SÉRIES EN SÉRIE

Michel ÉMERY

Résumé : Remarques sur des expressions de π comme somme de série.

Mots-clés : Pi - Série - Bailey Borwein Plouffe - Algorithme BBP.

La quête des valeurs approchées de π est presque aussi ancienne que les mathématiques elles-mêmes. Nous ne tenterons pas de l'esquisser ici (il y faudrait la plume d'un LEFORT) ; de nombreux ouvrages, pour spécialistes ou pour un public plus large, s'y consacrent en partie ou en totalité, par exemple [4], qui rassemble un matériau impressionnant, tant historique que mathématique. L'un des moments marquants de cette histoire a été la découverte en 1997 par David H. BAILEY, Peter B. BORWEIN et Simon PLOUFFE [3] de la formule

$$\pi = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right),$$

qui a pour la première fois permis de calculer des chiffres de π (en base 2) sans avoir besoin de calculer aussi tous les chiffres précédents. Elle a été obtenue par tâtonnements, à l'aide de programmes informatiques exploitant des coïncidences numériques. En recherchant systématiquement d'autres formules du même genre, Victor ADAMCHIK et Stan WAGON [1] ont trouvé l'expression plus simple

$$(1) \quad \pi = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{4k+1} + \frac{2}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} \right).$$

S'il a fallu attendre la fin du XX^e siècle et les calculs formels sur ordinateurs pour que ces formules soient découvertes, elles auraient pu l'être dès le XVIII^e ; leur démonstration (entendez : leur vérification) ne nécessite aucun outil sophistiqué et peut se faire à la main. Il suffit en effet de sommer séparément les différents termes ; or, si $|x| < 1$, $a \geq 0$ et $b > 0$, on a la formule sommatoire

$$\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{ak+b} = \sum_{k \geq 0} x^k \int_0^1 t^{ak+b-1} dt = \int_0^1 t^{b-1} \sum_{k \geq 0} (xt^a)^k dt = \int_0^1 \frac{t^{b-1}}{1-xt^a} dt,$$

où l'échange des signes $\sum$ et $\int$ est justifié par le fait que tout reste fini lorsque x est remplacé par $|x|$. La quadrature s'effectue ensuite en factorisant le dénominateur (pour $a = 4$ ou 8 , les racines a -ièmes de l'unité ne sont pas trop méchantes).

On peut également utiliser pour ces quadratures un programme de calcul formel ; c'est ainsi qu'ont procédé ADAMCHIK et WAGON pour trouver la formule (1). Mais celle-ci peut aussi s'obtenir beaucoup plus élégamment : partons du développement en série entière

$$(2) \quad \log \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n},$$

qui converge dans le disque complexe $|z| < 1$, et où la détermination du logarithme est réelle pour z réel.¹ Appliquant (2) à $z = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et ne retenant que les parties imaginaires, on obtient l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{\sin(n\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}^n},$$

où les irrationnelles $\sqrt{2}$ s'éliminent, faisant apparaître (1). Cette disparition de $\sqrt{2}$ était prévisible a priori, z^n/n héritant de z la rationalité de ses parties réelle et imaginaire.

J'ignore à qui est due cette élégante démonstration ; elle est mentionnée dans la section 2 de l'article [2] de BAILEY, où π n'est qu'un élément d'une liste impressionnante de constantes obtenues par cette méthode.

Sans nous aventurer dans cette jungle de constantes, et en restant fidèle à π , nous allons nous livrer à deux variations sur ce qui précède. Elles peuvent être lues indépendamment l'une de l'autre (ou ne pas être lues du tout, l'élégant argument ci-dessus récompensant amplement le lecteur qui nous a déjà suivi jusque'ici).

Notre **première variation** va consister à appliquer (2) à des valeurs de z autres que $(1+i)/2$. Mentionnons auparavant pour mémoire les z imaginaires purs, qui donnent la formule classique

$$\arctan t = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1},$$

valable pour $|t| < 1$. Cette formule était l'un des outils utilisés voici trois siècles par John MACHIN pour calculer π à 10^{-100} près (pour plus de détails, voir par exemple [4] ; voir aussi l'article [5] de Raymond SEROUL dans L'OUVERT n° 45 de décembre 1986).

Il y a d'ailleurs un autre développement,

$$(3) \quad \arctan t = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{\operatorname{Im}(it + t^2)^n}{(1 + t^2)^n},$$

obtenu pour $z = \frac{it+t^2}{1+t^2}$, c'est-à-dire z sur le cercle de diamètre $[0, 1]$. Ce développement converge pour tout t réel, plus rapidement que le précédent ; mais le gain en vitesse est faible pour t petit, et la formule beaucoup moins commode — sauf pour $t = 1$, où l'on retrouve (1).

Mais revenons à π . Nous allons choisir z sur le segment joignant 1 à i ; il suffit pour cela de prendre $a > 0$ et $b > 0$, et de poser $z = \frac{a+ib}{a+b}$. On obtient ainsi l'identité

$$(4) \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{\operatorname{Im}(a+ib)^n}{(a+b)^n},$$

dont (1) est le cas particulier correspondant à $a = b$. Des choix de a et b tels que $a+b$ vaille 10 ou 100 pourraient être commodes pour des calculs à la main en base 10 ; mais j'avoue ne pas avoir eu le courage d'essayer.

¹Ceci peut se voir sans recours à l'analyse complexe, en observant que la somme $S(z)$ de la série (2) est continue en z et vérifie $\exp S(z) = 1 + z + z^2 + \dots = 1/(1-z)$. Obtenue par substitution de la série S dans la série définissant l'exponentielle, cette dernière identité ne nécessite aucun calcul : pour en identifier les coefficients, il suffit de la savoir vraie pour z réel ! Rappelons que $\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$, où $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$.

Pour $0 < \theta < \pi$, en choisissant $z = \cos \theta e^{i\theta}$ dans (2), on obtient

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \cos^n \theta \sin(n\theta),$$

qui n'est qu'une réécriture de (3) puisque z est sur le cercle de diamètre $[0, 1]$; lorsque $\theta = \frac{\pi}{4}$, on retrouve bien sûr (1). En remplaçant θ par $\frac{\pi}{2} - \theta$ et en additionnant, on parvient à

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} [\cos^n \theta \sin(n\theta) + \sin^n \theta \sin(n\frac{\pi}{2} - n\theta)],$$

valide pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Substituant maintenant $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ à $\cos \theta$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ à $\sin \theta$, on obtient pour tous $a > 0$ et $b > 0$ l'identité

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n \geq 1} \operatorname{Im} \frac{a^n (a+ib)^n + b^n (b+ia)^n}{n (a^2+b^2)^n},$$

qui rappelle (4), mais en plus compliqué. Ici encore, des choix tels que $a^2 + b^2 = 10$ ou 100 se prêteraient peut-être au calcul manuel.

Passons à la **seconde variation**. Conservant à z la valeur $(1+i)/2$, nous utiliserons un autre développement, plus rapide, de $\log(1/(1-z))$: pour tout z tel que $|z| < 1$ et tout entier $p \geq 0$, on a

$$(5) \quad \log \frac{1}{1-z} = - \sum_{m=1}^p \frac{1}{m} \left(\frac{-z}{1-z} \right)^m + p! \left(\frac{-z}{1-z} \right)^p \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(n)_{p+1}},$$

où $(n)_{p+1}$ désigne la factorielle montante $n(n+1)\dots(n+p)$. Lorsque $p = 0$, cette formule n'est autre que (2). Pour p quelconque, on peut la déduire du développement en série entière de $(1-z)^p \log(1/(1-z))$ dans le disque $|z| < 1$; on peut aussi la vérifier par récurrence sur p , en s'assurant que le second membre est le même pour $p-1$ et p à l'aide de l'identité élémentaire

$$(1-z) \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{(n)_p} + p \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n+1}}{(n)_{p+1}} = \frac{z}{p!}.$$

Il ne reste qu'à fixer $z = \frac{1}{2}(1+i)$ dans (5) pour obtenir

$$\log \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} = - \sum_{m=1}^p \frac{(-i)^m}{m} + p! \sum_{n \geq 1} \frac{e^{i(n-2p)\pi/4}}{\sqrt{2}^n (n)_{p+1}},$$

et à prendre des deux côtés les parties imaginaires : pour chaque $p \geq 0$, ceci fournit π comme somme d'une série à termes rationnels. Quand $p = 0$, on retombe naturellement sur la formule (1) d'ADAMCHIK et WAGON. Pour chaque $p > 0$, on dispose d'une nouvelle

formule ; par exemple les cinq premières, obtenues pour p allant de 1 à 5, sont

$$\begin{aligned}\pi &= 3 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{(4k+3)_2} + \frac{2}{(4k+4)_2} + \frac{1}{(4k+5)_2} \right) ; \\ \pi &= 4 - 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{(4k+1)_3} + \frac{2}{(4k+2)_3} + \frac{1}{(4k+3)_3} \right) ; \\ \pi &= \frac{19}{6} - 3 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{(4k+3)_4} + \frac{2}{(4k+4)_4} + \frac{1}{(4k+5)_4} \right) ; \\ \pi &= \frac{8}{3} + 24 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{(4k+1)_5} + \frac{2}{(4k+2)_5} + \frac{1}{(4k+3)_5} \right) ; \\ \pi &= \frac{47}{15} + 60 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \left(\frac{2}{(4k+3)_6} + \frac{2}{(4k+4)_6} + \frac{1}{(4k+5)_6} \right).\end{aligned}$$

Curieusement, la quatrième se réécrit

$$\pi = \frac{8}{3} + 120 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+6)(4k+7)} ;$$

je ne m'explique pas cette simplification pour la seule valeur $p = 4$.

En prenant les parties réelles au lieu des parties imaginaires, on aurait obtenu une famille infinie de développements de $\log 2$, et, pour $p = 4$, la réécriture

$$\log 2 = \frac{7}{10} - 30 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{1}{(4k+3)(4k+4)(4k+5)(4k+8)(4k+9)} ;$$

mais j'avais promis de m'en tenir à π .

Tout comme pour (1), chacune de ces formules peut aussi être vérifiée en décomposant tous les termes en éléments simples et en sommant séparément les séries obtenues.

Bibliographie

- [1] V. ADAMCHIK & S. WAGON (1997), *A Simple Formula for Pi*, Amer. Math. Monthly **104**, 852–855.
- [2] D.H. BAILEY (2004), *A compendium of BBP-type formulas for mathematical constants*, n° 43 dans la liste <http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/>
- [3] D.H. BAILEY, P.B. BORWEIN & S. PLOUFFE (1997), *On The Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, Mathematics of Computation **66**, n° 218, 903–913, <http://www.ams.org/journals/mcom/1997-66-218/home.html>
- [4] L. BERGGREN, J.M. BORWEIN & P.B. BORWEIN (2004), *Pi: a source book* (3^e édition), Springer-Verlag.
- [5] R. SEROUL (1986), *Formules à la Machin*, L'OUVERT **45**, 14–27.

Michel ÉMERY
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67 084 Strasbourg Cedex
emery@math.u-strasbg.fr