# Tresses néoriemaniennes
## Quelques applications musicales de la théorie des nœuds

Franck Jedrzejewski

**Résumé :** Nous présentons dans cet article trois applications de la théorie des nœuds au domaine musical : un modèle d'enharmonie, un modèle dodécaphonique et une analyse nodale. L'enharmonie est construite par des pliages dans la spirale des quintes justes sous l'action du groupe de Artin sur les réseaux de Hostinsky. Le modèle dodécaphonique est une classification des séries de douze sons par des diagrammes de cordes. L'analyse nodale est une recherche de petites topologies dans des textes littéraires ou musicaux.

**Mots-clés :** Nœud - Tresse - Diagramme de cordes - Modèle d'enharmonie - Représentation de Burau - Série dodécaphonique - Nœud dodécaphonique - Analyse nodale.

## Introduction

Les mathématiques ont toujours entretenu des liens privilégiés avec la musique. Dès les premières expériences que Pythagore réalisa sur le monocorde, les rapports des fréquences musicales ont été la source d'inspiration de théoriciens qui voulaient expliquer l'univers par les nombres. Aujourd'hui les choses ont évolué, mais il reste que, si on ne cherche plus à distribuer les orbes des planètes du système solaire dans une harmonie parfaite selon les rapports numériques des intervalles musicaux, on accorde encore une place importante aux justifications mathématiques de problèmes que posent la création musicale et artistique.

L'idée n'est pas de réinventer le pythagorisme, mais de donner à voir les structures combinatoires que la nature et les compositeurs ont savamment placées ou utilisées pour leurs œuvres. A partir de Jean-Sébastien Bach, l'accord des instruments de musique s'est figé autour du tempérament égal. Mais avant cet usage qui s'est généralisé à l'échelle européenne, de nombreux accords ont été employés en fonction des goûts des facteurs et des riches possibilités qu'offraient les instruments, et plus particulièrement, à cette époque, les orgues. Les adeptes de l'*Intonation juste* ont cherché de nouvelles solutions aux problèmes d'accord en évitant le tempérament égal dont le manque de relief sonore a été si souvent critiqué. Non seulement on associait des nombres aux choix des fréquences, mais on voulait de plus que ces nombres fournissent les clés de l'harmonie. La simplicité du rapport de deux fréquences était garante de la simplicité naturelle de l'harmonie et de la qualité sonore des œuvres musicales. Puisque le beau était dans la nature, les fréquences devaient s'y trouver comme les nombres naturels.

Aujourd'hui on ne cherche plus à justifier la création ou la pratique musicale par des arguments d'ordre mathématique. Ce dont le compositeur ou le théoricien ont besoin, c'est de pouvoir dénombrer les objets qu'ils inventent, de les classer et de comprendre comment ils s'organisent. La nature profonde des structures musicales est un enjeu important de notre compréhension du monde. Dans cet article, je donnerais trois exemples qui sont en rapport avec la théorie mathématique des tresses et des nœuds.

Dans le premier exemple qui s'inspire des travaux du musicologue Hugo Riemann, nous allons construire une tresse à deux brins le long de la spirale des quintes. Dans le tempérament égal, c'est-à-dire dans l'accord que nous utilisons aujourd'hui, les notes *do dièse* et *ré bémol* sont enharmoniques. Elles correspondent à la même fréquence et à la même touche noire du piano. Pourtant, en harmonie tonale, ces notes n'ont pas la même fonction. Ce qui pose de nombreuses questions. Avons-nous raison de les distinguer ? Si elles n'ont pas la même fonction, pourquoi auraient-elles la même fréquence ? Cette distinction correspond-elle à une réalité physique ? N'est-ce pas le pouvoir adaptatif de notre oreille qui malgré la fréquence nous contraint à distinguer un *do dièse* d'un *ré bémol* ? Est-ce plutôt la langue musicale, c'est-à-dire la grammaire et la syntaxe, qui oblige notre intellect à distinguer ces deux notes ? Pourquoi le système tempéré n'est-il fait que de *douze* sons ? Voilà des questions auxquelles la musicologie apporte des réponses. Mais ses réponses ne sont pas satisfaisantes. Car si nous devons construire un logiciel qui écrit les notes que nous jouons sur un clavier couplé à un ordinateur, il faudra être capable de calculer s'il s'agit d'un *do dièse* ou d'un *ré bémol*. Le logiciel s'aidera du contexte, mais dans certaines situations, il sera incapable de reproduire le savoir de l'expert.

La question est donc : peut-on calculer une enharmonie ? Nous n'allons pas résoudre ce problème qui reste ouvert, mais donner quelques éléments mathématiques qui aideront à comprendre ce qu'est l'enharmonie à partir d'un modèle simple. Pour cela, nous considérons un système d'accord pythagoricien dans lequel nous n'avons que des quintes justes et nous mettons en évidence une hiérarchie de gammes qui s'emboîtent les unes dans les autres comme des poupées russes. Cet emboîtement s'ordonne autour de nombres qui ont un rapport avec la décomposition en fractions continues du rapport de la quinte tempérée et l'arbre de Stern-Brocot. En distinguant deux types de quintes, nous construisons un tressage sur la spirale des quintes. En faisant agir le groupe des tresses, on montre que le passage du système pythagoricien au système tempéré a des similarités avec le passage d'un système non-commutatif à un système commutatif. Ce passage d'un modèle non-enharmonique à un modèle enharmonique est à la musicologie ce que la non-commutativité est aux mathématiques ou ce que la quantification, c'est–à-dire le passage de la mécanique quantique à la mécanique classique est à la physique. Mais ici contrairement aux modèles physiques, nous n'avons pas de quantum d'action $\hbar$, donc pas de passage à la limite ($\hbar \to 0$).

Dans le deuxième exemple qui emprunte aussi des notions de théorie des nœuds, nous proposons une classification des séries de douze sons par des *diagrammes de cordes*. Ces diagrammes représentent la structure tritonique des séries dodécaphoniques. L'idée de relier sur un même graphe les tritons d'une série de douze sons est à l'origine de ces diagrammes, fondés sur le triton qui est l'ensemble à transpositions limitées le plus simple. On aurait pu imaginer un autre type de diagramme montrant l'enchevêtrement d'ensembles à transpositions limitées autre que le triton, mais la structure graphique aurait été plus compliquée. Les *ensembles à transpositions limitées* ont été employés par Olivier Messiaen. Nous savons qu'ils interviennent de manière singulière dans toutes les compositions et en harmonie tonale dans certaines modulations. C'est le rôle bien connu de l'accord de septième diminuée qui parce qu'il est à transpositions limitées peut connecter plus facilement que les autres accords plusieurs tonalités. L'analyse des partitions musicales construites sur des séries ou des proliférations de séries est d'une grande difficulté. Les indications laissées par le compositeur aident à l'analyse, mais elles n'existent pas toujours. Pour aider à l'analyse musicale, la recherche d'invariants permettrait de repérer plus facilement telle ou telle forme sérielle. L'avantage de ces invariants est aussi de fournir un processus de classification des œuvres. A chaque diagramme de cordes est associée une permutation. Lorsque plusieurs séries sont utilisées dans une pièce, les permutations correspondantes à ces séries engendrent un groupe dont l'ordre représente les possibilités d'engendrement du matériau sériel. La connaissance de ces invariants et des structures mathématiques des formes sérielles est une contribution importante à la musicologie du XXe siècle.

Dans le dernier exemple, je montre comment mettre en évidence dans des textes littéraires ou musicaux des structures nodales témoins d'une invariance structurelle, qui se déploient le long d'un entrelacs. Lorsque ces structures apparaissent à plusieurs reprises dans un texte, elles peuvent être, comme la série dodécaphonique de Schoenberg, un élément moteur de la cohésion d'une œuvre.

## 1. Un modèle d'enharmonie

Dans la plupart des modèles d'accord des instruments de l'orchestre, l'octave est la période du tempérament. A quelques rares exceptions près[1], les fréquences des notes se répètent à l'identique d'une octave à une autre. Dans les expériences sur le monocorde, il suffit de pincer la corde en son milieu pour produire un son à l'octave. Le rapport des fréquences est inversement proportionnel au rapport des longueurs de cordes. Pour le musicien, il est souvent plus simple de travailler avec des rapports de fréquences relativement à une note de base qu'avec les fréquences elles-mêmes. Ainsi dans les modèles de tempéraments périodiques à l'octave, toutes les notes de même nom ont le même rapport. Ces rapports sont mesurés relativement à la fréquence d'une note fixée par convention (ici la note *do*). Dans le système dit naturel, la note *sol* qui correspond à un intervalle de quinte juste a un rapport acoustique de 3/2. Son renversement, la quarte représentée par le rapport de la fréquence de la note *fa* à la fréquence de la note *do*, a un rapport de 4/3. Ce qui se calcule aussi en remarquant que l'octave se compose d'une quinte et d'une quarte dont les rapports acoustiques vérifient l'équation :

$$\nu_{quinte} \times \nu_{quarte} = 2$$

Les additions étant parfois plus faciles que les multiplications, les musiciens emploient une échelle logarithmique pour exprimer que l'octave se compose de 1200 cents ou que le demi-ton est formé de 100 cents. Une oreille “moyenne” perçoit facilement une différence de 5 cents. Un rapport acoustique formé du rapport des fréquences $f_2/f_1$ $(f_1 < f_2)$ se mesure en *cents* par

$$1200 \log_2 \left( \frac{f_2}{f_1} \right)$$

Lorsqu'on accorde un piano, on réalise ce que les facteurs et accordeurs appelent une *partition*. Cette partition est le plan à suivre pour accorder de proche en proche les quintes

[1] Quelques facteurs et théoriciens ont proposé de modifier la périodicité du système d'accord. Serge Cordier augmente légèrement l'octave de façon à n'avoir que des quintes justes, Wendy Carlos redistribue les fréquences dans un esprit microtonal. Sur ces questions voir [4] et [6]

et octaves. Dans l'accord qui est réalisé, on aimerait que toutes les quintes soient des quintes justes de rapport (3/2) et qu'au bout d'un certain nombre de quintes on retombe sur une octave. Malheureusement, cela n'est pas possible car l'équation

$$\left(\frac{3}{2}\right)^q = 2^p$$

n'a pas de solution $(p, q)$ entière (non triviale). Lorsqu'on passe les douze quintes de la gamme, on se retrouve au voisinage de sept octaves, mais pas exactement sur la septième octave. Autrement dit, lorsqu'on parcourt l'espace des fréquences en sautant de quinte juste en quinte juste, on est conduit à considérer la solution approchée (7, 12)[2]. La différence entre les douze quintes et les sept octaves forme le *comma pythagoricien*, un intervalle qui vaut environ 23 cents.

$$C_p = \frac{12 \text{ quintes justes}}{7 \text{ octaves}} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

C'est ce comma qui est réparti entre les quintes pour former un "tempérament". Car pour retomber sur la septième octave, on est contraint de diminuer légèrement la fréquence des quintes, de *tempérer* les quintes. Dans le tempérament que nous utilisons aujourd'hui, la répartition s'effectue de manière égale entre les douze quintes. Mais historiquement, plusieurs solutions ont été proposées pour ajuster les quintes en répartissant le comma pythagoricien sur quelques quintes de façon à préserver certaines quintes justes. La théorie a pris un nouvel essor lorsque les musiciens et théoriciens se sont intéressés à des problèmes analogues en considérant non plus les quintes, mais les tierces. Un nouveau comma est alors apparu : le *comma syntonique* $C_s = 81/80$ (environ 22 cents).

Dans les systèmes pythagoriciens à $n$ sons par octave, aussi appelés échelles pythagoriciennes, on détermine les fréquences de chaque note à partir de la spirale des quintes. On part du *do* central de rapport acoustique 1, et on monte la spirale en multipliant les rapports par 3/2 et on la descend en divisant les rapports par cette même quantité. En replaçant chaque son dans l'intervalle d'octave en divisant ou en mutipliant le rapport par une puissance convenable de 2, on construit une suite infinie de rapports qui se place sur une hélice comme sur la surface de Riemann[3] de $log(z)$.

$$...., 2^5/3^3 \text{ (E}\flat\text{)}, 2^4/3^2 \text{ (B}\flat\text{)}, 2^2/3 \text{ (F)}, 1\text{(C)}, 3/2 \text{ (G)}, 3^2/2^3 \text{ (D)}, 3^3/2^4 \text{ (A)}, ....$$

On choisit ensuite de tronquer cette suite et de ne retenir que $n$ nombres qui, réordonnés par ordre croissant, déterminent les fréquences du système d'accord que l'on souhaite construire. Les *systèmes cycliques* sont des généralisations de cette construction. En prenant un nombre quelconque $\omega$, on calcule ses puissances

$$... , \omega^{-3}, \ \omega^{-2}, \ \omega^{-1}, \ 1, \ \omega, \ \omega^2, \ \omega^3, \ ...$$

qui sont recadrées dans l'intervalle [1, 2] par multiplication ou division par une puissance de 2. On choisit alors $n$ nombres consécutifs de cette suite qui réordonnés par ordre croissant donnent un système d'accord. Lorsque l'on fait varier $n$, on constate que les systèmes s'emboîtent les uns dans les autres comme des poupées russes. Certains systèmes n'ont que deux intervalles élémentaires. Ils forment ce que nous appelons des systèmes ou *échelles cycliques*[4]. Pour $\omega = 3$, nous obtenons les échelles pythagoriciennes. La première est

[2]Remarquons qu'en développant en fractions continues log(3/2)/log2 on trouvera les "meilleures" approximations des solutions de l'équation. Ce procédé a été employé pour calculer des tempéraments à $n$ degrés approchant le système naturel.

[3]Il s'agit ici du mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) et non du musicologue.

[4]Cette notion est équivalente aux *well-formed scales* de Carey et Clampitt (voir [1]).

obtenue pour $n = 3$. Elle se compose de trois sons $L_3 = \{1$ (C), 4/3 (F), 3/2 (G)$\}$ et de deux intervalles $c_1 = 4/3$ et $c_2 = 9/8$. On la représente par le mot

$$L_3 = c_1 c_2 c_1$$

L'échelle de rang supérieur est formée de cinq sons et de deux intervalles $c_2 = 9/8$ et $c_3 = c_1/c_2 = 32/27$.

$$L_5 = c_2 c_3 c_2 c_3 c_2$$

Les premières échelles sont données dans la table suivante dans laquelle on trouve le nombre de degrés dans l'échelle[5], puis le nombre d'intervalles élémentaires ($p$ intervalles $c_x$ et $q$ intervalles $c_y$), le rapport acoustique de l'intervalle élémentaire ($c_y$) et sa valeur en cents.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | $2c_1$ | $1c_2$ | $c_2 = c_0/c_1 = 9/8$ | 204 |
| 5 | $3c_2$ | $2c_3$ | $c_3 = c_1/c_2 = 32/27$ | 294 |
| 7 | $5c_2$ | $2c_4$ | $c_4 = c_3/c_2 = 256/243$ | 90 |
| 12 | $7c_4$ | $5c_5$ | $c_5 = c_2/c_4 = 2187/2048$ | 114 |
| 17 | $12c_4$ | $5c_6$ | $c_6 = c_5/c_4 = 3^{12}/2^{19}$ | 23 |
| 29 | $17c_6$ | $12c_7$ | $c_7 = c_4/c_6 = 2^{27}/3^{17}$ | 67 |
| 41 | $29c_6$ | $12c_8$ | $c_8 = c_7/c_6 = 2^{46}/3^{29}$ | 43 |
| 53 | $41c_6$ | $12c_9$ | $c_9 = c_8/c_6 = 2^{65}/3^{41}$ | 2 |
| 94 | $53c_9$ | $41c_{10}$ | $c_{10} = c_6/c_9 = 3^{53}/2^{84}$ | 3.6 |

Comme nous sommes maintenant familliarisés avec les fréquences et les systèmes d'accord, nous allons construire un modèle d'enharmonie. Pour cela, nous distinguons dans la spirale des quintes dont les rapports sont recadrés à l'octave, les "quintes justes" que nous notons $P$, comme par exemple C (1) – G (3/2), et les "quintes pliées" que nous notons $Q$, comme par exemple la quinte G (3/2) – D (9/8) dans laquelle nous avons été contraint de diviser le rapport par 2 pour replacer le rapport dans l'octave. Autrement dit, on distingue dans la spirale, les quintes dont les rapports $f_2/f_1$ valent 3/2 (type $P$) et celles dont les rapports valent 3/4 (type $Q$). Plaçons ces résultats sur un réseau de Hostinsky (voir [3]). Ce réseau est un graphe du plan dans lequel chaque note est au centre d'un hexagone. Une note est entourée de ses voisines en relation de quinte, de tierce majeure, de tierce mineure et de leurs renversements. Les quintes sont disposées sur les lignes horizontales. Pour construire la spirale des quintes, on recolle les bords lattéraux (cf. Fig. 1) du réseau : le bord droit s'identifie au bord gauche un triangle au-dessus. Le son D♭ qui se trouve en bas à droite est ainsi identifié au même D♭ situé sur le bord gauche un triangle plus haut. En parcourant le réseau de gauche à droite et de bas en haut, on décrit la spirale des quintes. Comme les quintes $P$ et $Q$ ne commutent pas, il faut respecter l'ordre des facteurs. Pour aller de C à C♯, on peut suivre la spirale ou prendre un raccourci en suivant les arêtes du triangle C – E – C♯ ou C – A – C♯. Le mot représentant ce trajet est

$$C - C\sharp = PQPQPQQ$$

Considérons maintenant l'action du groupe des tresses $B_n$ sur ce réseau. Si on désigne par $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ les générateurs de $B_n$, le groupe de Artin (ou groupe des tresses) est défini par

[5]Cette table donne une curieuse parenté entre le nombre de degrés dans l'échelle (3, 5, 7, 12, 17, 29, etc.) et les valeurs des réduites du développement en fractions continues de log(3/2)/log2.

les relations

$$\begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i = 1 & \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{si } |j-i| \geq 2 \text{ pour } i,j = 1,2,...,n-1 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \text{pour } i = 1,2,...,n-2 \end{array}$$

Si le groupe n'a que deux générateurs $P$ et $Q$, les relations se réduisent à

$$PQP = QPQ$$

Pour un paramètre réel $t$, les matrices

$$P = \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -t \end{pmatrix}$$

définissent la représentation de Burau du groupe $B_3$. Elles vérifient les relations

$$(PQ)^6 = (QP)^6 = t^6.id$$

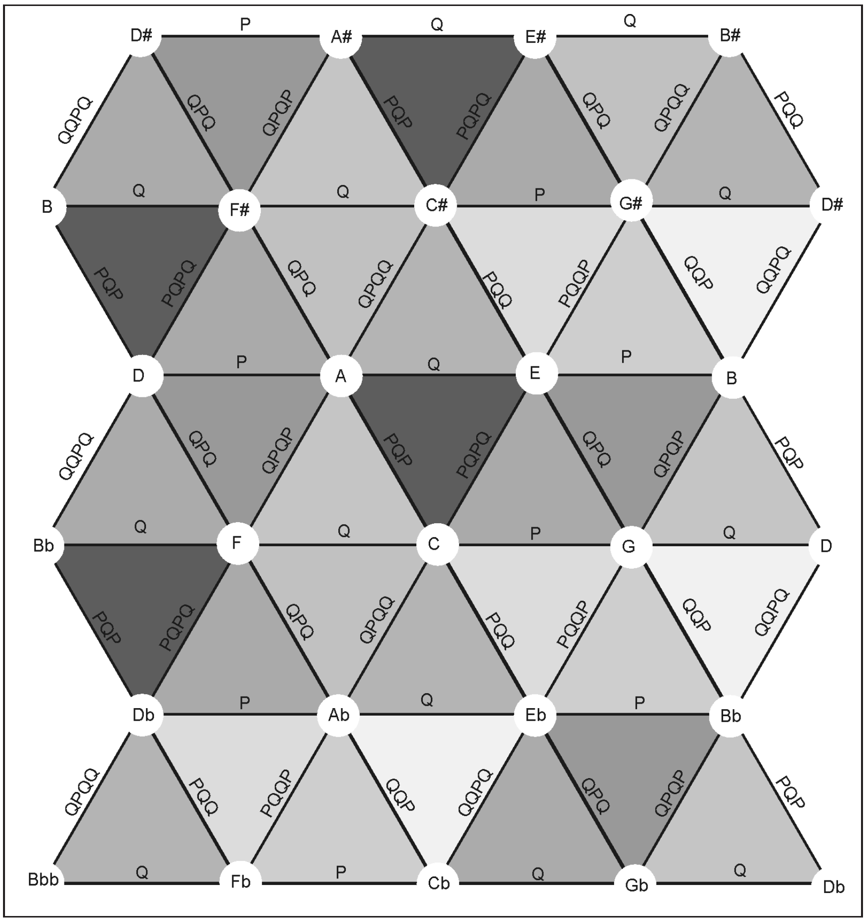


FIG. 1 – Réseau de Hostinsky

Lorsque $t$ vaut 1, le groupe $B_3$ est le groupe symétrique $S_3$ et $P^2 = Q^2 = 1$. A chaque son de la spirale des quintes est associée une matrice. En prenant la matrice identité pour le son C, on calcule toutes les représentations des sons dans la spirale des quintes. Citons un résultat bien connu de cette représentation : pour un son $X$, de matrice notée encore $X$, le déterminant $det(1-X)$ est proportionnel au polynôme d'Alexander qui caractérise la tresse associée à $X$ (Cette tresse représente l'enchevêtrement des lettres $P$ et $Q$ dans $X$). Le rang d'une quinte dans la spirale est donné par

$$\log(-\det(X))(e)$$

Introduisons les commutateurs

$$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

La relation $PQP = QPQ$ conduit aux expressions

$$P = QPQP^{-1}Q^{-1} = Q \cdot [P,Q]$$

et

$$Q = PQPQ^{-1}P^{-1} = P \cdot [Q,P]$$

Les distances entre les notes enharmoniques du modèle traditionnel à douze sons se calculent en utilisant les relations du groupe des tresses. Par exemple, calculons $D\flat - C\sharp$. En utilisant le tressage $PQP = QPQ$,

$$\begin{aligned} D\flat - C\sharp &= PQPQQPQPQPQQ \\ &= PPQPQPQPQPQQ \\ &= P(PQ)^5Q \end{aligned}$$

Puis, avec la relation $(PQ)^6 = t^6.Id$, on exprime cette distance en fonction du commutateur de $P$ et $Q^{-1}$.

$$D\flat - C\sharp = t^6P(PQ)^{-1}Q = t^6[P,Q^{-1}]$$

Toutes les distances entre les notes enharmoniques s'expriment de cette façon. La figure 2 donne les commutateurs des notes enharmoniques.

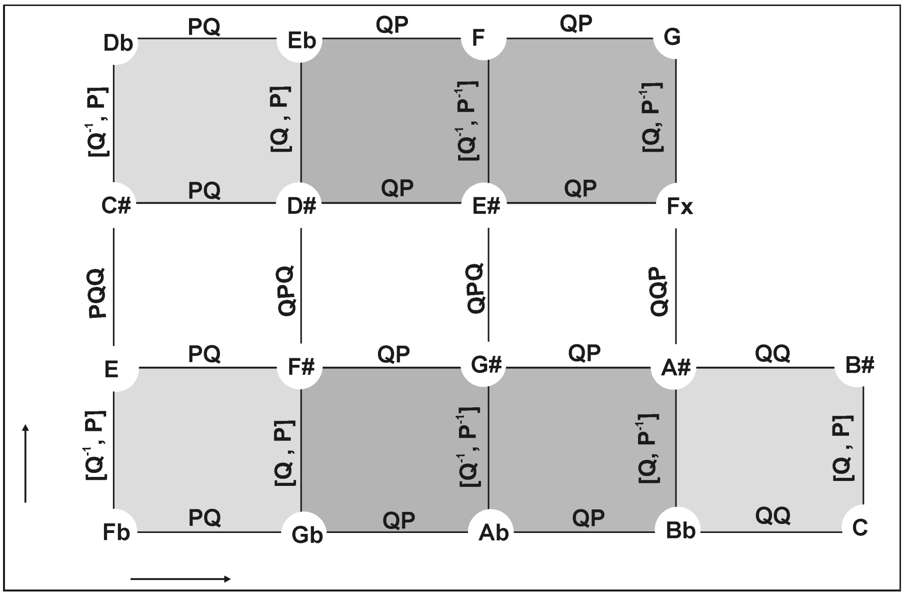


Fig. 2 – Commutateurs des notes enharmoniques

Pour $t = 1$, $x = -P$ et $y = -Q$, on retrouve le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ qui a été étudié par Thomas Noll (cf. [9] et [10]). La présentation de ce groupe en générateurs et relations est la suivante

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \langle x, y \mid xyx = yxy,\ (xy)^6 = 1 \rangle$$

Si on note $SL(2,\mathbb{Z})'$ le groupe des commutateurs, on retrouve la suite exacte

$$1 \to SL(2,\mathbb{Z})' \to SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to 1$$

où l'ensemble $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est identifié aux douze sons de la gamme. En croisant les quintes (3/2) et les tierces majeures justes (5/4) dans un réseau à la manière de ceux de Riemann (voir [11] à [14]), et en considérant l'action du groupe $B_5$, on construit plusieurs modèles enharmoniques, qui constituent une généralisation des tresses néoriemaniennes obtenues ici dans le cas simple de l'action du groupe $B_3$ à deux générateurs.

## 2. Nœuds dodécaphoniques

Arnold Schoenberg est l'inventeur d'une méthode de composition à douze sons qui a été popularisée en France par René Leibowitz (cf. [8]). Cette méthode consiste à ordonner les douze sons de la gamme en une *série dodécaphonique* et à utiliser cette forme et 48 formes dérivées comme matériau compositionnel. Chaque série en forme droite ou inversée est transposée sur un des douze sons et chaque forme est lue de droite à gauche ou de gauche à droite donnant ainsi au plus 48 séries dérivées[6]. Dans ces conditions on démontre par le théorème de Pólya qu'il existe 9 985 920 séries différentes (voir [6]). Naturellement, ce chiffre est beaucoup trop important pour que le musicologue puisse élaborer une étude analytique des formes sérielles. D'où l'idée de recourir aux diagrammes de cordes. Pour construire un diagramme de cordes issu d'une série dodécaphonique, il suffit de placer les notes sur un cercle en tournant dans le sens trigonométrique et de joindre par une corde les tritons. Ainsi, si les notes de la gamme sont identifiées aux éléments de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, ..., 11\}$, les cordes relient les couples (0,6), (1,7), (2, 8), ..., (5, 11). En effaçant du dessin toute référence aux notes, on obtient un diagramme abstrait qui représente la structure tritonique de la série. Toutes les formes dérivées de la série conduisent au même diagramme. La transposition n'est qu'une simple rotation, la rétrogradation (lecture de droite à gauche) est une symétrie miroir suivie éventuellement d'une rotation, le renversement (c'est-à-dire l'action de l'inversion $I(x) = -x\ mod\ 12$ sur les douze sons) a comme la rétrogradation du renversement la même structure diagrammatique, vue dans l'espace.

Les formes sérielles dérivées correspondent à l'action du groupe dihédral qui fournit 554 diagrammes de cordes. Ces diagrammes permettent de classer toutes les séries dodécaphoniques en conservant leurs propriétés structurales. Le dénombrement peut se faire dans un cadre plus vaste que celui de la musique tempérée classique. Pour des systèmes à tempérament égal à $2n$ degrés (comme par exemple, les systèmes microtonals à base de quarts de ton, voir [5]), on démontre[7] que sous l'action du groupe cyclique $C_{2n}$ sur

[6]Certaines séries ont moins de douze transpositions. Par exemple, la série chromatique (do, do dièse, ré, ré dièse, mi, fa, fa dièse, sol, sol dièse, la, la dièse, si) transposée de $x$ demi-tons redonne les mêmes sons dans le même ordre. Seul le point de départ change. Elle n'a qu'une transposition

[7]Cette démonstration a été faite par A. Khruzin, voir [7].

l'ensemble des $2n$ sons, le nombre de diagrammes de cordes équivalents est

$$c_n = \frac{1}{2n}\sum_{i|2n}\varphi(i)\nu_n(i)$$

où $\varphi(i)$ est la fonction d'Euler et $\nu_n$ est défini pour tous les diviseurs de $2n$ par les formules

$$\nu_n(i) = \begin{cases} i^{n/i}(2n/i-1)!! & \text{si } i \text{ est impair} \\ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} \binom{2n/i}{2k} i^k(2k-1)!! & \text{si } i \text{ est pair} \end{cases}$$

le symbole "double factorielle" signifiant que l'on prend un terme sur deux

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)(2n-3)(2n-5).....5\cdot 3$$

Sous l'action du groupe diédral, le nombre de diagrammes de Gauss équivalents, pour le tempérament égal à $2n$ degrés est

$$d_n = \frac{1}{2}(c_n + \frac{1}{2}(\kappa_{n-1}+\kappa_n))$$

où $\kappa_n$ est le nombre

$$\kappa_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!}$$

On trouvera la table des 554 diagrammes de cordes du tempérament égal à 12 sons dans [6]. Le tableau suivant montre qu'au delà du tempérament à douze sons, il n'est pas facile de classer les séries dodécaphoniques, car le nombre de diagrammes est trop important. Ainsi pour des systèmes à tiers de ton (18-tet), la classification nécessite 966 156 diagrammes de cordes. Les compositeurs comme Alain Bancquart qui ont employé des formes sérielles dans des univers micro-intervallaires ont d'ailleurs utilisé des séries tronquées plutôt que des séries complètes à $2n$ sons. Le nombre de diagrammes de cordes sous l'action du groupe cyclique ($c_n$) et sous l'action du groupe dihédral ($d_n$) pour les tempéraments égaux à $2n$ degrés sont donnés ci-dessous.

| $n$ | $c_n$ | $d_n$ | Temp. |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 5 | 6-tet |
| 4 | 18 | 17 | 8-tet |
| 5 | 105 | 79 | 10-tet |
| 6 | 902 | **554** | 12-tet |
| 7 | 9 749 | 5283 | 14-tet |
| 8 | 127 072 | 65 346 | 16-tet |
| 9 | 1 915 951 | 966 156 | 18-tet |
| 10 | 32 743 182 | 16 411 700 | 20-tet |
| 11 | 625 002 933 | 312 702 217 | 22-tet |

Ces diagrammes de cordes servent à construire des invariants et des représentations diagrammatiques des séries comme le *graphe d'intersection*. Considérons la série de *Superscripto* de Brian Ferneyhough $\{10, 1, 3, 4, 11, 9, 6, 7, 0, 2, 5, 8\}$. Le diagramme de cordes

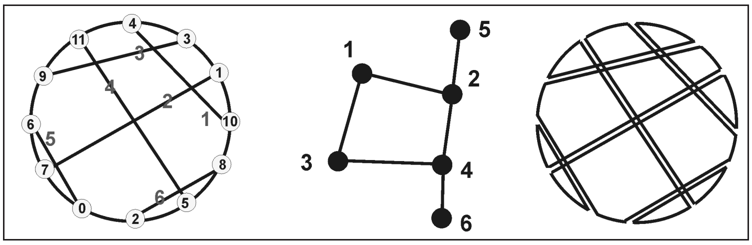


Fig. 3 – Diagramme de cordes et graphe d'intersection

de cette série est donné fig. 3. Dans le graphe d'intersection, chaque corde est représentée par un sommet. Deux sommets sont reliés entre eux si les cordes se coupent.

D'un point de vue algébrique, on peut construire la matrice d'adjacence $A$ du graphe dont les éléments $A_{ij}$ valent 1 si et seulement si le sommet $i$ est relié au sommet $j$ dans le graphe d'intersection, autrement dit si la corde $i$ coupe la corde $j$ dans le diagramme de cordes. Pour la pièce de Ferneyhough, la matrice d'adjacence vaut

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique et ne comporte que des zéros sur sa diagonale (car aucune corde ne se coupe elle-même). Le rang de cette matrice est un quadri-invariant, qui est lié au nombre de faces du diagramme de cordes $D$ par la relation

$$\#\text{ faces }(D) = \text{corang }(A) + 1$$

Le nombre de faces d'un diagramme de cordes s'obtient en doublant chaque corde et en ouvrant les cordes sur le cercle extérieur. C'est le nombre de composantes connexes de la figure ainsi obtenue. Dans l'exemple de la figure 3, le diagramme de cordes ne comprend qu'une seule face. Le déterminant de la matrice d'adjacence est non nul, son rang est donc égal à 6 et son corang est nul.

Une autre approche des séries dodécaphoniques est d'associer à chaque diagramme de cordes une carte labellisée par une constellation (pour plus de détails sur les constellations et les cartes, voir [17]). Une constellation $C$ de longueur $k$ est un ensemble de $k$ permutations de $S_n$ agissant sur $n$ points, noté $C = [g_1, g_2, ..., g_k]$, tel que le groupe $G = \langle g_1, g_2, ..., g_k \rangle$ agit transitivement sur l'ensemble des $n$ points et vérifiant

$$g_1 g_2 ... g_k = 1$$

Le groupe $G$ est appelé le *groupe cartographique* de la constellation $C$. Une carte $M$ est un graphe plongé dans une surface $X$ tel que (1) les sommets sont des points distincts de $X$, (2) les arêtes sont des courbes sur $X$ qui ne se coupent qu'aux sommets, et (3) si on découpe la surface selon le graphe, ce qui reste est une union de composantes connexes appelées *faces*, homéomorphes à un disque ouvert. On démontre que la caractéristique d'Euler-Poincaré ne dépend pas de la carte $M$, mais seulement du genre $g$ de $X$ et vérifie

$$\chi(M) = S - A + F = 2 - 2g$$

A chaque carte, on associe trois permutations : la permutation $\alpha$ pour les sommets, la permutation $\sigma$ pour les arêtes et la permutation $\varphi$ pour les faces. Ces trois permutations vérifient

$$\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1}$$

La labellisation des cartes suit des règles particulières qu'on trouvera dans [17]. Une arête est numérotée par un couple $(m, m+1)$ de deux nombres l'un placé à l'intérieur de l'arête, l'autre à l'extérieur de l'arête, comme sur la figure 4.

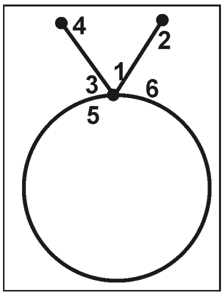


Fig. 4 – Carte labellisée

Les couples associés aux arêtes définissent la permutation $\alpha$ qui est donnée en cycles par

$$\alpha = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$$

La permutation associée aux sommets de la carte est définie par les labels rencontrés en tournant autour de chaque sommet dans le sens trigonométrique

$$\sigma = (1, 3, 5, 6)(2)(4)$$

Enfin, la permutation des faces est composée des cycles obtenus lorsqu'on parcourt chaque composante connexe dans le sens trigonométrique inverse

$$\varphi = \sigma^{-1}\alpha^{-1} = (1, 2, 6, 3, 4)(5)$$

A un diagramme de cordes représentant une série dodécaphonique, on associe une carte labellisée de la manière suivante. Considérons la série de *... au delà du hasard* de Jean Barraqué

$$0, 8, 7, 1, 4, 2, 10, 3, 11, 5, 6, 9$$

Le diagramme de cordes est dessiné figure 5.

Les cordes du diagramme représentent les relations tritoniques de la série et définissent la permutation des arêtes

$$\alpha = (0, 6)(1, 7)(2, 8)(3, 9)(4, 10)(5, 11)$$

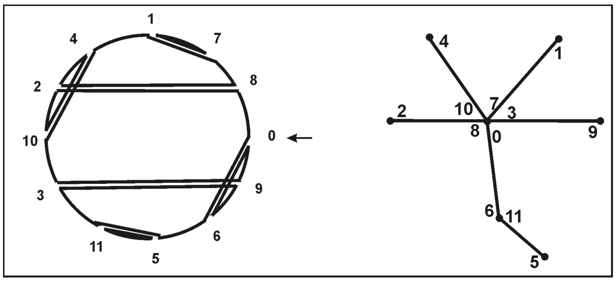


Fig. 5 – Carte labellisée d'une série dodécaphonique

La construction de la permutation associée aux faces se fait en énumérant les notes rencontrées en partant du point 0 par valeurs supérieures et en suivant le tracé du diagramme de cordes dédoublées

$$0, 8, 2, 10, 4, 2, 8, 7, 1, 4, 10, 3, 9, 0, 6, 9, 3, 11, 5, ...$$

La permutation s'obtient en éliminant les doublets

$$\varphi = (0, 8, 2, 10, 4, 7, 1, 3, 9, 6, 11, 5)$$

Il suffit alors de calculer la permutation des sommets

$$\sigma = \alpha^{-1}\varphi^{-1} = (0, 11)(3, 7, 10, 8, 6)$$

et de tracer le graphe de cette constellation (Fig. 5). Nous obtenons ainsi une nouvelle représentation de la série dodécaphonique sous la forme d'un diagramme auquel est adjointe une constellation.

Nous avons montré qu'à partir d'une série dodécaphonique, nous pouvons associer trois graphes : le diagramme de cordes, le graphe d'intersection et la carte du diagramme. L'étude mathématique de ces graphes et de leurs relations devraient permettre au musicologue de mieux comprendre les interrelations entre séries dodécaphoniques et fournir un fil conducteur pour l'analyse des pièces sérielles complexes dans lesquelles les séries prolifèrent. Les classifications des formes sérielles devraient aussi bénéficier de ces études et offrir de nouveaux paradigmes.

## 3. Analyse nodale

Ferdinand de Saussure est un linguiste suisse qui a participé à travers son *Cours de linguistique* et sa réintroduction de la notion de signe au renouveau des études littéraires. A sa mort, il a laissé de nombreux cahiers de notes, dont certains ont été repris par Jean Starobinski et publié sous le titre *Les mots sous les mots, les anagrammes de Ferdinand de Saussure* [15]. De Saussure cherchait dans ses cahiers à montrer les riches structures des textes poétiques latins ou français en mettant en évidence un second niveau de lecture dans lequel il soulignait les assonances et les effets de miroir des phonèmes. Il était convainu que la poésie saturnienne développait son matériau phonique à partir d'un mot-thème. Il cherchait des anagrammes ou ce qu'il appelait des *hypogrammes* qui contenaient en germe la possibilité du poème. Car avant de remonter à une intention psychologique, il fallait pour analyser la genèse des vers, mettre en évidence une lattence verbale sous les mots. Ainsi dans les *Mémoires d'Outre-tombe*, il lit dans le vers

Tout **lu**i était sou**ci**, chagrin b**le**ssure

le prénom lu + ci + le = Lucile. Dans le *Vieux Saltimbanque* de Baudelaire,

Je sent**is** ma gorge **s**errée par la main **terri**ble de l'hystérie

il voit dans l'allitération des phonèmes (is + s + terri) la préfiguration du mot *hystérie* qui rassemble ainsi tout le contenu phonique du vers.

C'est à partir de ce genre de considérations que nous avons voulu montrer que certains textes offrent plus qu'une simple chaîne sonore, et se construisent inconsciemment sur des structures géométriques de nœuds et d'entrelacs. Pour voir comment procède l'analyse nodale, je prendrais un exemple simple. Considérons le poème suivant

Etant donné
le bruissement
( des feuillages jaunissants –
un sommier de ciel bleu ;
son écart résorbé )
la blanche lueur d'une chandelle verte ,
son oeil rougissant ;
au sommet (
comme ici
– le blanc et jaune
d'un mot glacé
bleu dans sa jupe
noire ...

Nous allons mettre en évidence une structure nodale dans ce poème. Pour cela marquons au fil du texte les pronoms masculins par des éléments directs $\sigma_j$ et les pronoms féminins par des éléments inverses $\sigma_j^{-1}$, en utilisant la correspondance (arbitraire) $\sigma_1 = le$, $\sigma_1^{-1} = la$, $\sigma_2 =$ son, $\sigma_2^{-1} = sa$, $\sigma_3 =$ un et $\sigma_3^{-1} =$ une. La distribution des pronoms dans le poème s'écrit sous forme symbolique

$$\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}$$

En interprétant ce mot comme le codage d'un entrelacs, on vérifie en s'aidant d'un logiciel comme *knotscape* de Jim Hoste et Morwen Thistlethwaite[8] que ce mot correspond au nœud $9_{46}$ formé de 9 croisements (46 est un numéro d'ordre sans signification particulière).

Mettons en évidence une deuxième structure. Observons pour cela la distribution des couleurs en notant $\sigma_1 = jaune$, $\sigma_1^{-1} = vert$, $\sigma_2 =$ blanc, $\sigma_2^{-1} =$ noir, $\sigma_3 =$ bleu et $\sigma_3^{-1} =$ rouge. Chaque inverse représente la couleur complémentaire. Repérons ces couleurs dans le texte

[8]On trouvera sur http ://www.earlham.edu/~peters/knotlink.htm#software un répertoire de logiciels disponibles sur le web.

Etant donné
le bruissement
( des feuillages $\underset{\sigma_1}{\textit{jaunissants}}$ –
un sommier de ciel $\underset{\sigma_3}{\textit{bleu}}$ ;
son écart résorbé )
la $\underset{\sigma_2}{\textit{blanche}}$ lueur d'une chandelle $\underset{\sigma_1^{-1}}{\textit{verte}}$ ,
son oeil $\underset{\sigma_3^{-1}}{\textit{rougissant}}$ ;
au sommet (
comme ici
– le $\underset{\sigma_2}{\textit{blanc}}$ et $\underset{\sigma_1}{\textit{jaune}}$
d'un mot glacé
$\underset{\sigma_3}{\textit{bleu}}$ dans sa jupe
$\underset{\sigma_2^{-1}}{\textit{noire}}$ ...

En regroupant les lettres du codage, on s'aperçoit que le mot est encore

$$\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}$$

et correspond au même nœud. Ainsi de manière empirique, on définit des structures nodales dont la pertinence reste à prouver. La seule contrainte à respecter pour être proche de la théorie des tresses est de représenter le croisement de deux brins par un inverse. Pour des domaines complexes comme les passions humaines, il semble difficile de définir des inverses. Toutefois dans l'exemple du poème de Baudelaire donné par Jacques Fontanille et Claude Zilberberg, il est possible de définir une grille de codage en définissant l'ennui, le bonheur, l'attente et la nostalgie, car affirment ces deux auteurs :

> Quand la saisie et la visée évoluent de manière converse, la zone atone correspondrait à l'ennui, "fruit de la morne incuriosité", selon Baudelaire, et la zone tonique, au bonheur. Quand la saisie et la visée évoluent de manière inverse, si c'est la visée qui est tonique, on admettra être en présence de l'attente ; si c'est la saisie qui prévaut, on aurait affaire, approximativement, à la nostalgie.[9]

Nous conviendrons de noter $a$ la nostalgie, $A$ l'attente, $b$ l'ennui et $B$ le bonheur. Les quatre vers de Baudelaire se partagent alors à l'hémistiche

Je pense à la négresse, amaigrie et phtisique,
Piétinant dans la boue, et cherchant l'oeil hagard,
Les cocotiers absents de la superbe Afrique
Derrière la muraille immense du brouillard.

pour donner le mot $abbAABaa$ qui correspond à un nœud de 8 croisements.

[9] Jacques Fontanille et Claude Zilberberg, *Tension et signification*, pp. 162-163.

Dans le domaine musical, les problèmes sont les mêmes. Nous avons mis en évidence la distribution des accents dans la *première étude* pour piano G. Ligeti et la distribution des figures sérielles dans les *Modes de valeurs et d'intensités* de Messiaen. Dans ce cas, en posant $a =$ les sons 1, 2, 3 de la série I, A = 10, 11, 12 de la série I, b = 1, 2, 3 de la série II, B = 10, 11, 12 de la série II, c = 1, 2, 3 de la série III. Le codage des quatre premiers systèmes donne le mot $abAbcAba$ qui est un entrelacs à deux brins.

La recherche de nœuds ou d'entrelacs dans les textes est une représentation nouvelle de structures qui ne peuvent se traduire de manière arborescente. Si nous essayons de transcrire la structure du poème suivant de Christophe Tarkos [16], nous devons nous rendre à l'évidence qu'un modèle arborescent n'est pas adpaté. Si le début du texte s'interprète facilement sous la forme d'un arbre, il devient vite impossible de continuer. Dans la mesure où les césures ne sont pas indiquées, le texte de Tarkos a plusieurs interprétations. Dans ces conditions, il semble plus judicieux de proposer un codage linéaire des éléments du texte.

Il existe il y a et c'est ainsi. Il y a
se divise en il y a et cela. Et c'est
ainsi se divise en voilà et ainsi soit-il.
Il y a en il y a et il en est ainsi et
cela en ceci et cela, tandis que voilà en
de-ci et de-là et ainsi soit-il en oui ainsi
et que cela soit. Il y a en il y a, ceci en
cela et cela en par-ci par-là, de-ci de-là
en il est n'y est pas et oui il en est
ainsi et qu'il en soit ainsi oui en hélas.

En prélevant des éléments comme par exemple $G =$ il, $C =$ et, $T =$ ainsi, $A =$ en, on écrira le texte sous une forme symbolique

$$GGCTGAGCCTACTGGAGCGATCAC$$
$$ACCTATCGAGACAAGCGAATCGATA$$

qui pourra être utilisée par des algorithmes génétiques pour mettre en évidence des séquences particulières, comme cela se pratique en biologie le long des gènes.

La musique est comme le texte de Tarkos un enchevêtrement complexe d'éléments variés dans lesquels le musicologue essaie de comprendre la façon dont cela a été construit. Car selon le mot de Canguilhem, comprendre, c'est être capable de refaire le geste et pouvoir le prolonger.

## 4. Conclusion

La théorie des tresses et des nœuds offre des perspectives nouvelles pour la classification des séries dodécaphoniques, la construction des modèles d'enharmonie et la mise en évidence des liens de parenté dans des textes littéraires ou musicaux. L'analyse nodale dépasse le simple cadre des études musicales. Elle s'applique aussi bien à la recherche de structures dans des œuvres d'art comme des peintures ou des sculptures où en captant le geste de l'artiste-créateur, elles permettent de constituer une véritable signature de l'auteur, que dans des problèmes de filiations historiques entre des langues ou des dialectes. Si nous mettons en évidence des structures nodales dans une langue fille, l'idée d'une filiation des petites topologies, nous incite à penser que ces structures existent aussi dans la langue mère. Si elles n'existent pas, l'héritage topologique fait défaut, ce qui fournit un argument pour monter que deux langues ne sont pas apparentées à une même branche historique. Dans le domaine musical, les petites topologies n'ont pas encore été suffisament répertoriées pour permettre de caractériser des filiations ou des parentés esthétiques. Toutefois, l'outil existe. Il devrait permettre d'enrichir les études stylistiques et fournir grâce aux invariants des nœuds et des entrelacs de nouveaux procédés de catégorisation.

## Bibliographie


[1] Carey (Norman), Clampitt (David), "Aspects of well-formed scales", *Music Theory Spectrum*, 11, 1989, pp. 187-206.

[2] Fontanille (Jacques), Zilberberg (Claude), *Tension et signification*, Belgique, Mardaga, 1998.

[3] Hostinsky (Ottokar), *Die Lehre von den musikalischen Klängen : ein Beitrag zur aesthetischen Begründung der Harmonielehre*, Prague, H. Domenicus, 1879.

[4] Jedrzejewski (Franck), *Mathématiques des systèmes acoustiques, Tempéraments et modèles contemporains*, Paris, L'Harmattan, 2002.

[5] Jedrzejewski (Franck), *Dictionnaire des musiques microtonales*, Paris, L'Harmattan, 2003.

[6] Jedrzejewski (Franck), *Mathematical Theory of Music*, Ed. Delatour/Ircam, 2006.

[7] Khruzin (A.). "Enumeration of chord diagrams", *ArXiv, math.CO/0008209*, 2000.

[8] Leibowitz (René), *Introduction à la musique à douze sons,* Paris, Rééd. L'Arche, 1974 (Première édition 1949).

[9] Noll (Thomas), "Tone Apperception, Relativity, and Weber-Fechner's Law", In : M. Olivetti Belardinelli et. al. (eds.) : *Proceedings of the second international conference "Understanding and Creating Music"*, 21. - 25. November 2002, Caserta. Seconda Universita di Napoli.

[10] Noll (Thomas), "Facts and Counterfacts : Mathematical Contributions to Music-theoretical Knowledge", In : Sebastian Bab, et. al. (eds.) : *Models and Human Reasoning - Bernd Mahr zum 60. Geburtstag.* W&T Verlag, 2005, Berlin. Disponible sur http ://flp.cs.tu-berlin.de/˜noll/

[11] Riemann (Hugo), *Musikalische Logik : Hauptzüge der physiologischen und psychologischen Begründung unseres Musiksystems*, Leipzig, C. Kahnt, 1873.

[12] Riemann (Hugo), *Musikalische Syntaxis : Grundriß einer harmonischen Satzbildungslehre*, Leipzig, Breitkopf und Härtel, 1877.

[13] Riemann (Hugo), *Skizze einer Neuen Methode der Harmonielehre*, Leipzig, Breitkopf und Hartel,1880.

[14] Riemann (Hugo), *Grosse Kompositionslehre, vol 1 : Der homophone Satz (Melodielehre und Harmonielehre),* Berlin, Max Hesse, 1902.

[15] Starobinski (Jean), *Les mots sous les mots, les anagrammes de Ferdinand de Saussure*, Paris, Gallimard, 1971.

[16] Tarkos (Christophe), *Ma langue*, Al Dante, 2000.

[17] Zvonkin (Alexander), Lando (S.K), *Graphs on Surfaces and their Applications*, Springer, 2004.

FranckJedrzejewski
CEA Saclay
INSTN-UESMS
91191 - Gif-sur-Yvette Cedex
Franck.Jedrzejewski@cea.fr

## Lexique

• **Accord**. Le mot *accord* a plusieurs sens en musique. Ici, il est employé dans le sens *d'accorder un instrument*, c'est-à-dire de régler la fréquence de chaque note. Le diapason fixe la fréquence d'une note, aujourd'hui le *la* 440 Hz, mais cette valeur a fluctué au cours des siècles (et des formations). Pour accorder l'ensemble des notes de la gamme, on fixe la fréquence de chaque note relativement à ce diapason, ce qui détermine un *système acoustique* ou *système d'accord*. Actuellement, les instruments sont accordés selon le *tempérament égal* ou *système tempéré*. Dans ce tempérament, deux notes consécutives de fréquences $v_1$ et $v_2$ sont séparées d'un même intervalle de rapport $v_2/v_1 = 2^{1/12}$, qui est le demi-ton tempéré de 100 cents. Avant l'établissement du tempérament égal, il y a eu de nombreux accords différents dans lesquels les demi-tons n'étaient pas tous égaux. Dans les systèmes acoustiques les plus importants, on cherchait à préserver les quintes justes de rapport 3/2 (systèmes pythagoriciens) ou les tierces majeures de rapport 5/4 ou mineures de rapport 6/5 (systèmes mésotoniques).

• **Enharmonie (Modèle d')**. Dans le tempérament égal, les notes do $\sharp$ et ré $\flat$ ont la même fréquence, mais n'ont pas la même fonction (du moins, en harmonie classique). On dit qu'elles sont *enharmoniques*. Dans les tempéraments historiques ou dans les systèmes contemporains, deux notes enharmoniques dans le tempérament égal ne sont pas nécessairement enharmoniques (do $\sharp$ et ré $\flat$ peuvent avoir des fréquences différentes). Comme les systèmes d'accord sont construits par un ensemble de règles, imposer que la fréquence de deux notes soit égale imposent souvent que d'autres couples de notes aient des fréquences égales. On appelle cela un *modèle d'enharmonie*.

• **Intervalle**. L'intervalle séparant deux notes de fréquences $v_1$ et $v_2$ est mesuré en cents. Le *cent* est le logarithme de base 2 du rapport des fréquences des deux sons constituant l'intervalle $\log_2(v_2/v_1)$. L'octave de rapport 2 se compose de 1200 cents. Un demi-ton tempéré vaut 100 cents. Dans le tempérament égal, la distinction entre un demi-ton chromatique (do - do $\sharp$) et un demi-ton diatonique (do - ré $\flat$) n'a pas de sens physique (puisque leurs fréquences sont égales), mais un sens fonctionnel et musical.

• **Renversement**. Un intervalle de deux sons (e.g. une quinte [do, sol]) se compose de plusieurs intervalles élémentaires (3 tons et demi). Son renversement [sol, do] ou sa lecture en sens rétrograde se compose de son complément à l'octave (2 tons et demi, c'est-à-dire une quarte). En termes mathématiques lorsqu'on identifie les douze sons de la gamme aux douze premiers entiers naturels do $= 0$, do $\sharp = 1$, etc. le renversement d'un intervalle ou d'un ensemble de notes correspond à son inversion $I(x) = -x \bmod 12$. Pour reprendre l'exemple de la quinte [do, sol] $=$ [0, 7], son renversement vaut [I(0), I(7)] $=$ [0, 5] $=$ [do, fa] qui est à une transposition près l'intervalle [sol, do].