

ACCORDS RÉGULIERS ET SEMI-RÉGULIERS

Xavier HASCHER

Résumé : Soit E un ensemble, appelé espace musical, de hauteurs utilisées pour la composition. On construit dans cet espace des accords réguliers par division d'un intervalle entre deux hauteurs données h et g . On appelle cet intervalle la norme de l'accord. Dans le cas général d'une division en deux parties, on obtient une collection ordonnée de trois éléments (h, μ, h_1) représentant un accord de trois sons (ou tricorde), dont μ est appelé le centre et les intervalles (h, μ) et (μ, h_1) ses rayons. Ceux-ci peuvent alors être subdivisés, et les demi-rayons résultants sous-subdivisés, etc., donnant naissance à des accords de cardinalité plus importante. Par définition, on dit qu'un accord est régulier lorsque les hauteurs dont il est formé coïncident avec les hauteurs ainsi calculées ou en constituent les meilleures approximations possibles dans E . L'accord est semi-régulier lorsqu'on se contente de la deuxième meilleure approximation.

Mots-clés : Accord (construction de l'), Accord complexe, Accord dual, Espace musical, Musique et mathématique, Structure cordique, Système harmonique, Théorie musicale.

Introduction

Au contraire de l'interprétation courante, on évitera dans cet article de déduire la constitution des accords de la décomposition d'un son périodique en ses composantes harmoniques. Ce modèle, bien adapté pour décrire l'accord parfait majeur du système tonal et les accords dérivés, se montre néanmoins insatisfaisant lorsqu'il s'agit de rendre compte de formations cordiques étrangères à la série harmonique, comme l'a montré, du point de vue musicologique, l'étude de Jacques Chailley [2]. Notre hypothèse est que, parmi les différentes combinaisons de hauteurs disponibles dans les espaces musicaux diatoniques ou chromatiques, certaines se distinguent par la régularité de leur structure intervallaire. Les plus répandues sont celles reproduisant par superposition un intervalle donné : étagements par tierces selon le modèle tonal, « accords » par quarts, par quintes ou par tons entiers, éventuellement grappes chromatiques. Mais la catégorie des accords réguliers, tels que nous les définissons, englobe également certaines des combinaisons propres à la musique atonale du début du vingtième siècle comme les tricordes $(do, fa\sharp, si)$ ou (do, fa, si) et leurs transpositions, particulièrement fréquents dans l'œuvre de Schoenberg.

Dans une précédente publication [7], nous distinguons les « accords », dont la structure obéit à un regroupement des éléments selon un schéma périodique, des « agrégats » non réductibles à de tels schémas ; nous élargissons alors les notions d'harmonicité et d'inharmonicité pour les faire correspondre à cette distinction, sans référence à la résonance physique des corps sonores. Les propositions que nous faisons ici amendent et étendent à la fois ces considérations, en tenant compte de divers travaux produits par la musicologie théorique américaine dans le dernier quart de siècle : l'étude de N. Carey et D. Clampitt sur l'engendrement des échelles bien

formées [1], celles de J. Clough et G. Myerson sur les propriétés des systèmes diatoniques [4, 5], de J. Clough et J. Douthet sur les collections bien réparties [3], et de D. Lewin sur les système riemanniens et la perspective duale [8]. Enfin, nous nous référons à la classification désormais classique des collections de classes de hauteurs (c.c.h.) établie par A. Forte [6].

1. Construction des accords réguliers dans l'espace diatonique ordinaire

1.1. L'espace musical diatonique ordinaire $\mathbf{E}_d$ se définit comme un espace indicé à 7 hauteurs par octave, le nombre d'octaves étant théoriquement infini. Étant donné une octave de référence $\{do, ré, mi, fa, sol, la, si\}$ de cet espace, une hauteur h appartenant à cette octave possède une fréquence f mesurée en hertz égale à $2^0 \cdot f(h)$. La première octave supérieure reproduit la structure de l'octave de référence en récrivant la fréquence de chaque hauteur sous la forme $2^1 \cdot f(h)$, et ainsi de suite pour chaque nouvelle octave. On désignera l'appartenance à la a -ième octave supérieure ou inférieure en indiquant par a chacune des notes de l'octave, $a \in \mathbb{Z}$. Par simplification, on omet de noter l'indice lorsque $a = 0$ (c.-à-d. dans l'octave de référence). La classe de hauteurs $[h]$ rassemble toutes les hauteurs h_a en relation d'octave.

Pour construire un accord régulier, on commence par considérer un couple de hauteurs (h, h_1) séparées d'une octave, de sorte que $f(h_1) = 2f(h)$. En divisant l'octave en deux intervalles égaux, on obtient une note dont la fréquence est égale à $\sqrt{2} \cdot f(h)$. On cherche alors une hauteur $\mu \in \mathbf{E}_d$ telle que $f(\mu)$ est la plus proche possible de cette valeur. Dans l'espace diatonique ordinaire, il s'agit de la hauteur formant avec h un intervalle de longueur diatonique $\ell_d = 3$ ou $\ell_d = 4$. On définit ainsi un accord régulier de centre μ et de norme $\omega = \text{int}(h, h_1)$, l'intervalle entre h et h_1 . Dans le cas général, qui est celui considéré ici, la norme correspond au module de l'espace, c'est-à-dire l'octave, et le tricorde (h, μ, h_1) a pour contenu en classes de hauteurs la collection $\{[h], [\mu]\}$.

Lorsque $h \in \mathbf{E}_d \setminus \{[fa], [si]\}$, $f(\mu) \approx \sqrt{2} \cdot f(h)$ et $f(\mu) \neq \sqrt{2} \cdot f(h)$. La structure de l'accord est dissymétrique, le centre μ se trouvant soit à gauche (approximation par défaut), soit à droite de $\sqrt{2} \cdot f(h)$ (approximation par excès). Le centre se trouve alors en μ_g ou en μ_d respectivement, avec $\frac{f(\mu_d)}{\sqrt{2} \cdot f(h)} = \frac{\sqrt{2} \cdot f(h)}{f(\mu_g)}$. Les intervalles (h, μ) et (μ, h_1)

sont donc inégaux, leur différence de longueur diatonique étant égale à 1. On appelle rayon majeur ρ le plus grand, et rayon mineur ρ' le plus petit de ces intervalles. Si $h = fa$, alors $f(\mu) = \sqrt{2} \cdot f(h)$ et $\frac{f(\mu)}{f(h)} = \frac{f(h_1)}{f(\mu)}$. L'accord est symétrique avec $\mu = si$,

mais la longueur diatonique de l'un des rayons excède celle de l'autre de 1. En effet, $\ell_d \text{ int}(fa, si) = 3$ alors que $\ell_d \text{ int}(si, fa_1) = 4$. Enfin, si $h = si$, l'accord est également symétrique avec $\mu = fa_1$, et l'on retrouve $\ell_d \text{ int}(si, fa_1) = 4$ et $\ell_d \text{ int}(si_1, fa_1) = 3$. On désigne par ρ le rayon de plus grande, et par ρ' le rayon de moindre longueur diatonique respectivement.

1.2. On poursuit la construction de l'accord en subdivisant successivement ρ , puis ρ' . On commence par chercher une hauteur ε dont la fréquence est la plus proche possible

de $\sqrt{\frac{f(\mu)}{f(h)}} \cdot f(h)$ lorsque l'accord est dissymétrique à droite, c'est-à-dire quand $f(\mu)$ est supérieure à $\sqrt{2} \cdot f(h)$, ou de $\sqrt{\frac{f(h_1)}{f(\mu)}} \cdot f(\mu)$ lorsque l'accord est dissymétrique à gauche, c'est-à-dire quand $f(\mu)$ est inférieure à cette valeur. La subdivision de ρ' conduit alors à chercher ε' tel que $f(\varepsilon') \approx \sqrt{\frac{f(h_1)}{f(\mu)}} \cdot f(\mu)$ (dissymétrie à droite), ou $f(\varepsilon') \approx \sqrt{\frac{f(\mu)}{f(h)}} \cdot f(h)$

(dissymétrie à gauche). On choisit toujours la meilleure approximation de la fréquence recherchée. Lorsque deux notes se trouvent à même distance du milieu de ρ' , ε' peut se trouver en ε'_g ou en ε'_d . (Le cas ne se présente pas pour ε dans les accords ici considérés.) Enfin, lorsque l'accord est symétrique, ρ étant à gauche, $f(\varepsilon) = \sqrt[4]{2} \cdot f(h)$ et $f(\varepsilon') = \frac{f(h_1)}{\sqrt[4]{2}}$, ou $f(\varepsilon') \approx \frac{f(h_1)}{\sqrt[4]{2}}$. Lorsque ρ est à droite, ces valeurs sont échangées.

En supposant un engendrement du système diatonique par quintes pures rabattues dans l'octave de référence, les hauteurs approximées par ε et ε' (dissymétrie à droite) ou par ε' et ε (dissymétrie à gauche) correspondent à $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot f(h)$ et $\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot f(\mu) = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \frac{3f(h)}{2}$, ou $\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot f(h)$ et $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot f(\mu) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3f(h)}{2}$, respectivement.

On établit à présent la liste des collections représentant les contenus en classes de hauteurs des accords réguliers obtenus à partir des règles ci-dessus. Du fait du mode de construction des accords, chaque contenu peut être rattaché à deux accords dont l'un est dissymétrique à gauche, l'autre à droite. Seuls les accords où $\mu = si$ à droite ($h, h_1 \in [mi]$) et $\mu = fa$ à gauche ($h, h_1 \in [do]$) ne partagent leur contenu avec aucun autre accord. En revanche, les deux accords symétriques ont eux aussi les mêmes contenus :

$$\begin{array}{l} \{[do], [mi], [sol], [la]\} \\ \{[ré], [fa], [la], [si]\} \\ \{[ré], [fa], [la], [do]\} \\ \{[mi], [sol], [si], [ré]\}^* \\ \{[fa], [la], [do], [ré]\}^* \\ \{[sol], [si], [ré], [mi]\} \\ \{[sol], [si], [ré], [fa]\} \\ \{[la], [do], [mi], [sol]\} \\ \{[si], [ré], [fa], [sol]\} \\ \{[si], [ré], [fa], [la]\} \end{array}$$

FIG. 1.1

1.3. Au-delà, la construction de l'accord peut se poursuivre récursivement en sous-subdivisant les demi-rayons restants de longueur diatonique $\ell_d \geq 2$. On commence par le demi-rayon représentant le rapport de fréquences le plus élevé, jusqu'à ce que l'accord

contienne éventuellement toutes les hauteurs diatoniques comprises dans l'octave (h, h_1) .

2. Structure, inversion d'ordre et renversement dual

2.1. Laissant provisoirement de côté la subdivision du rayon mineur ρ' , on examine maintenant la structure générique des accords, mesurant la longueur diatonique des intervalles entre les éléments en tenant compte de l'ordre de ceux-ci. Ainsi, en prenant par exemple $h = do$, on a soit $\varepsilon = mi$ et $\mu = sol$ (à droite), soit $\varepsilon = la$ et $\mu = fa$ (à gauche), avec $h_1 = do_1$ dans les deux cas, donnant pour structure générique $\langle 2 \ 2 \ 3 \rangle$ et $\langle 3 \ 2 \ 2 \rangle$ respectivement :

$h = do$	(do, mi, sol, do_1)	$((do,) fa, la, do_1)$
Structure	$\langle 2 \ 2 \ 3 \rangle$	$\langle 3 \ 2 \ 2 \rangle$
générique		

FIG. 2.1

Ces structures sont rétrogrades l'une de l'autre, et l'ordre des deux accords est également inverse. Par référence au vocabulaire musical on désignera par structure authentique la structure définie sur les pseudo-tricordes (lorsqu'on néglige h_1) ou les tétracordes (lorsqu'on considère h_1), et par extension tous les n -cordes qui sont dissymétriques à droite, et structure plagale celle définie sur les pseudo-tricordes (en négligeant h) ou les tétracordes (en considérant h), et par extension tous les n -cordes dissymétriques à gauche.

Lorsqu'un accord est dissymétrique à gauche et muni, par conséquent, d'une structure plagale, il est indifférent de considérer $f(\mu)$ comme l'approximation par défaut de

$\sqrt{2} \cdot f(h)$ plutôt que de $\frac{f(h_1)}{\sqrt{2}}$. Par contre, en prenant pour nouvelle octave de référence

l'octave $\{do_1, ré_1, mi_1, \dots, si_1\}$, et si l'on considère que ces accords sont obtenus par division de $f(h_1)$ plutôt que par multiplication de $f(h)$, leur mode de construction devient entièrement symétrique des accords possédant une structure authentique. On appelle h la fondamentale inférieure des accords avec une structure authentique, h_1 la fondamentale supérieure des accords avec une structure plagale. On fait correspondre à cette structure un ordre où les éléments sont décroissants de droite à gauche.

Un accord symétrique possède une structure authentique lorsque ρ est à gauche, plagale dans le cas contraire. (Cette distinction n'est possible qu'au vu de la différence de longueur diatonique des rayons, qui place ε d'un côté ou de l'autre.) La rétrogradation de la structure sur les accords symétriques conduit à déplacer leur centre μ en un point μ_g ou μ_d selon le cas, dont la fréquence constitue la meilleure approximation de $\sqrt{2} \cdot f(h)$ sans être égale à celle-ci. On affaiblit donc la règle primitive de construction des accords réguliers afin de faire correspondre à un accord symétrique possédant une structure authentique (respectivement : plagale) un accord dissymétrique de structure plagale (respectivement : authentique). On appelle accords semi-réguliers de tels accords dérivés d'accords réguliers par rétrogradation de la structure.

2.2. On établit Q^- le dual d'un accord Q muni d'une structure authentique en déplaçant à droite de ρ le contenu de ρ' puis en lisant les éléments de droite à gauche à partir de μ_1 , à l'octave supérieure de μ . Le centre (transposé d'une octave) devient donc la fondamentale supérieure d'un accord dQ de structure plagale, et ${}^dQ = Q^-$. Inversement, on établit ${}^aQ = Q$ l'antédual d'un accord dQ muni d'une structure plagale en déplaçant à gauche de ρ' le contenu de ρ puis en lisant les éléments de gauche à droite à partir de μ . Le centre devient ainsi la fondamentale du nouvel accord, sur lequel on restitue une structure authentique.

Le renversement dual constitue une inversion des relations d'ordre partiel sur les chaînes (h, μ) et (μ, h_1) de l'accord avec permutation des chaînes elles-mêmes. On considère par exemple $Q = (h, \varepsilon, \mu, \varepsilon', h_1)$ un pentacorde avec une structure authentique dont h , la fondamentale, est le plus grand élément de sorte que quelque soit $a \in Q$ ($h \succ a$). Les deux chaînes partielles sont (h, ε, μ) et (μ, ε', h_1) . On recolle ces chaînes en les échangeant de côté et l'on renomme $\mu := {}^d h$ et $h_1 := {}^d \mu$, de sorte que ${}^d h_1$ et ${}^d \mu$ sont la fondamentale supérieure et le centre respectivement du nouvel accord $Q^- = ({}^d h, \varepsilon', {}^d \mu, \varepsilon, {}^d h_1)$. L'ordre de cet accord se lit de droite à gauche à partir de ${}^d h_1$, avec quelque soit $a \in Q^-$ ($a \preccurlyeq {}^d h_1$). Lorsque $\text{card } Q \leq 4$, les structures de Q et de Q^- sont entièrement rétrogrades l'une de l'autre. Ainsi, $C^+ = (do, mi, sol, do_1)$ a-t-il pour dual $G^{+-} = ((sol,) do_1, mi_1, sol_1)$. Lorsque Q est symétrique, son dual est lui-même symétrique. Le dual de $Q = (si, fa_1, si_1)$ construit sur si est donc $Q^- = ((fa,) si, fa_1)$ construit sous fa_1 . Leur contenu en classes de hauteurs $\{[fa], [si]\}$ est bien identique, mais leur ordre est inverse.

Chaque accord régulier ou semi-régulier muni d'une structure authentique (respectivement : plagale) possède un dual (respectivement : antédual). En particulier, $((do,) fa, la, do_1)$ est le dual de (fa, la, do_1, fa_1) , l'accord construit par rétrogradation de la structure de l'accord symétrique sur fa . De même, on construit le dual de (mi, sol, si, mi_1) , l'accord $((si,) mi_1, sol_1, si_1)$, par rétrogradation de la structure de l'accord symétrique sous si_1 .

On donne ci-dessous (fig. 2.2) la table des tétracordes ou pseudo-tricordes réguliers et semi-réguliers pour l'espace diatonique ordinaire, mettant en regard les accords en relation duale. Les accords sont nommés selon la hauteur sur (respectivement : sous) laquelle ils sont construits. Lorsque, quand la structure est authentique, on a $\text{int}(h, \varepsilon) > \text{int}(\varepsilon, \mu)$, ou, quand la structure est plagale, $\text{int}(\mu, \varepsilon) > \text{int}(\varepsilon, h_1)$, l'accord est dit majeur, conformément au vocabulaire musical courant, et se note Q^+ ; il est mineur dans le cas inverse, et il est noté Q^- . Lorsque les demi-rayons sont égaux (c'est le cas des accords symétriques), l'accord est neutre, ou diminué, et se note Q^0 .

ANTÉDUALS		DUALS	
NOM	STRUCTURE AUTHENTIQUE	STRUCTURE PLAGALE	NOM
C^+	(do, mi, sol, do_1)	$((sol,) do_1, mi_1, sol_1)$	G^{+-}
D^-	$(ré, fa, la, ré_1)$	$((la,) ré_1, fa_1, la_1)$	A^{--}
E^-	(mi, sol, si, mi_1)	$((si,) mi_1, sol_1, si_1)$	B^{--}
F^+	(fa, la, do_1, fa_1)	$((do,) fa, la, do_1)$	C^{+-}
G^+	$(sol, si, ré_1, sol_1)$	$((ré,) sol, si, ré_1)$	D^{+-}

FIG. 2.2 (début)

ANTÉDUALS		DUALS	
NOM	STRUCTURE AUTHENTE	STRUCTURE PLAGALE	NOM
A^-	(la, do, mi_1, la_1)	$((mi,) la, do, mi_1)$	E^{--}
B^0	$(si, ré_1, fa_1, si_1)$	$((fa,) si, ré_1, fa_1)$	F^{0-}

FIG. 2.2 (*fin*)

On retrouve sans peine les tricordes ou pseudo-dicordes sous-tendant ces accords en éliminant la hauteur représentant ε .

2.3. On considère l'accord sur do possédant une structure authentique $C_6^+ = (do, mi, sol, la, do_1)$. Sa structure générique s'écrit $\langle 2\ 2\ 1\ 2 \rangle$. En rétrogradant celle-ci, on obtient un nouvel accord sous do_1 de structure plagale $C_6^{+-} = ((do,) mi, fa, la, do_1)$. Il s'agit d'un accord semi-régulier où ε' , originellement situé en ε'_g ($ré$), a, par affaiblissement de la règle de division du rayon mineur, été déplacé en ε'_d (mi), lequel ne constitue que la deuxième meilleure approximation du milieu de ρ' . Cet accord est lui-même le dual de l'accord semi-régulier $F_7^+ = (fa, la, do_1, mi_1, fa_1)$, résultant du même déplacement de ε' et qui, par rétrogradation de la structure, donne $F_7^{0-} = ((fa,) sol, si, ré_1, fa_1)$, l'accord régulier symétrique sous fa_1 . À son tour, celui-ci a pour dual l'accord symétrique sur si , $B_6^0 = (si, ré_1, fa_1, sol_1, si_1)$, qui lui-même par rétrogradation de la structure donnera $B_7^{--} = ((si,) do_1, mi_1, sol_1, si_1)$, et ainsi de suite. Les deux opérations alternées, rétrogradation de la structure et renversement dual, permettent ainsi de parcourir un cycle complet sur l'ensemble des accords réguliers et semi-réguliers sans omettre un seul accord.

On donne à présent (fig. 2.3) la table des pentacordes ou pseudo-tétracordes réguliers ou semi-réguliers, en plaçant une nouvelle fois en regard les accords en relation duale. Les nombres 6 et 7 en indice renvoient à l'ajout de la sixte et de la septième au sens des intervalles diatoniques usuels, plutôt qu'à la longueur diatonique de ces mêmes intervalles.

ANTÉDUALS		DUALS	
NOM	STRUCTURE AUTHENTE	STRUCTURE PLAGALE	NOM
C_6^+	(do, mi, sol, la, do_1)	$((sol,) la, do_1, mi_1, sol_1)$	G_7^{+-}
C_7^+	(do, mi, sol, si, do_1)	$((sol,) si, do_1, mi_1, sol_1)$	G_6^{+-}
D_6^-	$(ré, fa, la, si, ré_1)$	$((la,) si, ré_1, fa_1, la_1)$	A_7^{--}
D_7^-	$(ré, fa, la, do_1, ré_1)$	$((la,) do_1, ré_1, fa_1, la_1)$	A_6^{--}
E_6^-	$(mi, sol, si, do_1, mi_1)$	$((si,) do_1, mi_1, sol_1, si_1)$	B_7^{--}
E_7^-	$(mi, sol, si, ré_1, mi_1)$	$((si,) ré_1, mi_1, sol_1, si_1)$	B_6^{--}
F_6^+	$(fa, la, do_1, ré_1, fa_1)$	$((do,) ré, fa, la, do_1)$	C_7^{+-}
F_7^+	$(fa, la, do_1, mi_1, fa_1)$	$((do,) mi, fa, la, do_1)$	C_6^{+-}
G_6^+	$(sol, si, ré_1, mi_1, sol_1)$	$((ré,) mi, sol, si, ré_1)$	D_7^{+-}
G_7^+	$(sol, si, ré_1, fa_1, sol_1)$	$((ré,) fa, sol, si, ré_1)$	D_6^{+-}

FIG. 2.3 (*début*)

ANTÉDUALS		DUALS	
NOM	STRUCTURE AUTHENTE	STRUCTURE PLAGALE	NOM
A_6^-	(la, do, mi, fa_1, la_1)	$((mi,) fa, la, do, mi_1)$	E_7^{--}
A_7^-	$(la, do, mi_1, sol_1, la_1)$	$((mi,) sol, la, do, mi_1)$	E_6^{--}
B_6^0	$(si, ré_1, fa_1, sol_1, si_1)$	$((fa,) sol_1, si, ré_1, fa_1)$	F_7^{0-}
B_7^0	$(si, ré_1, fa_1, la_1, si_1)$	$((fa,) la_1, si, ré_1, fa_1)$	F_6^{0-}

 FIG. 2.3 (*fin*)

2.4. Contrairement aux théories reposant sur la résonance harmonique, la présente proposition ne donne pas de priorité à l'intervalle de quinte sur celui de quarte dans la construction des accords diatoniques. En envisageant ces deux intervalles comme des approximations du milieu de l'octave, elle place la structure plagale en concurrence immédiate avec la structure authentique, et non en subordination à cette dernière. Ainsi, les hauteurs *sol* et *fa* apparaissent simultanément à partir de la division de l'octave (*do, do*₁) de part et d'autre du milieu fréquentiel théorique de celle-ci. Du point de vue du système tonal, l'accord de sous-dominante se présente originellement muni d'une structure plagale sous l'octave de la tonique, prise comme fondamentale supérieure d'un accord dual. L'accord de dominante, à l'opposé, signifie une rétrogradation de la structure sur le dual de l'accord de tonique, rétablissant une structure authentique. Les accords sous *do*₁ (C^{+-}), sur *do* (C^+), sous *sol*₁ (G^{+-}) et sur *sol* (G^+) forment ainsi un sous-ensemble directement lié.

La particularité de la présente démarche est de considérer que tout accord s'inscrit dans une norme, laquelle peut être rendue implicite lorsqu'il s'agit de l'octave. Les accords sont ensuite construits par division de cette norme, puis subdivision des intervalles résultants en commençant par le plus grand intervalle, et non par addition (ou soustraction) d'intervalles à partir d'une hauteur donnée. Tout dicorde, pour constituer un accord régulier, sous-entend donc en réalité un tricorde dont la norme est laissée tacite. Il n'est pas non plus tenu compte des notions de consonance ou de dissonance ; il est néanmoins intéressant de noter que notre démarche permet de reconstituer des accords conformes à l'usage musical sans faire référence à celles-ci.

3. Accords dont la longueur de la norme diffère de celle du module de l'espace

3.1. On s'intéresse d'abord aux cas où la norme de l'accord diffère de ± 1 en longueur diatonique par rapport au module de l'espace. Ceci correspond, dans l'espace diatonique ordinaire, à une norme de longueur $\ell_d = 6$ ou $\ell_d = 8$. L'échelle diatonique étant réduite, la longueur des rayons correspond simplement à la division de l'intervalle (*h, g*) composant la norme. Comme la norme est paire, on a de plus $\ell_d \text{int}(h, \mu) = \ell_d \text{int}(\mu, g)$.

Lorsque $\ell_d \omega = 6$, l'accord est symétrique pour $h \in \{ré, mi, sol, la, si\}$, c'est-à-dire lorsque $\mu \neq fa$ et $\mu \neq si$. Il est dissymétrique autrement, tout en conservant égales les longueurs diatoniques des rayons. Tous les accords possèdent donc la même structure $\langle 3 \ 3 \rangle$, dont la rétrogradation n'introduit aucun nouvel accord. Les tricordes ainsi construits correspondent à des étagements diatoniques de quartes (*do, fa, si*), (*ré, sol, do*), ..., (*si, mi*₁, *la*₁). On considère la subdivision des rayons pour $h = do$. La hauteur la plus proche du milieu de ρ est *ré*, alors que le milieu de ρ' est approximé

avec la même erreur par *sol* et *la*. Lorsque $\varepsilon' = \text{sol}$, l'accord a pour structure $\langle 1 \ 2 \ 1 \ 2 \rangle$ dont la rétrogradation donne, par déplacement de ε en ε_d , l'accord semi-régulier (do, mi, fa, la, si) . Lorsque $\varepsilon' = la$, la structure de l'accord devient $\langle 1 \ 2 \ 2 \ 1 \rangle$. Cette structure est invariante par rétrogradation. Pour $h = ré$, on a $\mu = sol$, $\varepsilon = mi$ ou $\varepsilon = fa$, et $\varepsilon' = la$. Les structures correspondantes sont $\langle 1 \ 2 \ 1 \ 2 \rangle$ ou $\langle 2 \ 1 \ 1 \ 2 \rangle$ respectivement. La rétrogradation de la première introduit par déplacement de ε' en ε'_d l'accord semi-régulier $\{ré, fa, sol, si, do\}$, la deuxième restant, ici encore, invariante. Le lecteur intéressé peut poursuivre lui-même l'exploration de ce matériau. Pour ces accords et les suivants, les duals s'obtiennent simplement par inversion de l'ordre des éléments à partir de g .

Lorsque $\ell_d \omega = 8$, tous les accords sont symétriques sauf pour $h = mi$ et $h = si$. Comme précédemment, les rayons sont de longueur diatonique identique quel que soit le cas. De même, leur subdivision aboutit à des intervalles de longueurs identiques, tous les accords possédant la même structure $\langle 3 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$ invariante par rétrogradation. Les pentacordes appartiennent à la classe des accords de neuvième Q_9^{sgn} , ou $Q_9^{\text{sgn}\sim}$ pour les duals.

3.2. On construit sans difficulté particulière les accords dont la norme est inférieure de 2 ou plus (en longueur diatonique d'intervalle) au module de l'espace. (N.B. : la norme doit avoir une longueur minimale de 2 pour pouvoir être divisible.) Lorsque $\ell_d \omega = 2$ ou $\ell_d \omega = 4$, tous les accords ont pour structure $\langle 1 \ 1 \rangle$ ou $\langle 2 \ 2 \rangle$ respectivement. Lorsque $\ell_d \omega = 3$, la structure des accords réguliers est $\langle 1 \ 2 \rangle$ (dissymétrie à gauche) pour $h = do$ ou $h = sol$, ou $\langle 2 \ 1 \rangle$ (dissymétrie à droite) pour $h = mi$ ou $h = si$, donnant par rétrogradation des accords semi-réguliers. Pour $h \in \{ré, fa, la\}$, μ peut être approximé à droite comme à gauche et les deux structures correspondent à des accords réguliers. Enfin, lorsque $\ell_d \omega = 5$, les tétracordes (réguliers ou semi-réguliers par rétrogradation) sont de structure $\langle 2 \ 1 \ 2 \rangle$ sur *ré, mi, sol, la, si*, et de structure $\langle 1 \ 2 \ 2 \rangle$ ou $\langle 2 \ 2 \ 1 \rangle$ sur *do, ré, fa, si*. Selon la hauteur sur laquelle (ou sous laquelle pour les duals) l'accord est construit, on n'obtient donc pas le même nombre de formes, et la transposition d'un accord régulier n'est pas nécessairement un accord régulier.

Afin de permettre une circulation complète sur le sous-ensemble des accords d'une même cardinalité et d'une structure donnée ou de la structure rétrograde correspondante, on élargit la notion d'accord semi-régulier pour inclure les accords obtenus par transposition d'un accord régulier. Ainsi, l'accord régulier $(ré, mi, sol, si)$ se transpose-t-il en un accord semi-régulier (mi, fa, la, do) .

3.3. De même, on construit les accords dont la norme est supérieure de 2 ou plus en longueur diatonique d'intervalle au module de l'espace. La figure 3.1 ci-dessous donne la liste des pentacordes réguliers ou semi-réguliers et pour une longueur diatonique de la norme comprise entre 9 (l'intervalle de dixième) et 14 (la double octave), en prenant $h = do$. Les formes antéduals se lisent de gauche à droite, les formes duals de droite à gauche depuis la fondamentale. La structure de chaque accord est indiquée, ainsi que le cardinal de la collection simplifiée aux classes de hauteurs correspondantes.

$\ell_d \omega$	ACCORD	CARD	STRUCTURE
9	(do, mi, sol, si, mi_1)	4	$\langle 2 \ 2 \ 2 \ 3 \rangle$
	$(do, mi, sol, do_1, mi_1)$	3	$\langle 2 \ 2 \ 3 \ 2 \rangle$
	(do, mi, la, do_1, mi_1)	3	$\langle 2 \ 3 \ 2 \ 2 \rangle$
	(do, fa, la, do_1, mi_1)	4	$\langle 3 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$
10	(do, fa, la, do_1, fa_1)	3	$\langle 3 \ 2 \ 2 \ 3 \rangle$
	(do, mi, la, do_1, fa_1)	4	$\langle 2 \ 3 \ 2 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, la, ré_1, fa_1)$	4	$\langle 3 \ 2 \ 3 \ 2 \rangle$
	$(do, mi, la, ré_1, fa_1)$	5	$\langle 2 \ 3 \ 3 \ 2 \rangle$
11	$(do, mi, la, ré_1, sol_1)$	5	$\langle 2 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, la, ré_1, sol_1)$	5	$\langle 3 \ 2 \ 3 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, si, ré_1, sol_1)$	5	$\langle 3 \ 3 \ 2 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, si, mi_1, sol_1)$	5	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 2 \rangle$
12	(do, fa, si, mi_1, la_1)	5	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$
13	(do, fa, si, mi_1, si_1)	4	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 4 \rangle$
	(do, fa, si, fa_1, si_1)	3	$\langle 3 \ 3 \ 4 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, do_1, fa_1, si_1)$	3	$\langle 3 \ 4 \ 3 \ 3 \rangle$
	$(do, sol, do_1, fa_1, si_1)$	4	$\langle 4 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$
14	$(do, sol, do_1, fa_1, do_2)$	3	$\langle 4 \ 3 \ 3 \ 4 \rangle$
	$(do, fa, do_1, fa_1, do_2)$	2	$\langle 3 \ 4 \ 3 \ 4 \rangle$
	$(do, sol, do_1, sol_1, do_2)$	2	$\langle 4 \ 3 \ 4 \ 3 \rangle$
	$(do, fa, do_1, sol_1, do_2)$	3	$\langle 3 \ 4 \ 4 \ 3 \rangle$

FIG. 3.1

4. Divisions non binaires. Accords complexes

4.1. On peut choisir pour diviseur de la norme un nombre premier différent de 2, en particulier lorsque sa longueur diatonique est un multiple de ce nombre. Ainsi, quand $\ell_d \omega = 6$, la division ternaire de la norme permet de construire un accord régulier de structure $\langle 2 \ 2 \ 2 \rangle$, soit un tétracorde par étagement de tierces, e.g. (do, mi, sol, si) . Pour $\ell_d \omega = 9$, la structure devient $\langle 3 \ 3 \ 3 \rangle$, correspondant à un tétracorde par quarts superposées, e.g. (do, fa, si, mi) . Pour $\ell_d \omega = 12$, on construit un accord de quintes superposées, etc. Il est également possible, en théorie, de subdiviser les rayons par un tel nombre. Avec $\ell_d \omega = 11$, la subdivision ternaire des rayons donne ainsi les structures $\langle 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$ ou $\langle 2 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$ (dissymétrie à gauche), ou bien $\langle 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 2 \rangle$ ou $\langle 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \rangle$ (dissymétrie à droite), soit, pour $h = do$, les accords $(do, ré, fa, la, do_1, mi_1, sol_1)$, $(do, mi, sol, la, do_1, mi_1, sol_1)$, $(do, mi, sol, si, ré_1, mi_1, sol_1)$, ou $(do, mi, sol, si, ré_1, fa_1, sol_1)$. Lorsque $\ell_d \omega = 12$, la structure $\langle 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$ résulte aussi bien de la subdivision ternaire d'une division binaire de la norme, que de la subdivision binaire d'une division ternaire.

4.2. Lorsqu'on superpose une ou plusieurs fois un accord à un autre accord de structure identique, on crée un accord complexe $K_{dis}^{\deg}(Q_{ext}^{sgn})$ dont le degré indique le nombre d'accords formant le complexe, et la disjonction l'intervalle entre la borne

supérieure d'un accord et la borne inférieure de son successeur dans la superposition. L'intervalle de disjonction peut être exprimé diatoniquement ou chromatiquement selon le contexte. Il peut s'agir d'une valeur positive, négative, ou nulle. Quand $\text{dis} = 0$, l'intervalle entre les fondamentales des deux accords est égal à leur norme. Trivialement, il s'agit dans l'espace diatonique ordinaire du redoublement à l'octave quand la norme coïncide avec le module de cet espace. L'accord complexe se simplifie alors en une collection de classes de hauteurs identique au contenu de Q lui-même. Lorsqu'un complexe contient trois accords ou plus, l'intervalle de disjonction peut différer entre chaque couple d'accords successifs. La disjonction peut également être exprimée sous la forme d'une valeur d'inversion autour de la borne supérieure et la borne inférieure des deux accords successifs. Enfin, un accord complexe peut superposer des accords dont les structures sont rétrogrades entre elles, ou un accord et son dual. L'accord complexe obtenu par la superposition d'accords réguliers ou semi-réguliers n'est pas nécessairement un accord régulier ou semi-régulier.

Exemple 4.2.1. Soit le tricorde régulier $Q = (do, fa, si)$ dont la longueur diatonique de la norme est égal à 6. On établit, pour $\text{dis} = 3$, l'accord complexe

$$K_{\text{dis}=3}^{\oplus d=2}(Q) = (do, fa, si, mi_1, la_1, ré_1), \text{ représentant un hexacorde en quarts superposées.}$$

Soit $Q' = (do, mi, sol, si)$ le tétracorde régulier construit à partir de la division ternaire de la même norme ; pour $\text{dis} = 0$, l'accord complexe $K_{\text{dis}=0}^{\oplus d=2}(Q') = (do, mi, sol, si, ré, fa, la)$

représente l'heptacorde par tierces superposant l'ensemble du matériau de l'espace diatonique ordinaire E_d .

Exemple 4.2.2. On écrit la séquence d'accords complexes $K_{i=10}^{\oplus d=2}(C_6^+)$, $K_{i=10}^{\oplus d=2}(D_7^-)$,

$K_{i=10}^{\oplus d=2}(F_6^+)$, $K_{i=10}^{\oplus d=2}(G_7^+)$, $K_{i=10}^{\oplus d=2}(A_6^-)$, la valeur i de l'inversion étant exprimée diatoniquement. Le dernier accord complexe superpose à A_6^- un accord de structure rétrograde (fig. 4.1) :

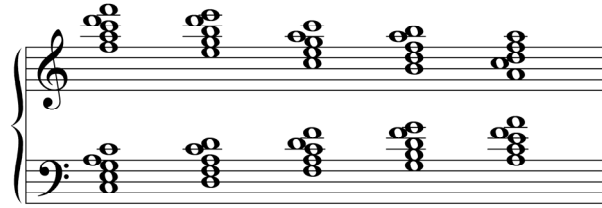


FIG. 4.1

5. Extension à l'espace chromatique et généralisation

5.1. Les règles de construction des accords réguliers exposées dans la première section peuvent être appliquées à tout espace musical similairement indicé et ne sont donc pas limitées à l'espace diatonique ordinaire. En outre, lorsqu'on néglige la distinction entre accords réguliers et semi-réguliers, et si, en rangeant les éléments de l'espace en ordre scalaire à l'intérieur du module, on obtient une échelle réduite de cardinalité égale à

celle du module (ou au nombre de classes de hauteurs distinctes de l'espace lui-même), il est aussi simple, pour placer μ , ε et ε' , d'approximer le résultat de la division de la longueur de la norme ou des rayons.

Ceci vaut pour l'espace diatonique ordinaire, où μ forme bien avec h un intervalle de longueur égale à $\left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil$ (N.B. on désigne par $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x) ou $\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor$ (N.B. on désigne par $\lceil x \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à x), soit $\ell_d \text{ int}(h, \mu) = 3$ ou $\ell_d \text{ int}(h, \mu) = 4$, correspondant aux longueurs respectives de ρ' et de ρ . On place alors ε tel que $\ell_d \text{ int}(h, \varepsilon) = \frac{\ell_d \text{ int}(h, \mu)}{2}$ (accord dissymétrique à droite), ou $\ell_d \text{ int}(\mu, \varepsilon) = \frac{\ell_d \text{ int}(\mu, h_1)}{2}$ (accord dissymétrique à gauche), c'est-à-dire $\frac{4}{2}$. Quant à ε' , il se situe soit à droite soit à gauche du milieu de ρ' , avec $\ell_d \text{ int}(\mu, \varepsilon') = \left\lfloor \frac{\ell_d \text{ int}(\mu, h_1)}{2} \right\rfloor$ ou $\ell_d \text{ int}(\mu, \varepsilon') = \left\lceil \frac{\ell_d \text{ int}(\mu, h_1)}{2} \right\rceil$ dans le premier cas, $\ell_d \text{ int}(h, \varepsilon') = \left\lfloor \frac{\ell_d \text{ int}(h, \mu)}{2} \right\rfloor$ ou $\ell_d \text{ int}(h, \varepsilon') = \left\lceil \frac{\ell_d \text{ int}(h, \mu)}{2} \right\rceil$ dans le deuxième, c'est-à-dire des valeurs correspondant à $\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor$ ou à $\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil$, ou des intervalles de longueur 1 ou 2.

5.2. Dans l'espace chromatique, la construction des accords réguliers est considérablement simplifiée par le fait que si la longueur de l'intervalle entre un couple de hauteurs est égale à la longueur de l'intervalle entre un autre couple de hauteurs, alors le rapport des fréquences du premier couple est égal à celui du deuxième. En effet, pour un espace de cardinalité k , représentant le nombre de classes de hauteurs (ou le nombre de hauteurs par octave) contenues dans cet espace, l'intervalle entre deux

hauteurs h et g a pour longueur chromatique $\ell_c \text{ int}(h, g) = \log_{\sqrt[2]{k}} \frac{f(g)}{f(h)}$. Soit deux

hauteurs i et j telles que $\ell_c \text{ int}(i, j) = \ell_c \text{ int}(h, g)$. Ceci revient à écrire $\log_{\sqrt[2]{k}} \frac{f(j)}{f(i)} = \log_{\sqrt[2]{k}} \frac{f(g)}{f(h)}$, soit, par simplification, $\frac{f(j)}{f(i)} = \frac{f(g)}{f(h)}$. Il suffit donc de diviser la

longueur chromatique de la norme pour placer le centre, de sorte que l'intervalle entre la fondamentale et celui-ci soit égal à $\frac{\ell_c \omega}{2}$ ou l'approxime. On procède alors de façon

analogue pour la subdivision des rayons et pour les sous-subdivisions suivantes.

Lorsqu'on considère l'espace chromatique ordinaire $\mathbf{E}_c$ à 12 hauteurs par octave, on observe que les accords réguliers précédemment formés dans l'espace diatonique ordinaire $\mathbf{E}_d$ ne sont pas tous des accords réguliers dans cet espace. Ainsi, pour les accords dont la norme est de longueur identique au module, seuls les accords symétriques formant au maximum des tétracordes ou des pseudo-tricordes peuvent être

considérés comme réguliers dans l'espace chromatique. Ainsi, $F^{0\sim} = (fa, si, ré, fa_1)$ est régulier dans $\mathbf{E}_d$ et dans $\mathbf{E}_c$.

Dans le cas où la division de la longueur d'un segment donne une valeur entière, le milieu de ce segment correspond à une hauteur appartenant à $\mathbf{E}_c$. Le déplacement de ce milieu à droite ou à gauche par un intervalle de longueur égale à 1 transforme l'accord en un accord semi-régulier. Les accords réguliers dans $\mathbf{E}_d$ qui ne sont pas réguliers dans $\mathbf{E}_c$ sont au moins semi-réguliers dans cet espace. En revanche, tous les accords semi-réguliers formés dans $\mathbf{E}_d$ ne sont pas des accords semi-réguliers dans $\mathbf{E}_c$. Ainsi, $F_6^{0\sim} = (fa, la_1, si, ré_1, fa_1)$ est régulier dans $\mathbf{E}_d$ et semi-régulier dans $\mathbf{E}_c$; $F_6^+ = (fa, la, do_1, ré_1, fa_1)$ est semi-régulier dans $\mathbf{E}_d$ et semi-régulier dans $\mathbf{E}_c$; mais $F_7^+ = (fa, la, do_1, mi_1, fa_1)$, qui est semi-régulier dans $\mathbf{E}_d$, ne l'est pas dans $\mathbf{E}_c$.

Un accord régulier dans $\mathbf{E}_c$ dont la norme, exprimée en longueur chromatique d'intervalle, est paire, est un accord symétrique puisque ses rayons sont de longueur égale. Lorsque la norme est impaire, l'accord est dissymétrique avec $\ell_c \rho - \ell_c \rho' = 1$.

5.3. On nomme chaque hauteur de l'accord d'après la longueur de l'intervalle chromatique formé par cette hauteur et la fondamentale. Pour abréger l'exposé, on ne se préoccupe ici que des fondamentales inférieures. On établit ci-dessous (fig. 5.1) la séquence des tricordes réguliers de l'espace chromatique de norme ≤ 18 en longueur chromatique, en n'indiquant, pour les accords dissymétriques, que les formes dissymétriques à droite, et en mentionnant la classe canonique d'appartenance de la collection en laquelle se simplifie chaque accord :

ACCORD	STRUCTURE	CLASSE CANONIQUE
(0, 1, 2)	$\langle 1 \ 1 \rangle$	3-1
(0, 2, 3)	$\langle 2 \ 1 \rangle$	3-2
(0, 2, 4)	$\langle 2 \ 2 \rangle$	3-6
(0, 3, 5)	$\langle 3 \ 2 \rangle$	3-7
(0, 3, 6)	$\langle 3 \ 3 \rangle$	3-10
(0, 4, 7)	$\langle 4 \ 3 \rangle$	3-11
(0, 4, 8)	$\langle 4 \ 4 \rangle$	3-12
(0, 5, 9)	$\langle 5 \ 4 \rangle$	3-11
(0, 5, 10)	$\langle 5 \ 5 \rangle$	3-9
(0, 6, 11)	$\langle 6 \ 5 \rangle$	3-5
(0, 6, 12)	$\langle 6 \ 6 \rangle$	2-6
(0, 7, 13)	$\langle 7 \ 6 \rangle$	3-5
(0, 7, 14)	$\langle 7 \ 7 \rangle$	3-9
(0, 8, 15)	$\langle 8 \ 7 \rangle$	3-11
(0, 8, 16)	$\langle 8 \ 8 \rangle$	3-12
(0, 9, 17)	$\langle 9 \ 8 \rangle$	3-11
(0, 9, 18)	$\langle 9 \ 9 \rangle$	3-10
		etc.

FIG. 5.1

Soit $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ les éléments du premier tricorde $(0, 1, 2)$, et un entier $a \geq 1$. On voit que la séquence ci-dessus s'organise selon la suite (ax_0, ax_1, ax_2) , $(ax_0, ax_1, ax_2 + 1)$, $(ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1)$, $((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2)$, $((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2 + 1)$, $((a + 1)x_0 + 1, (a + 1)x_1 + 1, (a + 1)x_2 + 1)$, ...

Lorsque l'on s'intéresse aux tétracordes, on obtient le tableau suivant (fig. 5.2) où, si l'on prend $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, avec $a \geq 1$, la séquence d'accords s'écrit à présent $(ax_0, ax_1, ax_2, ax_3 - 1)$, (ax_0, ax_1, ax_2, ax_3) , $(ax_0, ax_1, ax_2 + 1, ax_3 + 1)$, $(ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 1)$, $(ax_0, ax_1, ax_2 + 1, ax_3 + 2)$, $(ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 2)$, $((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2, (a + 1)x_3 - 1)$, $((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2, (a + 1)x_3)$, ... :

ACCORD	STRUCTURE	CLASSE CANONIQUE
$(0, 1, 2, 3)$	$\langle 1 \ 1 \ 1 \rangle$	4-1
$(0, 1, 2, 4)$	$\langle 1 \ 1 \ 2 \rangle$	4-2
$(0, 1, 3, 5)$	$\langle 1 \ 2 \ 2 \rangle$	4-11
$(0, 2, 3, 5)$	$\langle 2 \ 1 \ 2 \rangle$	4-10
$(0, 1, 3, 6)$	$\langle 1 \ 2 \ 3 \rangle$	4-13
$(0, 2, 3, 6)$	$\langle 2 \ 1 \ 3 \rangle$	4-12
$(0, 2, 4, 7)$	$\langle 2 \ 2 \ 3 \rangle$	4-22
$(0, 2, 4, 8)$	$\langle 2 \ 2 \ 4 \rangle$	4-24
$(0, 2, 5, 9)$	$\langle 2 \ 3 \ 4 \rangle$	4-26
$(0, 3, 5, 9)$	$\langle 3 \ 2 \ 4 \rangle$	4-27
$(0, 2, 5, 10)$	$\langle 2 \ 3 \ 5 \rangle$	4-22
$(0, 3, 5, 10)$	$\langle 3 \ 2 \ 5 \rangle$	4-23
$(0, 3, 6, 11)$	$\langle 3 \ 3 \ 5 \rangle$	4-18
$(0, 3, 6, 12)$	$\langle 3 \ 3 \ 6 \rangle$	3-10
$(0, 3, 7, 13)$	$\langle 3 \ 4 \ 6 \rangle$	4-29
$(0, 4, 7, 13)$	$\langle 4 \ 3 \ 6 \rangle$	4-18
$(0, 3, 7, 14)$	$\langle 3 \ 4 \ 7 \rangle$	4-14
$(0, 4, 7, 14)$	$\langle 4 \ 3 \ 7 \rangle$	4-22
$(0, 4, 8, 15)$	$\langle 4 \ 4 \ 7 \rangle$	4-19
$(0, 4, 8, 16)$	$\langle 4 \ 4 \ 8 \rangle$	3-12
$(0, 4, 9, 17)$	$\langle 4 \ 5 \ 8 \rangle$	4-20
$(0, 5, 9, 17)$	$\langle 5 \ 4 \ 8 \rangle$	3-11
$(0, 4, 9, 18)$	$\langle 4 \ 5 \ 9 \rangle$	4-27
$(0, 5, 9, 18)$	$\langle 5 \ 4 \ 9 \rangle$	4-18
		etc.

FIG. 5.2

Enfin, étant donné $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, et $a \geq 1$, la séquence des pentacordes illustrée par notre dernier tableau (fig. 5.3) s'organise selon la suite $(ax_0, ax_1, ax_2, ax_3, ax_4)$, $(ax_0, ax_1, ax_2 + 1, ax_3 + 1, ax_4 + 1)$, $(ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 1, ax_4 + 1)$, $(ax_0, ax_1, ax_2 + 1, ax_3 + 1, ax_4 + 2)$, $(ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 1, ax_4 + 2)$, $(ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 1, ax_3 + 2, ax_4 + 2)$, $(ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 2, ax_3 + 2, ax_4 + 3)$, $(ax_0, ax_1 + 1, ax_2 + 2, ax_3 + 3, ax_4 + 3)$, $((a + 1)x_0, (a + 1)x_1, (a + 1)x_2, (a + 1)x_3, (a + 1)x_4)$, ... :

ACCORD	STRUCTURE	CLASSE CANONIQUE
(0, 1, 2, 3, 4)	$\langle 1 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle$	5-1
(0, 1, 3, 4, 5)	$\langle 1 \ 2 \ 1 \ 1 \rangle$	5-3
(0, 2, 3, 4, 5)	$\langle 2 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle$	5-2
(0, 1, 3, 4, 6)	$\langle 1 \ 2 \ 1 \ 2 \rangle$	5-10
(0, 2, 3, 4, 6)	$\langle 2 \ 1 \ 1 \ 2 \rangle$	5-8
(0, 1, 3, 5, 6)	$\langle 1 \ 2 \ 2 \ 1 \rangle$	5-12
(0, 2, 4, 5, 7)	$\langle 2 \ 2 \ 1 \ 2 \rangle$	5-23
(0, 2, 4, 6, 7)	$\langle 2 \ 2 \ 2 \ 1 \rangle$	5-24
(0, 2, 4, 6, 8)	$\langle 2 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$	5-33
(0, 2, 5, 7, 9)	$\langle 2 \ 3 \ 2 \ 2 \rangle$	5-35
(0, 3, 5, 7, 9)	$\langle 3 \ 2 \ 2 \ 2 \rangle$	5-34
(0, 2, 5, 7, 10)	$\langle 2 \ 3 \ 2 \ 3 \rangle$	5-35
(0, 3, 5, 7, 10)	$\langle 3 \ 2 \ 2 \ 3 \rangle$	5-35
(0, 2, 5, 8, 10)	$\langle 2 \ 3 \ 3 \ 2 \rangle$	5-34
(0, 3, 6, 8, 11)	$\langle 3 \ 3 \ 2 \ 3 \rangle$	5-32
(0, 3, 6, 9, 11)	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 2 \rangle$	5-31
(0, 3, 6, 9, 12)	$\langle 3 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$	4-28
(0, 3, 7, 10, 13)	$\langle 3 \ 4 \ 3 \ 3 \rangle$	5-25
(0, 4, 7, 10, 13)	$\langle 4 \ 3 \ 3 \ 3 \rangle$	5-31
(0, 3, 7, 10, 14)	$\langle 3 \ 4 \ 3 \ 4 \rangle$	5-27
(0, 4, 7, 10, 14)	$\langle 4 \ 3 \ 3 \ 4 \rangle$	5-34
(0, 3, 7, 11, 14)	$\langle 3 \ 4 \ 4 \ 3 \rangle$	5-17
(0, 4, 8, 11, 15)	$\langle 4 \ 4 \ 3 \ 4 \rangle$	5-21
(0, 4, 8, 12, 15)	$\langle 4 \ 4 \ 4 \ 3 \rangle$	4-19
(0, 4, 8, 12, 16)	$\langle 4 \ 4 \ 4 \ 4 \rangle$	3-12
(0, 4, 9, 13, 17)	$\langle 4 \ 5 \ 4 \ 4 \rangle$	5-21
(0, 5, 9, 13, 17)	$\langle 5 \ 4 \ 4 \ 4 \rangle$	4-19
(0, 4, 9, 13, 18)	$\langle 4 \ 5 \ 4 \ 5 \rangle$	5-32
(0, 5, 9, 13, 18)	$\langle 5 \ 4 \ 4 \ 5 \rangle$	5-22
(0, 4, 9, 14, 18)	$\langle 4 \ 5 \ 5 \ 4 \rangle$	5-34
		etc.

FIG. 5.3

5.4. Soit Q un n -corde de structure générique $\langle i_1 \ i_2 \ \dots \ i_{n-1} \rangle$ appartenant à un espace musical donné. Q est un accord régulier si :

- il existe un nombre premier k le plus petit possible tel que les intervalles de Q peuvent être regroupés en k substructures $\langle i_1 \ \dots \ i_a \rangle, \langle i_{a+1} \ \dots \ i_b \rangle, \dots, \langle i_u \ \dots \ i_{n-1} \rangle$ de longueurs intervallaires identiques ou dont la différence entre la plus grande et la plus petite longueur n'excède pas 1 dans la mesure propre à cet espace ;
- les intervalles ont la même longueur à l'intérieur de chaque substructure, ou la différence entre le plus grand et le plus petit intervalle n'excède pas 1 dans la mesure propre à l'espace concerné. L'accord est semi-régulier si cette différence est supérieure à 1 lorsqu'elle est exprimée en longueur chromatique d'intervalle ;

– lorsqu’il existe une subdivision de deuxième niveau (ou de niveau subséquent) des substructures, les longueurs des sous-substructures doivent être identiques ou ne pas présenter une différence générique supérieure à 1 entre la plus grande et la plus petite. Lorsque cette différence, exprimée en longueur chromatique d’intervalle, est supérieure à 1, l’accord est semi-régulier.

En outre, lorsqu’il n’existe que deux longueurs de substructures et que la différence en longueur chromatique est de 2 entre la plus grande et la plus petite substructure, l’accord est semi-régulier dans l’espace chromatique.

La structure d’un accord dual se lit de droite à gauche. Il a pour fondamentale supérieure l’extrémité opposée à la fondamentale inférieure de son antédual, sauf quand la norme correspond au module de l’espace. Dans ce cas, il a pour fondamentale le centre de l’antédual par permutation des rayons, comme explicité dans la section 2.2 ci-dessus.

Bibliographie

- [1] Norman CAREY & David CLAMPITT (1989), *Aspects of Well-Formed Scales*, Music Theory Spectrum 11.2, 187–206.
- [2] Jacques CHAILLEY (1977), Traité historique d’analyse harmonique, *Alphonse Leduc*.
- [3] John CLOUGH & Jack DOUTHET (1991), *Maximally Even Sets*, Journal of Music Theory 35.1/2, 93–173.
- [4] John CLOUGH & Gerald MYERSON (1985), *Variety and Multiplicity in Diatonic Systems*, Journal of Music Theory 29.2, 249–270.
- [5] John CLOUGH & Gerald MYERSON (1986), *Musical Scales and the Generalized Cycle of Fifths*, American Mathematical Monthly 93.9, 695–701.
- [6] Allen FORTE (1973), The Structure of Atonal Music, *Yale University Press*.
- [7] Xavier HASCHER (2002), *Liszt et les sources de la notion d’agrégat*, Analyse musicale 43, 48–56.
- [8] David LEWIN (1982), *A formal Theory of Generalized Tonal Functions*, Journal of Music Theory 26.1, 23–60.

Xavier HASCHER
 Université Marc-Bloch (Strasbourg-II)
 xavier.hascher@umb.u-strasbg.fr

LEXIQUE

Bicorde, tricorde, tétracorde, etc. : collection de deux, trois, quatre, etc., classes de hauteurs.

Chromatique (espace) : espace musical dont le module est divisé en n intervalles égaux. Lorsque le module est égal à l’octave, une hauteur h a pour successeur dans l’ordre scalaire une hauteur

h' telle que $f(h') = \sqrt[n]{2} \cdot f(h)$. Dans l'espace chromatique ordinaire $\mathbf{E}_c$, $n = 12$ et l'espace contient douze classes de hauteurs distinctes. Les éléments de l'espace chromatique sont engendrés par les 11 premières quintes successives à partir de *fa*, rabattues dans l'octave de référence : *fa, do, sol, ré, la, mi, si, fa#, do#, sol#, ré#, la#*.

Diatonique (espace) : espace musical dont chaque intervalle possède un spectre composé de deux entiers consécutifs, c.-à-d. qu'un intervalle de longueur diatonique donnée d peut être de longueur chromatique c ou $c + 1$. Dans l'espace diatonique ordinaire, les secondes ($\ell_d = 1$), les tierces ($\ell_d = 2$), les sixtes ($\ell_d = 5$) et les septièmes ($\ell_d = 6$) peuvent ainsi être majeures ou mineures, les quarts ($\ell_d = 3$) justes ou augmentées, les quintes ($\ell_d = 4$) justes ou diminuées. En outre, le cardinal de l'espace diatonique doit être premier par rapport à celui de l'espace chromatique dans lequel il est plongé. L'espace diatonique ordinaire contient 7 classes de hauteurs, engendrées par les 6 premières quintes à partir de *fa* rabattues dans l'octave de référence : *fa, do, sol, ré, la, mi, si*.

Échelle : une échelle est composée de l'ensemble des hauteurs d'un espace musical rangées en ordre scalaire à partir d'une hauteur de départ donnée et dans les limites du module. Par ex., l'échelle diatonique énonce la succession *do, ré, mi, fa, sol, la, si*.

Espace musical : ensemble de hauteurs ou de classes de hauteurs, en tant que projeté intuitivement dans un plan. On peut définir également des ensembles de durées, de timbres, etc.

Générique : en prenant pour mesure les intervalles de l'espace que l'on considère, et non de l'espace chromatique dans lequel il est plongé (par opposition à *spécifique*). L'accord (*do, mi, sol, do₁*) a pour structure spécifique $\langle 2 \ 2 \ 3 \rangle$ dans $\mathbf{E}_d$, alors que sa structure générique est $\langle 4 \ 3 \ 5 \rangle$ dans $\mathbf{E}_c$.

Hauteur : désigne une note de musique de fréquence identifiable, en faisant abstraction de son timbre, de son intensité (*forte* ou *piano*), etc.

Hauteurs (classe de) : ensemble des hauteurs de même nom, considérées comme équivalentes modulo un intervalle donné. Par exemple, tous les *do*, quelle que soit l'octave où ils apparaissent, appartiennent à la classe $[do]$ et le rapport de leurs fréquences est une puissance de 2.

Longueur diatonique, chromatique : mesure la distance scalaire en nombre de degrés diatoniques (respectivement : chromatiques) entre les bornes d'un intervalle.

Module : intervalle minimum séparant deux hauteurs musicales distinctes de même nom considérées comme équivalentes modulo cet intervalle. Le module correspond généralement à l'octave, c.-à-d. l'intervalle existant entre une hauteur de fréquence f et une autre de fréquence $2f$.

Réduite (échelle) : une échelle est réduite si, pour tout degré de cette échelle (c.-à-d. une hauteur appartenant à celle-ci), l'intervalle entre ce degré et son successeur contient exclusivement 0 ou 1 degré chromatique intermédiaire.

Scalaire (ordre) : ordre de succession des éléments d'un espace par fréquence croissante.

Structure : la structure d'un accord présente la série des intervalles successifs entre les éléments de cet accord à partir de la fondamentale jusqu'à l'extrémité de la norme.

Tricorde, tétracorde : voir *bicorde*.