociale à son cas⁶—bien qu’il lui arrivait de parler de son étiquette d’étranger- et il attribue un statut supérieur aux mathématiques scolaires « mathématiques mentales, difficiles, de succès ». Des manifestations contradictoires de stratégies de conformation d’une part et de différenciation d’autre part sont apparues de façon continue dans les entretiens et dans la classe extrascolaire, où il faisait circuler dans le groupe de ses amis ses stratégies d’identification avec son groupe culturel. Cependant, dans les classes ordinaires du lycée il ne montre pas d’initiative ni autant de spontanéité.

Il préférait les exercices d’application directe et il ne pensait pas que l’apprentissage des stratégies de résolution de problèmes soit nécessaire. Néanmoins, même pour les exercices d’application, il avait des difficultés.

De l’information apportée par l’élève (entretiens, questionnaires, *etc.*), il ne ressort pas de problème scolaire, en particulier en cours des mathématiques. Cependant, les observations prises en classe et les données de ses notes dans le centre, montrent tout le contraire. Sa note était insuffisante et on lui a conseillé de s’orienter vers des études professionnelles moins qualifiées.

Les conceptions qu’il avait sur l’importance des mathématiques scolaires étaient liées à l’importance sociale des mathématiques ; il apprécie les mathématiques parce que « les mathématiques ordonnent la plus grande part de la société ». (Antonio, entretien sur les conceptions sur la mathématique). Cela semble montrer qu’il a conscience de la reconnaissance sociale des mathématiques, mais qu’il ne les applique pas et qu’il ne pense pas que les mathématiques aient un but clair dans son futur. Il établit deux catégories, l’une du savoir intellectuel et l’autre de la connaissance en situations de pratique (où les mathématiques ne s’appliquent pas).

Il pensait que les élèves ont des difficultés parce qu’ils n’étudient pas et n’ont pas un esprit logique. Pour lui, les mathématiques sont quelque chose de « logique » et c’est ainsi qu’il l’exprime souvent dans le questionnaire Slogan (par écrit) et à l’oral dans les séances de classe.

3.3. Dimension affective

Comme nous l’avons déjà signalé, nous considérons que la culture et les processus sociaux font partie de l’activité mathématique et de la détermination de l’affectif des élèves. Par conséquent, en ce qui concerne les questions affectives en classe, nous avons pris en compte le fonctionnement cognitif et psychique de l’élève d’une part, et le fonctionnement du système social des groupes d’appartenance socioculturelle et de leurs interactions d’autre part, dans la mesure où ils ont une

⁶ L’appartenance à un groupe (un groupe avec une signification sociale négative) exerce un impact sur les attributions de l’élève (Tajfel, 1978).

influence sur la genèse, la structure et l'évolution des éléments affectifs. Ainsi, deux types de processus ont une incidence sur le positionnement affectif envers les Mathématiques : les processus cognitifs ou mentaux, à caractère individuel, et les processus d'interaction et de contextualisation à caractère social.

Scénarios simples d'affectivité locale. Réactions émotionnelles qui apparaissent dans la résolution de problèmes.

La méthode de travail dans les classes obligatoires au lycée belge comportait des exercices routiniers. Grâce aux données du graphique émotionnel nous avons constaté que ce type d'activité ne concerne pas la dimension émotionnelle de l'élève. Grâce à l'observation dans les classes du lycée belge nous avons aussi constaté qu'Antonio manque d'initiative pour commencer la résolution des exercices proposés et il essaye toujours de cacher ses difficultés. Il continue à argumenter que pendant les premières années à l'école, la matière de Mathématiques était la matière la plus facile pour lui « parce qu'il ne fallait pas étudier » –conception sur l'apprentissage mathématique-. Quand nous lui invite à penser à sa situation actuelle dans les classes du lycée, il répond laconiquement : « c'est bon ! ».

La méthode scolaire en usage au lycée belge conditionnait ses réactions émotionnelles au moment d'affronter les tâches mathématiques : des exercices sans émotion et routiniers. Toutefois, si nous prenons en compte les activités des classes extrascolaires établies comme activités de résolution de problèmes, les données signalent deux routes concernant l'affectif et le cognitif, une qu'on pourrait dénommer positive et l'autre négative ; ces routes nous ont permis d'esquisser un « modèle » de l'élève. Sa disposition est positive, il est réceptif au soutien cognitif de la professeure, mais quand il résout le problème il montre de la résistance et nécessite un nouveau soutien de la professeure ou d'un camarade pour pouvoir continuer. Quelquefois il montre de l'initiative pour lire le problème, mais tout de suite après, face à la compréhension et la résolution de celui-ci, la direction de son émotion change : colère, hostilité, blocage, découragement... Pour continuer à avancer, il a besoin d'un soutien continu affectif et cognitif de la professeure. Les changements négatifs de direction sont dus aux confusions provoquées quand il travaille avec un concept mathématique, avec des calculs ou des raisonnements spatiaux, en les manipulant et les représentant ; ou alors il est bloqué quand il travaille avec d'autres camarades, il regarde comment ils travaillent et s'il ne comprend pas, il se désespère (cf. par exemple les Tableaux 1 et 2).

Nous pouvons dire en résumé que l'interaction constatée dans les activités de résolution de problèmes (15 séances de classe enregistrées et analysées, comme les exemples du Tableau 2) nous permet de décrire la route d'interaction affectif-cognitif de cet élève :

- il se méfie au moment de résoudre un problème ;
- il fait des efforts pour réfléchir sur ce qu'il a essayé de faire et ses camarades l'aident ;
- il est bloqué et il essaye de cacher son blocage. Avec les problèmes dans lesquels les émotions positives prédominent, l'élève obtient de bons résultats, tandis que dans les cas où il y a plus d'émotions négatives, les résultats sont notoirement inférieurs ;
- il s'amuse des découvertes, il était ouvert à l'apprentissage de nouvelles connaissances et il avait une perception ponctuelle du succès ;
- il n'est pas capable de se motiver et il pense que les professeurs n'utilisent jamais les connaissances des élèves et surtout ce qui touche aux éléments de sa culture (« Scénario complexe », dont on parlera plus tard) ;
- il ne consacre pas de temps aux aspects d'adaptation et de vérification des tâches mathématiques ;
- il met en relief des problèmes de transmission du savoir mathématique et de communication en classe. Il fait la critique des séances de classe de son lycée. En plus, lors de séances de débat de groupe, Antonio et Daniela apportent des informations sur l'enseignement des mathématiques au Portugal et en Belgique. L'exemple est le suivant : « J'ai des problèmes pour résoudre des équations, mais dans les tests, on nous pose d'autres questions que ce que j'ai appris au Portugal, par exemple j'ai appris la division et les algorithmes d'une autre façon » (Entretien sur le protocole de résolution, 30 mars, Lycée MaC).

Scénarios complexes et expression de l'affectivité globale.

Dans ce paragraphe, nous avons recueilli des épisodes émotionnels de résistance ou d'interruption ayant lieu dans l'apprentissage et qui agissent sur le processus cognitif de résolution du problème mathématique. Nous avons constaté une réaction émotionnelle liée au statut de membre qu'ils ont dans le groupe socio-culturel (position affective adoptée, valeurs, conceptions, attitudes, *etc.*) et à la façon dont ils négocient leur identité sociale. Les résultats ont mis en évidence que la réaction face aux mathématiques se manifeste dans deux scénarios :

- *Scénario de demande d'interdépendance* ;
- *Scénario d'interaction-communication* concernant l'interaction et l'échange avec le professeur.

Le scénario de demande d'interdépendance comporte des éléments d'adaptation à l'école et d'auto-légitimation du groupe de référence. L'élève observe continue à

adopter ce type de réaction dans quelques séances de classe face à la gestion et l'établissement de normes par la professeure.

Selon ce que nous avons pu voir dans l'entretien, les principaux facteurs qui déclenchent une réaction de résistance à l'apprentissage sont la sensation d'insignifiance et l'isolement que les élèves étrangers éprouvent (cf. entretien sur les situations). L'élève étranger dissimule la peur d'échouer qu'il éprouve et il nie avoir des difficultés. De plus il s'affirme en choisissant le travail manuel et en souhaitant retourner dans son pays d'origine. Ce scénario est dénommé scénario d'interdépendance puisque l'élève adopte une attitude de légitimation et une stratégie d'instrumentalisation de son identité assignée pour présenter à la professeure et au système scolaire la revendication d'une attitude différente. Les répercussions sur l'apprentissage que nous avons remarquées sont :

- communication entre le professeur et l'élève ;
- communication élève-élève et élève-groupe ;
- règles de classe ;
- gestion de classe ;
- résistance à apprendre des concepts mathématiques ;
- conception du curriculum.

Scénario d'interaction-communication

Un autre scénario qui se manifeste dans les conduites de cet élève a été celui qui souligne le plus l'interaction entre l'élève et la professeure. Dans le tableau on recueille quelques voies explicatives correspondant à ce scénario, provenant de l'enregistrement et des observations de classe de la chercheuse, ainsi de ce quel'élève a enregistré dans son graphique émotionnel ou carte d'humeur.

Tableau 4 : Résumé de la route explicative du scénario émotionnel d'interaction-communication.

Distances culturelles	Distances sociales
Scénarios émotionnels	
Antonio (A) se méfie d'une intrusion de la professeure (P)	P se promène par la classe et ne perçoit pas que l'élève n'y participe pas
(+) Content	
A ne demande pas de l'aide à P, il parle avec un autre camarade (E1) en portugais	P ignore les commentaires
(-) Confus	
A ne comprend pas ce que E1 lui a dit, et E1 parle avec E2	E2 parle avec P. P n'adresse ses explications qu'à E2
(-) Confus et méfiant	
A est surpris du fait que P ne parle pas avec lui	P continue à se promener dans la classe et demande de la discipline, elle ne prend pas en compte la stratégie de résolution de l'élève A
(-) Confus, accablé	
Explication du blocage ou interruption face à l'apprentissage L'interprétation contrastée du rôle de la professeure et de la manière de valoriser la connaissance apportée par l'élève semble indiquer que sa participation mathématique pendant la séance est liée à une attitude de revendication. Une fois ressentie la perte de crédibilité pour avoir introduit une résolution erronée, son attitude revendicative n'a plus de sens et l'élève abandonne la tâche.	

Antonio demande constamment que l'attitude de la professeure soit moins distante. Les enregistrements et nos observations ont mis en évidence des faits comme celui préalablement décrit. Nous avons constaté que l'interaction entre la professeure et l'élève n'était pas fréquente et que l'interaction-communication entre eux ne comportait que des questions et des réponses portant sur les exercices.

4. Conclusions de la recherche

Les résultats de l'étude nous permettent de répondre aux objectifs que nous avons pour ce groupe d'étude. Notre recherche ne nous ne permet pas de généraliser à des populations semblables. Néanmoins, nous jugeons important le fait que les conclusions puissent permettre des mises en évidence pour mieux comprendre

l'apprentissage des mathématiques en contexte scolaire multiculturel des élèves appartenant à des minorités culturelles.

Nous pouvons conclure que pour les deux premiers objectifs, à savoir, l'origine des réactions émotionnelles et la détermination des relations entre cognition et affectivité, les données ont mis en évidence qu'il existe une forte dépendance à la tâche demandée. Les exercices routiniers ne suscitaient pas de réaction émotionnelle chez les élèves et leurs réactions dépendaient de la tâche proposée (différence entre exercices et problèmes de recherche). Dans la Figure 2, nous avons essayé d'illustrer les orientations qu'on peut trouver quant à l'affectivité locale ainsi qu'à l'affectivité globale.

Les données de l'étude montrent deux voies concernant l'affectivité et la cognition, une positive et l'autre négative et à travers lesquelles on a pu déterminer un « modèle » pour l'élève selon la tâche demandée. Cette conclusion ressemble aux conclusions de la recherche menée par Gómez-Chacón (2000) dans laquelle on a obtenu des chemins plus variés.

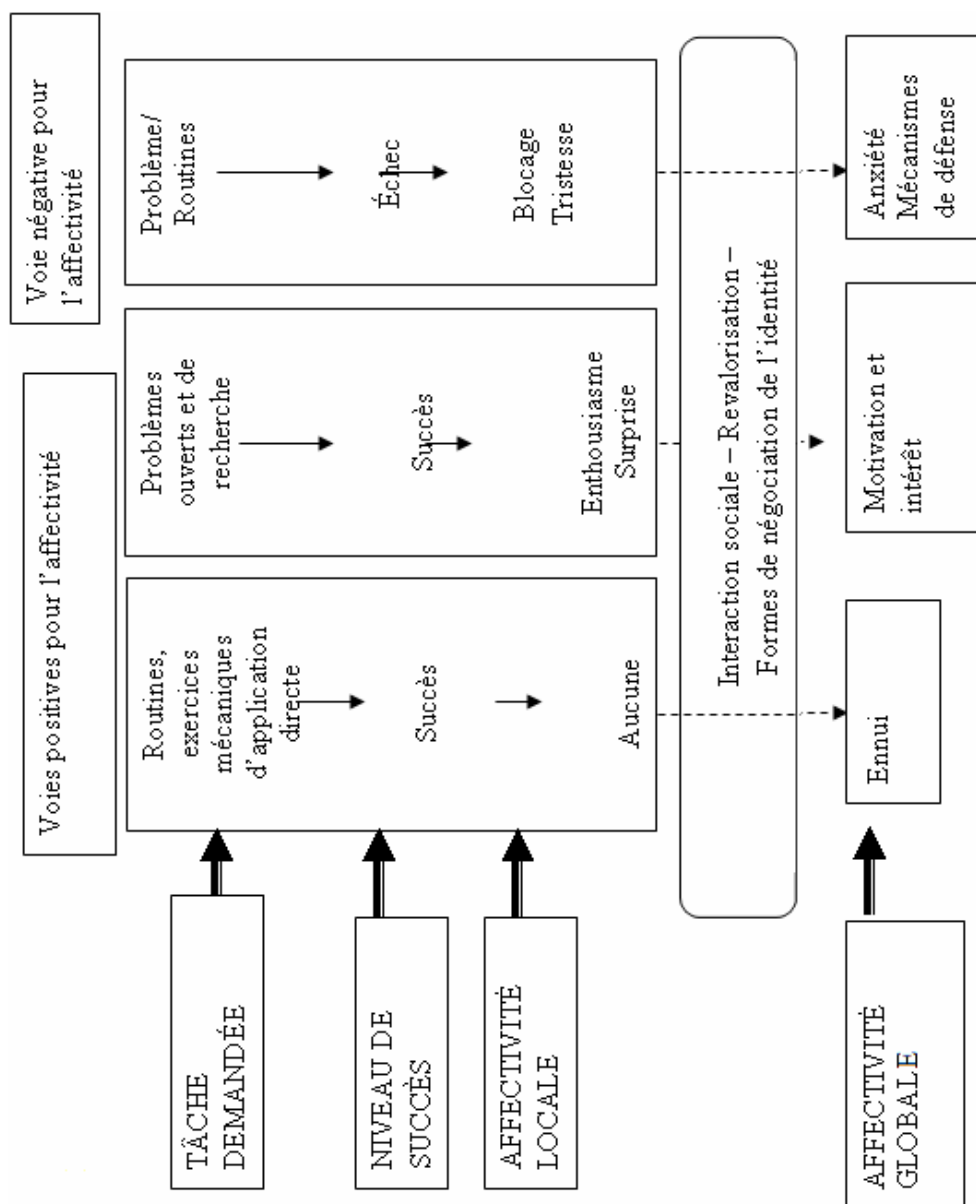


Figure 2 : Voies (chemins) concernant l'affectivité locale et l'affectivité globale.

Quant à la question de l'interprétation possible des réactions émotionnelles à partir de l'identité sociale et de l'identité culturelle, il a été plus difficile dans cette étude de la résoudre à partir de l'expression personnelle des élèves dans leurs classes de mathématiques. Néanmoins, nos données globales montrent que l'adaptation des élèves portugais à la Belgique a eu un fort impact sur le sens de leur personnalité et les a obligé à reconsidérer leur identité culturelle. La principale caractéristique dans l'apprentissage mathématique de ce groupe d'étude est un sentiment diminué face à l'apprentissage quand les différences liées à leur identité portugaise n'étaient pas acceptées/reconnues ou étaient considérées comme un défaut de compétence à leur niveau scolaire.

Cela nous conduit à une affirmation déjà avancée dans notre présentation du cadre théorique, à savoir que dans la culture de classe, les motivations, les cognitions et les émotions peuvent être conceptualisées et travaillées empiriquement au moins à trois niveaux de spécificité, en mettant l'accent sur le micro et le macro niveau et en observant comment interagissent l'identité sociale et la conceptualisation de la conception de soi comme apprenti des mathématiques.

On peut atteindre ce but en conjuguant les perspectives et les méthodes qui tentent de décrire dans toute sa richesse symbolique le sens des affects dans la réalité sociale où ils se produisent. Traditionnellement, les cadres d'interprétation de la dimension émotionnelle se tournent vers des faits cognitifs propres à l'élève plutôt que vers des questions sur les arguments et les conflits dans les « pratiques mathématiques ».

Avant de repérer des interruptions ou des changements du degré d'importance de l'émotion, nous avons constaté trois divergences quand les élèves interprétaient les normes de la classe et qui étaient liées à la négation de l'identité socioculturelle de l'élève : au sujet de la norme sociale de l'usage de la langue véhiculaire et la distribution de la classe, au sujet de la norme sociomathématique du rôle du professeur en classe de mathématiques et au sujet de la norme mathématique qui détermine des critères de légitimation d'un processus de résolution mathématique.

Ces réactions face aux normes forment l'affectivité globale de l'élève et ont déterminé des scénarios émotionnels complexes. Dans la recherche que nous avons menée en Espagne, les données mettaient en évidence en cours de mathématiques la réaction d'étudiants qui la concrétisent dans des *scénarios d'adaptation à l'école, d'autolégitimation, de demande d'interdépendance et de réponse à des messages ou de différenciation existentielle (de résistance)* [cf. Gómez-Chacón (2000a)]. Cependant, avec ce groupe on peut trouver deux scénarios, un que nous avons déjà repéré (*d'autolégitimation, de demande d'interdépendance*) et un autre qui apparaît pour la première fois, *le scénario d'interaction-communication*.

Enfin, nous signalons que dans cette étude nous avons trouvé que *la construction de la connaissance en classe* non seulement a concerné l'interaction entre la professeure et les élèves, mais encore une interaction plus grande entre les élèves eux-mêmes dans le contexte social et culturel de la classe. Cela nous permet de signaler comme prospective pour la formation des professeurs de mathématiques ce que d'autres chercheurs ont déjà remarqué (Alro & Skovsmose, 1996 ; Cline, Abreu, Gray, Lambert y Neale, 2002 ; Cobb & Hodge, 2004 ; Lerman, 2001) : la nécessité de développer des compétences professionnelles relatives à l'apprentissage des mathématiques et ses liens avec le langage, l'interaction sociale et le contexte culturel des élèves.

Et pour conclure, signalons de nouvelles questions de recherche que nos résultats conduisent à poser :

- est-ce que les motivations, les cognitions et les émotions peuvent être conceptualisées et travaillées à au moins trois niveaux de spécificité ?
- Quels sont les scénarios émotionnels complexes qu'on peut classer dans des contextes multiculturels ?
- Quelles conceptions sont stables et lesquelles dépendent du contexte ?
- Quels types de conceptions motivationnelles existent et lesquelles sont liées au contexte ?
- Quelles sont les différences inter et intra individuelle dans les différents niveaux de contexte ?

Bibliographie

- ABREU G. (1998), Studying Social Representations of Mathematics Learning in Multiethnic Primary Schools: Work in Progress. *Papers on Social Representations*, 7(1-2), 1-20.
- ABREU G. (2002), Mathematics learning in Out-of School Contexts: A cultural psychology perspective. En L. D. English (Ed.), *International Handbook research in Mathematics Education*. New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 323-354.
- ABREU G.. & CLINE T. (2003), Schooled mathematics and cultural knowledge. *Pedagogy, Culture and Society*, 11, 11-30.
- ALRO H. & SKOVSMOSE O. (1996), Students' Good Reasons. *For the Learning of Mathematics*, 16(3), 31-38.
- BLANCHARD-LAVILLE C. (2003), Une séance de cours ordinaire. L'Harmattan, Paris.
- CAMILLERI C., KASTERSZTEIN J., LIPIANSKY E.M., MALESWSKA-PEYRE H., TABOADA-LEONETTI I., VASQUEZ A. (1990), Stratégies identitaires. Paris: Presses Universitaires de France.
- CLINE T., ABREU G., FIHOSY C., GRAY H., LAMBERT H., & NEALEE J. (2002), *Minority Ethnic pupils in mainly white schools*. London: DfES - Department for Education and Skills
- COBB P. & HODGE L.L. (2004, April), Students' developing identities in mathematics classrooms. *Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*, San Diego.
- COBB P., YACKEL E. & WOOD T. (1989), Young childrens's emotional acts while engaged in mathematical problem solving. En D. B. McLeod y V M. Adams (Eds), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer Verlag. New York., 117-148.
- DEBELLIS V. A. & GOLDIN G. A. (1997), The affective domain n mathematical problem-solving. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*. Filand: University of Helsinki, 2, 209-216.
- EVANS J. (2000), *Adults' mathematical thinking and emotions: A study of numerate practices*. Londres: Routledg.
- EVANS J., HANNULA M., PHILIPPOU G.; ZAN R. (2003), Thematic working group 2: Affect and Mathematical Thinking, In M: A. Mariotti (ed.) *Proceedings of CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics*

Education 28 February – 3 March 2003 in Bellaria, Italy. Published on the web: <http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/>.

EVANS J. (2000), *Adults' Mathematical thinking and emotions*. Falmer Press, Londres.

FIGUEIRAL L. & GÓMEZ-CHACÓN I. M^a (2003), Education in mathematics in a Europe of different cultures? En, A. Ross (Ed.), *A Europe of Many Cultures*. CICE Thematic Network Project. Institute of Policy Studies in Education, London Metropolitan University, 37-45.

FIGUEIRAL L. & GÓMEZ CHACÓN I.M^a (2004), A aprendizagem da matemática em contextos multiculturais. XV SIEM – *Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática.

GOLDIN G.A. (1988), Affective representation and mathematical problem solving. En M. J. Behr, C. B. Lacampagne; y M. M. Wheler (Eds.), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting on the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter of International Group. North Illinois University. DeKalb, IL, 1-7.

GOLDIN G.A. (2000), Affective pathways and representations in mathematical problem solving, *Mathematical thinking and Learning*, 17, 209-219.

GÓMEZ CHACÓN I. M^a. (2004), Emotion and Affect in Mathematical Education. Exploring a Theoretical Framework of Interpretation. 28 Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME28th), p. 378.

GÓMEZ CHACÓN I. M^a. (2005), Affect, mathematical Thinking and Intercultural learning; A Study on Educational practice, En M. M.Bosh y otros (ed.) *Proceedings of CERME 4: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Spain: European Society for Research in Mathematics Education.

GOMEZ-CHACON I. M^a (1998), Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, **16 (3)**, 431-450.

GÓMEZ-CHACÓN I. M^a (2000a), *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea, Madrid.

GÓMEZ-CHACÓN I. M^a (2000b), Affective influences in the knowledge of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **43 (2)**, 149-168.

LAFORTUNE L. & ST-PIERRE L. (1994), *La pensée et les émotions en mathématiques. Métacognition et affectivité*, Les Editions Logiques, Quebec.

LERMAN S. (2001), Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **46**(1/3), 87-113.

MALMIURI M. L. (2001), *The dynamics of affect, cognition, and social environment in the regulation of personal learning processes: The case of mathematics*. Research report. Helsinki: Helsinki University Press.

MANDLER G. (1989), Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En D. B. McLeod y V M. Adams (Eds) *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer-Verlag. New York, 3-19.

MASCOLO M.F., HARKINS D., & HARAKAL T. (2000), The dynamic construction of emotions: Varieties of anger. In M.D. Lewis & I. Granic (Eds.), *Emotion, development, and self-organization: Dynamic systems approaches to emotional development*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 125-152.

MCLEOD D.B. (1992), Research on affect in mathematics education: A reconceptualization, En Douglas A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, NCTM New York, 575-596.

NELMES P. (2003), Developing a conceptual framework for the role of emotions in the language of teaching and learning. *Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 28 February - 3 March, in Bellaria, Italy.

NIMIER J. (1988), *Les modes de relations aux mathématiques. Attitudes et représentations*. Paris: Méridiens Klincksieck.

OP 'T EYNDE, P. & DE CORTE, E. (2002), Accepting emotional complexity: a component systems approach of emotions in the mathematics classroom. Symposium *Motivation and emotion research in education: Theoretical frameworks and methodological issues* at the 2002 Annual Meeting of the American Educational Research Association, in New Orleans, Louisiana.

OP 'T EYNDE P., DE CORTE E., & VERSCHAFFEL L. (2001), What to learn from what we feel?: The role of students' emotions in the mathematics classroom. In S. Volet, & S. Järvelä (Eds.), *Motivation in learning contexts: Theoretical and methodological implications*. A volume in the EARLI/Pergamon "Advances in Learning and Instruction" series, 149-167.

SCHERER K.R. (2000), Emotions as episodes of subsystem synchronization driven by nonlinear appraisal processes. IN M. D. Lewis, & I. Granic (Eds.) *Emotion, development, and self-organization: Dynamic systems approaches to emotional development*, Cambridge University Press, 70-99.

SCHLOEGLMANN W. (2003), Can neuroscience help us better understand affective reactions in Mathematics learning? *Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 28 February - 3 March, in Bellaria, Italy.

TAJFEL H. (1981), *Human groups and social categories*. Cambridge: Cambridge University Press.

TAJFEL H. (Ed.) (1978), *Differentiation between social groups: studies in social psychology of intergroup relations*. *European Monographs in Social Psychology*, 14. London: Academic Press.

VOIGT J. (1994), Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **26**, 275-298.

YACKEL E. & COBB P. (1996), Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27(4)**, 458-477.

Remerciements

Nous remercions les institutions suivantes pour les subventions et le soutien accordés à cette recherche :

- le Centre d'Études et de Recherche Éducative de Education for an Interdependent World à Bruxelles (Belgique) ;
- le Ministère de l'Éducation du Portugal ;
- l'ambassade du Portugal en Belgique ;
- la Commission Européenne, DG Education and Culture ;
- Thematic Network Socrates "Identity and Citizenship in Europe (CICE)".

INÉS M^a GÓMEZ-CHACÓN,
Universidad Complutense de Madrid (España)
igomezchacon@mat.ucm.es

LURDES FIGUEIRAL,
Escola Artística Soares dos Reis, Porto (Portugal)
lurdesf@essr.net

LES FORUMS DE QUESTIONS MATHÉMATIQUES SUR INTERNET ET LES ATTENTES SUR LE TRAVAIL DES ÉLÈVES

Abstract. Forums of Mathematical Questions on Internet and Expectations about Pupils' Work

Forums of mathematical questions on Internet appear today as a place where a need of help to the pupils' school works is crystallized. In this research, on the basis of the questions put by pupils on these forums, we want to study some possible sources of this need. In this purpose, we question about didactic stakes of the situations of the study and pupils' possible actions in the accomplishment of their stakes. Our analysis provides us some important results to reconsider the pupils' work and to reorganize the didactic situations.

Résumé. Les forums de questions mathématiques sur Internet apparaissent aujourd'hui comme des endroits où se concrétise un besoin d'aide au travail des élèves, hors temps scolaire. Dans cette recherche, en partant des questions posées par les élèves sur ces forums en vue d'obtenir une aide pour la réalisation du travail mathématique qui leur est demandé, nous nous proposons d'étudier quelques déterminations possibles de ce besoin. Notre analyse nous fournit certains résultats qui nous engagent à repenser le travail des élèves et les situations didactiques de l'étude.

Mots-clés. Forum, contrat didactique, enjeu didactique, étude, aide à l'étude, algèbre, fonctions, classe de Seconde.

Introduction

Notre recherche s'appuie sur l'observation d'un phénomène didactique concernant le travail personnel que les élèves doivent réaliser à l'extérieur de l'espace scolaire pour assurer leurs apprentissages. Le phénomène en question est celui du besoin d'*accompagnement* (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000) et d'*aide à l'étude* (Chevallard, 2002a) que ressentent de nombreux élèves lors de ce travail. Le lieu où la manifestation de ce besoin est observée est celui des forums sur Internet que nous appelons « les forums de questions mathématiques ». En nous intéressant aux questions posées par les élèves sur certains forums, les plus accessibles et les plus représentatifs par le nombre des questions qui y sont traitées et leur permanence, nous nous sommes demandé quelle pouvait être la source de ce besoin et quelle

aide pouvait donner les forums pour que ce besoin s'y manifeste aussi massivement. Ce fut l'objet de notre mémoire de DEA (Erdogan, 2001). Dans le cadre de ce travail, au bout d'une année d'observation des échanges passés sur ces forums, nous avons procédé à la classification des questions en vue d'identifier les types de besoin qui s'y observent et nous avons tenté de définir le contrat didactique qui sous-tendait les échanges sur ces forums entre celui qui étudie et pose une question et celui qui apporte une aide à l'étude en répondant à cette question. On remarquera immédiatement que le format même des interactions est le format d'interaction sociale questions-réponses ; ordinairement, ce format n'est pas porteur d'intentions didactiques fortes : la réponse est supposée épuiser l'intérêt de l'interaction. Dans le cadre d'un contrat didactique scolaire en revanche, la réponse du destinataire de la question a pour objet de permettre le développement de l'étude engagée par le destinataire, qui ne se présente donc pas comme l'exécutant d'une tâche normalement routinière¹.

Au premier abord avec les questions posées, le besoin d'aide fortement exprimé par les élèves pour la réalisation des devoirs à la maison et des exercices scolaires donnerait pourtant à croire que leurs questions ne sont pas relatives à quelque chose à comprendre puis à apprendre, mais portent sur quelque chose à faire. Leur formulation montre qu'elles leur apparaissent comme des tâches dont il convient de s'acquitter. D'autre part, l'observation des réponses et le fait qu'elles n'appellent pas à la poursuite de l'interaction montre qu'elles sont faites sans interrogation sur des éventuelles difficultés que l'élève pourrait rencontrer s'il se mettait à étudier le contenu mathématique sous-jacent à la question. Cela ne nous étonne pas vraiment : le fonctionnement des forums relève au mieux d'un contrat faiblement didactique dont les caractéristiques ont été décrites par Brousseau (1995) :

L'émetteur accepte d'organiser son message en fonction de certaines caractéristiques « théoriques » de son interlocuteur. Il assume certaines responsabilités quant au contenu de ce message, mais aucune quant à ses effets sur le récepteur, même s'il est conscient de modifier son système de décision.

Ainsi :

[...] L'émetteur répond à une demande du récepteur pour une utilisation qu'il ignore, il y a contrôle constant de la compétence de l'émetteur mais pas de celle du

¹ L'exemple traditionnellement donné en illustration de ce phénomène (les tâches à enjeu didactique n'ont pas pour enjeu la réussite d'une action dans le monde mais indiquent la matière d'une étude) est celui de l'enfant à qui l'on demande de mettre le couvert et qui répond : "tu m'as appris hier, je sais" (sous-entendu : je n'ai plus besoin de l'apprendre et je n'ai donc pas à le faire), retournant ainsi à son avantage sa compréhension du contrat didactique.

récepteur. L'émetteur ne sait pas s'il est vraiment compris, ni même reçu, si le récepteur ne manifeste aucune réaction...²

Tout ceci a pourtant débouché sur des questions importantes et nous ne prétendons pas répondre à toutes : « Quelle est la véritable culture de l'étude dans les classes de mathématiques ? » et « Comment l'institution - classe fonctionne-t-elle pour engendrer un tel besoin d'aide à l'étude ? » sont celle que nous retiendrons ici, afin de demander s'il serait possible d'intégrer, dans le travail même de la classe sous la direction du professeur, le travail conduit par les élèves à l'aide des forums dans un contrat plus fortement didactique.

Conscient des limites du premier diagnostic, nous nous sommes interrogés sur les enjeux mathématiques et didactiques des *situations scolaires d'étude* afin de déterminer certaines sources de difficulté pour les élèves. Cela nous a engagé à repenser la nature du travail attendu des élèves et à rechercher quelles sont les réelles possibilités des élèves vis-à-vis de ce travail. L'article s'intéresse donc tout particulièrement aux dimensions épistémologique et didactique du travail d'étude attendu des élèves et montre notre manière de l'étudier. Il s'appuie sur deux cas précis, chacun étant fondé sur une question posée dans un forum.

1. Des forums de questions mathématiques aux problèmes didactiques

L'ouverture des forums commence avec Internet, devenu accessible aujourd'hui à une très grande majorité de la population. L'existence des forums de questions relatives aux mathématiques scolaires semble soutenue d'une part par l'accessibilité d'autre part par la rapidité qu'ils donnent. La possibilité d'obtenir une information dans un temps relativement court a suscité un besoin d'aide dont les élèves témoignaient déjà dans leurs rapports aux Boutiques de mathématiques (Chevallard, 1990). Cependant, même en considérant les forums comme des *systèmes didactiques auxiliaires* (Chevallard, 1995)³ par le fait qu'ils prennent en charge un besoin d'aide venu de l'étude conduite dans un système principal autre,

² Il faudra noter que certains de ces forums montrent aujourd'hui une évolution vers des interactions plus structurées. Nous pensons qu'elle est due à une prise de conscience, par tous les acteurs (les élèves, les aides et les responsables des forums), de la faible efficacité didactique des forums, pour de nombreux élèves (Erdogan, 2005).

³ Nous utilisons les notions de *système didactique* et de *système d'enseignement* selon la différence marquée par Chevallard (1992, 1995) : Un système didactique comporte ou moins un sujet qui vient occuper une position d'enseignant et un sujet qui vient occuper une position d'élève, autour d'un objet appartenant à l'ensemble des enjeux didactiques pour l'institution. Mais l'existence d'un système didactique suppose un système d'enseignement qui construit « un environnement systémique, dont le rôle est essentiellement de créer tout un ensemble de conditions nécessaires à l'existence du système didactique » Chevallard (1992, p.97).

comprendre les conditions de satisfaction de ce besoin pose des problèmes didactiques difficiles (Félix, 2002). Quelques-uns de ces problèmes sont issus du système d'enseignement d'autres, des systèmes didactiques principaux que sont les classes. Mais surtout, le paradoxe premier de tout contrat didactique : « Tout ce qu'il [le maître] entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. » (Brousseau, 1998) pèse plus fortement encore sur l'interaction auxiliaire. Comment alors une personne qui vient répondre aux questions posées par les élèves sur Internet - qui peut difficilement être tenue responsable du rôle didactique de son message - se comporte-t-elle pour fournir une aide sans que la responsabilité de l'élève dans l'exécution de sa tâche ne soit déniée, enlevant à celle-ci sa fonction majeure de désignation d'un enjeu didactique défini dans le système principal ? Peut-on définir *a priori* comment répondre ? Existe-t-il un critère en vertu duquel une réponse de type « Qu'as-tu déjà trouvé ? » serait préférable à une réponse qui développe complètement la démarche attendue⁴ ? Doit-on considérer que l'on voit à l'oeuvre en ce lieu un déplacement de la topogénèse et que le partage des responsabilités peut être redéfini sans danger ? A-t-on trouvé dans ces dispositifs un moyen de négociation du partage topogénétique qu'il faudrait conseiller au professeur d'intégrer dans l'espace didactique principal ?

La production d'une réponse à ces questions suppose que l'on mette en place un système d'interprétation pertinent des situations didactiques ainsi créées à l'initiative des élèves. Cette ambition est hors de la portée de cet article. Partant du besoin d'aide précisé ci-dessus, nous voulons surtout nous interroger sur les enjeux didactiques des situations d'étude proposées par le moyen du *travail donné à faire à la maison*, afin de reconsidérer les actions possibles des élèves dans la réalisation de leurs enjeux. À cet effet, nous nous situons du côté d'une analyse épistémologique et didactique de ces situations qui relève de leur *analyse a priori*.

2. Analyse de deux situations d'étude

Nous allons ici étudier une question posée par un étudiant de DEUG⁵ et une question posée par un élève de Seconde⁶, toutes les deux venues le même jour (le 22 octobre 2000) sur le forum de l'Ecole Polytechnique⁷. Ce forum, tenu par l'association des élèves de cette Ecole, reçoit majoritairement des questions venant des élèves du lycée, des premières années universitaires, des classes préparatoires.

⁴ Ces deux catégories de réponse font partie des réponses effectivement observées lors de notre travail cité ci-dessus.

⁵ Les deux premières années universitaires.

⁶ Première année du lycée, élèves de 15-16 ans.

⁷ Pour accéder au forum : <http://www.polytechnique.fr/eleves/binets/intermaths/>

On peut penser que l'intérêt des polytechniciens pour cette activité est un effet de leur entraînement au concours, qui les conduit à l'étude d'un très grand corpus d'exercices et problèmes, au travers duquel ils acquièrent une maîtrise technique reconnue dans les domaines mathématiques inscrits dans leur programme de préparation. On sait que cette activité les rend sensibles à la possibilité d'accéder aux solutions d'exercices qu'ils ont échoué à résoudre mais qu'ils doivent pourtant étudier. Le forum, qui justement donne des schémas de réponse relativement complets, a reçu ce jour là douze questions dont six d'algèbre, cinq de géométrie et une de physique. Il existe au moins une réponse donnée le même jour à chacune de ces questions.

2.1. Question posée par un élève de Seconde

Envoyé par Didier le 22 Octobre 2000 à 16:15:11: sous le titre : Maths Seconde hyper urgent

« Bonjour, je dois faire ces deux exos et je n'y arrive pas du tout, pouvez vous m'aidez?

I/ valeur approchée de $1/(1+x)$, (x n'est pas égal à -1)

I/1/ Démontrer que, pour tout x pas égal à -1, on a : $1/(1+x) = 1-x+(x^2)/(1+x)$

2/ Démontrer que pour tout x appartient à $[-1/2;1/2]$ $\leq$ signifie inférieur ou égal.

a) $0 \leq x^2 \leq 1/4$

b) $2/3 \leq 1/(1+x) \leq 2$

c) $0 \leq x^2/(1+x) \leq 2x^2$

3/Déduire des deux questions précédentes que, pour tout x appartient à $[-1/2;1/2]$, $1-x$ est une valeur approchée par défaut de $1/(1+x)$ à $2x^2$ près.

4/ Donner à l'aide de cette méthode des valeurs approchées des nombres suivants, en indiquant la précision (on pourra comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par la calculatrice): $1/1,004$; $1/0,9993$; $1/3,006$.

II/ Encadrement de $\sqrt{1+x}$, $\sqrt{}$: racine carré.

Soit x un réel strictement positif. On pose:

$A = \sqrt{1+x}$; $B = 1+x/2$; $C = x^2/8 + \sqrt{1+x}$

1/ Montrer que A , B et C sont strictement plus grand que 1.

2/ Comparer A^2 et B^2 . En déduire que $\sqrt{1+x} < 1+x/2$.

3/ Prouver que $C^2 - B^2 = x^2/4(\sqrt{1+x} + x^2/16 - 1)$. Comparer B^2 et C^2 . En déduire que $1+x/2 - x^2/8$ est inférieur à $\sqrt{1+x}$.

Note : Nous venons donc d'établir l'encadrement suivant de $\sqrt{1+x}$:

pour $x > 0$, $1+x/2 - x^2/8 < \sqrt{1+x} < 1+x/2$.

4/ Donner sans calculatrice un encadrement de $\sqrt{1,0002}$ et une valeur approchée de $\sqrt{1,0000001}$ à 10^{-14} près.

Merci beaucoup beaucoup. »

Didie

Etudions les deux questions ainsi que la forme des éléments de réponse donnés sur le forum :

Re : Maths seconde hyper Urgent

Envoyé par Basile le 22 Octobre 2000 à 22:22:12:

: I/ valeur approchée de $1/(1+x)$, (x n'est pas égal à -1)

: 1/ Démontrer que, pour tout x pas égal à -1 , on a :

: $1/(1+x) = 1 - x + (x^2)/(1+x)$

Réduis au même dénominateur

: 2/ Démontrer que pour tout x appartient à $[-1/2; 1/2]$ $\leq$ signifie inférieur ou égal.

: a) $0 \leq x^2 \leq 1/4$

Utilise la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$ et sa décroissance sur $\mathbb{R}^-$.

Etc. Le destinataire de la question a une attitude didactique qui consiste à nommer une technique (réduire au même dénominateur) ou un théorème (la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$) qui sont supposés connus d'un élève de Seconde. Il fait donc bouger le partage topogénétique (ce qui est de la responsabilité effective du professeur et des élèves) en fournissant une *indication* supplémentaire qui permet en principe l'action autonome de l'élève. D'une certaine manière, l'énoncé faisait de même ou presque en décomposant le travail en sous-questions relevant, chacune, d'un savoir officiel de la classe de Seconde. Mais il ne nommait pas ce savoir, l'indication était plus subtile.

Cette indication était inefficace car le fait que toute question dans un problème relève d'une telle aide n'est peut-être pas connu d'un élève de Seconde : il l'apprendrait alors à cette occasion. Pour autant, l'élève arrivera-t-il à saisir, au-delà de cet apprentissage relatif au contrat didactique, un enjeu mathématique au problème. Par exemple, ce qui fait pour nous l'intérêt mathématique de son travail : comparer les encadrements des deux expressions et la manière de les obtenir, pour s'apercevoir qu'il doit y avoir là une technique, dont la généralité devra être interrogée ? Sans doute ne le fera-t-il pas : il n'est pas prévu d'étudier ce type de questions avant deux ou trois ans, lorsqu'une technique générique pourra être mise en place et s'il y arrive seul, c'est un élève remarquable ! On peut même penser qu'un tel enjeu n'est pas porté par le professeur qui a choisi l'exercice, il n'est pas sûr que les auteurs du manuel en aient été conscients. L'*indication* nécessaire est pourtant donnée deux fois : par l'énoncé puisque la question terminale est la même dans les deux, par le destinataire de la question qui termine en le disant : « comme précédemment » ; mais cette indication n'est pertinente que pour qui regarde le problème comme *développement dirigé d'une technique* et non comme occasion de mobiliser l'ensemble des techniques dont on dispose. Pour cela, il faut identifier ce que Chevallard (1999) nomme « un type de tâches, proposé à l'étude » comme la répétition de l'exercice le montre...

Suite de la réponse**II- Encadrement de $\sqrt{1+x}$**

: Soit x un réel strictement positif. On pose:

: $A = \sqrt{1+x}$

: $B = 1+x/2$

: $C = x^2/8 + \sqrt{1+x}$

: 1/Montrer que A , B et C sont strictement plus grand que 1.

A : Utilise la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$

B : Pas dur.

C : tu as $C \geq A > 1$

: 2/Comparer A^2 et B^2 .

Développes et mets tout du même côté.

.../...

4/ Donner sans calculatrice un encadrement de $\sqrt{1,0002}$ et une valeur approchée de $\sqrt{1,0000001}$ à 10^{-14} près.

Même méthode que précédemment.

Voilà.

En effet, les gestes techniques élémentaires sont standards : « développe et mets tout du même côté », « réduis au même dénominateur », « utilise la croissance de la fonction carré », etc. Mais en suivant les étapes intermédiaires et en se rapportant à une comparaison des carrés de deux nombres positifs donnés, l'élève doit arriver à un encadrement de $\sqrt{1+x}$ en tant que formule algébrique qui permettra de faire des calculs numériques, tels que l'encadrement et la valeur approchée d'une classe de nombres pouvant être mis sous cette forme parce qu'ils sont solution d'une équation. Notons que ce genre de calcul ne pourrait être intéressant pour un élève que pour un motif numérique : lorsque le calcul dépasse la capacité de la machine. Par exemple ; pour comparer des nombres tels que $A = 1,000\ 000\ 000\ 1$ et

$B = 1/0,999\ 999\ 999\ 9$ il sera pertinent de comparer $\frac{1}{1-x}$ et $1+x$.

En bref, l'ensemble des réponses fournies à ces questions montre non pas que l'élève peut répondre dans le cadre strict du contrat, mais que le professeur peut montrer à l'élève une réponse qui semble dans ce cadre : en quoi il se légitime d'avoir donné la tâche mais il se défausse de la responsabilité, réussit à désigner aux élèves l'enjeu de l'étude que demande la réalisation de la tâche. L'identification de la différence de leurs positions institutionnelles suppose l'analyse de ce que Chevillard (2002b) nomme *les niveaux de détermination de l'organisation mathématique étudiée*, c'est-à-dire du corps de mathématiques auquel l'un et l'autre se réfèrent dans l'analyse du problème et de ses enjeux. Le professeur travaille au niveau des grands problèmes d'un champ de problèmes ou du domaine d'une théorie quand l'élève est au niveau de la tâche isolée : que peut-il apprendre du type

de tâches sous-jacent au problème, si le professeur se contente d'une démonstration de faisabilité sous contrat ?

2.2. Question posée par un étudiant de DEUG

L'énoncé de l'exercice fait la question, comme d'ordinaire sur les forums :

Soit p un nombre premier et k un entier tels que p et k sont premiers entre eux ;

- a- Déterminer une relation entre $C(p, k)$ et $C(p-1, k-1)$
- b- En déduire que p divise $C(p, k)$
- c- En déduire que pour tout a, b de $\mathbb{Z}$, $(a + b)^p$ est congru à $a^p + b^p$ (modulo p)
- d- Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, n^p est congru à n (modulo p)
- e- En déduire que si p ne divise pas n alors n^{p-1} est congru à 1 (modulo p)
- f- Quel est le reste de la division euclidienne de 61843^{2403} par 13 ?

L'organisation de l'ensemble des questions nous montre encore (parfois même explicitement, par la consigne "en déduire") qu'il faudrait se servir de la question précédente comme hypothèse dans la résolution de la question qui la suit. Mais surtout, on pourrait remarquer que ce problème propose de faire un passage de la combinatoire scolaire au traitement algébrique de questions d'arithmétique, et c'est grâce à ce passage que l'ensemble des questions posées sera résolu. Si ici encore l'étudiant suit la progression de l'énoncé en mobilisant les savoirs sensibles de son cours au fur et à mesure, il arrivera au terme de sa tâche sans que les relations proposées par cette étude - par exemple entre les théorèmes à démontrer et les classes de congruence - soient construites. Ainsi, cette fois encore le problème ne devrait pas être pris pour une tâche à exécuter mais comme la présentation d'un *type de tâches* à étudier : nous allons voir que c'est d'autant plus le cas ici que les questions orientent vers la seule voie efficace pour un étudiant de DEUG en lui faisant démontrer des *résultats techniques* capitaux pour les problèmes de la même classe, mais qui pourtant ne font pas théorie pour ces problèmes (l'objet théorique ici est le petit théorème de Fermat, usuellement traité de manière plus directe dans les manuels).

Explicitons les étapes intermédiaires de la résolution du problème :

La première question suppose la mise en œuvre des connaissances de base de la combinatoire scolaire dont l'étude, telle que la question est formulée, ne devrait pas poser de problèmes. Mais si cette question n'avait pas été posée et si la première question avait été « Soit p un nombre premier et k un entier tels que p et k sont

premiers entre eux, montrer que p divise $C(p, k)$ », la recherche de résolution aurait pu être :

$$C_p^k = \frac{p!}{(p-k)!k!} = \frac{p(p-1)!}{(p-k)(p-k-1)!k!} = \frac{p(p-1)!}{(p-k)(p-1-k)!k!} = \frac{p}{p-k} \cdot C_{p-1}^k$$

... et le mouvement aurait été interrompu d'emblée, car cela ne permet pas de conclure. Cela nous montre déjà qu'il s'agit d'entrer dans une organisation mathématique de grande envergure permettant de démontrer certains théorèmes qui pourront ensuite fonder une ou des technique(s) pour un certain type de problèmes.

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k \cdot a^{p-k} \cdot b^k = a^p + C_p^1 \cdot a^{p-1} \cdot b + \dots + C_p^k \cdot a^{p-k} \cdot b^k + \dots + C_p^{p-1} \cdot a \cdot b^{p-1} + b^p$$

Une telle manipulation implique une algébrisation qui appartient au calcul combinatoire, mais le mouvement évoqué se poursuit par la question c-) qui ouvre un travail au niveau des congruences. Compte tenu de ce que, pour tout $0 < k < p$, p divise C_p^k , on peut démontrer que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

Ensuite, après avoir montré par récurrence, en s'appuyant sur le résultat précédent, que pour tout p premier et $n \geq 1$, $n^p \equiv n \pmod{p}$, et après avoir démontré que, alors, $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, la dernière question demande de déduire de ces résultats une technique pour un certain type de tâches que l'on pourrait désigner ainsi: « Comment trouver le reste de la division euclidienne par un nombre premier d'un (grand) nombre élevé à une grande puissance ? » et de la mettre en oeuvre dans un cas après avoir vérifié que ce cas en relevait. Mais pour autant, rien ne sera dit du secteur mathématique où de tels problèmes se rencontrent. Nous pouvons dire, seulement en remontant de la tâche au type de tâches puis au secteur, que l'organisation mathématique de ce type d'exercice met en jeu d'abord les démonstrations de certains théorèmes techniques qui permettent à leur tour l'élaboration d'une ou plusieurs techniques dont on ne sait dire les tâches qu'elles permettraient d'accomplir⁸. Ces techniques sont supposées prendre du sens grâce à la seule application qui en est proposée, retournant ainsi le mouvement d'enseignement traditionnel de la théorie vers la pratique. Il semble que l'on ait ici une forme didactique répandue à l'université, consistant à faire produire par l'étudiant une séquence didactique telle que le professeur aurait pu proposer dans une séance d'étude dirigée. Nous qualifierons ce geste d'enseignement en disant

⁸ Par exemple, pour ce type de problèmes, trouver le nombre qui est congru à 1 se révèle souvent comme une manière rapide de former la réponse, sans pour autant qu'il y ait mise en oeuvre d'une technique justifiée.

qu'il relève d'un « contrat universitaire » traditionnel en ces lieux ; notre analyse de ce geste dans le cas de la Seconde demeure cependant valide.

3. Des enjeux liés à l'enseignement/l'apprentissage des objets mathématiques

Ce que nous venons d'identifier comme des gestes d'étude attendus mais impossibles semble relever de situations vécues quotidiennement ou presque, tout au moins pour les élèves des classes à mathématiques. En effet, le contrat didactique qui est supposé régler l'étude autonome elle-même, produit - comme nous venons de le voir - une contrainte didactique sur l'organisation des énoncés de devoirs donnés « à la maison » telle que des objets mathématiques et des relations pertinentes pour donner du sens à l'activité sont écartés de la scène. Un fossé se creuse alors entre les apprentissages attendus des élèves et ce qu'ils peuvent effectivement comprendre des démarches mathématiques, qu'ils doivent étudier. Pour étudier cette hypothèse avec le soin nécessaire, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux objets mathématiques de la question de l'élève de Seconde et au champ mathématique dont relève cette question.

3.1. Analyse du champ didactique et mathématique correspondant à la question posée par l'élève de Seconde

Si l'on voulait aller plus loin dans la comparaison des deux questions précédentes, on pourrait même remarquer que toutes les deux s'appuient sur un unique objet/concept mathématique : la relation binaire. Mais dans le deuxième cas il s'agit de relation d'équivalence alors que dans le premier, il s'agit d'une relation d'ordre qui apparaît comme concept permettant la comparaison⁹. Du point de vue du savoir mathématique en effet, l'objet *relation d'ordre* sous-tend les définitions de plus grand/plus petit élément, minorant/majorant, borne supérieure/inférieure etc. Cet objet est consubstantiel aux concepts de nombre, polynôme, graphe, variation, fonction etc. La *comparaison* est plutôt un concept scolaire, effectif sur des ensembles connus en extension, signifiant la détermination de l'ordre de deux éléments du même ensemble ordonné. Il devient, dans l'enseignement au Collège, un objet utile dans la comparaison des nombres et la résolution d'équations et inéquations. Il se traite le plus souvent par une technique de réduction au problème du signe de la différence des deux nombres. En classe de Seconde, tout en gardant son statut pour la comparaison algébrique ou pour la résolution d'équations et

⁹ Une relation binaire R réflexive, antisymétrique et transitive dans l'ensemble E est appelée relation d'ordre dans l'ensemble E . Soit R une relation d'ordre dans un ensemble E , deux éléments x et y sont *comparables* si et seulement si l'une des propositions xRy ou yRx est vraie.

inéquations, cet objet est appelé à cohabiter avec les fonctions, telles que x^2 et $1/x$, couramment appelées les fonctions de référence ou les fonctions usuelles.

En effet, la partie algébrique du curriculum de la classe de Seconde s'appuie sur deux volets : le calcul algébrique, étudié depuis le début du collège, devrait gagner avec l'étude des fonctions non linéaires une certaine stabilité avant l'entrée dans l'Analyse en classe de Première ; à cette occasion, l'usage des équations et inéquations se voit élargi. Notamment, les rédacteurs des programmes notent que *"les calculs numérique et algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révisions systématique mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions"*¹⁰

Le curriculum prévoit donc une étude nouvelle du calcul algébrique, en intégrant notamment les fonctions et leur étude dans les questions demandant de tels calculs qui jusque-là ne se justifiaient que d'eux-mêmes. C'est dans cette organisation nouvelle que la question posée à l'élève de Seconde semble avoir trouvé sa place. Car les questions intermédiaires qui aident l'élève demandent de comparer, à chaque fois, deux de trois nombres donnés par une expression algébrique. Par ailleurs, l'enjeu d'un encadrement de $\sqrt{1+x}$ est important car, comme la lecture même de la réponse donnée nous le montre, nous avons ici affaire aux fonctions de référence dans leur usage savant en analyse, qui est relatif au calcul numérique (Ovaert, 1988). Il s'agit bien sûr de s'appuyer sur la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$ mais aussi d'utiliser l'approximation des fonctions pour obtenir des approximations de nombres. Il nous faut donc montrer avec soin que les comparaisons demandées peuvent être très bien menées à terme par les élèves par une méthode algébrique. Soient donc les questions successives, les savoirs techniques qui peuvent être à disposition d'un élève et les manières de les utiliser dans des organisations techniques efficaces :

1) *a et b étant deux réels, l'hypothèse $a \leq b$ revient au même que l'hypothèse « la différence $b-a$ est positive » ou $b-a > 0$.* De là vient la méthode, appelée au niveau secondaire « la méthode de comparaison » ou « la méthode de différence ». Ainsi, le traitement algébrique de la question « comparer A^2 et B^2 » donnera lieu à la résolution suivante : $B^2 - A^2 = (1 + \frac{x}{2})^2 - (\sqrt{1+x})^2 = \frac{x^2}{4}$, ce qui veut dire que, x^2 étant strictement positif, $B^2 - A^2 > 0$ D'où $B^2 > A^2$

Mais le traitement de cette question ne s'arrête pas là, puisqu'on nous demande dans la suite d'en déduire que $A < B$. Pour ce faire, nous pouvons partir de l'étape

¹⁰ Programme de mathématiques de la classe de Seconde, Bulletin officiel hors série n°2, le 30 août 2001.

précédente en mobilisant un autre savoir, plus raffiné puisque c'est une variante de la technique de « *la quantité conjuguée* », fondée sur une « *identité remarquable* ».

$$2) B^2 - A^2 = (B - A)(B + A) > 0 \Leftrightarrow B - A > 0, (B + A > 0) \text{ D'où, } B > A.$$

Ce traitement algébrique permet une démonstration rapide du sens de variation de ce qu'on appelle la fonction carré (x^2), objet d'enseignement central en classe de Seconde. En effet, pour étudier le sens de variation d'une fonction, la technique la plus connue consiste à appliquer la définition de monotonie qui en constitue aussi la technologie :

3) Une fonction est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I , si pour tous réels a, b appartenant à I tel que $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement $f(a) \geq f(b)$). La technique correspondante est à peu près impraticable parce qu'elle demande d'abord de choisir les intervalles où la fonction est croissante (ou décroissante) avant de déterminer l'ordre de $f(a)$ et $f(b)$ suivant l'ordre de a et b , pour démontrer cette croissance, déjà supposée. Deux traitements algébriques sont envisageables :

- a) Partant des nombres a et b compris dans I , constituer l'ordre de $f(a)$ et $f(b)$ relativement à l'ordre de a et b en suivant des règles de transformation du calcul algébrique ;
- b) Etudier le signe de $f(b)-f(a)$ relativement au signe de $b-a$.

Suivant la deuxième méthode, pour tout réel a et b tels que $0 \leq a < b$, $b-a$ étant positif comme $b+a$, leur produit $(b-a)(b+a)=b^2-a^2$ est positif ; d'où $b^2 > a^2$ et $f(b) > f(a)$. C'est-à-dire que la fonction x^2 est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Pourtant, il ne s'agit pas de la même démonstration que la 2). Car c'est l'hypothèse réciproque qui lui correspond. Soit ; pour tous réels a et b tels que $0 \leq a < b$ et $b^2 > a^2$ alors $b > a$. Il s'agit ici d'un savoir technique qui n'est en aucun endroit démontré dans les manuels et dont l'étude n'est pas demandée dans les programmes alors que son usage simplifie grandement le travail, comme le montre la réponse faite à l'élève de Seconde par un élève de Polytechnique pour qui cela va de soi.

Enfin, considérée du point de vue fonctionnel, la question de l'exercice est supposée mettre en œuvre des propriétés de la fonction carré, notamment ses variations ou l'étude de son extremum, dans des usages qui ne semblent jamais établis en tant que tels en classe de Seconde.

En effet, le fait d'utiliser les variations de la fonction carré pour résoudre une question algébrique relève d'un vrai défi ; d'abord parce que les variations d'une fonction s'appuient, comme nous l'avons vu, sur une définition technologique

délicate à mettre en œuvre ; mais aussi parce que, dans l'état actuel du programme de Seconde, cette mise en œuvre est un enjeu imprenable. Pour montrer qu'une fonction telle que $f(x) = 9 - (x + 2)^2$ est décroissante sur l'intervalle $[-2; +\infty[$, la technique réellement demandée serait la suivante¹¹ ;

Soit a et b deux réels tels que $-2 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq a + 2 < b + 2$, donc $a+2$ et $b+2$ sont deux nombres positifs, rangés dans l'ordre croissant. Comme la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$, on peut écrire ;

$$\begin{aligned}(a + 2)^2 &< (b + 2)^2 \\ -(a + 2)^2 &> -(b + 2)^2 \\ 9 - (a + 2)^2 &> 9 - (b + 2)^2\end{aligned}$$

$$\text{Donc, } f(a) > f(b)$$

*Conclusion : Pour tout a et b de $[-2; +\infty[$ tels que $-2 \leq a < b$, $f(a) > f(b)$
Donc la fonction $f(x) = 9 - (x + 2)^2$ est décroissante sur l'intervalle $[-2; +\infty[$.*

Nous pouvons voir que c'est la propriété de la fonction carré qui devient le critère lorsqu'il s'agit de décider de l'ordre de deux nombres positifs élevés au carré. Mais le fait d'utiliser cette fonction carré comme référence ne va pas de soi. Parce qu'il ne s'agit pas, pour les élèves, d'un usage ordinaire en calcul numérique. Pour en faire une propriété technique il faut mobiliser le non ostensif fonction à propos d'un objet ordinairement associé au calcul littéral, prendre en compte la croissance de la fonction, et cette fonction est x^2 , un objet qui ne se voit que pour qui pense $f(x)$ en termes de « fonction composée ».

Il y a donc une difficulté particulière dans le fait que la technique de résolution demandée est une sorte de mélange de deux types de techniques, à savoir la technique algébrique précisée plus haut et une technique fonctionnelle qui consiste à se servir des fonctions dont les variations sont connues, dans un geste unimaginable pour qui ne connaît pas les fonctions composées ou au moins la notion de changement de variable.

La référence à la fonction carré est ici introduite par le contrat didactique dans ce sens que le professeur demande aux élèves – en fonction des injonctions officielles – de justifier par les variations de la fonction carré dont l'étude a eu lieu quelques semaines avant en lien avec la résolution d'inéquations. Ce qui fait que

¹¹ Il s'agit d'une technique de résolution observée dans des classes de Seconde dans le cadre de notre travail de thèse. L'exemple choisi est le troisième exercice dans l'introduction de cette étude dans une des classes observées.

l'activité est nécessairement dénuée de sens pour les élèves, au moins pour ce qui concerne cette étape de la résolution¹².

En résumé, la technique est essentiellement basée sur le calcul algébrique qui assure le montage de la fonction. La fonction carré dont la variation n'intervient que d'une manière non indispensable à la mise en œuvre de la technique constitue cependant l'objet du contrat, c'est-à-dire que cet usage de la fonction carré constitue l'enjeu didactique du programme et oriente le projet du professeur.

Conclusion

Au-delà du caractère éminemment problématique de l'aide que peuvent donner des systèmes auxiliaires comme les forums sur Internet, nos analyses montrent qu'il est nécessaire de s'interroger sur une partie du travail des élèves qui est considérée la plupart du temps comme allant de soi. Nous pouvons dire que le travail laissé à la charge des élèves échappe souvent aux regards didactiques, et pourtant ce travail est pour les deux actants du système d'enseignement (élève et enseignant) un enjeu institutionnel majeur.

Nous avons ainsi montré sur des exemples que ce travail a deux dimensions que la recherche didactique doit prendre en compte : une dimension liée au contrat didactique, aux gestes d'étude attendus, et une dimension épistémique relative aux objets mathématiques des situations proposées, qu'il convient de considérer comme un champ de signification et d'investigation. Dans un sens précis, nous avons montré que devant une telle situation, les objets mathématiques - certains visibles, d'autres cachés - s'agencent les uns avec les autres - à différents niveaux de profondeur - jusqu'à constituer un champ pertinent sur lequel va s'appuyer l'étude autonome de l'élève, en lui donnant les outils d'action mais aussi et c'est essentiel si l'on pense qu'un acteur humain n'agit jamais sans anticiper quelque chose des effets de son action, les moyens d'identification et de validation de ses propres démarches. Si ce champ ne se présente pas à l'élève en tant que tel, via l'enseignement dispensé et le contrat d'étude mis en place, quel sera le référentiel de l'élève dans la situation de travail à la maison où il n'y a pas de professeur pour organiser et diriger son étude ?

On se trouve alors devant une question didactique importante : comment imaginer et mettre en place une analyse qui nous permet d'identifier le champ mathématique dont relève une situation d'étude ? Comment prendre en compte les objets et les relations qui donnent du sens à l'activité et assurent la dimension autonome de la démarche suivie ? Pour répondre à cette question, nous proposons un concept

¹² Au moment du contrôle, seul un élève sur 33 arrive à réussir dans une situation semblable. Une grande partie des erreurs commises concerne cette étape de la résolution.

didactique, celui de *site mathématique*¹³ qui désigne le champ des objets et des relations pertinentes, appelé par la situation, et nous proposons un modèle d'analyse autour de ce concept, consistant à identifier les objets principaux du site mathématique en question, les concepts correspondants et les techniques d'étude liées à ces concepts. Le site mathématique dans le cas de la question de l'élève de Seconde sera alors un site « algébrique – fonctionnel ». Les objets principaux de ce site seraient par conséquent constitués des objets/concepts tels que nombre, polynôme, relation/graphe, équation, fonction, variation, ordre et inéquation... Ce site s'appuierait sur un nombre important de concepts mathématiques, chacun appartenant un ou plusieurs domaines mathématiques au sens strict et ces concepts seraient convoqués en fonction des techniques qu'ils permettent de mettre en œuvre et dont ils assurent le sens, et ces techniques vont convoquer d'autres concepts, ainsi de suite.

Nous pensons qu'une telle analyse devrait tout d'abord permettre de montrer la pertinence épistémique de certains objets, les relations entre eux et étudier les relations et les objets particulièrement soutenus par le contrat didactique à propos d'une organisation didactique proposée. Par ailleurs, comme il s'agit là d'une vision assez souple et évolutive des objets mathématiques impliquées dans une situation d'étude, cette analyse devrait permettre d'étudier les objets du curriculum comme un ensemble, d'identifier les phénomènes de rupture et de continuité et les conséquences de ceux-ci sur les décisions du professeur et l'étude autonome des élèves.

¹³ En référence à la notion du *site archéologique* où on effectue des fouilles. Pour plus d'informations au sujet de la notion de *site mathématique* et de son usage à des fins didactiques, voir Duchet & Erdogan (2005) et notre travail de thèse qui sera bientôt disponible.

Bibliographie

BROUSSEAU G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. *Actes de la VIII^e Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Saint - Sauve, 22-31 août.

BROUSSEAU G. (1998), *La théorie des situations didactique*, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1990), *Notes sur la notion de « Boutique de mathématiques »*, Note interne, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en Didactique des mathématiques* **12-1**, 73-112.

CHEVALLARD Y. (1995), Familière et Problématique, la figure du professeur. *Actes de la VIII^e École d'été de didactique des mathématiques*, Saint - Sauves, 22-31 août.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* **19-2**, 221-266.

CHEVALLARD Y. (2002a), Organiser l'étude, Structure et Fonctions. In Dorier Jean-Luc (ed) *XXI^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (2002b), Organiser l'étude : Ecologie et Régulation. In Dorier Jean-Luc (ed) *XXI^{ème} école d'été de didactique des mathématiques* La Pensée Sauvage.

DUCHET P. & ERDOGAN A. (2005), Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-4)*, Sant Feliu de Guíxols, Spain, 17- 21 February 2005.

ERDOGAN A. (2001), *La dimension didactique des forums de questions mathématiques*, Mémoire de DEA, Université Claude Bernard- Lyon1.

ERDOGAN A. (2005), Forums on Internet: tools for teaching and learning? Proceeding in CD, *Biltek2005: International Informatics Congress*, 9-12 juin 2005, Eskisehir/Turkey.

FÉLIX CH. (2002), *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire*, Thèse du troisième cycle, Université d'Aix-Marseille I.

SENSEVY G., MERCIER A. & SCHUBAUER-LÉONI M.L. (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20, *Recherches en didactique des mathématiques* **20-3**, 263-304.

OVAERT J.-L. (1988), Histoire du calcul numérique, *Encyclopædia Universalis*.

ABDULKADIR ERDOGAN
DIDIREM – UNIVERSITÉ PARIS VII
erdogan_kadir@yahoo.fr

ALAIN MERCIER
UMR ADEF
Université de Provence, INRP,
IUFM d'Aix-Marseille
mercier@inrp.fr

M. EUGENIA ANDREU IBARRA & JESÚS A. Riestra Velázquez

Article adapté de l'espagnol et augmenté par FRANÇOIS PLUVINAGE^(*)

ET SI NOUS EN RESTIONS À EULER ET LAGRANGE ?

Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures

Abstract. Processing Calculus as Euler and Lagrange? Experiment of Teaching Calculus at University to Tyros not Mathematicians

At the beginning of College, a Calculus course is present in many paths, for its variety of uses. But rate of failure at final assessment is a problem. An experimental core curriculum for engineering has been designed in Mexico, with the idea not to change the global content of the course, but to modify its progression. As in the historic development, algebraic derivative comes before the formal definition of local derivative as limit. End of course actually goes beyond Euler, who used the notation $f(x)$, and Lagrange, who has introduced the notation $f'(x)$, but only after a wide use of their methods. Observed results are encouraging, mainly for the students who manifested slightly deficient results at the initial assessment.

Résumé. En début d'enseignement supérieur, l'analyse figure dans de nombreux cursus en raison de la diversité de ses utilisations. Mais la proportion d'échecs à l'examen pose problème. Un enseignement dans des formations mexicaines d'ingénierie a été entrepris, avec l'idée de ne pas modifier globalement le contenu d'enseignement, mais d'en changer la progression. Celle-ci a été voulue plus conforme au développement historique, dans lequel par exemple la dérivation algébrique a précédé la définition ponctuelle de la dérivée. Le cours prévu va finalement plus loin qu'Euler, qui systématisa la notation $f(x)$, et Lagrange, à qui est due la notation $f'(x)$ de la dérivée, mais seulement après une large exploitation de leurs modes de pensée. Les résultats observés sont encourageants, surtout auprès des étudiants pour lesquels des tests initiaux avaient révélé quelques déficiences.

Mots-clés. Enseignement supérieur, Formations d'ingénieurs, Calcul différentiel, Fonction dérivée, Dérivée, Situations problèmes, Maximum et minimum.

^(*) La version en espagnol de cet article est rédigée à l'intention des enseignants, de manière à mettre à leur disposition les éléments pour la préparation d'un cours. Elle est consultable en ligne à l'adresse <http://www.matedu.cinvestav.mx/~matedul>.

Introduction

Le calcul différentiel et intégral est un sujet central dans le développement des mathématiques. De plus, il figure dans un grand nombre de programmes d'enseignement au niveau de la fin des études secondaires et du début de l'enseignement supérieur, même dans des branches étrangères aux sciences exactes. La raison en est qu'il dispense des outils mathématiques fondamentaux, permettant d'étudier des phénomènes et d'en proposer des modèles, si bien qu'il s'avère indispensable dans des disciplines aussi diverses que physique, économie, biologie, sociologie, etc. Mais l'appropriation des bases mêmes du calcul différentiel et intégral présente des difficultés qui le font apparaître dans les formations à ces disciplines comme un barrage. Les échecs qu'il provoque sont évidemment regrettables lorsqu'ils concernent des étudiants qui par ailleurs présentent les qualités requises pour le cursus qu'ils ont entrepris.

1. Diagnostic général et repérage de difficultés spécifiques

Les résultats d'examen au terme de cours de Calcul différentiel et intégral sont traditionnellement très faibles. Cela est sensible dans les formations d'ingénierie de l'Université Autonome Métropolitaine de Mexico (UAM), dont la "Unidad Azcapotzalco" (UAM-Azc.) a été le centre où ont été menées les observations rapportées dans cet article. Le taux d'échec à l'examen de fin du premier cours de Calcul différentiel et intégral atteignait jusqu'à 72%, selon les chiffres que présentait la Division des Examens de cette université en 1997. Une telle situation n'était pas spécifique à notre institution : ainsi Tall (1996) rapportait, citant Anderson et Loftsgarden (1987) et Peterson (1897), qu'en dépit d'un entraînement intensif à des exercices d'analyse, le pourcentage d'échecs dans cette matière oscillait entre 30% et 50%.

Ce problème du faible taux de réussite nous inquiète ainsi que nombre de professeurs et nous savons par expérience que cette situation peut être due à de multiples causes, qui vont de questions d'ordre psychologique, économique ou social hors de portée des enseignants, à des questions tenant, elles, aux pratiques d'étude ou d'apprentissage sur lesquelles le professeur peut peser de manière déterminante.

Parmi les questions concernant les apprentissages, nous pouvons souligner les déficiences des étudiants sur des savoirs mathématiques antérieurement étudiés, nécessaires aux développements d'un cours de Calcul différentiel et intégral. À ce sujet, une étude conduite par des professeurs du Département des Sciences et d'Ingénierie de la UAM (Andreu et al., 1992) a montré qu'il y a une relation directe entre ces déficiences et le manque de réussite au premier cours d'analyse intitulé Calcul différentiel et intégral I (calcul différentiel), enseigné lors du

premier trimestre d'études des formations d'ingénierie de cette institution. Ce trimestre comporte 11 semaines et une heure et demie par jour est consacrée au Calcul différentiel et intégral I ; par semaine, trois cours incombent au professeur responsable de l'enseignement et deux séances d'exercices à un assistant.

Le déroulement d'un cours de calcul différentiel est rendu difficile lorsque des lacunes algébriques et même arithmétiques se rencontrent chez la plupart des étudiants. Cette difficulté est accrue par l'obligation, en plus de couvrir complètement le programme de calcul différentiel, de mener un travail important sur la partie algébrique. De plus, dans un système trimestriel de caractère intensif, comme c'est le cas à la UAM-Azc., le temps imparti n'est pas suffisant pour que l'étudiant se rattrape et il en résulte que beaucoup abandonnent en cours de trimestre ou bien vont jusqu'au bout mais échouent.

Afin de préciser le diagnostic de possibles déficiences, un questionnaire initial de positionnement (prétest) a été élaboré. Il porte sur les connaissances algébriques et numériques qui nous paraissaient nécessaires pour le cours de Calcul différentiel. Les considérations d'ordre épistémologique sur lesquelles s'est appuyée toute notre démarche d'enseignement interviennent déjà dans ce choix pour un test diagnostic. En effet les deux piliers du développement spectaculaire de l'analyse à un moment de l'histoire des mathématiques ont été les traitements linéaires et le calcul littéral.

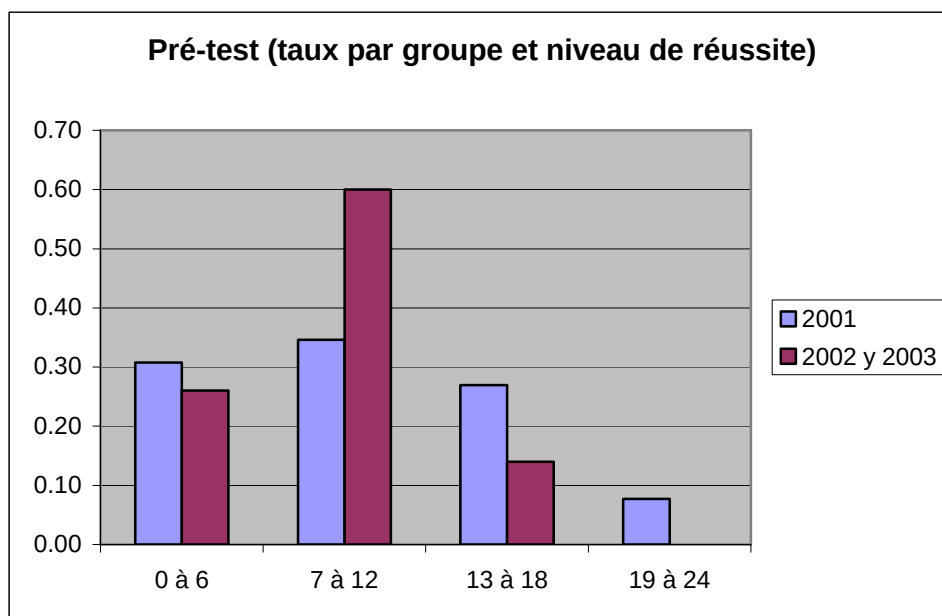
Notre test comportait quatre feuilles qui furent administrées séparément et dont nous n'examinons ici que les deux premières, correspondant aux prérequis les plus essentiels selon nous pour le cours considéré. Une présentation condensée de ces deux feuilles se trouve en annexe 2.

La première feuille, prévue pour un travail de 20 minutes sans calculatrice, comporte trois parties : A- ordre de nombres dont l'expression fait apparaître des exposants (7 questions), B- simplification d'expressions fractionnaires numériques (6 questions), C- simplification d'expressions fractionnaires comportant une variable (4 questions). La seconde feuille est constituée de : D- six questions sur des représentations graphiques, E- une question demandant d'exprimer une variable présente dans une formule donnée.

Ce prétest fut appliqué une première fois en début du trimestre d'automne 2001 à deux groupes (notés ici CAT06 et CAT07) qui suivirent l'enseignement habituel. Il fut ensuite appliqué en début du trimestre d'automne 2002 à deux groupes (notés CAT02 et CAT1) et enfin au trimestre d'automne 2003 à un groupe (également noté CAT02).

Les résultats des étudiants à ce prétest ont été regroupés par population (groupe de contrôle 2001 et groupes expérimentaux 2002 et 2003) et selon quatre niveaux de réussite, qui apparaissent dans la table ci-après.

Nombre de réponses correctes \ Années	2001	2002 & 2003
19 à 24	2	0
13 à 18	7	7
7 à 12	9	30
0 à 6	8	13



Une première observation est que la situation a plutôt empiré de 2001 aux années 2002 et 2003 : Si en 2001, les étudiants qui avaient réussi plus de la moitié des 24 exercices élémentaires proposés représentaient une proportion de 0,35, en 2002 et 2003 cette proportion est tombée à 0,14. Nous verrons après la présentation de notre proposition d'enseignement les résultats des divers groupes d'étudiants distingués dans notre tableau.

2. Idées générales de la proposition alternative d'enseignement de la dérivée

Confrontés à la problématique qui vient d'être exposée, nous avons envisagé une alternative qui, sans prétendre aboutir à une résolution complète du problème d'enseignement, offre néanmoins aux étudiants une plus grande opportunité de se

ratrapper et de réussir l'unité de Calcul différentiel, et surtout d'aboutir à une meilleure compréhension des objectifs centraux constitués par la dérivée ainsi que par ses applications à la représentation graphique d'une fonction et à la résolution de problèmes de maximaux et de minimaux de cette même fonction.

Les programmes d'enseignement en cours débutent par la présentation des nombres réels et des limites. C'est un peu comme si, en géométrie euclidienne, la résolution de problèmes de constructions supposait qu'ait été digérée l'axiomatique du plan euclidien. Certes le concept de limite comme point de départ est en conformité avec le développement même des mathématiques d'aujourd'hui, mais il présente le gros inconvénient de faire dépendre de son acquisition les résultats usuels de dérivation. Une piste de travail pour le didacticien est la recherche de réponses de l'enseignement aux difficultés d'apprentissage que présente la délicate notion de limite. C'est elle dont une exploration est par exemple présentée par Hitt F. & Paez R. (2004). Cette piste est d'un intérêt indiscutable pour la formation d'étudiants en mathématiques ou de futurs professeurs de mathématiques. Mais pour des formations au spectre mathématique moins étendu, une appropriation du concept de limite est-elle un passage obligé pour savoir dériver les fonctions rencontrées et savoir appliquer la dérivation ?

« Historiquement, la dérivée fut d'abord utilisée, puis découverte, et en dernier lieu définie. » Cette phrase, qui fixe les étapes du développement du concept de dérivée d'un point de vue social, exprime une thèse proposée par l'historienne des mathématiques Judith V. Grabiner (1983). L'étape d'utilisation inconsciente de la dérivée renvoie à la méthode de Fermat pour la détermination de maximaux et minimaux. L'étape de découverte est bien illustrée par les contributions d'Euler, qui fit un usage systématique de la notation $f(x)$ pour une fonction, et Lagrange, qui introduisit la notation $f'(x)$ pour sa dérivée (voir par exemple le site Chronomath <http://serge.mehl.free.fr/>). Enfin l'étape de définition formelle de la dérivée correspond à celle qui fut tout d'abord donnée par Cauchy, avant d'être mise au point par Weierstrass.

Notre proposition consiste à prendre ce point de vue en considération, en s'appuyant sur une perspective historico-épistémologique pour construire des activités pour l'enseignement de la dérivée (Andreu et Riestra, 2005). En particulier, il est possible de présenter une définition algébrique de la dérivée, avant d'être confronté à l'obstacle important représenté par le concept de limite, qui provoque une rupture dans l'enseignement. Autrement dit pour nous rapporter au titre de cet article, nous proposons de nous cantonner dans un premier temps d'enseignement aux techniques qui étaient mises en œuvre au temps d'Euler et Lagrange. C'est seulement au terme de cette première approche que sont envisagés le concept de limite et les notions apparentées.

Par ailleurs, notre proposition permet d'appliquer deux principes didactiques importants. Le premier est de ne pas entreprendre l'étude d'un thème mathématique en partant de définitions générales, mais en exploitant des situations qui aient du sens pour les étudiants, afin de faciliter leur compréhension et de leur donner la possibilité d'analyser l'obtention de leurs résultats. Le second est de recourir de manière systématique lors des activités aux différents registres d'expression des fonctions et aux échanges entre ces registres. En particulier l'emploi du registre des tables de valeurs nous a semblé essentiel, même s'il n'a souvent qu'une place réduite dans l'enseignement, bien que les ordinateurs en facilitent grandement l'usage : dans le développement historique des études sur les fonctions, ce registre a joué un grand rôle.

Avant de détailler notre proposition d'enseignement du concept de dérivée, présentons à grands traits le contenu du cours de Calcul différentiel I. Le programme traditionnel propose : 1. Nombres réels, 2. Fonctions, 3. Limite d'une fonction, 4. Continuité, 5. Dérivée et applications. La proposition alternative change l'ordre d'étude des notions sans modification du contenu dans sa totalité ni du temps consacré à son développement : le thème 5 de la dérivée et ses applications est avancé en position 3, tout de suite après 2. Fonctions, puis viennent les limites et la continuité, avant que le programme s'achève par la formalisation de la dérivée au même niveau que dans le cours traditionnel.

Dans la suite, le déroulement de l'enseignement sera présenté de manière succincte lorsqu'il n'aura pas donné lieu à des changements et de manière plus détaillée en cas de changements. En particulier, nous présentons le déroulement séance après séance de la seconde partie, innovante, de l'enseignement alternatif. Nous nous en tenons à la présentation des contenus : Il eut certes été intéressant de disposer de notes d'observations précises sur les réactions des étudiants, mais nous avons souhaité que le cadre de l'enseignement expérimenté ne sorte pas du fonctionnement usuel tel qu'il a été présenté dans le § 1. Ce sont ici les résultats observés *in fine* auprès de la population étudiante concernée qui sont susceptibles de nous fournir des arguments en faveur de la faisabilité de la progression d'enseignement mise à l'essai. Comme ces résultats, nous le verrons, apparaissent prometteurs, il est dès lors possible de penser à étendre l'expérimentation.

Une première partie de l'enseignement (11 cours et 8 séances d'exercices) est consacrée aux thèmes 1. Nombres réels (et droite réelle) et 2. Fonctions (avec leur représentation graphique, des applications, telle la représentation de l'aire d'un terrain rectangulaire de périmètre donné, en fonction de l'un de ses côtés, et l'étude de transformations résultant d'opérations sur les fonctions). Un premier partiel la conclut. Aucun changement n'a été introduit dans les contenus de cette partie.

3. Introduction algébrique de la dérivée de polynomes

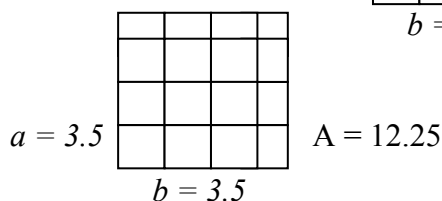
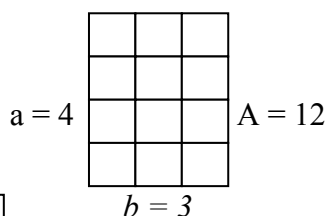
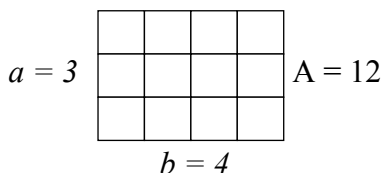
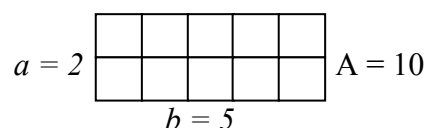
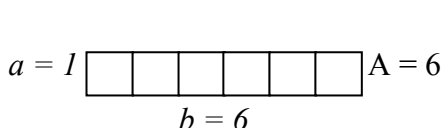
Une introduction de la dérivée qui ait du sens peut partir de problèmes de maximums et minimums. Nous avons commencé par utiliser une approche s'appuyant sur des tableaux de valeurs à la manière de Kepler (ce qui est l'approche historique de la détermination de maximums et de minimums), avec recours également à des graphiques. Ces derniers permettent une introduction modernisée de la méthode de Fermat et, avec elle, de la dérivée d'un polynome sous une forme purement algébrique. Voici comment l'enseignement a été imparti.

Séance 1. Un problème très simple a été étudié. Il s'énonce ainsi : *Un cultivateur dispose de 14 mètres de grillage, qu'il souhaite utiliser pour la clôture d'une surface rectangulaire où il veut reproduire un certain type de semences. Pour que la surface ait la plus grande aire possible, quelles doivent être ses dimensions ?*

Intérêts de la situation considérée :

- le problème est de la famille des isopérimètres, analogue au problème résolu par Fermat (avant 1638) pour la présentation de sa méthode d'obtention de maximums et minimums ;
- il est aussi suffisamment simple pour que sa présentation aux étudiants puisse être accompagnée d'un regard sur des méthodes heuristiques de portée générale, à savoir une approche exploratoire, puis la constitution de tableaux de valeurs, suivie d'une étude graphique, enfin une conclusion grâce à un travail algébrique sur des formules.

L'exploration peut débiter par des valeurs entières comme sur les figures suivantes.

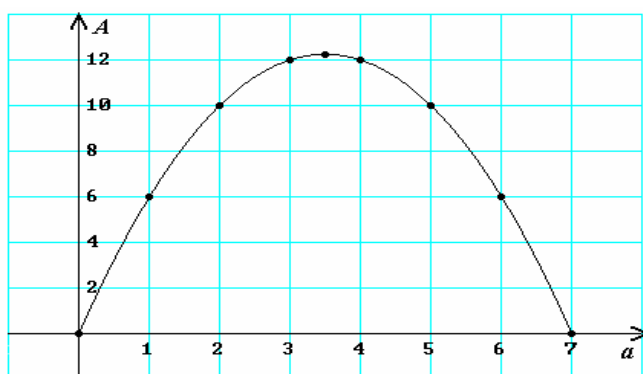


Dans ce même exemple, la constitution d'une table de valeurs aboutit à un tableau comme le suivant.

a	$b = 7-a$	P	$A = 7a-a^2$
0	7	14	0
1	6	14	6
2	5	14	10
3	4	14	12
3,5	3,5	14	12,25
4	3	14	12
5	2	14	10
6	1	14	6
7	0	14	0

Le remplissage du tableau amène à se poser la question des valeurs extrêmes possibles, qui sont ici $a = 0$ et $a = 7$. De plus la table de valeur obtenue est symétrique, ce qui conduit bien à envisager la valeur moyenne $a = 3,5$ comme donnant lieu au maximum de A.

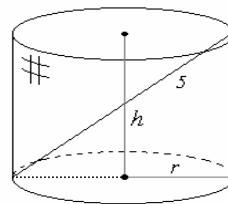
La représentation graphique de la fonction $A(a) = 7a - a^2$, qui est une parabole d'axe de symétrie la verticale $a = 3,5$, conduit à l'étude continue du phénomène considéré.



Quelques notions générales peuvent se dégager de ce cas particulier très simple : la définition de valeurs extrêmes pour une fonction et la considération d'intervalles sur lesquels une fonction est monotone. Un traitement analogue proposé pour une autre valeur du périmètre (nous avons proposé 120) achève cette première séance.

Séance 2. La symétrie qui avait facilité l'étude du problème précédent est une caractéristique qui n'est pas présente dans l'exemple qui suit.

Un récipient doit avoir la forme d'un cylindre circulaire droit ; sa diagonale doit mesurer 5 dm. Quelles dimensions doit avoir le récipient pour que sa capacité soit maximale ?



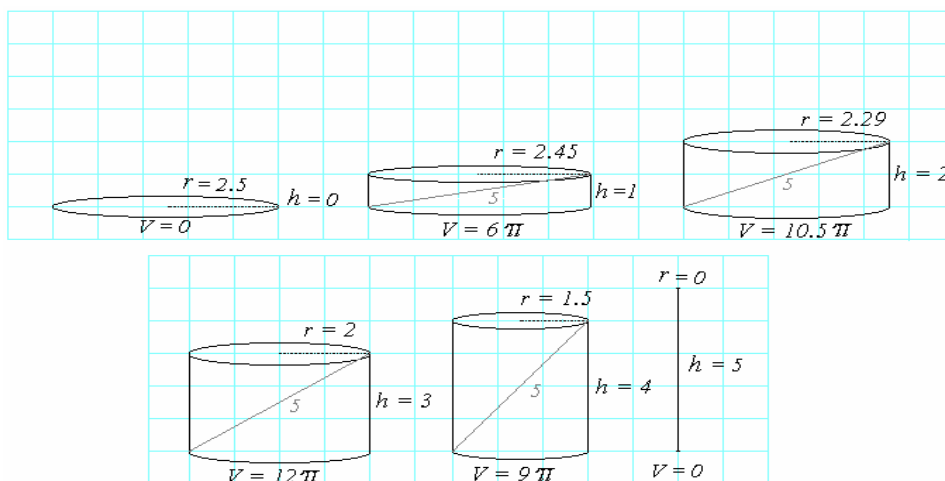
Notons que ce problème est historique : Kepler l'envisagea à partir de la considération des tonneaux de vin autrichiens.

Il trouva qu'un cylindre de diagonale donnée a un volume maximal quand le rapport de son diamètre à sa hauteur est égal à $\sqrt{2}$ (Boyer 1959, p. 108 et 110, mentionnant la Nova Stereometria de Kepler, 1615).

Sachant que le volume du cylindre de rayon de base r et de hauteur h est donné par la formule $V = \pi r^2 h$ et exprimant r en fonction de h grâce au triangle rectangle formé par la diagonale, un diamètre et la hauteur du cylindre, nous aboutissons à l'expression suivante du volume en fonction de h :

$$V(h) = \frac{1}{4} \pi h (25 - h^2).$$

Les valeurs à envisager pour h vont de 0 à 5, ce qui peut se remarquer directement sur la figure. Ci-après sont représentés les cylindres obtenus pour les valeurs entières de h .



L'évolution du volume est plus visible si les résultats sont reportés dans une table.

h	$V = \frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
0	0
1	$6,0\pi$
2	$10,5\pi$
3	$12,0\pi$
4	$9,0\pi$
5	0

Trois valeurs successives de la hauteur, à savoir 2, 3 et 4, sont telles que la valeur centrale conduit au plus grand volume. L'idée indiquée aux étudiants est dans un tel cas d'affiner la recherche par dichotomie, ce qui conduit aux tableaux successifs suivants, où les coefficients de π sont donnés en valeur approchée, avec un nombre de décimales qui augmente avec la précision.

h	$V = \frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2	$10,50\pi$
2,5	$11,72\pi$
3	$12,00\pi$
3,5	$11,16\pi$
4	$9,00\pi$

h	$V = \frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2,5	$11,719\pi$
2,75	$11,988$
3	$12,000\pi$
3,25	$11,730\pi$
3,5	$11,156\pi$

h	$V = \frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2,75	$11,9883\pi$
2,875	$12,0278\pi$
3	$12,0000\pi$
3,125	$11,9019\pi$
3,25	$11,7305\pi$

h	$V = \frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2,7500	$11,98828\pi$
2,8125	$12,01630\pi$
2,8750	$12,02783\pi$
2,9375	$12,02252\pi$
3,0000	$12,00000\pi$

h	$V = \frac{\pi}{4}(25-h^2)h$
2,81250	$12,01630\pi$
2,84375	$12,02415\pi$
2,87500	$12,02783\pi$
2,90625	$12,02731\pi$
2,93750	$12,02252\pi$

Lors de la recherche avec les étudiants, il convient de conserver au moins le premier et le dernier de ces tableaux pour des observations ultérieures (observations intra-table et inter-tables).

Il serait possible de poursuivre en recherchant une meilleure approximation, mais nous sommes déjà en mesure de dire que le volume maximal arrondi à deux chiffres après la virgule est $12,03\pi \text{ dm}^3 = 37,79 \text{ dm}^3$, et qu'il est atteint pour une hauteur qui, arrondie à un chiffre après la virgule, est 2,9 dm.

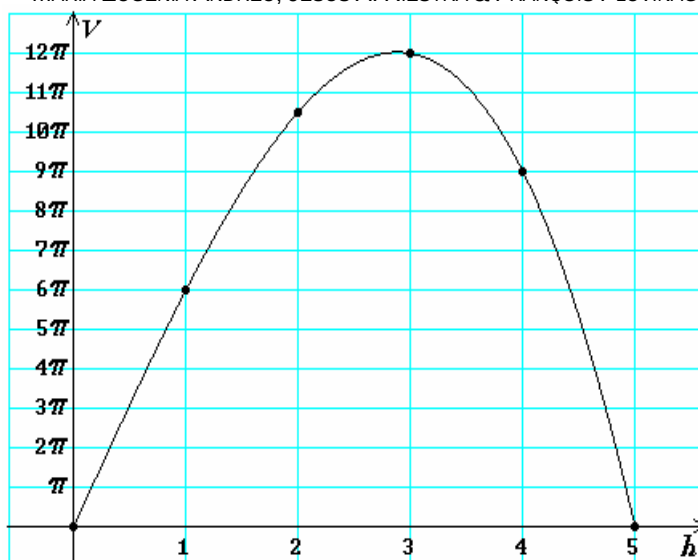
Deux observations sur ces tableaux de valeurs méritent d'être signalées.

1°- Observation intra-table : Dans une table donnée, c'est-à-dire pour une variation Δh fixée, c'est autour du maximum du volume obtenu dans la table que sa variation ΔV est la plus faible.

2°- Observation inter-tables : Le minimum obtenu de la valeur absolue du rapport $\frac{\Delta V}{\Delta h}$ diminue quand son dénominateur, la variation Δh , s'approche de zéro. Ainsi, dans la toute première table ($\Delta h = 1$), le minimum obtenu pour la valeur absolue de ce rapport est $1,5\pi$ et dans la dernière ($\Delta h = 0,03125$), le minimum obtenu est 0,01664.

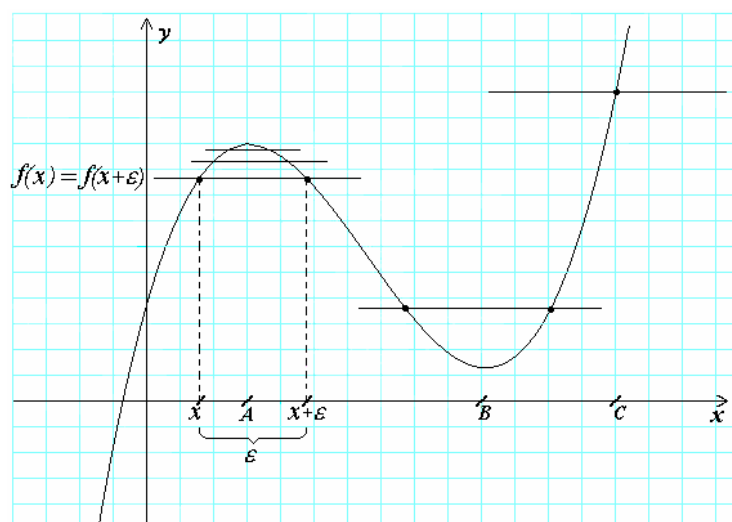
Certes, cette recherche du maximum d'une fonction par la tabulation de ses valeurs peut apparaître longue et quelque peu fastidieuse. Mais du point de vue historique, c'est bien elle qui a été développée par Kepler (1615) pour aborder des problèmes de minimums et maximums. Et c'est aussi Kepler qui fit observer que, pour une variation donnée de la variable, les changements de valeurs prises par la fonction diminuent au voisinage d'un maximum (Boyer, 1959, p. 111).

Le tracé de la fonction $V(h) = \frac{1}{4}\pi h(25-h^2)$ pour $0 \leq h \leq 5$ montre l'évolution continue du volume et incite à rechercher une méthode d'obtention du maximum.



Une méthode développée originellement par Pierre de Fermat avant 1638 conduit à l'obtention exacte du maximum (cf. Struik, 1969, p. 23 note 1) et il convient de noter qu'il y apparaît le mode d'expression de Kepler en termes d'accroissements et de diminutions au voisinage du maximum (Boyer, 1959, p. 111). On pourra consulter Trompler & Noël (2003) pour un examen détaillé de la méthode. Une version moderne librement adaptée de cette méthode a été présentée par Riestra (2001), et nous l'exposons brièvement ci-après.

Soit $y = f(x)$ un polynôme quelconque, dont on souhaite déterminer les extremums (minimums ou maximums). Supposons par exemple que la fonction soit représentée par le graphique suivant., avec en A un maximum local, en B en minimum local et en C un point régulier. Pour des valeurs de x proches des extremums A ou B, une égalité de la forme $f(x + \varepsilon) = f(x)$ se trouve vérifiée pour un certain ε petit, ce qui ne se produit pas au voisinage d'une valeur régulière comme C.



Considérons à présent la fonction $P(h) = f(x+h) - f(x)$, qui est un polynôme en h dépendant du paramètre x . Quelle que soit la valeur considérée pour x , ce polynôme a $h=0$ pour racine. On en déduit qu'il s'écrit $P(h) = h Q(h)$, où Q est un polynôme dont le degré est inférieur de 1 à celui de P . Le polynôme Q évalué en $h=0$ est par définition la **dérivée de la fonction** f .

Remarquons que si x est proche d'un extremum (A ou B dans le cas de la figure) le polynôme P admet non seulement la racine 0, mais aussi la racine $h = \varepsilon$. Ainsi pour $x = A$ ou $x = B$ le polynôme P admettra $h=0$ comme racine double (c'est une condition nécessaire, mais non suffisante) et donc Q admettra $h=0$ comme racine. Cela signifie que la recherche d'un maximum ou d'un minimum local d'une fonction revient à la résolution de l'équation en x qui résulte de la condition d'annulation de la dérivée.

Dans le cas de l'exemple du cylindre, pour lequel on adopte désormais les notations précédentes x et f au lieu de h et V , la fonction de x considérée est

$$f(x) = \frac{1}{4} \pi (25x - x^3).$$

On obtient $P(h) = \frac{\pi h}{4} (25 - 3x^2 - 3xh - h^2)$, d'où $Q(h) = \frac{\pi}{4} (25 - 3x^2 - 3xh - h^2)$,

et la dérivée de f est $Q(0) = \frac{\pi}{4} (25 - 3x^2)$. Le maximum du volume sera atteint pour

$25 - 3x^2 = 0$, d'où $x = 5 \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2,888675$. C'est un nombre irrationnel ; la recherche par les tableaux ne pouvait donc pas nous fournir sa valeur exacte.

A la suite de cette étude, les notations usuelles pour la dérivée : $f'(x)$ et $\frac{d}{dx} f(x)$ ont été introduites. C'est la résolution de l'équation $f'(x) = 0$ qui a permis l'obtention exacte du maximum dans l'exemple étudié. A sa suite, un second problème d'optimisation à résoudre algébriquement a été proposé.

4. Généralisation du processus d'obtention de dérivées

Séance 3. La séance débute par une reprise de la définition algébrique de la dérivée de f comme $f'(x) = Q(0)$, où $Q(h)$ résulte de $f(x+h) - f(x) = h Q(h)$. L'attention est attirée sur l'intérêt d'obtenir des résultats généraux de dérivation, pour les appliquer à des cas particuliers, ce qui simplifie notablement l'étude de ceux-ci. Les règles usuelles de dérivation résultent de la définition ci-dessus pour le cas des fonctions polynomiales et plus généralement rationnelles (voir annexe 2).

Un nombre assez important d'exercices d'application des formules de dérivation a été proposé aux étudiants, ce qui nous paraît nécessaire, ainsi que la résolution d'un problème d'optimisation par application des règles de dérivation.

Séance 4. Correction des exercices d'application ayant soulevé des questions.

Séance 5. Dérivation d'une fonction composée et de fonctions implicites.

Nous allons montrer comment les considérations introduites permettent de démontrer que la dérivée de $g \circ f$, où les fonctions f et g sont dérivables algébriquement, est donnée par $(g \circ f)'(x) = [g'(f(x))] f'(x)$, ce qui s'écrira

$$\text{aussi } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Puisque la dérivation algébrique s'applique à la fonction f , on peut écrire $f(x+h) - f(x) = hQ(h)$. Posons $k = hQ(h)$, il vient $g(f(x+h)) = g(f(x) + k)$. La fonction g est par hypothèse algébriquement dérivable en $f(x)$, donc $g(f(x) + k) - g(f(x)) = kR(k)$, où la valeur prise par $R(k)$ en $k = 0$ est la dérivée de g en $f(x)$. D'où $g(f(x+h)) - g(f(x)) = hR(hQ(h))Q(h)$. Dans cette expression, en faisant $h = 0$, d'où aussi $hQ(h) = 0$, nous obtenons la formule voulue.

Le programme officiel d'enseignement comporte la dérivation de fonctions implicites, c'est-à-dire la dérivation par rapport à x d'une fonction $y = f(x)$ définie localement par une équation de la forme $P(x, y) = 0$.

Il est possible de se contenter de considérer le cas où P est un polynôme en les deux variables x et y , cas qui est finalement celui qui intervient dans les applications envisagées par le programme à ce niveau, par exemple pour des considérations sur des coniques. C'est ainsi que sont définies les fonctions algébriques, objets du chapitre 4 du traité d'Appell, Goursat et Fatou (1929) sur les fonctions algébriques. L'étude peut résulter du théorème suivant de composition, qui pourra être examiné en détail dans un autre texte :

Théorème. Soient f et g deux fonctions telles que $g \circ f$ soit dérivable en x et que g soit dérivable en $f(x)$ et de dérivée non nulle. Alors f est dérivable en x et a pour dérivée $f'(x) = \frac{(g \circ f)'(x)}{g'(f(x))}$.

Dans cet énoncé, par "dérivable" il convient d'entendre "algébriquement dérivable", puisque c'est cette dérivabilité que nous considérons dans ce texte. Une considération topologique est ici nécessaire : une fonction algébrique dérivable de dérivée non nulle en x est monotone sur un voisinage de x , donc sa restriction à ce

voisinage est inversible¹. En particulier, la règle de dérivation d'une fonction réciproque résulte de ce théorème. Et la dérivation d'une fonction réciproque permet d'obtenir la dérivée de fonctions puissances d'exposant rationnel. Ainsi peut-on obtenir la dérivée de n'importe quelle fonction algébrique.

Mais pour notre public étudiant, il nous a en fait paru didactiquement justifié de présenter la dérivation implicite en admettant l'existence de la dérivée recherchée. On connaît en effet le faible "rendement didactique" des démonstrations d'existence, et celle-ci est subtile. Or, cette existence admise, les formules s'établissent facilement.

Insistons à nouveau sur l'importance d'une pratique suffisante des formules et des méthodes introduites. Tâche demandée aux étudiants : résolution d'exercices d'obtention de dérivées par application de la règle de composition, de dérivation implicite, de résolution d'une question d'optimisation par la mise en œuvre des règles de dérivation.

Séance 6. Correction des exercices qui ont provoqué des doutes chez les étudiants.

5. Tangente à une courbe en un point

Séance 7. Reprise des règles de dérivation et résolution d'un problème d'optimisation amenant à mettre ces règles en œuvre. Il s'agit de se demander si le résultat obtenu en résolvant $f'(x) = 0$ est effectivement le maximum ou le minimum cherché, ce qui s'examine en situant graphiquement les images des solutions. Cela amène au thème suivant : définition de la tangente.

La vision d'agrandissements est une entrée en matière : Qu'observons nous dans un petit voisinage d'un point de la représentation graphique d'une fonction ? Un programme de tracés graphiques sur ordinateur offrant des effets de zoom permet une telle approche visuelle. On constate pour une fonction algébrique f que des agrandissements successifs au voisinage d'un point $(a, f(a))$ conduisent assez vite à l'obtention d'une courbe qui ne se distingue pas d'une droite. C'est un mode de fonctionnement du graphique que Maschietto(2001, p. 141) qualifie d'exploratoire. La droite obtenue va être définie comme la tangente à la courbe. Devant le public en formation d'ingénierie auquel s'adressait l'enseignement de calcul différentiel,

¹ Il est important ici que la fonction soit algébrique, comme le montre le contre-exemple suivant, adapté d'une proposition de Guy Noël : $g(x) = x \left(1 + \sqrt{|x|} \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ si $x \neq 0$ et

$g(0) = 0$ est une fonction continue sur $\mathbb{P}$, dérivable en 0 ($g'(0) = 1$), mais n'est monotone sur aucun voisinage de 0. Bien sûr, g n'est pas algébrique, et ce n'est pas un "zoom" avant mais arrière qui pourra faire passer son graphe pour un tracé de droite. Mais ceci est une autre histoire...

une partie des étudiants avait d'emblée l'intuition que c'est un segment de droite qui allait se voir, et certains allaient même jusqu'à faire remarquer que le tracé de courbes sur ordinateur se fait par petits morceaux de droites. Cette idée peut d'ailleurs être un obstacle, si l'on n'imagine pas que le zoom peut "faire bouger le petit morceau de droite" passant par $(a, f(a))$.

Pour obtenir l'approximation linéaire d'un polynôme et l'équation de sa tangente, on développe à nouveau $f(x+h) - f(x)$. En ordonnant cette différence selon les puissances croissantes de h , il vient $f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + TOS$, où TOS désigne les termes d'ordre supérieur à 1 en h . En se plaçant au point $(a, f(a))$, et en posant $h = x - a$, on obtient $f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + TOS$, où le reste TOS regroupe les termes de puissances supérieures à 1 en $x - a$. Dans des calculs approchés de précision donnée, ces termes ne se distinguent plus de 0 lorsque $x - a$ est suffisamment petit, ce qui explique l'allure de droite que prend le graphique d'une fonction au voisinage du point $(a, f(a))$ considéré. Si $f'(a)$ n'est pas nul, le terme $f'(a) \cdot (x - a)$ se distinguera encore de 0 alors que les termes de puissances supérieures à 1 en $x - a$ auront déjà été assimilés à 0.

Conclusion : $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$.

L'accent est mis sur le fait qu'une dérivée nulle détermine une tangente horizontale. La normale à la courbe au même point est par définition la perpendiculaire à la tangente.

Exemple étudié avec les étudiants : fonction $f(x) = x^3 - x$ au point $(2, f(2))$.

Exercices proposés : Obtention de tangentes et de normales en un point au graphe d'une fonction polynomiale ou autre grâce à la dérivation implicite.

Séance 8. Correction des exercices qui ont provoqué des doutes chez les étudiants.

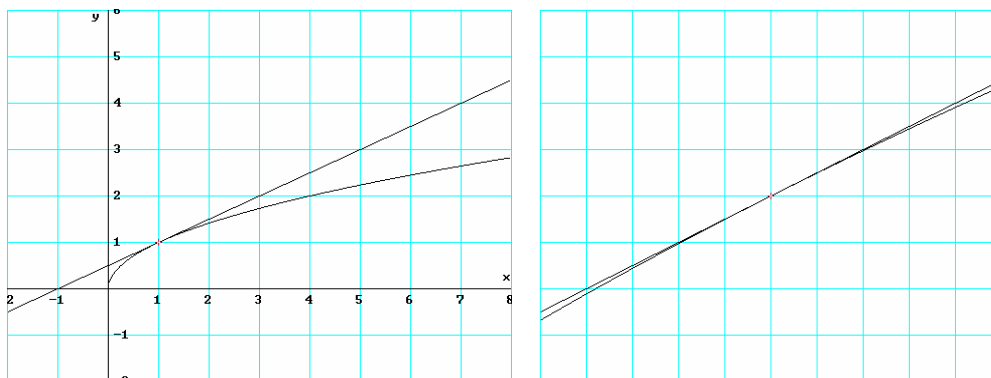
Séance 9. Lors de cette séance, l'étude de la tangente, déjà vue dans le cas polynomial, est étendue au cas général d'une fonction algébrique quelconque. Elle résulte de la considération de l'égalité

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + (Q(x-a) - f'(a))(x-a) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + (Q(x-a) - Q(0))(x-a). \end{aligned}$$

L'étude de l'exemple $f(x) = \sqrt{x}$ met en jeu une fonction non polynomiale. On obtient dans ce cas :

$$f(x) = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) + \left(\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{a}}} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)(x-a).$$

La figure montre la représentation graphique de la courbe et sa tangente pour $a = 1$, avec la vue du rectangle $[0,75, 1,25] \times [0,80, 1,20]$.



6. Etude de points critiques de fonctions algébriques et prolongements

Pour les fonctions que nous envisageons, les points critiques sont ceux du domaine de la fonction considérée où elle est soit dérivable de dérivée nulle, soit non dérivable. Dans le premier cas vont se trouver les candidats à être des maximums ou des minimums locaux, dans le second apparaîtront des situations de tangentes parallèles à l'axe des ordonnées ainsi que des situations de "rupture", telle celle que présente $y = |x|$ à l'origine, et qui seront vues de plus près dans la séance 11.

La suite du cours consiste en l'étude des dérivées d'ordre supérieur et l'introduction des notions de concavité et de points d'inflexion. C'est en particulier la dérivée seconde qui conduit à une classification des points critiques.

Exercices proposés : Résolution de problèmes d'optimisation, obtention de la courbe représentative de quelques fonctions, cette étude incluant les éléments déjà vus, comme le domaine, les zéros, la parité, mais conduisant aussi à obtenir points critiques, intervalles de monotonie, concavité, points d'inflexion et ensemble image. La distinction entre minimums ou maximums absolus et relatifs est également demandée.

Séance 10. Correction des exercices qui ont provoqué des doutes chez les étudiants.

Séance 11. Fonctions non dérivables en un point : fonction valeur absolue, fonctions définies par morceaux, exposants rationnels. Notion de dérivée à droite

ou à gauche. Relation avec les questions de tangentes : courbes n'admettant pas de tangente en un point et allure du graphe à son voisinage, tangentes verticales.

Exercices récapitulatifs de l'ensemble des sujets étudiés jusqu'ici dans le cours.

Séance 12. Correction des exercices qui ont provoqué des doutes chez les étudiants.

Séance 13 et 14. Séances d'exercices.

Séance 15. Deuxième examen partiel.

7. Variations, de la dérivée aux limites et à la continuité

La troisième partie du cours (12 séances magistrales et 8 d'exercices) est consacrée aux applications de la dérivation à l'étude de taux d'accroissement moyens, son interprétation particulière comme pente d'une sécante à la courbe représentative d'une fonction et comme vitesse moyenne pour un mouvement. Est présenté le taux d'accroissement limite ou instantané (en mettant l'accent sur limite et instantané, sur lesquels on reviendra) comme la dérivée de la fonction, l'interprétant comme la pente de la tangente, comme la vitesse instantanée. Cela amène à utiliser des graphiques fonctionnant comme idéogrammes selon l'expression de Maschietto (2001, p. 129). Le mouvement rectiligne d'une particule est représenté et ses caractéristiques jusqu'à l'accélération sont étudiées, ainsi que les taux d'accroissement associés (problèmes à plusieurs variables dépendant d'une unique variable indépendante, généralement le temps).

L'écriture que nous avons rencontrée, à savoir $f(x+h) - f(x) = hQ(h)$ permet de dire que $Q(h)$ est le quotient effectué de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Ce quotient effectué vaut $f'(x)$ en $h = 0$, ce qui peut être noté $\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]_{h=0} = f'(x)$.

C'est justement une possible entrée pour la définition d'une limite, puis pour la formalisation de la notion de limite, objet du thème 3 de ce cours de calcul différentiel. Pour ce thème 3, nous sommes revenus à la présentation traditionnelle, notamment pour la levée d'indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$, mais en ayant la possibilité de nous appuyer sur les simplifications rencontrées dans les études de polynômes et d'expressions algébriques.

Cette même remarque est valable pour la continuité et les propriétés des fonctions continues (thème 3 du cours). Les limites infinies et les limites à l'infini ont

également pu s'appuyer sur les exemples précédemment rencontrés, telle la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

8. Résultats et conclusions

Les tableaux qui suivent mettent en regard les résultats du prétest avec les résultats d'examen. Le barème pour l'examen conduit aux résultats : Très Bien de 90 à 100 points, Bien de 75 à moins de 90 points, Suffisant de (60 à moins de 75 points), Echec en dessous de 60 points.

Le premier tableau indique les résultats de groupes antérieurs à la mise en œuvre de notre proposition d'enseignement.

Prétest : Réponses correctes Examen	0 à 6	7 à 12	13 à 18	19 à 24
Échec	8	8	0	0
Suffisant	0	1	2	0
Bien	0	0	3	0
Très bien	0	0	2	2

Au total sur ces groupes, le taux de réussite à l'examen a été de $10/26 = 0,38$. Notons aussi qu'une proportion de 0,60 s'était située pour le prétest dans les groupes faible et moyen-faible (de 0 à 12 réponses correctes) et que parmi ces étudiants 1 seul a réussi.

Le second tableau est celui des groupes qui ont été concernés par notre proposition alternative d'enseignement.

Prétest : Réponses correctes Examen	0 à 6	7 à 12	13 à 18	19 à 24
Échec	12	15	2	0
Suffisant	1	8	1	0
Bien	0	4	2	0
Très bien	0	3	2	0

Dans ce second tableau, il apparaît que le taux de réussite général à l'examen a été cette fois-ci de $21/50 = 0,42$. On notera aussi que la proportion d'étudiants des groupes faible et moyen-faible du prétest a augmenté, passant à 0,86, et que 16 (soit une proportion de 0,37) parmi ces étudiants ont réussi l'examen.

C'est ce dernier chiffre qui est le plus impressionnant, car la légère augmentation générale de 0,38 à 0,42 n'est pas statistiquement significative compte tenu des effectifs en jeu. Les étudiants présentant au départ des déficiences en matière de connaissances numériques et surtout algébriques ont rencontré, dans la progression d'enseignement que nous leur avons présentée, l'occasion de progresser au point de réussir l'examen, alors que cette possibilité était pratiquement inexistante dans la présentation traditionnelle.

Au moment de conclure, signalons que la progression adoptée nous a permis d'aller plus vite au cœur du sujet central de ce cours, c'est-à-dire la dérivation et ses applications. Nous avons donc disposé de davantage de temps pour développer ce sujet, y revenir et l'exploiter dans un plus grand nombre d'exercices. Un autre facteur de réussite a pu être la motivation introduite par des problèmes d'optimisation, qui ont pu s'inscrire dans une continuité par rapport au thème général de la modélisation par des fonctions et offrir aux étudiants des chances d'améliorer leur compréhension générale du concept de fonctions et des notions qui s'y rattachent. Ce sont ces deux vertus dont notre expérience a pu être dotée, sans perte concomitante en termes de mise en forme des concepts mathématiques, que nous retiendrons comme les apports didactiques peut-être les plus intéressants de cette étude.

Annexe 2 : Questionnaire proposé aux étudiants (présentation condensée)**Sans calculatrice****Question A.** Placer dans chaque cadre le signe $<$, $>$ ou $=$ qui convient.

- 1) (exemple) $1 \boxed{=} 1$ 2) $0.8 \boxed{} 0.10$ 3) $(51)^3 \boxed{} (-51)^3$
 4) $(2-7)^8 \boxed{} (8-3)^8$ 5) $(0,0121)^2 \boxed{} (0,0121)^5$ 6) $(121)^2 \boxed{} (121)^5$
 7) $(777+999)^2 \boxed{} (777)^2 + (999)^2$ 8) $(555)^2 - (333)^2 \boxed{} 222 \times 888$

Question B. Simplifier autant que possible chacune des fractions suivantes.

- 1) $\frac{10000-144}{100+12} = \dots$ 2) $\frac{2000}{1111} - \frac{1000}{1111} = \dots$ 3) $\frac{15}{284} + \frac{100}{142} = \dots$
 4) $\frac{15}{512} - \frac{100}{256} = \dots$ 5) $\frac{512}{51} \times \frac{102}{256} = \dots$ 6) $\frac{312}{32} \div \frac{156}{16} = \dots$

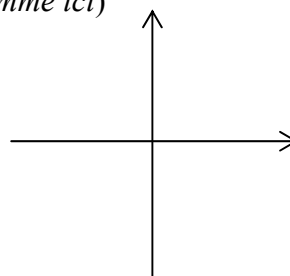
Question C. Simplifier chacune des expressions ci-dessous :

- 1) $\frac{2(x-3)^2 - 18}{2x^2} =$ 2) $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} =$ 3) $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1} =$ 4) $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} =$

Question D. Représenter graphiquement (*un système d'axes était placé en regard de chaque énoncé, non seulement du premier comme ici*)

- 1) $y = ax$ et $y = bx$, avec $0 < a < b$

- 2) $y = mx + 3$ pour $0 < m < 1$
 3) $y = mx + 3$ pour $m < -1$
 4) $y = 2 + ax^2$ pour $a < 0$
 5) $y = 2 + ax^2$ pour $a > 0$
 6) $y = x^2$ et $y = x^3$

**Question E.** Compléter : Si $\frac{1}{F} = \frac{d^2}{GmM}$ alors $m =$

Bibliographie

ANDREU Ma. E., BECERRIL E. J.V., GUZMÁN H. J., Meda V. M. & ULÍN J.C. (1992), *Diagnosis y Remedio de la Deficiencia en Conocimientos Matemáticos en Estudiantes de Nuevo Ingreso a Escuelas de Ingeniería, Reporte de Investigación*, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azc. CBI, México.

ANDREU Ma. E. & Riestra J.A. (2005), Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica de su desarrollo. In José Carlos Cortes & Fernando Hitt (Eds.) *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, Morevallado Editores, Morelia, Mich. México, 157-174.

APPELL P., FATOU P. & GOURSAT E. (1929), *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales : Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann*, Chapitre 4 : Les fonctions algébriques d'une variable et les surfaces de Riemann correspondantes, 2e édition revue et augmentée par Pierre Fatou, Paris : Gauthier-Villars et fils, 165-221. Consultable en ligne <<http://gallica.bnf.fr/>>

BOYER Carl B. (1959), *The History of the Calculus and its conceptual Development*, Dover Publications, New York.

FERMAT P. (1660), De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica, Tolosae : apud Arnaldum Colomerium
Consultable en ligne <<http://gallica.bnf.fr/>>

GRABINER J.V. (1983), The Changing Concept of Change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine* **56** (4), 195-206.

HITT F. & PÁEZ R. (2004), On the limit concept in a cooperative learning environment: A case study, *Proceedings PME-NA XXVI*, Toronto, Canada, **Vol. 1**, 103-110.

MASCHIETTO M. (2001), Fonctionnalité des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **Vol. 21**, n° 1-2, 123-156.

RIESTRA J. A. (2001), El Método de Fermat para la determinación de Extremos de Polinomios. Una Visión Moderna. *Miscelánea Matemática* **34**, 103-112.

RIESTRA J.A. & ULÍN C.A. (2003), Tangencia, contacto y la diferencial. En Eugenio Filloy et al. (Eds.) *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual*. México, FCE, 218-241.

STRUICK D. (1969), *A Source Book in Mathematics*, 1200-1800. Cambridge, MA. Harvard University Press.

TALL D. (1996), *Functions and Calculus; International Handbook of Mathematics Education*, chapter 8. The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

TROMPLER S. & NOËL G. (2003), *Vers les infiniment petits*, Bruxelles, Éditions SBPMef.

MARIA EUGENIA ANDREU

Departamento de Ciencias Básicas, UAM-A
Av. San Pablo No. 180, Col. Reynosa Tamaulipas, C.P. 02200, México, D.F.
mai@correo.azc.uam.mx

JESUS A. RIESTRA

Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV del IPN
Ave. I. P. N. 2508 Col San Pedro Zacatenco, 07360 México, D.F.
riestra@cinvestav.mx

FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex
pluvin@math.u-strasbg.fr

CARL WINSLOW

LES PROBLÈMES DE TRANSITION DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE ET LA COMPLÉMENTARITÉ DES APPROCHES DIVERSES DE LA DIDACTIQUE

Abstract. Transition Problems in Teaching of Analysis and Complementary Didactical Approaches

This article has for aims to precise the nature of obstacles for learning Analysis at University, and to make proposals for teaching in order to overcome these obstacles. Various approaches are considered: semiotic representations, anthropologic theory of didactics, and theory of didactical situations. Taking account of distinct phenomena, they seem us complementary and allow a plurality of uses: analyzing tasks, locally and globally organizing mathematics, structuring milieu for autonomous learning.

Résumé. Cet article cherche à préciser, dans le cas de l'analyse, la nature des obstacles rencontrés par les étudiants en cours d'études supérieures scientifiques et à étudier des propositions d'enseignement pour faciliter le franchissement de ces obstacles. Plusieurs approches sont considérées : les représentations sémiotiques, la théorie anthropologique du didactique, la théorie des situations didactiques. Prenant en compte des phénomènes différents, elles nous paraissent complémentaires, et permettent une pluralité d'exploitations : analyse de tâches, organisations mathématiques locales et plus globales, structuration de milieu en vue d'apprentissages autonomes.

Mots-clés. Enseignement supérieur, analyse, approche cognitive, registres sémiotiques, théorie anthropologique du didactique, théorie des situations.

1. Introduction

L'étudiant de mathématiques doit vivre, en quelques années, plusieurs transitions par rapport à l'activité mathématique dans laquelle il doit s'engager. Pour des raisons institutionnelles on s'intéresse surtout aux difficultés liées au passage du secondaire vers les filières scientifiques de l'université, notamment dans les grands cours d'entrée (DEUG en France). Dans les deux contextes, l'analyse (l'étude des propriétés de fonctions réelles liées grosso modo aux processus de limite) semble porteur de bien des obstacles par sa technicité, sa complexité et le fait qu'elle reste, en tant que corpus de savoir, sur la quasi-totalité du savoir scolaire. Parmi les enseignants universitaires, il y a un « sentiment répandu » (voir par ex. Burn et al., p. 123) que l'étudiant doit, effectivement, accomplir des « sauts cognitifs » dans le

parcours à partir de l'analyse telle qu'elle se présente au lycée vers l'analyse abstraite étudiée à l'université (notamment dans les cours plus avancés). Cela nous amène à considérer deux questions assez larges :

1. Au-delà de la transition institutionnelle lycée/université – *en quoi consiste ce « saut », ces obstacles difficiles à franchir ?*
2. Peut-on fournir quelques principes pour *aider l'étudiant par le moyen qui devrait y servir, à savoir l'enseignement ?*

Bien sûr il n'y a pas de réponses simples à ces questions ! Aussi, ce que nous pouvons apporter ici ne sont que des remarques fort partielles. Une difficulté centrale est que la complexité des phénomènes de transition ne peut pas, selon nous, être articulée complètement dans une seule cadre théorique. Nous allons illustrer ce point en analysant trois tâches fort simples sous la lumière de trois cadres théoriques (la théorie des registres sémiotiques, la théorie anthropologique et la théorie des situations). La complémentarité de ces trois approches sera, pour ainsi dire, notre point principal.

2. Trois problèmes simples pour illustrer la problématique

Pour illustrer notre discussion de la première question, nous allons utiliser trois tâches simples mais typiques du travail en analyse que l'étudiant doit entreprendre au lycée, au début de l'université, et dans sa deuxième ou troisième année. Les voici :

- (1) Montrer que la fonction définie par

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \neq -1$$

est croissante sur $[0, \infty)$.

- (2) Montrer que si f est définie comme ci-dessus, on a $f(s+t) \leq f(s) + f(t)$ pour tous $s, t \geq 0$.

- (3) Montrer que

$$d(a, b) = \frac{|a - b|}{1 + |a - b|}$$

définit une distance sur $\mathbb{R}$. [Voir par ex. Carothers (2000, p. 37) pour la définition de distance.]

Le troisième problème est tiré de (Carothers, 2000, p. 38) et les deux premiers sont proposés là comme *hints* (étapes possibles pour s'acquitter de (3)). Évidemment (1)

est une tâche qu'un élève de lycée accomplira en observant que $f'(t) = (1+t)^{-2} > 0$ pour tout $t \neq -1$. Ou bien, les conventions permettant, on « voit » directement sur une calculatrice graphique que f est croissante. Ou encore, ceci se déduit directement par la réécriture $f(t) = 1 - 1/(1+t)$. Pour (2), on utilise une réécriture semblable :

$$\frac{s+t}{1+s+t} = \frac{s}{1+s+t} + \frac{t}{1+s+t} \leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t}$$

pour $s, t \geq 0$. Finalement pour (3), il faut vérifier les axiomes pour une distance (ibid., p. 37), dont seulement l'inégalité $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ n'est pas immédiate dans le cas donné; pourtant comme $d(a,b) = f(|a-b|)$, et comme $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$ par le même axiome pour la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$, l'inégalité pour d s'ensuit directement des résultats de (1) et (2).

En voyant la simplicité de cette solution, on se demande comment un étudiant mis devant (3) – comme un des premiers exercices pratiques sur les distances métriques – peut se trouver en difficulté (même si (1) et (2) ne lui posent pas de difficultés). Dans une classe observée à la deuxième année en maths pures de l'Université de Copenhague, un étudiant a montré, au tableau et sans hésitation, sa réponse à (1). Puis, pour (2), il a proposé de définir $g(s, t) = f(s+t) - f(s) + f(t)$. Aussi, il est parvenu à démontrer, par des calculs assez longs – passant par les dérivés partiels – que g est non positive sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Il était pourtant incapable de dire en quoi cela pouvait servir pour (3), et c'était pareil pour les autres étudiants dans cette classe. Et comme l'enseignant a fini par montrer une solution dans le genre de ce qui vient d'être exposé, les étudiants – après une demi-heure de calculs pour les étapes précédentes – paraissaient perplexes et convaincus que cette exercice était difficile et, en effet, hors de leur portée.

Au moins pour un regard naïf, ces trois tâches sont assez semblables par leurs énoncés ; pour une expression donnée, il faut montrer quelque propriété. Cette similitude se confirme par la forme des solutions que nous venons d'esquisser, dans la mesure où celles-ci sont basées sur un traitement relativement simple d'inégalités et d'expressions algébriques. Comment donc expliquer cette différence « en pratique » pour les étudiants, qui disposent en principe de tous les éléments nécessaires pour les trois tâches ? Même si l'exemple est sans doute d'une grande simplicité, il nous servira pour cerner certains obstacles liés aux transitions dont nous avons parlé dans l'introduction.

3. La transition par rapport aux représentations sémiotiques

Comme noté par Tall (1996) et par nombreux d'autres auteurs, l'apprentissage de l'analyse concrète (« calculus » en anglais) dépend de façon cruciale de l'usage d'une multitude de types de *représentations* : symboliques, géométriques, graphiques, numériques et même « visuo-spatiales » comme des gestes ou des objets en mouvement. Plus précisément (cf. Duval, 1995, 2000), la *coordination* de représentations dans ces différents *registres sémiotiques* est certes une condition pour l'activité mathématique en général, mais cette condition apparaît avec une force particulière en analyse, qui réunit tous les registres que l'élève s'est approprié auparavant. En plus l'analyse est basé sur des notions (limite, dérivé,...) qui sont difficiles à saisir proprement sans un discours plus formel (définition, preuves) que ce qui est normal et nécessaire pour l'enseignement des éléments de la géométrie et de l'arithmétique. Mais pour les objets de base – fonctions réelles concrètes – on peut trouver un support efficace justement dans la multitude de représentations disponibles, à condition évidemment de la disponibilité *pour les élèves* (cf. Winslow, 2003 et à paraître, b). Ce n'est que dans l'analyse dite « moderne » ou « abstraite » que ce support disparaît plus ou moins complètement. Les fonctions deviennent des points ou des vecteurs dans les espaces métriques, hilbertiens etc. On ne retient en général que des représentations en registres discursives (langues naturelle, symbolismes) ; les représentations non discursives (dans le sens de Duval, 2000, p. 66) sont au plus « heuristiques ». Ainsi, la flexibilité nouvellement découverte et acquise, disparaît en grand parti. On peut parler d'une « expansion suivie de réduction » par rapport aux représentations.

Pour ceux qui arrivent à l'université en vue d'étudier les mathématiques, on peut supposer la coordination de représentations pertinentes pour les fonctions concrètes, ainsi que certaines routines de traitement et de conversion, liées à des situations spécifiques. Ainsi, pour étudier la monotonie d'une fonction donnée, l'étudiant passera à la production de graphes (conversion) et au calcul de dérivées (traitement) – de nos jours, d'ailleurs, en se servant d'une calculatrice. Par exemple l'exercice 1 (voir §2) demande la vérification – par une méthode bien travaillé au lycée (différentiation, étude du signe de la fonction dérivée) – de ce qui est déjà visible par la représentation graphique de f (fig. 1).

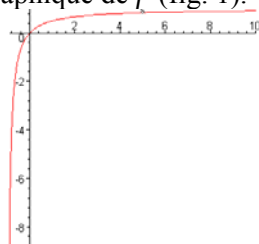


Figure 1 : Graphe de $f(s) = s/(1+s)$.

Par contre, pour l'exercice (2), le traitement requis n'est pas routinisé et le résultat n'est pas « visible » dans la représentation graphique de f . Mais l'étudiant peut se ramener, avec un peu plus d'effort, dans une situation avec des stratégies routinières, en considérant la fonction g à deux variables. Pour ce cas il dispose de traitements semblables (quoique plus récemment routinisées) pour étudier la variation de la fonction, et d'une représentation graphique qui fait « voir » la propriété à vérifier. La production du graphe (fig. 2) nécessite, pour la plupart des étudiants, le recours à un logiciel tel que *Maple*.

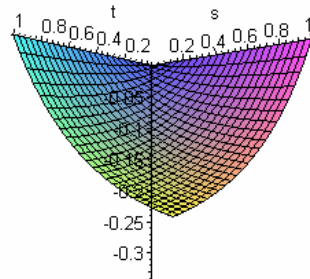


Figure 2 : Graphe de $g(s,t) = f(s+t) - f(s) - f(t)$.

Même si la représentation graphique de g n'apparaît pas dans le travail de l'étudiant, elle fait partie de sa conception d'une fonction à deux variables ; en étudiant la variation il s'agit, ici, de montrer que « tout le graphe est au dessous du plan $z = 0$ ». Après une légère modification (traitement) de l'inégalité, la preuve se réduit ainsi à des routines familières de traitements (de la définition de la fonction, en registre symbolique), quoique nettement plus compliquées que l'approche suggéré en §2. Aussi la propriété à prouver se laisse exprimer dans un registre non discursif.

Malgré la similitude apparente des tâches, aucun de ces deux possibilités n'est disponible pour (3). La distance supposée $d(a, b)$ peut, en principe, être conçue comme une fonction à deux variables, mais la propriété « être une distance métrique » ne s'exprime pas dans le registre non discursive du graphe cartésien; et sa vérification ne se réduit pas à des routines de traitement familiers. En fait, il faut vérifier la propriété pièce par pièce (comme pour toute définition par axiomes) et en plus utiliser la propriété pour une métrique connue. Ce n'est pas un processus de traitements successifs qui doit être routinisé comme une algorithme. Mais l'exécution de ces traitements suppose une reconnaissance du problème et une « feuille de route » pour l'exécution, y compris un point de départ et un but d'arrivée. Sinon, les traitements requis paraissent dans l'ensemble et compliqués et sans cohérence discursive, même s'ils sont localement familiers pour les étudiants.

De ce point de vue, nous avons donc deux nouveaux obstacles pour (3) (et en partie pour (2)), qui marquent une vraie transition par rapport à (1) :

- l’absence de stratégies routinières pour organiser les traitements qui fournissent la vérification (ou plus généralement, le résultat recherché) ;
- l’absence de représentations non discursives pour la propriété à vérifier.

Ces deux phénomènes se retrouvent régulièrement dans le passage de l’analyse concrète à l’analyse moderne : les objets et leurs propriétés n’ont plus qu’une seule forme fiable de représentation, et leur étude n’admet que peu de routines de type « algorithmique ». Et ce sont là, en fait, deux ruptures profondes avec toute l’expérience précédente des étudiants avec les mathématiques et, en particulier, avec l’analyse.

4. L’approche anthropologique

Comme je l’ai expliqué ailleurs (Winslow, à paraître, a), la théorie anthropologique du didactique (TAD) est utile pour expliquer plus globalement la nature de la transition à deux étapes entre mathématique scolaires et mathématiques universitaires. Cette explication a deux éléments :

- la particularité du contexte institutionnel pour la transposition, grosso modo la coexistence à l’université de pratiques de recherches et d’enseignement et la participation relativement volontaire à l’enseignement dans le contexte universitaire ;
- la nature des organisations mathématiques (OM), qui sont enseignées dans ce contexte, par rapport à celles qui sont enseignées dans le contexte scolaire.

Le premier élément est en partie cause du deuxième : les organisations didactiques (OD) universitaires sont développées par des constructeurs d’OM, et donc l’OM du chercheur est un idéal important (quoique pas forcément proche, cf. aussi §6) pour l’OM travaillé par l’étudiant. Pour l’enseignement pré-universitaire, la transposition est beaucoup plus complexe, avec d’autres rationalités et contraintes ; en particulier, l’enseignant y a normalement moins d’autonomie dans les choix globales et même plus locales qui déterminent l’OM enseigné.

En fait, les praxéologies exercées par les élèves à l’école et même au lycée sont concentrées sur des *blocs pratiques* (type de tâches, techniques) qui sont censés être utiles dans d’autres contextes aussi (et qui en fait font partie de praxéologies hors des seules mathématiques). Un exemple en est la différentiation comme technique d’étudier les propriétés d’une fonction, illustré par la tâche 1 (§2). Par contre à l’université, dans un cours de mathématiques pour futurs mathématiciens,

la maîtrise de techniques routinières ne suffit plus. L'étudiant doit *participer* (plutôt que simplement assister) à des praxéologies plus complètes. En particulier l'étudiant est censé maîtriser – souvent dans un délai assez court – un discours technologique et théorique qui permet l'explication et la justification cohérente des blocs pratiques liés l'analyse concrète. Par exemple, le lien entre la croissance d'une fonction et sa fonction dérivée doit se comprendre par rapport à une théorie de calcul infinitésimal qui inclut une notion précise de limite et, en principe, de distance sur $\mathbb{R}$. Nous disons « en principe » car en analyse concrète n'apparaît que la distance euclidienne, et donc la notion n'est pas forcément explicite. Toutefois la première transition se caractérise par le passage à des praxéologies complètes, avec blocs théoriques situés dans des OM plus larges et plus cohérentes que dans les OM enseignés au lycée (pour une étude approfondie dans ce contexte, voir Barbé et al., 2005). Le raisonnement impliquant les *inégalités* y joue un rôle important, et la stratégie de l'étudiant pour la tâche 2 – décrit en §2 – suggère que plutôt que s'y livrer, l'étudiant cherche à se ramener dans un bloc pratique pareil à celui qui a servi pour la tâche 1 (étude de fonction par ses dérivées). Les difficultés de l'étudiant peuvent donc être lues comme un signe que cette première transition n'est peut être pas toute accomplie.

Le lien entre convergence (et plus généralement, *topologie métrisable*) et distance métrique est d'ailleurs l'essentiel pour l'analyse moderne, où la distinction entre distances dites *équivalentes* (donnant lieu à la même topologie) est beaucoup moins importante qu'en géométrie. Tandis que la distance euclidienne est la distance « naturelle » pour l'analyse concrète, où elle fait partie du discours théorique, les distances métriques deviennent elles-mêmes objets pour les tâches en analyse moderne, ainsi que dans la tâche (3). Dans l'optique des praxéologies, la deuxième transition consiste donc à développer de nouvelles praxéologies par rapport à des tâches qui ont pour objets les éléments de blocs théoriques antérieurs. En effet, avec l'exercice qui suit, dans le manuel (Carothers, 2000, p. 38), la tâche 3 de §2, on y est déjà :

- (4) Soit d une distance sur un espace métrique M , et soit $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ une fonction qui remplit les conditions établies dans (1) et (2), et aussi $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Montrer que la fonction $f \circ d$ est une distance sur M .

Pour construire une foule de distances sur M , il suffit donc de construire des fonctions du type indiqué dans cet exercice. On peut ensuite poser la question de leur équivalence. Et cette notion (cette fois-ci, théorique) présuppose de regarder la distance métrique comme un « point » qui peut être, ou ne pas être, en relation d'équivalence avec d'autres, et dont la classe d'équivalence, plutôt que la métrique individuelle, correspond à une topologie métrisable.

L'OM « ponctuelle », dont le type de tâche est de vérifier si une fonction donnée est bien une distance, a donc pour fonction principale d'établir les distances comme objets dans une OM régionale liée aux propriétés topologiques (convergence, continuité, compacité *etc.*) dans un espace métrique. Quoique cette perspective soit apparente pour le spécialiste enseignant, elle ne l'est évidemment pas pour l'étudiant qui rencontre l'OM locale dans une tâche comme (3). Pourtant le choix de commencer par l'OM en question est enraciné dans l'OD « traditionnelle » (ou, en fait, « moderne » dans le sens de Bourbaki...) dont le cours de Carothers est une expression, d'ailleurs assez modérée, parmi beaucoup d'autres. Historiquement la définition axiomatique d'une distance métrique (Fréchet, 1906) a suivi des recherches laborieuses sur les notions de convergence en divers contextes, et constitue ainsi une réponse générale à un questionnement qui n'apparaît que de façon implicite dans le cours. D'introduire tout de suite la réponse à ce questionnement est sans doute lié à une économie d'exposition, mais implique aussi des problèmes en fonction de l'absence, chez les étudiants, de maîtrise des blocs théoriques qui fournissent les objets des toutes premières tâches à confronter.

Les quelques éléments d'analyse du problème de transition que nous avons proposés ici et au §3 ont en commun de suggérer une transition à deux étapes. Tandis que l'analyse sémiotique ne vise que certains aspects des démarches nécessitées par les exercices, qui d'ailleurs sont cruciaux pour comprendre les obstacles cognitifs pour les étudiants, l'analyse des OM travaillées par l'étudiant permet une vision plus globale de l'enjeu épistémologique pour l'apprentissage et pour l'enseignement. Toutefois pour l'enseignement nous avons seulement cerné le problème, et en effet c'est un trait plus général de l'usage de ces deux cadres d'être surtout *descriptif*. C'est pourquoi nous nous tournons, en vue de la deuxième question posée dans l'introduction, vers une troisième approche aux problèmes de transitions, celle de la théorie des situations didactiques.

5. L'apport de la théorie des situations didactiques

La méthodologie d'*ingénierie didactique* est présentée, par M. Artigue (1988), comme un processus d'expérimentation didactique contrôlée où l'analyse des *variables didactiques* tient un rôle central. Parmi les « classiques incontournables dans ce domaine » (*ibid.*, p. 287) sont bien sûr les recherches menées par Brousseau et son équipe, mais il est intéressant à noter que l'exemple qui est traité dans l'article provient d'un projet dans le contexte de l'enseignement des équations différentielles dans la première année du DEUG. Dans un sens plus large du point de vue méthodologique, les ingénieries liées à l'usage de logiciels dans le contexte de l'analyse concrète sont devenu un thème important de recherche internationale. D'autres travaux sur l'enseignement aux débuts de l'université ont également une perspective d'intervention contrôlée et basée dans la

théorie des situations, notamment la modification du contrat nécessitée pour le *débat scientifique* en cours magistral (Legrand, 2001, 1993) ou la conception de milieux « exploratoires » pour faciliter la transition vers l'analyse concrète (par ex. Bloch, 2003, Bloch et Schneider, 2004).

L'intervention se fait par rapport à une analyse plus ou moins explicite des obstacles épistémologiques. Ainsi, Bloch (2005) propose 10 variables macro-didactiques pour caractériser la rupture secondaire/supérieure par rapport aux propriétés des milieux didactiques usuels pour l'apprentissage de l'analyse dans ces deux contextes institutionnels. Certains de ces variables indiquent, d'ailleurs, des phénomènes de transition semblables à celles que nous avons exposées ici. Pour la construction d'interventions, l'idée qui nous semble la plus intéressante est celle de *retournement de situation* qui vise à familiariser l'étudiant avec une problématique (situation initiale) avant de procéder à son traitement plus formelle (situation retournée), avec des consignes plus précises. Normalement une telle approche suppose que la situation initiale offre un accès plus « intuitif » au problème dont le savoir visé peut se concevoir comme une « réponse ».

Ainsi, pour l'exemple de §2, la possibilité de plusieurs métriques sur un même espace (comme $\mathbb{R}$) devrait de quelque manière être rendue sensible sinon « naturelle » par une situation initiale, qui devrait aussi fournir un milieu pour poser la question cruciale : quelles conditions permettent de conclure que les propriétés de convergence sont les mêmes dans deux métriques données ?

Peut-être le cas de métriques sur $\mathbb{R}^2$ sera plus illustratif. Là, la distance euclidienne d_E ainsi que, par exemple, la métrique discrète d_D et la métrique « coin »

$$d_C((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$$

peuvent être présentées dans un registre non-discursif (fig. 3), et aussi moyennant des modèles plus ou moins « connues ». Par exemple, d_D se réalise comme le prix à payer pour un déplacement entre deux points dans une même zone tarifaire, et d_C comme la distance (dans le sens ordinaire !) à parcourir entre deux points avec un véhicule qui ne peut changer de direction que par angles droits (ou dans une ville dont les rues se croisent sous des angles droits). Il est aisé de « voir » que les mêmes suites de points convergent à un point donné pour les métriques d_E et d_C (i.e., d_E et d_C sont équivalentes) mais que cela ne reste pas vrai pour celles-ci et d_D .

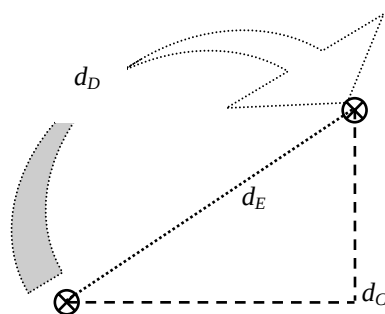


Figure 3 : Trois distances différentes dans le plan.

Pour organiser un jeu plus libre ces notions, on pourrait – après l’étude d’exemples commun comme ceux cités ci-dessus – assigner une variante du problème suivant : *produire autant de distances sur $\mathbb{R}^2$ que vous pouvez ; ensuite, autant de distances non-équivalentes que vous pouvez*. La deuxième partie est un retournement dans le sens que la liberté d’action se réduit dramatiquement, et on pose le problème (certes sans attendre une conclusion complète !) de *conditions* assurant l’équivalence de deux distances.

Cela illustre d’ailleurs une idée plus générale, que nous utilisons beaucoup dans le contexte des projets thématiques (Winsløw, 2005), pour favoriser le travail autonome des étudiants avec de nouvelles notions difficiles : *leur demander de construire eux-mêmes des objets mathématiques, souvent très simples, avec des propriétés données*. Dans la quasi-totalité d’exercices de manuel, comme celle que nous avons présenté en §2, les objets sont fournis et l’étudiant est censé démontrer certaines propriétés de ces objets donnés. Avec toutes les ressources sur Internet, la « construction » d’exemples par les étudiants ne dépend d’ailleurs pas entièrement de leur imagination.

Une autre question principale que pose la théorie des situations est celle du *contrat didactique*. Ce problème se pose de façon spécifique et sensible dans le contexte universitaire, et il faut peut-être s’y prendre de façon plus explicite dans ce contexte, comme souligné par exemple par Legrand par rapport à la réalisation du débat scientifique. Les attentes des étudiants sont fortes et liées à ce qu’ils perçoivent comme la rationalité de l’enseignement : leur fournir des savoirs reconnus, nécessaires et suffisants pour réussir au jeu académique proposé par le cours. Et cela à plusieurs niveaux : globalement, il existe déjà un « macro-contrat » bien établie depuis le lycée, et renforcé par les pratiques de l’enseignement universitaire, stipulant qu’une consigne ne peut être donnée aux étudiants que dans un contexte déjà présenté et exemplifié par le professeur (cf. Grønbaek et al., en lecture). Plus localement, le savoir des étudiants par rapport aux objets en question

est normalement enraciné dans d'expériences variées. Pour la notion de distance dans le plan, la distance euclidienne est naturalisée depuis l'école primaire et même dans la vie ordinaire. Il faut reconnaître le conflit naturel causé par la stipulation soudaine que toute fonction sur $\mathbb{R}^2$ qui satisfait à certains axiomes soit reconnue comme étant également une « distance ». En général le pas décisif est de faire accepter aux étudiants les conditions pour s'engager dans un questionnement rationnel qui n'a pas, *a priori*, de technique toute faite et fournie en avance, et qui nécessite par moments l'abandon de repères considéré auparavant comme « naturelles » et « sûres ». Le problème de transition par rapport au contrat doit donc être considéré à (au moins) deux niveaux interdépendants : celui, local, du savoir spécifique en jeu (lié directement au milieu didactique), et celui des formes de travail proposées aux étudiants (y compris les dispositifs).

6. La nécessité d'*alignement*

Un intérêt particulier de la théorie anthropologique du didactique est de reconnaître le contexte institutionnel non pas seulement comme source de contraintes pour la réalisation didactique, mais comme l'écologie même pour les organisations mathématiques et didactiques, comprenant des mécanismes de régulation qui *déterminent* en grand traits leur vie (Chevallard, 2001). La prise en compte de ces *conditions écologiques* sont indispensables pour le didacticien qui s'intéresse à la viabilité hors laboratoire de ses ingénieries. Nous n'en mentionnons ici que deux qui nous paraissent particulièrement importantes pour la deuxième question de l'introduction.

Premièrement, il nous semble indispensable, dans les contextes universitaires où nous travaillons, d'aligner toute initiative par rapport à l'enseignement avec *le système d'évaluation de l'apprentissage des étudiants* – en particulier avec les examens qui sont sinon le but au moins des marques d'étape importantes pour le travail des étudiants. Aussi, la *modification* du système et du contenu de cette évaluation est parfois souhaitable sinon nécessaire pour la réalisation d'une ingénierie substantielle. Il faut donc élargir la perspective didactique à comprendre non pas seulement les conditions (cognitives, épistémologiques, institutionnelles...) pour l'apprentissage mais *aussi celles de son évaluation formelle*. Les transitions par rapport au contrat didactique dépendent de ce que les étudiants reconnaissent l'alignement : que l'effort (peut-être considérable) demandé par les tâches qui leur sont assignées dans les situations d'enseignement contribue de façon évidente à leur apprentissage et à leur réussite dans l'évaluation. Notons qu'il y a là deux étapes *a priori* indépendantes ; les objectifs d'apprentissage et la mesure appliquée par l'évaluation. La « façon évidente » de leur relation mutuelle n'est donc en rien automatique. La description explicite des objectifs (cf. Winsløw, 2005) ainsi que l'usage de formes d'évaluation qui correspondent mieux au travail didactique des

étudiants (Grønbæk et al., en lecture) sont donc deux thèmes qui nous paraissent importants pour une approche proactive aux problèmes de transition. Grønbæk et al. (à paraître) présente un projet complet ingénierie (pour un cours d'analyse semi-avancée) basé sur ces deux pistes de travail.

Deuxièmement, la cohabitation, dans l'université, de *recherche et enseignement (supérieur)* est lourde de potentiels mais aussi de problèmes. Les transitions que nous avons décrites sont en partie liées aux difficultés pour l'étudiant de s'engager dans des activités qui sont, pour le chercheur, des pas indispensables vers l'analyse contemporaine. D'autre part pour l'enseignant-chercheur le décalage perçu entre ses deux activités principales – enseigner et chercher – est souvent massif. Les conditions et les modalités d'une relation plus fructueuse entre ces deux activités du professeur – et les potentiels pour le travail des étudiants dans un tel *nexus* recherche-enseignement – représentent un thème de recherche assez vif en sciences de l'éducation (voir Elton, 2001, pour une introduction). Les spécificités de ce thème pour le cas d'enseignement supérieur des mathématiques devraient le devenir en didactique – notamment en vue des problèmes de transition. Pour un début dans cette direction, basé sur la théorie anthropologique, voir (Winslow et Madsen, à paraître).

7. La complémentarité des approches

L'existence d'une multitude de cadres théoriques en didactique des mathématiques n'est pas une spécialité francophone, bien sûr ; aussi, même dans ce contexte, nous n'avons considéré que trois cadres parmi plusieurs possibilités (tel que la théorie des champs conceptuels de Vergnaud). Ceci dit, un point principal que nous avons voulu mettre en évidence est que, même si ces cadres se formulent et se poursuivent souvent sans beaucoup d'articulation de relations réciproques, ils ne sont pas de simples alternatives voir des « paradigmes incommensurables » (dans le sens de Kuhn, cf. Gascón, 2003 qui discute aussi commensurabilité des approches « cognitives » et « épistémologiques » en didactique). Au contraire, en examinant les tâches d'étudiant en vue de mettre en évidence les phénomènes de transition, nous avons pu découvrir des phénomènes bien différents mais aucunement indépendants en nous servant des trois cadres choisis. Essayons de faire le bilan.

Notre examen des opérations sémio-cognitives nécessitées par la résolution des trois tâches nous a amené à une analyse assez détaillée *des tâches mêmes*, ainsi que de leurs différences pour les étudiants. Ainsi, loin d'être une analyse de la psychologie imaginée des étudiants, cela nous permet d'examiner les efforts des étudiants en vue de saisir et manier le problème et avant tout les objets mathématiques à travers leurs représentations, ainsi que les obstacles que cela leur impose. Concrètement, dans le contexte de l'enseignement universitaire, nous

pouvons ainsi mettre en évidence (et articuler) des démarches cruciales pour les étudiants, mais qui « vont de soi » pour le mathématicien expérimenté et habitué à manier des objets dont les représentations disent, en fait, assez peu. Même si une telle analyse a pour mérite principal de nous éclairer d'une façon assez locale sur la première question posée dans l'introduction, il peut effectivement être utile pour le mathématicien (en tant qu'enseignant) de prendre connaissance d'une telle analyse et des principes sous-jacents.

Un point de vue beaucoup plus global, lié surtout à la structuration des savoirs et des pratiques mathématiques en jeu, nous est fourni par l'approche anthropologique. Pour rendre compte des liens et des différences principales entre les trois tâches, nous avons vu comment les organisations mathématiques ponctuelles plus avancées prennent pour objet de leurs tâches des éléments théoriques provenant des organisations locales où sont situés les plus simples. Ainsi, la maîtrise des blocs pratiques de ces dernières ne suffit pas pour s'acquitter des tâches plus avancées (même si, dans une certaine logique liée au bloc théorique, ces tâches avancées consistent à tirer des « conséquences » assez directes des plus simples). Une tâche didactique assez générale consiste donc à « tourner la théorie en tâche » pour les étudiants (Winsløw, à paraître, a) dans le sens de leur engager dans des tâches qui vont au-delà de l'organisation ponctuelle.

Nous avons choisi de traiter en dernier lieu l'apport de la théorie des situations parce qu'elle permet de se diriger plus directement vers la deuxième question, celle de l'organisation des activités des élèves. Cela suppose, bien sûr, une analyse des savoirs et des obstacles qu'ils représentent pour les élèves, mais qui est – dans des façons assez différentes – fournies, au moins partiellement, par les deux autres approches. Les situations classiques de Brousseau, comme celles du puzzle ou celles relevant de la statistique fondamentale, ne cessent de surprendre par l'originalité et l'imagination qu'a demandé leur construction. Il peut être difficile à imaginer des pendants pour le contexte des espaces métriques. Pourtant la structuration successive de milieux « exploratoires » et « visant plus directement le but » (retournement de situation) paraissent être des principes qui ouvrent plus de possibilités pour le travail autonome des étudiants, sans enlever pour autant la nécessité d'une créativité professorale tout aussi rare dans l'enseignement universitaire que partout ailleurs.

En guise de conclusion, nous proposons un tableau (fig. 4) en vue de synthétiser la complémentarité que nous avons trouvée, ici et ailleurs, des trois cadres théoriques dont nous nous sommes servis. Ces cadres diffèrent, en effet, aussi bien par les phénomènes qu'elles cherchent à modéliser en générale (deuxième colonne) que par la nature des transitions et des variables caractérisant celles-ci qu'elles permettent de découvrir.

Cadre théorique	Phénomènes modélisés par la théorie	Transitions secondaire-université	Variables en transition
<i>sémio-cognitive</i>	démarches cognitives liées aux représentations sémiotiques	plus, puis moins, de représentations « fiables »	demandes cognitives
<i>anthropologique</i>	pratiques mathématiques et didactiques, visées et observées dans leur contexte institutionnel	objets des tâches travaillées par les étudiants proviennent de blocs théoriques antérieurs	écologie institutionnelle du savoir (diffusion, création,...)
<i>des situations</i>	réalisations de situations d'apprentissage en classe	milieux envisageables pour le savoir visé	Obstacles épistémologiques ; contrats

Figure 4 : Complémentarités de trois cadres théoriques.

Remerciements

Je tiens à remercier Isabelle Bloch pour son aide formidable pour assurer la bonne forme de cet article, dont une version préliminaire a été présentée au colloque EMF à Sherbrooke (Mai 2006).

Références

- ARTIGUE M. (1988), Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9** (3), 281-308.
- BLOCH I. (2003), Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* **52** (2003), 3-28.
- BLOCH I. (2005), *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur*, Note de synthèse (HDR), Université Paris 7.
- BLOCH I. & SCHNEIDER M. (2004), A various milieu for the concept of limit: from determination of magnitudes to graphic milieu allowing proof. Texte présenté à ICME 10, Copenhague.
- BARBÉ J., BOSCH M., ESPINOZA L. & GASCÓN J. (2005), Didactic restrictions on teachers practice - the case of limits of functions at spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics* **59** (1-3), 235-268.
- BURN B., APPLEBY J. & MAHER P. (Eds) (1998), *Teaching undergraduate mathematics*, London, Imperial College Press.
- CAROTHERS N. L. (2000), *Real Analysis*, Cambridge, Cambridge U. Press.
- CHEVALLARD Y. (2002), *Organiser l'étude : écologie et régulation*. In : Dorier, J.-L. et al. (Eds), Actes de la 11^e école d'été de Didactique des Mathématiques, Grenoble, La pensée sauvage.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Bern, Peter Lang.
- DUVAL R. (2000), Basic issues for research in mathematics education, In: T. Nakahara et al. (eds.), *Proceedings of PME 24*, vol. 1, 55-69. Hiroshima: Hiroshima U.
- ELTON L. (2001), Research and teaching: conditions for a positive link, *Teaching in Higher Education* **6** (1), 43-56.
- FRÉCHET M. (1906), Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **22**, 1-74.
- GASCÓN J. (2003), From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: two incommensurable scientific research programmes? *For the learning of mathematics* **23** (2), 44-55.
- GRØNBÆK N. & WINSLØW C. (à paraître), Developing and assessing specific competencies in a first course on analysis, *Research in Collegiate Mathematics Education*.

GRØNBÆK N., MISFELDT M. & WINSLØW C. (en lecture), Assessment and contract-like relationships in undergraduate mathematics education. Pour O. Skovsmose et al. (eds), *University science and Mathematics Education. Challenges and possibilities*.

LEGRAND M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse, *Repères IREM* **10**, 123-159.

LEGRAND M. (2001), Scientific debate in mathematics courses, In D. Holton (Ed.), *Teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI study*, 27-135, Dordrecht, Kluwer, 2001.

TALL D. (1996) Functions and calculus. In A. Bishop et al. (eds) *International Handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

WINSLØW C. (2003), Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering, *Educational Studies in Mathematics* **52**, 271-288.

WINSLØW C. (2005), Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : La dialectique matières-compétences, *Annales de didactique et des sciences cognitives* **10**, 131-156.

WINSLØW C. (2006), Research and development of university level teaching: the interaction of didactical and mathematical organisations. In: M. Bosch (ed.) *European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1821-1830, Barcelona: Universitat Ramon Llull.

WINSLØW C. (à paraître, a), Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle, *Actes de la 13^{ème} école d'été de didactique des mathématiques*.

WINSLØW, C. (à paraître, b), L'usage des logiciels dans l'enseignement supérieur des mathématiques : un panorama des questions du point de vue de la sémiotique, *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*, F. Conne et R. Floris (éds).

WINSLØW C. & MADSEN L. (à paraître), Interplay between research and teaching from the perspective of mathematicians, *Actes du 5ème congrès de CERME*, 2007.

Carl WINSLØW

Département de Didactique des Sciences

Université de Copenhague, Danemark

winslow@cnd.ku.dk

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de didactique et de sciences cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à l'adresse électronique indiquée ci-après.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word* à l'adresse URL :

http://irem/data/publi/annales/templates/modele_annales_didactiques.doc

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de l' (des) auteur(s) ;
- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc “abstract – résumé - mots clés” ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé - Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes mailto :

`bibirem@math.u-strasbg.fr`
- pour des propositions d'articles mailto :

`alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr`
`pluvin@math.u-strasbg.fr`