Pour vos vacances

Michel Émery

Résumé : Énoncé de problème.

Mots-clés : Problème - Dénombrement - Cercle - Longueur d'arc - Probabilité.

Le problème ci-dessous, qui m'a été signalé par Freddy Delbaen comme venant de Russie, est difficile bien qu'il admette une solution élémentaire ; n'hésitez pas à envoyer la vôtre à L'Ouvert, qui sera heureux de la publier.

Un cercle C est fixé une fois pour toutes. Deux points de C seront dits *proches* s'ils sont joints par un arc de C mesurant au plus $2\pi/3$ radians. Par exemple, (a) deux points diamétralement opposés ne sont pas proches, mais (b) les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans C sont proches deux-à-deux.

Étant donné un ensemble E de n points de C, montrer que, parmi les n^2 couples formant l'ensemble $E \times E$, au moins la moitié sont des couples de points proches.

Remarques.

1) L'exemple (a) plus haut montre que l'on ne peut pas remplacer dans le problème l'inégalité large « au moins la moitié » par l'inégalité stricte « plus de la moitié » ; l'exemple (b) montre que la propriété devient fausse si, dans la définition de la proximité, on remplace l'inégalité large « au plus $2\pi/3$ » par l'inégalité stricte « moins de $2\pi/3$ ».

2) L'énoncé que m'avait transmis Delbaen est un peu plus général ; intuitivement, il correspond au cas où E ne serait plus nécessairement fini ; sa solution est essentiellement la même, avec un peu de théorie de la mesure, et un ε en plus. Sa formulation est probabiliste : *deux points de C, tirés au hasard, indépendamment et selon une même loi de probabilité* (n'importe laquelle), *ont au moins une chance sur deux d'être proches.* Lorsque les tirages sont effectués uniformément parmi les n points de l'ensemble E, on retrouve l'énoncé précédent.

Michel Émery
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67 084 Strasbourg Cedex
emery@math.u-strasbg.fr