ERICH CH. WITTMANN

LES MATHÉMATIQUES VUES COMME LA SCIENCE DES STRUCTURES (*)

COMPTE RENDU DU PROJET MATHE 2000

À la mémoire de Hans Freudenthal

Abstract. Mathematics as the Science of Patterns, *A guideline for Developing Mathematics Education from Early Childhood to Adulthood.*
The aim of the present paper is to give an account of the holistic approach to mathematical education developed in the project *Mathe 2000*. The emphasis is on the mathematical roots. It will be shown how a special view of mathematics as the science of patterns can be made practical in developmental research. The paper consists of three sections: A short introduction into the project's philosophy in the first section is followed by the description of some typical learning environments. In the third section some underlying theoretical principles are explained by referring to the learning environments of section 2.

Keywords. Patterns, learning environments, learning by discovery, representations, operative proofs, teacher education.

Résumé. L'objectif de notre article est de rendre compte de l'approche globale adoptée dans le projet *Mathe 2000* en ce qui concerne l'éducation mathématique. L'accent est mis sur les origines mathématiques. Nous montrerons comment les mathématiques vues comme la science des structures peuvent être utilisées dans la recherche développementale. L'article est structuré en trois sections. La première section est consacrée à la philosophie de notre projet, la seconde est consacrée à la description de quelques environnements substantiels d'apprentissage (ESA) « substantial learning environnments », tandis que la troisième explique certains principes théoriques sous-jacents aux environnements substantiels d'apprentissage développés dans la deuxième section.

Mots-clés. Structures, environnements d'apprentissage, découverte, représentations, démonstrations opératoires, formation des professeurs.

(*) Traduction de l'anglais, par Charlotte Bouckaert, UREM ULB, Présentée au colloque de Mons.
Consult the English version of this article on line at http://irem.u-strasbg.fr menu publications.

1. Le projet *Mathe 2000*

En 1985, l'état de Rhénanie du Nord–Westphalie a adopté un nouveau programme de mathématiques au niveau primaire (première primaire à quatrième primaire). Ce

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 149 – 174.

programme conçu par Heinrich Winter, le "Freudenthal" allemand, a radicalement changé l'éducation mathématique en Allemagne et a exercé une énorme influence à tous les niveaux de l'éducation mathématique. Les innovations suivantes sont particulièrement remarquables :

1. Les quatre objectifs « généraux » de l'enseignement mathématique qui reflètent les composantes de base de l'activité mathématique à tous les niveaux jouent un rôle prééminent (Winter, 1975) :
   - mathématiser ;
   - explorer ;
   - raisonner ;
   - communiquer.
2. Un paragraphe est consacré explicitement à la complémentarité de l'aspect pur et appliqué des mathématiques et les conséquences sur l'enseignement des mathématiques sont décrites en détail.
3. Le principe de l'apprentissage par la découverte active est explicitement prescrit comme le principe de base de l'enseignement et de l'apprentissage.

Nous avons fondé *Mathe 2000* en 1987 afin de soutenir les enseignants dans la mise en œuvre de ce programme. Notre projet de recherche développementale s'est placé dans l'optique selon laquelle l'éducation mathématique est la science du « design » (Wittmann, 1995) et les objectifs fondamentaux suivants ont été connectés entre eux et développés simultanément :

- la conception (design) et la mise en oeuvre d'unités substantielles d'apprentissage (trajectoires d'apprentissage) comme l'essentiel de la formation et de la formation continuée des maîtres en mathématiques et en didactique ;
- les études expérimentales du mode de pensée des enfants, de la communication dans la classe ainsi que du *counseling*[1].

Mathe 2000 puise surtout ses sources de recherche développementale dans les mathématiques – à l'inverse de beaucoup d'orientations de recherche en éducation mathématique, y compris dans le mouvement international des « standards mesurables[2] » qui sont basés sur la psychologie, les sciences cognitives et

[1] Pour en savoir plus sur *Mathe 2000*, consulter le site web : http://www.uni-dortmund.de/mathe2000

[2] Pour une vision critique de PISA voir Müller, Steinbring & Wittmann (2004).

l'éducation générale. *Mathe 2000* a choisi de comprendre les mathématiques comme la science des structures (Sawyer, 1955 et Devli, 1996), en insistant sur le fait que ce n'est pas la science des structures toutes faites et statiques mais bien la science vivante des structures dynamiques qui peuvent être développées globalement dans tout le programme, mais aussi explorées, prolongées, reformulées, réinventées à un niveau local par les apprenants eux-mêmes. En d'autres termes, les processus mathématiques à court terme et à long terme comptent bien plus que les produits finis. Le travail de spécialistes de l'éducation mathématique britanniques, écossais, néerlandais et japonais dans les années 1960 et 70 ainsi que le travail structurant de Heinrich Winter nous ont servi de modèles (Fletche, 1965 ; Wheeler, 1967 ; Iowo, 1976 ; Becker & Shimada, 1997 ; Winter, 1984, 1987, 1989).

À l'instar d'autres projets de recherche développementale comme Iowo à Utrecht sous la direction de Hans Freudenthal et plus récemment au CREM à Nivelles (Ballieu & Guissard, 2004), *Mathe 2000* s'est fixé comme objectif de développer un programme cohérent de la maternelle à l'université. Jusqu'à présent notre recherche s'est focalisée sur les niveaux de l'enseignement maternel et primaire ainsi que sur la formation des maîtres. C'est la raison pour laquelle les exemples d'environnements substantiels d'apprentissage présentés dans la section 2 proviennent de ces niveaux-là.

2. Quelques exemples représentatifs d'environnements substantiels d'apprentissage

Dans Wittmann (2002) un environnement substantiel d'apprentissage est défini de la manière suivante :

1. *Il est représentatif des objectifs fondamentaux, des contenus et des principes de l'enseignement mathématique à un certain niveau.*
2. *Il est relié à des contenus et des processus mathématiques significatifs qui dépassent ce niveau et il est une source importante d'activités mathématiques.*
3. *Il est flexible et peut être adapté aux conditions spéciales d'une classe.*
4. *Il intègre les aspects mathématique, psychologique et pédagogique de l'enseignement mathématique et constitue ainsi un terrain fertile de recherche expérimentale.*

Les deux premières qualités d'un ESA (environnement substantiel d'apprentissage) sont profondément ancrées dans le programme et dans les mathématiques élémentaires d'un point de vue avancé. La dernière qualité garantit que celui-ci reflète les processus d'enseignement et d'apprentissage de manière globale. L'adjectif « substantiel » se réfère à la substance mathématique.

Quand il construit un environnement substantiel d'enseignement, le designer est guidé par le déroulement naturel de l'activité mathématique. Le point de départ d'une investigation est toujours une situation réelle ou une situation mathématique. Lors de la première phase, cette situation est mathématisée ou inscrite dans une structure mathématique plus large. Ensuite, l'on explore les structures émergentes expérimentalement avec pour objectif de trouver des structures et des solutions. Si des structures potentielles sont confirmées par différentes vérifications, on fait appel au raisonnement pour expliquer et valider les structures et les solutions. la dernière phase du processus mathématique consiste à communiquer les résultats oralement ou par écrit. Il va de soi que les quatre objectifs généraux de Winter reflètent parfaitement ces quatre phases. C'est pour cela qu'elles sont si importantes. Pour *Mathe 2000*, la conception des ESA est également guidé par l'intention affichée d'intégrer la pratique des savoir-faire de base dans l'investigation des structures. Comme nous le montrerons dans la section 3, cet aspect est crucial pour une implémentation réussie de tout programme novateur.

Nous verrons dans la section ci-dessous que cette philosophie du design est mise en oeuvre grâce à quelques trajectoires d'environnements substantiels d'apprentissage choisies dans le matériel de *Mathe 2000* : *Das kleine Zahlenbuch* écrit à l'intention des enfants de l'école maternelle (Müller & Wittmann, 2002-2004) et *Das Zahlenbuch*, manuels à l'intention de la première, deuxième, troisième et quatrième primaire (Müller & Wittmann, 2004-2005).

2.1 La "course à 20" et quelques variations

Le volume 1 de Das kleine Zahlenbuch contient une version simple du jeu bien connu « La course à 20 » (voir Figure 1). Dix petits cercles alignés sont numérotés de 1 à 10 (dans une autre version, il y a 12 cercles). Le premier joueur place un ou deux jetons sur le premier cercle ou sur les deux premiers, le second joueur place alors lui aussi un ou deux jetons sur les cercles suivants. Les joueurs jouent à tour de rôle et celui qui arrive le premier à 10 a gagné.

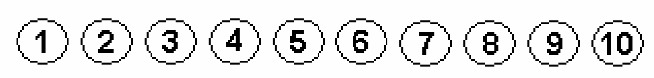

Figure 1 : La course à 10.

La course à 10 permet de découvrir des idées fondamentales de l'arithmétique, par exemple, des relations des nombres sur la droite des nombres, l'addition et l'addition répétée. Lorsque les enfants jouent souvent à ce jeu, ils se familiarisent non seulement avec la droite des nombres mais aussi avec la structure mathématique du jeu. L'analyse des mouvements du dernier au premier permet aux enfants de se rendre compte graduellement que les positions 7, 4 et 1 sont des positions gagnantes. De ce fait, le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante : s'il place un seul jeton au premier coup et réagit à un coup de deux jetons joué par son adversaire par un coup de un jeton et à un coup de un jeton joué par l'adversaire par un coup de deux jetons. De cette manière, le premier joueur passe d'une position gagnante à la suivante et il arrive à 10. Dans le cas de la course à 12, les positions gagnantes sont 9, 6, 3.

La course à 10 est réellement une activité mathématique. Les idées de base pour analyser ces jeux peuvent être généralisées à une classe plus grande de jeux de stratégie déterministes de classe finie à deux joueurs et dont l'issue n'est pas l'égalité. On peut démontrer que pour chacun de ces jeux, il existe une stratégie gagnante pour le premier ou le second joueur, à l'aide d'un diagramme en arbre et l'algorithme de marquage.

Nos études expérimentales ont montré que des enfants de 4 ou 5 ans jouent à ce jeu avec plaisir et développent une première compréhension de la stratégie gagnante. En général, cette connaissance est assez instable à ce stade. Quelques jours après avoir joué, les enfants doivent redécouvrir ce qu'ils semblaient avoir maîtrisé auparavant. En première année, le jeu est revisité avec comme objectif 20. En deuxième année, l'on joue une variante sur le tableau de 100 (voir Figure 2).

●	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	1●

Figure 2 : La course de 1 à 100.

Au début du jeu, un joueur place un jeton rouge sur la case 1 et l'autre joueur place un jeton bleu sur la case 100. Les joueurs jouent à tour de rôle. Le jeton rouge peut avancer de 1, 2, 10 ou 20 cases et le jeton bleu peut reculer de 1, 2, 10, 20 cases. Le jeton rouge doit toujours se trouver dans une position inférieure à celle du jeton bleu. Le jeu s'arrête quand les deux joueurs se rencontrent. Le dernier joueur qui peut effectuer un mouvement a gagné.

L'écart entre 1 et 100 est constitué de 98 nombres et 98 est congru à 2 modulos 3. Le premier joueur a donc une stratégie gagnante : on place le jeton rouge sur 3 ou le jeton bleu sur 98. L'écart est constitué de 96 nombres et 96 est divisible par 3. Comme 1, 2, 10 et 20 ne sont pas divisibles par 3 et les sommes 1 + 2 = 2 + 1 = 3, 10 + 2 = 2 + 10 = 12, 10 + 20 = 20 + 10 = 30 et 20 + 1 = 1 + 20 = 21 sont toutes divisibles par 3, le premier joueur peut toujours s'arranger pour conserver un écart divisible par 3 tandis que le second joueur ne le peut pas. Chaque coup réduit l'écart qui doit finalement être égal à 0. Comme 0 est divisible par 3, cette position est atteinte par le premier joueur, pour autant qu'il respecte la stratégie gagnante.

En troisième primaire, une généralisation de ce jeu est proposée sur le Livre de mille, le jeton rouge commence en 1, le bleu en 1000. Les mouvements autorisés sont +1, +2, +10, +20, +100, +200 pour le jeton rouge et −1, −2, −10, −20, −100, −200 pour le jeton bleu. La stratégie gagnante est la même que celle du jeu sur le tableau de 100.

En cinquième primaire, on revisite tous les jeux et on les analyse à l'aide des arguments de divisibilité mentionnés plus haut.

2.2. Structures de jetons

Le premier volume de *Das kleine Zahlenbuch* propose le jeu suivant. On propose aux enfants des jetons rouges et bleus disposés selon certaines règles (voir Figure 3).

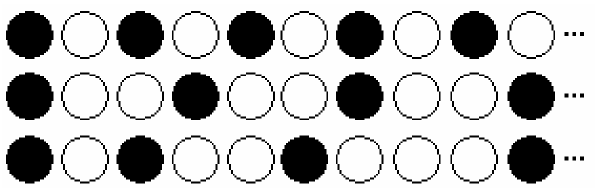

Figure 3 : Les structures de jetons d'après Feynman.

Ce jeu s'inspire d'une citation de Richard Feynman extraite de son discours d'attribution du prix Nobel de physique en 1965 (Feynman, 1969).

> "Quand j'étais encore très petit, assis sur ma chaise haute à la table où nous venions de manger, mon père me proposait un jeu. Il avait acheté tout un lot de carreaux de faïence rectangulaires dans un magasin de Long Island. Nous les disposions sur la tranche les uns à côté des autres et je pouvais pousser le premier et observer l'effet provoqué sur les autres. Jusque-là, tout allait bien. Ensuite, le jeu se corsait. Les carreaux étaient de différentes couleurs. Je devais d'abord placer un blanc et puis deux bleus, un blanc, deux bleus, *etc*. Si je voulais encore placer un carreau bleu à côté des deux carreaux bleus, mon père plaçait lui-même un carreau blanc. Vous reconnaissez déjà le côté insidieux : d'abord lui procurer le plaisir du jeu et ensuite, lui injecter progressivement un matériau de valeur éducative. Ma mère qui était une femme sensible, devinant les pensées secrètes de mon père, disait « Mel, s'il te plaît, laisse-le placer un carreau bleu s'il en a envie ! » Mon père rétorquait alors « Non, je veux qu'il fasse attention à la structure. Ce sont les seules mathématiques que je peux faire avec lui à son âge. »

Nos études expérimentales ont montré que la plupart des enfants ont besoin de temps pour comprendre ce que cela signifie de suivre les règles et de s'y tenir. S'ils ont atteint ce niveau, ils aiment inventer leurs propres structures. Cependant, beaucoup d'entre eux ont tendance à changer les règles pendant qu'ils forment une structure – surtout quand ils jouent avec un partenaire dont le rôle est de découvrir la structure. La construction de séquences selon certaines règles est une idée mathématique fondamentale qui est présente dans toutes les mathématiques. C'est pour cela que la construction de séquences structurées est présente tout au long du programme.

2.3. Nombres pairs et impairs

Les jetons sont un matériel fondamental pour représenter les nombres. En général, on les envisage comme une aide pédagogique. Cependant, leur statut n'est pas prioritairement didactique mais épistémologique. L'arithmétique grecque du temps de Pythagore a connu une période d'arithmétique psyphoi qui peut être considérée comme le berceau de l'arithmétique (Becker, 1954 ; Damerow & Lefevre, 1981). Psyphoi désigne en Grec de petites pierres que les mathématiciens grecs de l'Antiquité utilisaient pour représenter les nombres et les classes de nombres. Par exemple, ils représentaient les nombres pairs par des doubles rangées de pierres et les nombres impairs par des doubles rangées plus un singleton. Des structures plus complexes permettent de définir de nouvelles classes de nombres : les nombres triangulaires, les nombres carrés, les nombres pentagonaux, *etc*. *Mathe 2000* introduit les nombres pairs et impairs en première année primaire à la manière des Grecs Anciens avec des jetons (voir Figure 4).

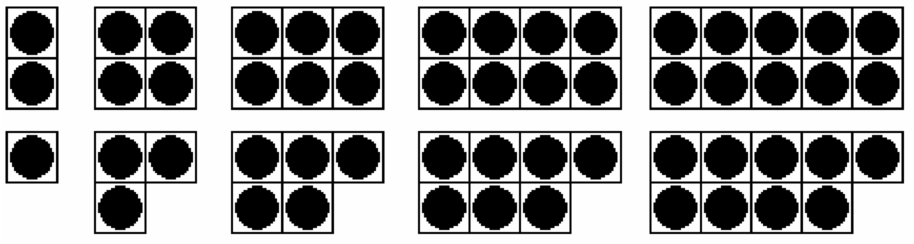

Figure 4 : Les nombres pairs et impairs comme dans l'Antiquité.

Ces structures sont imprimées sur du carton de manière que les enfants puissent les combiner et former des sommes. Les premiers exercices permettent aux enfants de se familiariser avec le matériel. Sur base de leur expérience, les enfants sont en mesure de chercher des sommes qui conduisent à un résultat pair. On demande d'abord aux enfants de regarder la structure plus soigneusement. Ensuite, on leur propose une activité plus directe (voir Figure 5) Après avoir calculé les quatre colonnes de sommes de la figure 5, on demande aux enfants :

4 + 6 =	5 + 1 =	2 + 1 =	1 + 8 =
6 + 8 =	7 + 3 =	4 + 3 =	3 + 6 =
8 + 4 =	9 + 5 =	6 + 5 =	5 + 4 =
10 + 2 =	9 + 9 =	10 + 9 =	9 + 0 =

Figure 5 : Sommes paires et impaires.

Avez-vous remarqué quelque chose ? Pouvez-vous l'expliquer ? à ce niveau-là (première primaire), nous attendons des enseignants qu'ils évitent de bousculer les enfants. La seule chose qu'ils doivent faire, c'est d'écouter les tentatives spontanées des enfants pour expliquer ce qu'ils ont remarqué. Les nombres pairs et impairs sont revisités en deuxième et en troisième primaire dans des espaces de nombres plus vastes. On propose aux enfants des exercices analogues à ceux de la figure 5 avec des nombres plus grands et on leur pose les mêmes questions. à ce niveau, les enfants reconnaissent les structures des nombres pairs et impairs et ils les formulent avec leurs propres mots. Le livre du maître recommande de se contenter des explications spontanées et de ne pas exiger une démonstration.

En quatrième primaire, les enfants ont suffisamment d'expérience avec les nombres pairs et impairs et on peut leur proposer l'activité suivante qui demande explicitement une démonstration.

Les nombres pairs peuvent être représentés par des rangées doubles, les nombres impairs par des rangées doubles plus un singleton. Utilisez cette représentation pour démontrer que

1. La somme de deux nombres pairs est toujours un nombre pair ;
2. La somme de deux nombres impairs est toujours un nombre pair ;
3. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est toujours un nombre impair.

Les enfants se rendent compte qu'il n'y a pas de singleton qui apparaisse lorsqu'on combine des structures paires, que dans les cas des structures impaires les deux singletons en présence forment une paire et que cela conduit à nouveau à un résultat pair, de plus les enfants reconnaissent que le singleton est préservé lorsque l'on combine une structure paire et une structure impaire et que dans ce cas, le résultat est donc impair. Le rôle de l'enseignant est de prendre en compte les tentatives des enfants et de les assister dans la formulation de leur argumentation. Comme la démonstration habituelle exprime exactement ces relations dans le langage de l'algèbre, elle est bien préparée par le travail avec les jetons.

2.4. Les arithmogones

Il s'agit d'un environnement très substantiel d'apprentissage qui a pris naissance à la lecture d'un merveilleux article publié il y a trente ans (McIntosh &

Quading, 1975). Nous avons modifié quelque peu la disposition géométrique choisie par les auteurs afin de pouvoir utiliser les jetons (voir Figure 6).

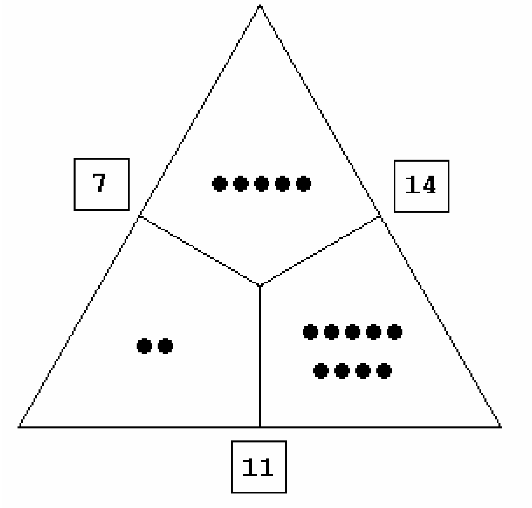

Figure 6 : Un arithmogone.

Un triangle est divisé en trois zones. Nous plaçons des jetons ou nous écrivons des nombres à l'intérieur de ces zones. Il faut ajouter les nombres de deux zones adjacentes et écrire cette somme dans la case extérieure correspondante. Plusieurs problèmes découlent de ce contexte. Quand on dispose des nombres à l'intérieur, on peut calculer les sommes à l'extérieur. Quand on dispose d'un ou deux nombres à l'intérieur et respectivement de deux ou un nombre à l'extérieur, on peut obtenir les nombres manquants par addition ou soustraction. Quand on donne les trois nombres à l'extérieur (voir Figure 7), un calcul immédiat n'est plus possible et la réflexion est nécessaire. Les élèves de première année peuvent trouver la solution en faisant varier de manière systématique le nombre de jetons dans les zones intérieures. Nous poursuivons une étude systématique des arithmogones dans les années suivantes.

En quatrième année, on guide les enfants afin qu'ils découvrent une solution systématique. Ils commencent par remplir quelques arithmogones et on leur demande de calculer la somme des zones intérieures et celle des cases extérieures. Ils découvrent que la somme des cases extérieures est égale au double de celle des zones intérieures et ils démontrent cette relation en remarquant que chaque nombre intérieur entre dans le calcul de deux nombres extérieurs.

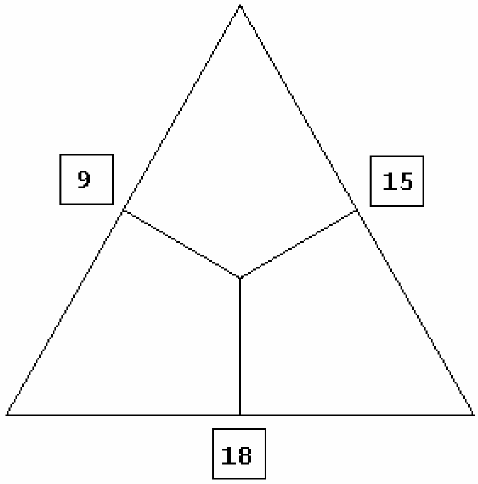

Figure 7 : Un arithmogone triangulaire.

L'étape suivante consiste à demander aux enfants de soustraire un nombre extérieur de la somme des nombres intérieurs et de découvrir que le résultat est le nombre intérieur opposé au nombre extérieur. Ces deux premières étapes permettent de déterminer les nombres intérieurs à partir des nombres extérieurs.

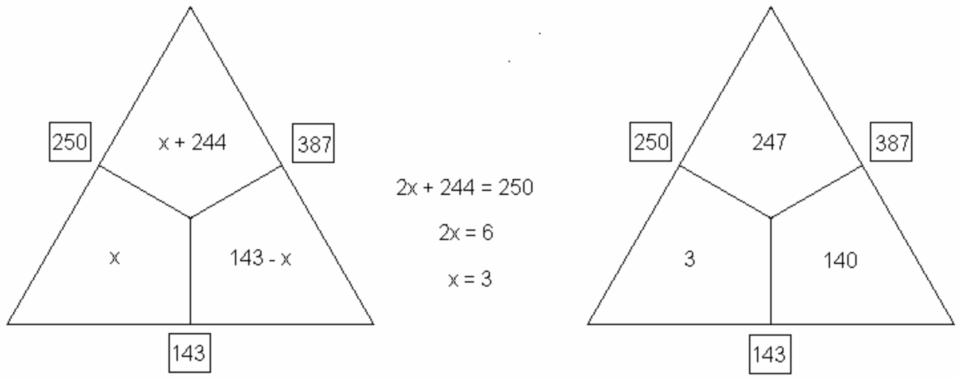

Figure 8 : Un arithmogone et le calcul algébrique.

Au niveau secondaire, on résoudra les arithmogones grâce à l'algèbre. La première méthode de résolution qui faisait varier le nombre de jetons de manière systématique est une grande aide pour trouver les équations (voir Figure 8).

On peut généraliser les arithmogones à des carrés, pour lesquels de nouveaux phénomènes surgissent. Certains arithmogones peuvent avoir plusieurs solutions (voir Figure 9), tandis que d'autres n'ont pas de solution (voir Figure 10).

Pour garantir l'existence de solutions, il est nécessaire et suffisant que les sommes des nombres opposés soient égales entre elles. (Chacune de ces sommes est égale à la somme de tous les nombres intérieurs).

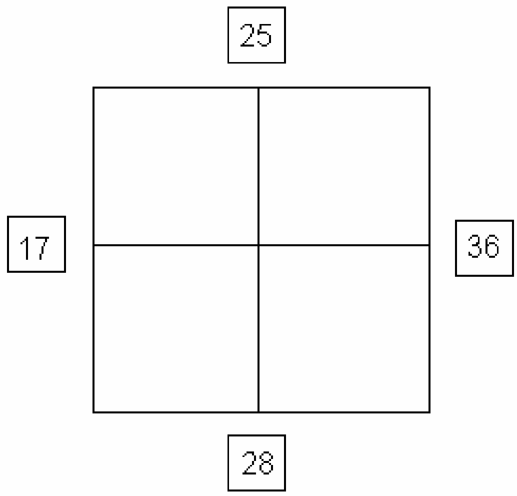

Figure 9 : Un arithmogone carré.

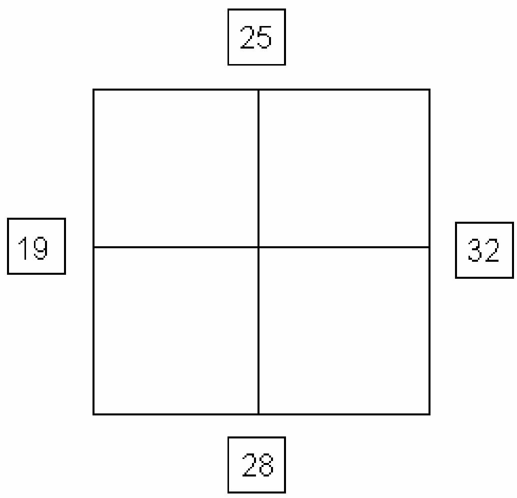

Figure 10 : Un arithmogone carré.

Bien entendu, les arithmogones peuvent être généralisés à des polygones à n côtés. L'arithmétique sous-jacente aux arithmogones est relativement avancée. Les nombres intérieurs et extérieurs peuvent être écrits comme des vecteurs et la relation entre eux est une application linéaire de Rn dans Rn. Il est intéressant de noter que pour n impair la matrice est non singulière, tandis que pour n pair elle de rang n − 1 (Mc Intosch et Quadling, 1975).

La structure bidimensionnelle des arithmogones peut être généralisée à une structure spatiale : les arithmoèdres. On affecte des nombres aux sommets et aux faces d'un polyèdre de manière que les nombres affectés aux faces soient la somme des nombres affectés aux sommets de cette face. On peut créer une très grande variété d'exemples de cette manière. Des étudiants de l'enseignement supérieur et de futurs enseignants ont étudié ce matériel avec grand profit alors qu'ils suivaient un cours d'algèbre linéaire. Tous les phénomènes et tous les concepts pertinents de la théorie des systèmes d'équations linéaires se produisent et peuvent être expliqués dans ce contexte, jusqu'au théorème de Steinitz et au théorème des dimensions. Pour de futurs enseignants, il est très important d'intégrer leur éducation mathématique dans leur contexte professionnel, comme nous l'expliquerons dans la section 3.

2.5. Les nombres ANNA

Les nombres de quatre chiffres comme 6446, 1221 ou 7007 sont des palindromes. Nous les appelons les nombres ANNA. Tout nombre ANNA possède un partenaire naturel qui est formé des mêmes chiffres. Par exemple, 2332 est le partenaire de 3223, et 5885 est le partenaire de 8558. On peut pratiquer de jolies mathématiques à l'occasion de l'exercice suivant. On demande à des élèves de quatrième primaire de choisir deux chiffres, de former les deux nombres ANNA et de soustraire le plus petit du plus grand. Une fois les résultats obtenus, ceux-ci sont collectés, vérifiés, corrigés et ordonnés et il s'avère qu'il n'y a que quelques résultats possibles : 891, 1782, 2673, 3564, 4456, 5346, 6237, 7128, 8019 (et éventuellement 0, si l'on accepte que des nombres tels que 2222 fassent partie des nombre ANNA). La suite de ces résultats comporte des structures intéressantes : étonnamment, tous les nombres sont des multiples de 891.

La structure devient encore plus riche quand on associe un résultat aux opérations dont il provient. Par exemple, le résultat 2673 provient 5225-2552, 7447-4774, 4114-1441, etc. Dans toutes ces opérations la différence des chiffres est égale à 3. Il s'avère qu'en général, la différence de deux nombres ANNA partenaires est égale à 891 multiplié par la différence des deux chiffres.

On peut démontrer ce phénomène de différentes manières en utilisant des représentations avec lesquelles les étudiants sont familiers. Une démonstration utilise la table des valeurs de positions de la manière suivante :

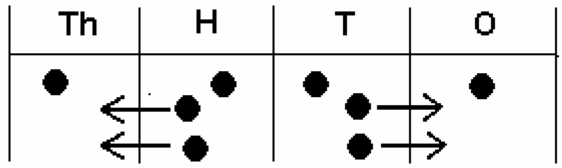

Figure 11 : Th=Milliers, H=Centaines, T=Dizaines, O=Unités, Comment passer de 1331 à 3113.

Pour passer de 3443 à 4334 dans la table des valeurs de position, il faut faire passer un jeton de la colonne des centaines à la colonne des milliers et un jeton de la colonne des dizaines à la colonne des unités. La différence de ces nombres est donc égale à 1000-100- 10+1=891. Ces opérations peuvent être appliquées à tous les nombres ANNA pour lesquels la différence des chiffres est égale à 1. Si la différence des deux chiffres est égale à d, alors il faut pousser d jetons de la colonne des centaines à la colonne des milliers et d jetons de la colonne des dizaines vers la colonne des unités. Cela signifie que la différence de ces deux nombres ANNA est égale à d fois 891. La Figure 11 illustre le cas de d = 2. Nous avons mené un travail analogue pour les nombres NANA. Ici, toutes les différences sont des multiples de 1000-100+10-1=909.
Les nombres ANNA et NANA ne viennent pas de nulle part en quatrième année. Ils ont été préparés par des activités avec des nombres de deux chiffres en deuxième année et des palindromes de trois chiffres en troisième année (les nombres IMI). Dans ce cas, les résultats possibles sont des multiples de 9 et de 91.

En cinquième primaire, on utilisera la table des valeurs de position pour démontrer les critères de divisibilité par 9 et par 3 comme montré par Winter (1984).

2.6. L'ajustement de polygones

L'ajustement est une idée fondamentale de la géométrie élémentaire. Freudenthal (1971) la décrit de la manière suivante :

> « Paver le sol avec des carreaux congruents comporte une idée maîtresse, l'ajustement. C'est la même chose dans l'espace et cela se fait de manière tout aussi concrète. L'ajustement est une sensation motrice. Les psychologues peuvent vous dire à quel point la composante motrice de la personnalité est marquée dans le jeune âge et à quel point la perception motrice et la mémoire sont importantes. Les choses s'ajustent. Les enfants demandent-ils pourquoi ? à de rares exceptions, de jeunes enfants ne le demandent pas. Tous ces miracles de notre espace ne semblent faire aucune impression. Mais il y a du grain à moudre. La plus grande vertu pédagogique est la patience. Un jour l'enfant demandera pourquoi, et il n'y a pas de raison de commencer la géométrie de manière systématique avant que ce jour n'advienne. Pire, cela peut faire du tort. »

Les enfants décomposent un carré en papier en le coupant et en le pliant selon les axes de symétrie et ils réarrangent les morceaux de différentes manières. Un grand nombre des nouvelles figures s'avéreront importantes dans la suite du programme. Par exemple, les quatre triangles rectangles isocèles disposés de manière à former deux carrés, peuvent être disposés de manière à former un carré plus grand. C'est un cas particulier important du théorème de Pythagore. *Mathe 2000* développe le thème de l'ajustement à partir de la première année primaire avec des activités de papier et ciseaux (voir Figure 12).

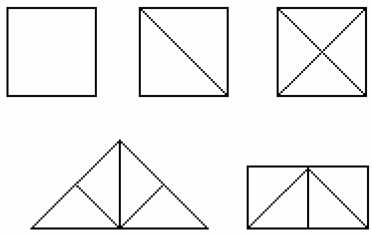

Figure 12 : L'ajustement en première année.

Un carré est décomposé en deux ou quatre triangles rectangles isocèles et les morceaux sont recombinés pour fabriquer de nouvelles figures. En seconde année, cette activité est développée. Il faut plier et couper le carré de façon à obtenir des triangles équilatéraux et des moitiés de triangles équilatéraux (voir Figure 13).

L'une des figures que l'on peut obtenir avec ces morceaux est importante pour le théorème de Pythagore.

En troisième année, on pratique l'ajustement grâce à un gabarit qui permet de dessiner des carrés, des triangles équilatéraux, des pentagones réguliers, des hexagones réguliers, des octogones réguliers qui ont tous des côtés de même longueur. Les enfants peuvent explorer expérimentalement de quelle manière les figures s'ajustent. ils se rendent compte qu'il n'y a que trois pavages réguliers et découvrent certains pavages semi-réguliers.

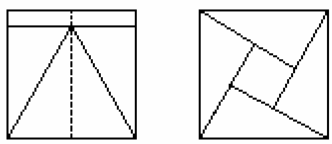

Figure 13 : L'ajustement en deuxième année.

En quatrième année, les enfants fabriquent des polygones réguliers à l'aide de la montre à dessin (Figure 14) et construisent les cinq solides platoniciens.

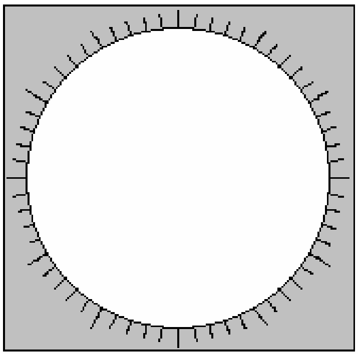

Figure 14 : La montre à dessin.

Le nom montre à dessin provient du fait que le cercle est partagé en 60 parties égales (Winter, 1984). Comme 60 est divisible par 3, 4, 5 et 6, la montre à dessin permet de construire facilement des carrés des triangles équilatéraux, des pentagones réguliers, des hexagones réguliers, et des octogones réguliers. Par exemple, pour dessiner des pentagones réguliers, il faut diviser la circonférence en 5 parties égales de 12 minutes chacune et relier les points. Si on utilise des montres à dessin de différentes dimensions, on obtient des polygones réguliers de différentes dimensions. On recopie les formes sur du carton. Les segments circulaires attachés aux côtés du polygone peuvent être utilisés pour coller les polygones entre eux. Ceci permet aux enfants de construire des modèles stables des solides platoniciens. La démonstration de l'existence d'au plus cinq solides platoniciens du chapitre 13 des Éléments d'Euclide est parfaitement en phase avec les arguments des enfants.

En cinquième année, on utilisera les expériences de découpage et d'ajustement avec les polygones pour établir le concept et la mesure d'un angle selon le développement historique (Beck, 1954, p. 27). Dans les classes suivantes, le découpage et l'ajustement permettent d'aborder la formule des aires et le théorème de Pythagore (Wittman, 1995, p. 134-136). Le programme de *Mathe 2000* est conçu de manière à bien préparer le terrain grâce à des activités spécifiques qui commencent en première année.

2.7. Les sections coniques

Dans un discours prononcé au début du 20^{e} siècle, J. J. Sylvester dit :

> « La découverte des sections coniques, attribuée à Platon, a fourni une nouvelle classe de formes à la contemplation des géomètres. Mais sans cette découverte qui était probablement considérée du temps de Platon et bien après lui comme un amusement spéculatif de l'esprit, sans utilité, tout le déroulement de la philosophie pratique jusqu'à nos jours, de la science de l'astronomie, de la théorie des projectiles, de l'art de la navigation, aurait pu suivre un autre cours. Et la plus grande découverte jamais faite dans l'histoire du monde, la loi de la

> gravitation universelle, avec ses innombrables conséquences directes et indirectes et ses applications à chaque département de la recherche humaine et de l'industrie aurait pu à cette heure ne pas s'être produit. »

L'élimination des coniques du programme de mathématiques est l'un des signes clairs du déclin de l'éducation mathématiques dans les dernières décennies. *Mathe 2000* tente de les réintroduire pour autant que les conditions limites le permettent.

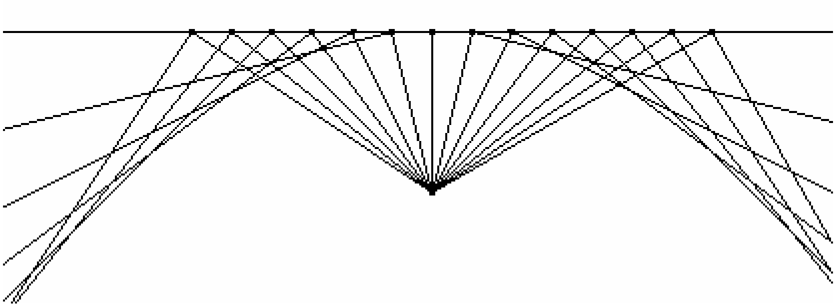

Figure 15 : Construction de la parabole en quatrième année.

Le traitement des coniques peut déjà commencer à l'école primaire. Dans le programme de quatrième année de *Mathe 2000*, nous introduisons la construction de la parabole comme un exercice d'utilisation de la règle (Figure 15). Nous encourageons les élèves à observer ce qui se passe lorsqu'on modifie la position du foyer. Certains sont vraiment stimulés par la construction.

En cinquième année, les constructions de l'enveloppe d'une parabole seront introduites comme exercice pour construire le milieu et la médiatrice d'un segment. Une parabole est définie comme le lieu des points situés à égale distance d'un point F et d'une droite d. la construction qui découle de cette définition est très simple (Figure 16).

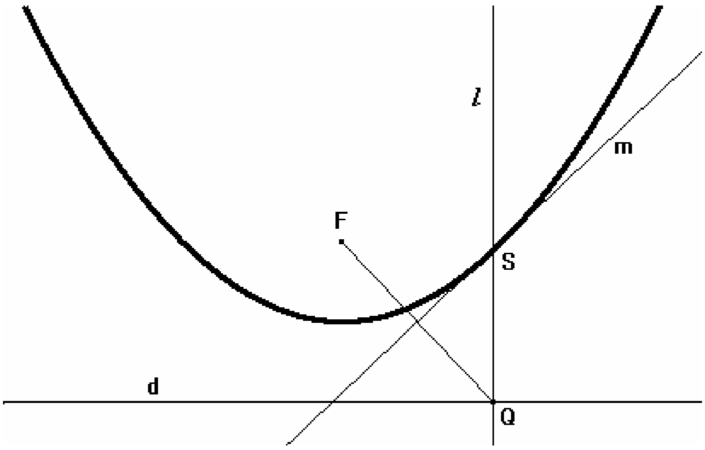

Figure 16 : Construction de la parabole en cinquième année.

On commence par tracer une droite d et un point F extérieur à la droite. Ensuite la construction suivante est répétée pour un certain nombre de points appartenant à la droite d. Soit Q un point de la droite d. On trace la médiatrice m du segment FQ et la droite l passant par Q et perpendiculaire à d. Le point S d'intersection de la droite l et de la médiatrice m de PQ est à égale distance de F et de d. Les logiciels de géométrie dynamique se prêtent tout à fait à ce genre d'exercice pour dessiner et animer le lieu du point S.

On peut expliquer la propriété du foyer d'une parabole grâce à l'observation du phénomène. Cette propriété sera démontrée des années plus tard. Le point S est le seul point qui appartienne à m et à la parabole, car la distance à d de tous les autres points de m est inférieure à la distance au point F. De manière analogue au cercle, la droite m est appelée tangente au cercle.
Imaginons maintenant qu'un rayon lumineux soit émis en F et frappe la parabole en S. Ce rayon est réfléchi comme s'il frappait le miroir plan m. Ceci explique que le rayon réfléchi semble provenir de Q l'image miroir de F, c'est-à-dire que le rayon réfléchi coïncide avec l. Ainsi, tous les rayons réfléchis d'un miroir parabolique sont parallèles.

On peut étudier les autres coniques de manière analogue. Cela joue un rôle crucial dans la conférence perdue et retrouvée dans laquelle Feynman déduit les ellipses de Kepler en revisitant la dérivation dans les *Principia mathematica* de Newton (Goodstein & Goodstein, 1996). La démarche de Feynman est élémentaire et peut être intégrée dans le programme de l'enseignement secondaire supérieur de même que dans la formation des maîtres. De cette manière, les élèves et les futurs enseignants peuvent se familiariser avec des résultats qui datent de l'époque de Newton.

3. Réflexions théoriques

En Grec Ancien, le mot *theoria* signifie vision globale et, en ce sens, le rôle de la théorie consiste à établir des liens au sein d'un domaine d'expérience. C'est dans ce sens que nos réflexions théoriques se réfèrent aux principes qui sous-tendent la conception d'environnements substantiels d'apprentissage de la section 2.

3.1. La nature quasi expérimentale des mathématiques et la sélection des représentations

Le trait commun le plus important de ces environnements d'apprentissage est le suivant : les activités d'exploration de structures et de découverte de preuves dépendent de représentations appropriées des objets mathématiques en question. C'est Imre Lakatos, qui dans son chef-d'œuvre Preuves et réfutations (1976) signala le premier le fait que les théories mathématiques sont toujours développées en relation étroite avec les objets auxquelles elles se réfèrent. La théorie des graphes grandit avec la construction des graphes, la théorie des groupes grandit avec la construction des groupes, la théorie des codes grandit avec la construction de nouveaux codes, et ainsi de suite. Ces objets mathématiques forment une sorte de quasi-réalité qui permet au chercheur de mener des expériences semblables aux expériences en science (voir aussi Dörfler, 1991). Les ordinateurs ont grandement facilité l'accès à ces quasis réalités.

Le grand mathématicien Arnold a écrit dans un article (1998) :

> « Les mathématiques font partie de la physique. J'ai l'impression que les mathématiciens qui connaissent peu de physique sont convaincus de la différence essentielle entre les mathématiques axiomatiques et la modélisation qu'on pratique dans les sciences naturelles et qui demande toujours une vérification des déductions par l'expérience. Tout mathématicien actif sait bien que sans une forme quelconque de contrôle (surtout par des exemples), après dix pages, la moitié des signes des formules seront faux et des deux vont passer des dénominateurs aux numérateurs. La technologie pour combattre ces erreurs est le même contrôle externe par les expériences ou les observations qu'on retrouve dans toute science expérimentale et qui devrait être enseignée à tous nos jeunes à l'école. »

Dans l'éducation générale, les représentations informelles d'objets mathématiques sont indispensables car elles fournissent une quasi-réalité qui est plus facile à appréhender et à manipuler que les représentations symboliques. Les représentations géométriques jouent un rôle important car la géométrie est un langage qui fait le pont entre le langage naturel et l'algèbre (Thom, 1973, p. 206-209). La sélection des représentations qui incorporent les structures mathématiques fondamentales doit être faite soigneusement (Wittmann, 1995). Les environnements substantiels d'apprentissage sont basés sur la droite des nombres, les jetons, les calculs avec des nombres, la table des valeurs de position, des modèles de polygones et des dessins.

3.2. Le double rôle des représentations

Les représentations d'objets mathématiques forment une sorte d'interface entre les mathématiques pures et appliquées. On peut les envisager à la fois comme des concrétisations de concepts mathématiques abstraits et comme des représentations d'objets réels. Comparées aux objets abstraits, ces représentations sont plus concrètes que les objets mathématiques qu'elles représentent, et comparées aux objets réels qu'elles modélisent, elles sont plus abstraites.

Les coniques sont un exemple frappant de ce double rôle des représentations. D'une part, le dessin d'une ellipse est la représentation concrète d'un objet mathématique appelé ellipse et d'autre part, c'est la représentation schématique de tout objet réel de forme elliptique comme un lithotriteur qui sert à briser les calculs rénaux, le miroir d'un télescope ou l'orbite d'une planète.

Les jetons en sont un autre exemple. On peut voir des collections de jetons comme des modèles concrets de nombres abstraits. Faire des opérations avec des jetons permet de démontrer des relations entre les nombres, par exemple, entre les nombres pairs et les nombres impairs. On peut aussi utiliser les jetons pour modéliser des situations réelles.

Voici un exercice typique de première primaire.

Dix enfants jouent à la plaine de jeu qui comporte une tente d'indiens et un portique d'escalade. Comment distribuer les enfants en respectant certaines conditions :

1. Trois enfants jouent dans la tente indienne ;
2. La moitié des enfants jouent sur le portique d'escalade ;
3. Il y a deux enfants de plus qui jouent dans la tente indienne que sur le portique d'escalade.

Pour résoudre ces problèmes, on dessine la tente indienne et le portique d'escalade sur une feuille de papier, on représente les 10 enfants par 10 jetons et l'on déplace les jetons pour que les conditions imposées soient vérifiées.

Étudier les objets mathématiques grâce à des représentations qui peuvent être elles-mêmes des modèles de la réalité est la meilleure préparation pour les applications mathématiques.

Contrairement aux objets réels ou aux modèles de situations réelles qui sont chargés de différentes contraintes, les objets mathématiques permettent des opérations illimitées ainsi que l'établissement de connaissance théoriques, bien plus que la connaissance directement dérivée de la mathématisation de situations réelles.

Il est généralement admis que les mathématiques enseignées dans l'enseignement général, en particulier aux niveaux les plus élémentaires, doivent être dérivées et être en relation proche avec la réalité. Dans la perspective des représentations que nous venons d'évoquer, nous considérons que c'est une erreur d'un point de vue éducatif.

3.3. Les preuves opératoires

Lorsqu'on travaille avec des représentations adéquates d'objets mathématiques, des démonstrations robustes de propriétés générales deviennent possibles. Dans la course à un nombre cible (2.1), la stratégie gagnante demande de regarder les paires de coups indépendamment de certaines positions. La démonstration du théorème sur les nombres pairs et impairs (2.3) utilise des opérations avec les rangées doubles dans lesquelles la taille des nombres n'intervient pas. La relation entre les nombres à l'intérieur et à l'extérieur d'un arithmogone (2.4) ne dépend pas de nombres particuliers, mais uniquement de la règle de calcul des nombres extérieurs à partir des nombres intérieurs. La démonstration de la structure liée aux différentes paires de nombres ANNA (2.5) se base sur des opérations sur la table des valeurs de position. Le pavage du plan et la construction de solides (2.6) viennent de la combinaison des polygones et de l'ajustement. Au niveau primaire, ces effets ne sont pas mis en doute. Plus tard dans le cursus éducatif, ils seront corroborés grâce au concept d'angle. La démonstration (2.7) sur les propriétés du foyer d'une parabole se base sur la construction de l'enveloppe.

C'est Jean Piaget qui a clarifié le point crucial de ce type de démonstrations dans son analyse épistémologique des mathématiques. La connaissance mathématique ne dérive pas des objets eux-mêmes, mais des opérations avec les objets dans le processus d'abstraction réfléchissante (Beth & Piaget, 1961, p.217-223). Lorsque qu'il est intuitivement clair que des opérations appliquées à un objet particulier peuvent être transférées à tous les objets d'une certaine classe à laquelle appartient cet objet, alors les relations basées sur ces opérations sont reconnues comme valides sur un plan général. Comme ces démonstrations sont dérivées des effets d'opérations sur les objets considérés, on les appelle des preuves opératoires (Semadeni, 1974 ; Wittmann, 1995, p.144-148, 154-160).

L'avantage des preuves opératoires dans le contexte de l'éducation est évident. Ces démonstrations sont intégrées dans l'investigation de problèmes, fortement liées à la recherche des structures, basées sur les effets des opérations et on peut les exprimer un langage simple orienté vers les problèmes. Les nombres ANNA peuvent servir d'exemple. La relation conceptuelle sur laquelle repose la structure des différences s'exprime en deux lignes de manière formelle : Si A > N alors

$$(A \times 1000 + N \times 100 + N \times 10 + A) - (N \times 1000 + A \times 100 + A \times 10 + A) =$$
$$(A - N) \times (1000 - 100 - 10 + 1) = (A - N) \times 891$$

Cette démonstration est cependant inutile pour les mathématiques de l'enseignement primaire et pour la formation des maîtres de ce niveau.

3.4. Le triangle épistémologique

Heinz Steinbring a introduit le triangle épistémologique dans ses recherches expérimentales (Steinbring, 2005, p. 22) (Figure 17).

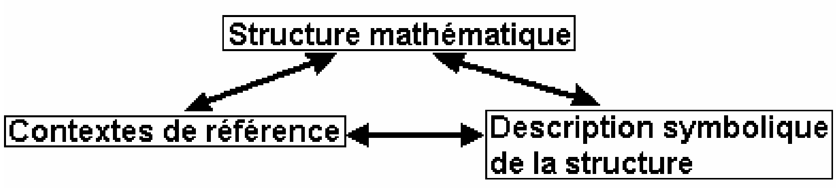

Figure 17 : Le triangle épistémologique.

Le triangle épistémologique indique que le niveau symbolique est insuffisant pour permettre aux apprenants de maîtriser une structure mathématique. Les concepts constitutifs de la structure ne prennent du sens qu'à travers les contextes de référence dans lesquels la structure s'est incarnée et qui ont permis de mener des expériences. Les apprenants s'appuient sur les expériences faites dans le cadre des contextes de référence pour communiquer avec l'enseignant ou entre eux.
Les nombres ANNA constituent une bonne illustration. Les enfants ne sont pas en mesure de comprendre les relations conceptuelles dans leur version symbolique. Il leur faut des calculs avec des nombres ANNA particuliers ainsi que la table des valeurs de position comme contexte de référence pour pouvoir explorer, expliquer et comprendre la structure.

3.5. Les pratiques productives

Ce qui compte réellement pour la maîtrise à long terme d'un contenu mathématique, ce n'est pas comment il est introduit, mais comment il est pratiqué. *Repetitio est mater studiorum.* L'histoire des mathématiques nous enseigne que beaucoup de tentatives pour réformer l'enseignement des mathématiques ont échoué parce qu'elles ont négligé la pratique des savoir-faire. Les enseignants rejettent les programmes dans lesquels cette composante essentielle de l'enseignement et de l'apprentissage n'est pas présente, et ils ont raison de le faire. Traditionnellement, la pratique des savoir-faire a toujours été bien ancrée dans le système scolaire et dans les manuels sous forme d'exercices d'entrainement. Développer les mathématiques comme la science des structures n'est pas compatible avec ce système. Pour résoudre ce dilemme apparent, il faut une nouvelle approche de la pratique des savoir-faire.

Dans un autre de ses articles mémorables, Heinrich Winter (1984) montre comment la pratique des savoir-faire peut être réconciliée avec le principe de l'apprentissage par la découverte. C'est en approfondissant les idées de Winter que s'est développé le concept de pratique productive et que la conception d'environnements substantiels d'apprentissage a été placée au coeur de *Mathe 2000*. Pour construire des exercices productifs, il faut chercher les structures pour lesquelles l'investigation expérimentale nécessite l'exécution répétée d'un certain savoir-faire. Les environnements d'apprentissage comme les nombres pairs et impairs (2.3), les arithmogones (2.4), les nombres ANNA (2.5), les coniques (2.7) sont des exemples typiques de pratiques productives. Les deux volumes du *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Wittmann & Müller contiennent des ensembles cohérents d'environnements substantiels d'apprentissage qui permettent d'introduire et pratiquer les thèmes centraux et les savoir-faire de l'enseignement primaire comme les tables d'addition, les tables de multiplication, l'arithmétique informelle et les algorithmes standards. Le succès du programme de l'enseignement primaire de *Mathe 2000* dans plusieurs pays est vraisemblablement dû à cette approche intégrée.

En plus des pratiques productives, le programme de *Mathe 2000* comporte aussi un cours systématique de calcul mental appelé *Blitzrechnen*[3] (calcul rapide). Si l'on conçoit les mathématiques comme la science des structures, il est indispensable de maîtriser les techniques pour explorer les structures.

3.6. La formation des maîtres

Il va sans dire que la réforme de l'enseignement des mathématiques fondée sur la vision des mathématiques comme science des structures est fortement encouragée par la réforme correspondante de la formation des maîtres. Les enseignants qui ont fait des expériences d'activité mathématique pendant leurs études mettront plus volontiers la réforme en oeuvre que les autres. Comment organiser la formation des maîtres afin de favoriser ces expériences. Partout dans le monde, la majorité des spécialistes de l'éducation mathématique sont d'avis que l'éducation mathématique (la didactique des mathématiques) est la clé de la réforme de la formation des maîtres et donc l'accent est mis sur les cours de didactique. Il y a cependant de bonnes raisons de voir le cours de mathématiques comme la clé de la réforme. C'est un fait bien connu que partout dans le monde des cours de mathématiques et parfois tout le programme de mathématiques n'a que peu ou pas de sens pour les futurs enseignants. Ou bien les matières qui les concernent ne sont pas couvertes du tout, ou bien elle est présentée de manière figée et formelle, ou pire, il n'y a pas de substance. Les mathématiques sont réduites à des squelettes conceptuels ou procéduraux. Cette critique se réfère à de récents essais en matière de formation des maîtres qui ont été explicitement annoncés comme la réponse des mathématiciens pour donner aux enseignants la connaissance mathématique indispensable. Citons, par exemple, un manuel autorisé par l'American Mathematical Society (Jensen, 2003). Les nombres ANNA, par exemple, y seraient analysés uniquement de manière formelle comme à la fin de la section 2.5.

L'expérience de *Mathe 2000* prouve que l'on peut effectivement améliorer la formation des maîtres en reliant les cours de mathématiques aux environnements substantiels d'apprentissage aussi loin que la matière et la méthode le permettent. Par définition, les environnements substantiels d'apprentissage sont basés sur des mathématiques substantielles qui vont au-delà de l'école. Ils offrent donc des activités aux futurs enseignants à un niveau avancé. Cependant des îlots mathématiques rattachés à quelques ESA ne suffisent pas. La formation des maîtres a besoin de cours de mathématiques élémentaires systématiques et cohérents qui

[3] Ce cours est disponible sur CD-ROM en version bilingue (Allemand-Anglais). Il a reçu le prix du logiciel allemand digita en 1997, Krauthausen & Müller & Wittmann (1997).

couvrent la matière d'une variété d'ESA. Le développement de tels cours est un défi pour l'avenir.
Mathe 2000 vient d'entreprendre la rédaction d'une nouvelle série de manuels, *Elementarmathematik als Prozess*[4], pour combler cette lacune. Le premier volume, *Arithmetik als Prozess* vient de paraître (Müller, Steinbring & Wittmann, 2004). Le titre de la série indique l'accent mis sur l'activité mathématique. Nous préférons les représentations informelles aux représentations formelles chaque fois que c'est possible. Les futurs enseignants ont l'occasion d'apprendre le langage mathématique dont ils ont besoin dans leur profession, pas le langage des spécialistes qui ne leur sert à rien et qui peut même faire du tort lorsqu'ils communiquent avec leurs élèves. Pour donner un exemple, dans *Arithmetik als Prozess,* tous les chapitres sur la théorie des nombres jusqu'au petit théorème de Fermat sont basés exclusivement sur des opérations avec la droite des nombres et avec des structures rectangulaires de points. Toutes les démonstrations sont opératoires. Dans le prochain volume *Algebra als Prozess*, la théorie des équations linéaires sera axée sur les arithmogones et les arithmoèdres comme indiqué dans la section 0.

[4] N.T. En français, des titres comme « Mathématiques élémentaires actives » ou « Vivre les mathématiques élémentaires » pourraient convenir.

Bibliographie

ARNOLD V.I. (1998) On teaching mathematics, *Russian Math. Survey*, **53, 1**, 229-236.

BALLIEU M. & GUISSARD M-F. (Éditeurs) (2004) *Pour une culture mathématique accessible à tous. Elaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes*, CREM, Nivelles.

BECKER O. (1954) *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Darstellung*, Freiburg – München.

BECKER J. & SHIMADA SH. (éditeurs) (1997) *The open-ended approach, a new proposal for teaching mathematics*, Reston, Va, NCTM.

BETH E. W. & PIAGET J. (1961) Epistémologie mathématique et psychologie, *Etudes d'épistémologie génétique*, **XIV**.

DAMEROW P. & LEFÈVRE W. (éditeurs) (1981) *Rechenstein, Experiment, Sprache, Historische Fallstudien zur Entstellung der exakten Wissenschaften*, Stuttgart.

DEVLIN K. (1996) *Mathematics: The Science of Patterns*, Freeman, New York.

DÖRFLER W. (1991) Wieso kann man mit abstrakten Objekten rechnen ? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 195-198.

FLETCHER T.J. (1965) *Some Lessons in Mathematics*, CUP, London.

FREUDENTHAL H. (1971) Geometry Between the Devil and the Deep Sea, *Educational Studies in Mathematics*, **3**, 413-435.

GOODSTEIN D.L. & GOODSTEIN J.R. (1996) *Feynman's lost lecture. The Motion of the Planets around the Sun*, W. W. Norton & Company, New York & London.

IOWO (1976) Five Years IOWO, Special Issue on H. Freudenthal's Retirement from the Directorship of IOWO, *Educational Studies in Mathematics,* **7-3**.

JAHNKE H.N. (1989) *Abstrakte Anschauung, Geschichte und didaktische Bedeutung*, in Kautschitsch H. & Metzler W. (ed.), Anschauliches Beweisen, Stuttgart, Wien, 33-54.

JENSEN G.R. (2003) *Arithmetic for Teachers with Applications and Topics from Geometry*, AMS, Providence.

KIRSCH A. (1979) Beispiele für prämathematische Beweise, in Dörfler & Fischer (ed), *Beweisen im Mathematikunterricht*, Wien, Stuttgart, Hölder-Pichler-Tempsky, Teubner, 33-54.

KRAUTHAUSEN G., MÜLLER G.N. & WITTMANN E. CH. (1997-1998) Blitzrechnen (Calculightning), *2 CD-ROMS*, Klett, Leipzig.

LAKATOS I. (1976) *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, London.

MC INTOSH A. & QUADLING D. (1975) Arithmogons, *Mathematics Teaching*, **70**, 18-23.

MÜLLER G.N., STEINBRING H. & WITTMANN E. CH. (2002-2004) *Jenseits von PISA. Bildungsreform als Unterrichtreform. Ein Fünf-Punkte-Program aus systemischer Sicht*, Kallmeyer, Seelze.

MÜLLER G.N., STEINBRING H. & WITTMANN E. CH. (2004) *Arithmetik als Prozess*, Elementarmathematik als Prozess, Kallmeyer, Seelze.

MÜLLER G.N. & WITTMANN E. CH. (2002-2004) *Das kleine Zahlenbuch, **1** : Spielen un Zählen, **2** : Schauen und Zählen*, Kallmeyer, Seelze.

MÜLLER G.N. & WITTMANN E. CH. (2004-2005) *Das Zahlenbuch*, manuels de mathématique pour les classes de l'enseignement primaire, **1-4**, Klett, Leipzig.

SAWYER W.W. (1955) *A Prelude to Mathematics*, Penguin, London.

SEMADENI Z. (1974) *The Concept of Pre-Mathematics as a Theoretical Background for Primary Mathematics*, Warsaw, Polish Academy of Sciences.

STEINBRING H. (2005) *The construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*, Mathematics Education Library, **38**, Springer, New York.

SYLVESTER J.J. (1983) A Probationary Lecture on Geometry, *Collected Mathematical Papers*, **2**, 7, Co Chelsea pub Camp, New York.

THOM R. (1973) Modern Mathematics : Does it exist ?, in Howson A. G. (ed.), *Developments in Mathematical Education, Proceedings of ICME 2*, Cambridge University Press, London, 194-209.

WHEELER D.H. (1967) *Notes on Mathematics in Primary Schools*, CUP, London.

WINTER H. (1975) Allgemeine Lernziehle für den Mathematikunterricht ? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* **7**, 106-116.

WINTER H. (1984) Begriff und Bedeutung des übens, *Mathematik Lehren,* **2**, 4-11.

WINTER H. (1984) Von der Zeichenuhr zu den Platonischen Körper, *Mathematik Lehren*, **17**, 12-14.

WINTER H. (1985) Neunregel und Abakus –Schieben, denken, rechnen, *Mathematik Lehren*, **11**, 22-26.

WINTER H. (1987) *Mathematik entdecken. Neue Ansätze zum Mathematikunterricht in der Grundschule*, Scriptor Frankfurt a. M.

WINTER H. (1989), *Entdeckendes Lernen in Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*, Braunschweig, Wiesbaden, Vieweg.

WITTMANN E. CH. (1995) Mathematics Education as a ”Design Science”, *Educational Studies in Mathematics*, **29**, 355-374.

WITTMANN E. CH. (2002) Developing mathematics education in a systemic process, *Educational Studies in Mathematics,* **48**, 1-20.

WITTMANN E. CH. (1995) Standard Number Representations in Teaching Arithmetic, *Journal für Mathematik-Didakti,* **19**, 355-374.

WITTMANN E. CH. (1996) The Pythagorean Theorem, in Coney Th. J. *Mathematics, Pedagogy and Secondary Teacher Education*, 97-165, N. H., Portsmouth.

WITTMANN E. CH. & MÜLLER G.N. (1990-1992) *Handbuch produktiver Rechenübungen, **1** : Vom Einspluseins zum Einmaleins,* Stuttgart, ***2** : Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*, Stuttgart.

PROF. EM. DR. DR. H. C. ERICH CH. WITTMANN
University of Dortmund
Dept. of Mathematics, Project *Mathe 2000*
D-44221 DORTMUND
wittmann@math.uni-dortmind.de