Colloque international

L'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte

organisé par le CREM[1], du 7 au 9 juillet 2005 à l'Université de Mons-Hainaut - Belgique

Avec le soutien
de la Communauté française Wallonie-Bruxelles

SYNTHÈSE DU COLLOQUE : L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES CONSIDÉRÉ COMME UN TOUT

Le titre du colloque était *L'apprentissage des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte*. L'intention était claire. L'apprentissage des mathématiques est rarement étudié dans toute son extension, de l'enfance à l'âge adulte. Plusieurs raisons expliquent cela. Parmi celles-ci,

- chaque enseignant travaille avec des élèves d'un âge déterminé ;
- dans beaucoup de pays, les enseignants des écoles élémentaire et secondaire se préparent à leur métier dans des écoles différentes ;
- les psycho-pédagogues concentrent le plus souvent leurs recherches relatives à l'enseignement des mathématiques sur l'école élémentaire, et non sur l'école secondaire ;
- les didacticiens préfèrent souvent étudier des situations d'apprentissage précises plutôt que des questions liées à l'ensemble de la scolarité ;
- les mathématiciens sont absorbés par leurs propres recherches.

Toutefois, avoir une vue d'ensemble de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques est une nécessité pour les responsables de l'éducation. En outre, savoir comment les mathématiques sont apprises depuis l'enfance jusqu'à l'âge adulte aiderait chaque enseignant en particulier à comprendre les difficultés rencontrées par les élèves et à situer son action à une étape donnée de l'éducation.

Dans les annonces du colloque, les questions suivantes avaient été posées en vue d'orienter

[1]Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 5 rue Émile Vandervelde, 1400 Nivelles, Belgique.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, supplément vol. 11, p. 3 – 16.

et délimiter les discussions :

1. Dans quelle mesure les premiers apprentissages mathématiques réalisés à l'école primaire influencent-ils l'acquisition de concepts tout au long de la formation ?
2. Quels sont les rôles respectifs dans l'apprentissage des démarches procédurales et des concepts ?
3. Sur quelles bases, en fonction de quels critères agencer les matières en vue d'un apprentissage "naturel" des mathématiques ?
4. Quels sont les rôles respectifs de l'intuition et de la rigueur ?
5. Quels sont les rôles respectifs, dans l'apprentissage, des problèmes et de la structuration théorique ?
6. Quel est le rôle de la logique ?
7. Quelle part les tentatives faites dans le passé pour cerner l'enseignement des mathématiques en termes de matières et de méthodes réservaient-elles aux questions précédentes ?

Ci-après, sans revenir aux questions posées une par une, nous essayons de donner une vue d'ensemble des contributions au colloque, en nous efforçant de mettre en évidence les idées et points de vue relatifs à l'éducation mathématique considérée globalement.

Commençons par rendre compte des conférences plénières.

1. Les conférences plénières

A. Schœnfeld a traité l'importante question de la résolution de problèmes. Cette question est très générale, car elle ne porte pas seulement sur l'enseignement des mathématiques, pas même seulement sur les mathématiques, mais sur toute activité où l'on rencontre quelque difficulté. Bien entendu, Schœnfeld s'occupe surtout de la résolution de problèmes par les élèves, mais il considère aussi les actions de l'enseignant.

Sa thèse principale est que le comportement de ceux qui résolvent des problèmes est *rationnel*. Mais il s'agit d'une rationalité qui est loin d'être toujours dictée par les termes intrinsèques du problème initialement posé. Les décisions successives prises par celui qui résout un problème peuvent être analysées a posteriori et rattachées à des causes objectives, identifiables. Celui qui résout le problème, de son côté, n'est pas toujours conscient des raisons effectives qui inspirent ses actions. Le défi est de "comprendre quels problèmes les gens essaient réellement de résoudre". Dans un contexte problématique donné,

– ils agissent conformément à leurs objectifs, leurs connaissances et leurs croyances ;

- ils se donnent des objectifs prioritaires ;
- et choisissent, conformément à ce qu'ils croient, les connaissances à utiliser ;
- dans le cours de l'action, ils changent de priorités pour leurs objectifs, selon leurs capacités métacognitives ;
- et ce processus est récurrent.

Ce schéma théorique est une *constante*, un modèle universel, servant de base pour expliquer les prises de décisions dans la résolution de problèmes. Il est applicable en particulier à l'apprentissage (et à l'enseignement) des mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte.

D. Tall par contre traite non pas d'une constante, mais d'une *évolution* : il étudie le développement de la pensée mathématique de l'enfance à l'âge adulte. Il distingue trois univers mentaux principaux en mathématiques, à savoir, dans ses propres termes :

> "Un *univers de concepts* lié aux objets, centré sur l'observation, la description, la définition et la déduction de propriétés, se développant depuis les expériences de pensée jusqu'aux preuves euclidiennes.
>
> Un *univers de symboles et de procepts* lié aux actions, qui comprime des schémas d'actions pour en faire des objets de pensée opérant de deux façons, en tant que processus et en tant que concepts (les procepts).
>
> Un *univers formel, axiomatique,* centré sur la construction de systèmes axiomatiques basés sur des définitions formelles et des preuves de nature ensembliste."

La progression, sommairement décrite comme "je vois, je calcule et je choisis un axiome", procède principalement par *compressions et connexions*, par la suppression d'anciens liens dans l'esprit (le cerveau) et la création de nouveaux liens, par déplacement de l'attention de l'action vers l'effet de l'action (diverses actions ayant le même effet). L'effet de la compression est la création de nouveaux objets de pensée, avec un rôle crucial, à chaque étape et pour chaque individu, pour les *déjà-là* (ce qui est donné à la naissance) et les *déjà-rencontrés*[2].
Une telle analyse est un instrument disponible aux enseignants non seulement pour interpréter les moyens de pensée de leurs élèves, mais aussi pour saisir l'orientation générale de l'acquisition des mathématiques d'un bout à l'autre.

Schœnfeld et Tall rendent compte chacun d'une certaine réalité intellectuelle, avec bien entendu des conséquences pratiques pour l'enseignement. E. Wittmann, pour sa part, considérant l'éducation mathématique comme une science de

[2]En anglais les *set-befores* et les *met-befores*.

développement[3], propose des principes généraux pour assurer un enseignement efficace, basé évidemment sur la connaissance que l'on a du milieu scolaire. Schœnfeld et Tall sont plus descriptifs que constructifs, Wittmann est plus constructif que descriptif.
Wittmann place au centre les patterns[4], tels qu'ils existent dans la science et la pratique mathématiques. Mais ce qui est en cause, ce sont les patterns construits et explorés par des étudiants actifs, pas des patterns simplement observés et décrits. Les patterns vus d'un point de vue dynamique induisent des *preuves opératives*, c'est-à-dire des preuves basées sur des actions reconnues comme reproductibles, et produisant les mêmes effets quand les mêmes circonstances se reproduisent.
Dans une telle perspective, la tâche principale du concepteur d'enseignement et de l'enseignant est de créer des *environnements d'étude substantiels.* Ceux-ci sont définis par Wittmann dans les termes suivants :

> "Un tel environnement représente des objectifs, contenus et principes centraux pour l'enseignement des mathématiques à un certain niveau.
>
> Il est en relation avec des contenus, procédures et processus mathématiques significatifs situés au-delà de ce niveau, et est une source riche d'activités mathématiques.
>
> Il est flexible et peut être adapté aux conditions particulières prévalant dans la classe.
>
> Il intègre les aspects mathématique, psychologique et pédagogique de l'enseignement des mathématiques, et constitue de ce fait un champ prometteur pour la recherche empirique."

De tels environnements substantiels s'appuient souvent sur l'utilisation de ce que Wittmann appelle des *représentations d'objets mathématiques* : par exemple des jetons, des polygones en carton, des graphiques simples, *etc*. Ces matériaux se situent entre les concepts mathématiques abstraits et les objets quotidiens, ceux-ci étant souvent surchargés de connotations concrètes sans relation avec les mathématiques en cause.
Il insiste aussi sur les capacités de base, qui doivent être entra"nées de façon ordonnée et progressive, en relation avec l'expérimentation des patterns.
Enfin, Wittmann insiste sur la conception de *trajectoires d'apprentissage*[5], une classe donnée de patterns, des plus simples aux plus élaborés, étant revisitée plusieurs fois et conduisant à des contenus mathématiques toujours nouveaux et plus généraux. Il parle à cet égard d'une approche globale de l'éducation mathématique depuis l'enfance jusqu'à l'âge adulte.

Schœnfeld, Tall et Wittmann ont considéré l'apprentissage des mathématiques en général, en illustrant leurs propos d'exemples tirés de divers domaines des

---

[3]A design science.

4Nous préférons ne pas traduire ce mot.

[5]Learning trajectories.

mathématiques scolaires. N. Rouche pour sa part attire l'attention sur le développement de chaque théorie mathématique en particulier. Il traite en détail de la structure linéaire.
Réalisant l'impossibilité d'apprendre une structure mathématique abstraite à partir de la prime enfance, il considère la nécessité pour les concepts et propriétés mathématiques de se développer à partir de la pensée commune. Sur le chemin de la structure linéaire, on trouve les avatars successifs des notions de rapport et de proportionnalité :

– le rapport, exprimé par un nombre naturel, entre deux grandeurs de la même espèce (non encore mesurées) ;
– la proportionnalité entre deux grandeurs d'espèces différentes ;
– la notion de mesure en tant que proportionnalité entre grandeurs et nombres avec, pour arriver à des mesures de plus en plus précises, les approfondissements successifs de la notion de nombre, depuis les naturels jusqu'aux réels positifs ;
– la proportionnalité entre deux grandeurs mesurées, et ensuite entre deux nombres réels abstraits ;
– la mutation de la proportionnalité due à l'irruption des quantités négatives ;
– et enfin la "proportionnalité" entre grandeurs dirigées et vecteurs, le coefficient de proportionnalité devenant la matrice d'une transformation linéaire.

C'est là un exemple de *théorie génétique*. Une telle théorie est une construction rationnelle consistant en

> "une suite de notions, de théories locales, de structures, partant de l'expérience commune et s'acheminant vers les mathématiques constituées. Essentiellement, ces notions sont de généralité croissante, chacune étant pertinente dans un contexte plus large que la précédente. Passer de l'une à la suivante est fortement motivé par des questions, des lacunes observées, des obstacles ou le besoin d'une compréhension nouvelle. Chaque nouvelle étape théorique apparaît comme une réponse adaptée, efficace, aux difficultés rencontrées, aux nouveaux contextes pris en compte. Elle s'enracine dans ce qui précède et qui est sa source principale sur les plans du sens et de l'intuition."

Une telle description nous paraît justifier le besoin de théories génétiques.

Venons-en maintenant à M. Artigue, qui a introduit et commenté trois domaines de recherche distincts.
Premièrement, elle montre les raisons de s'intéresser aux flexibilités des apprentissages, parlant

> "d'une vision plus équilibrée des rapports ente ce que l'on pourrait appeler une conceptualisation verticale, par abstraction, généralisation et insertion dans des structures, et

> une conceptualisation horizontale par connexions entre contextes, domaines, formes de représentation sémiotiques.”

Comme exemple, elle cite la distinction, due à Sierpinska s’exprimant sur l’algèbre linéaire, entre les points de vue *géométrique-synthétique* (des droites, des plans, des variétés, …), *arithmétique-analytique* (des équations, des matrices, …) et *analytique-structurel* (des axiomes et du raisonnement formel).
Ensuite, Artigue explique la transition difficile entre le lycée et l’université, en insistant moins sur les difficultés individuelles des étudiants que sur ce qu’elle appelle des *micro-ruptures* entre les deux institutions : la nécessité (à l’université) d’étudier plus vite, des tâches plus variées, davantage d’autonomie (moins d’indications pour aider les étudiants dans les exercices), *etc*. C’est là un point de vue anthropologique inspiré par Chevallard, l’insistance étant déplacée de l’individu vers l’organisation et les habitudes institutionnelles.
Enfin, elle explique l’intérêt qu’il y a à explorer l’enseignement des mathématiques aux ingénieurs, aux économistes et aux autres utilisateurs de mathématiques. Dans de tels contextes d’enseignement, le schéma qui va des structures vers les applications (aujourd’hui s’appuyant sur des logiciels) semble inapproprié en comparaison avec celui qui, à l’opposé, utilise les logiciels pour motiver l’étude des structures. Dans le même contexte, la modélisation des situations réelles devrait être considérée comme une démarche essentielle, et non comme un moyen d’illustrer un morceau de mathématique pure.
Alors que les exemples d’Artigue sont presque tous pris au niveau universitaire, les questions qu’elle soulève sont pertinentes et sont matières à réflexion à tous les niveaux scolaires.

Considérons maintenant la conférence plénière d’A. Sierpinska. La question principale qu’elle a traitée est la suivante : comment se fait-il que toute réforme soit immédiatement critiquée et conduise quasiment d’emblée à une nouvelle réforme ? Sa conférence a présenté :

- l’élaboration de lignes conductrices traversant les contenus mathématiques,
- la sélection des matières,
- l’idée d’étudier pour comprendre, en négligeant les procédures,
- l’apprentissage par résolution de problèmes,
- le développement d’une pensée autonome,
- la création d’instruments d’évaluation,
- les moyens d’entretenir la motivation des élèves,
- et les usages pertinents de la technologie.

Enfin, Sierpinska suggère que des recherches didactiques appropriées, orientées clairement vers la réalité, évitant les pièges idéologiques, pourraient aider à réconcilier le désirable avec le possible. Un exemple parmi d'autres : de telles recherches pourraient valider un concept tel que celui de *connaissance générative* (dé à A. Morf), avec une loi affirmant que des connaissances génératives ont un pouvoir multiplicatif, tandis que les connaissances non génératives sont d'ordinaire simplement accumulées.
Ainsi, pour l'essentiel, Sierpinska nous a donné un sain avertissement concernant l'enseignement à tous les niveaux. Les auteurs de la présente synthèse supposent qu'elle reconnaîtrait avec eux la difficulté, dans certains cas, de discerner idéologie et science. Toute question dans le domaine complexe de l'éducation mathématique ne peut pas recevoir une réponse certaine, et une opinion soigneusement argumentée est plus sûre qu'une simple opinion.

Mentionnons enfin la conférence plénière de J-P. Kahane intitulée *Petits problèmes venus d'ailleurs*. Elle a illustré le fait que la réflexion mathématique trouve à s'alimenter dans des situations très diverses, comme par exemple l'évaluation des limites du saut à la perche ou l'étude des groupements des pingouins sur la banquise. Cet exposé n'est pas repris dans le présent volume.

2. Les communications et ateliers

Passons maintenant en revue les communications et ateliers du colloque. Beaucoup d'entre eux avaient trait à une matière mathématique particulière, telle par exemple que la proportionnalité, la géométrie, l'analyse ou la logique. D'autres évoquaient des points de vue généraux sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Commençons par ces dernières.

2.1. Trois façons d'envisager les concepts

F. Hitt théorise et illustre la différence entre un concept saisi par une définition dans les strictes limites d'une théorie, et le même concept donnant lieu à des représentations mentales variées. En s'appuyant sur l'exemple de la limite, il défend l'intérêt des articulations entre les diverses représentations, comme moyens d'une compréhension profonde.
J. Soto-Andrade explique le rôle intéressant joué en mathématiques par les métaphores, les analogies et les comparaisons. Ses exemples concernent l'utilisation des masses pour représenter les distributions de probabilités, des métaphores diverses pour les mouvements stochastiques et la balance pour expliquer les équations. Il témoigne de plusieurs expériences d'enseignement soutenues par l'idée de prendre un appui explicite sur des métaphores.
Renvoyant à un contexte historique très large, K. Volkert confronte deux types d'attitudes scientifiques : le premier consiste à étudier le "normal", en essayant

d'éliminer les exceptions, qui apparaissent souvent comme des “monstres”.

Ces trois contributions évoquent de diverses façons ce qu'Artigue (voir ci-dessus) appelle les points de vue horizontal et vertical sur les concepts. De telles considérations sont pertinentes et sont matière à réflexion à tous les niveaux de l'éducation.

2.2. L'histoire et les arts

M. Ballieu et M-F. Guissard défendent le recours à l'histoire – y compris en retournant aux textes originaux – et aux arts visuels dans l'enseignement des mathématiques, particulièrement en vue de motiver les élèves en difficulté et de leur restituer le plaisir d'apprendre. Ils développent deux exemples : les équations du deuxième degré, telles que les résolvait al-Hwarizmi, et le groupe des frises en art décoratif. Ce deuxième exemple commence, à un niveau élémentaire, par la création de diverses frises, suivie par une classification correspondant aux propriétés de symétrie et une élaboration des sept groupes de frises.
En s'appuyant sur le célèbre théorème d'APOLLONIUS comme exemple essentiel, F. Bšttcher illustre aussi l'intérêt de lire en classe des textes originaux. Elle montre qu'en suivant l'approche synthétique euclidienne de Viète, on découvre, par l'analyse du problème, comment construire et vérifier une solution. La figure fournit une solution, représentative des autres, et prévoir dans ce cadre le nombre de solutions est difficile. En suivant la méthode analytique de Descartes, on se centre sur l'analyse, la synthèse pouvant être quasiment ignorée, et la recherche du nombre de solutions devient assez facile. La figure ne joue plus alors qu'un rôle d'illustration.
Nous aurions pu classer la contribution de Boettcher avec celles consacrées à la géométrie, puisque son unique exemple est géométrique. Toutefois, Ballieu-Guissard et Boettcher pris ensemble nous rappellent que l'histoire et les arts visuels ont une relation naturelle et profonde avec les mathématiques, ce qui peut être exploité à tous les niveaux de l'école.

Venons-en maintenant à ces communications et ateliers qui ont pris pour sujet une matière mathématique particulière.

2.3. La proportionnalité

F. Jaquet analyse les réponses d'un grand nombre d'élèves à diverses questions relatives à des situations linéaires et non linéaires. Il observe l'apparition fréquente de l'illusion de linéarité, avec peu de variations d'un pays à l'autre, mais des différences significatives selon les âges des élèves, de la fin de l'école primaire jusqu'à la fin du collège. En bref, les étudiants les plus âgés recourent plus souvent à des procédures plus formelles. Certaines variables didactiques relatives aux

questions posées sont : la mention explicite – ou non – du coefficient de proportionnalité, la taille des nombres en cause et la régularité ou l'irrégularité dans la présentation des données.
P.-F. Burgermeister et D. Coray observent les réactions d'élèves d'environ 12 à 13 ans à certaines questions consistant en la recherche d'une quatrième proportionnelle, ou qui semblent se rapporter à une telle recherche. Les deux erreurs principales sont l'usage erroné du modèle additif et l'illusion de linéarité. Les auteurs étudient les différents types de contrôles et de vérifications que les élèves utilisent quand ils doutent de leur choix d'une méthode de résolution. Ils défendent non seulement l'étude de telles introspections créatives par les élèves, mais soulèvent aussi la question de savoir comment promouvoir ces introspections de manière appropriée.
Ces deux contributions sont relatives à des élèves d'âges comparables, mais elles peuvent bien entendu être mises en relation avec la vue longitudinale de la structure linéaire développée par Rouche.

2.4. La géométrie

C. Houdement et A. Kuzniak relèvent et analysent les malentendus qui apparaissent souvent du fait que divers interlocuteurs (principalement un enseignant et ses élèves) peuvent, face à un problème, recourir à des paradigmes différents. Un paradigme est défini et décrit en termes de croyances et, en particulier en géométrie, en termes d'intuitions, de mesures, de raisonnements et d'axiomes. Le résultat est que les partenaires dans la classe agissent souvent dans des *espaces de travail* différents. Cette contribution de Houdement et KUZNIAK peut être mise en relation avec l'analyse de la résolution de problèmes par Schœnfeld. Celui-ci observe l'apparition de désaccords semblables entre les univers mentaux de l'enseignant et des élèves.
Bien qu'il ne traite pas de géométrie à proprement parler, mentionnons toutefois ici la contribution d'Erdogan, à cause de la relation qu'elle entretient avec celle de Houdement et Kuzniak. En examinant des questions posées par des élèves en difficulté sur certains forums d'Internet, Erdogan illustre et théorise les malentendus entre les élèves et l'enseignant dus au manque de clarté du contrat didactique.
P. Marchand traite du développement d'images mentales de diverses sortes (statiques, cinétiques, transformationnelles) concernant les objets de l'espace et les actions dans l'espace. Elle s'interroge sur les moyens de promouvoir de telles images. Celles-ci sont contrastées avec les connaissances géométriques discursives des mêmes objets et actions. Une idée centrale est de demander aux élèves de penser à une situation spatiale, de concevoir une construction ou d'imaginer un mouvement en l'absence des objets à manipuler. L'inspiration principale de cette étude vient d'une confrontation entre l'enseignement des mathématiques d'une

part, et celui de la gymnastique et des sports de l'autre.
La notion de symétrie est familière aux enfants dans son acception commune (par ex. la symétrie du corps humain ou celle d'un papillon). M. Roelens montre qu'elle peut être reconnue au début de l'école secondaire dans son sens généralisé, associé avec toutes les transformations isométriques. De plus, les élèves d'environ 15 ans sont capables de créer des objets symétriques de diverses sortes et, en ce faisant, de se familiariser avec certains groupes de symétries. À la fin de l'école secondaire, ils peuvent comparer différents objets quant à leurs symétries et leur *degré* de symétrie, ce qui leur apporte, à un niveau pré-formel, une introduction aux notions de groupe et de sous-groupe. La contribution de Roelens s'accorde pleinement avec la partie de la communication de Ballieu et Guissard consacrée aux frises (voir ci-dessus).
Ch. Bouckaert décrit en détail le curriculum développé par M. Demal pour l'enseignement de la géométrie depuis 5 ans jusqu'à au moins 14 ans. Les idées centrales inspirant cette entreprise sont celles de l'étude des invariants des figures et solides dans des transformations (tout d'abord réalisées via des mouvements), une insistance sur la logique et les retours fréquents vers les notions déjà vues, en suivant le principe de l'enseignement en spirale. Ce principe concerne les objets géométriques, les transformations, la logique et l'approche scientifique.
F. Buekenhout présente un modèle théorique simple et efficace pour expliquer et analyser l'orientation des figures et des solides, renvoyant à la notion de chiralité. Ce modèle est abstrait, mais il est présenté dans un vocabulaire qui favorise les intuitions. Il a inspiré une suite de leçons données plusieurs fois avec succès à la fin de l'école secondaire par M. Frédérickx. Une communication sur ce sujet a été présentée par F. Buekenhout et M. Frédérickx.
Le Groupe d'Enseignement Mathématique (voir G. Cuisinier et al.) montre, en s'appuyant sur beaucoup d'exemples et quelques expériences en classe, que les représentations planes de solides, qui ont joué un rôle crucial dans la constitution de la géométrie moderne, sont, par delà leur intérêt propre, une source authentique de découvertes et de familiarisation avec un grand nombre de propriétés géométriques, de la prime enfance à l'âge adulte.
Ces six contributions concernent des facettes variées de l'enseignement de la géométrie qui, et ceci est remarquable, sont d'application à tous les âges de la scolarité :

– les malentendus possibles entre enseignant et élèves renvoyant à des paradigmes non clarifiés (point de vue qui peut être étendu au-delà des limites de la géométrie) ;
– le développement d'images mentales et la saisie intuitive de l'espace ;
– les mouvements, symétries et transformations depuis leur appréhension intuitive jusqu'à la théorie des groupes (noyau central de la connaissance

géométrique) ;

- et les représentations planes, non seulement matière géométrique par elles-mêmes, mais source importante d'idées géométriques en général.

2.5 L'analyse

L. Grugnetti et al. présentent une approche de la notion de limite depuis l'école élémentaire jusqu'à la fin de l'école secondaire. Ils insistent sur une familiarisation précoce avec certaines questions d'approximation et sur le rôle joué par les limitations des instruments de mesure, des calculatrices, et de la représentation des nombres dans le système décimal. Leurs expérimentations dans des classes concernent le paradoxe d'Achille et la suite harmonique d'une part, et la duplication du carré avec le problème de la racine carrée de 2 de l'autre.
Bien que les limites soient considérées habituellement comme une matière avancée, Grugnetti et al. nous rappellent avec raison que la question de l'infini est rencontrée précocement par les enfants, et que par conséquent il faut l'affronter aussi tôt que nécessaire.

2.6 La logique

M. Bailleul relève d'abord les allusions à la logique et au raisonnement dans le programme français de l'école élémentaire : ces allusions renvoient davantage à la rigueur et à la soumission qu'à un quelconque plaisir intellectuel. Ensuite il présente deux matériels (Logix et Mystero) visant à développer l'usage des négations, conjonctions et implications. Enfin, il décrit les modalités et l'efficacité de certaines discussions d'intérêt général organisées en classe, en vue de développer le sens d'une argumentation saine.

3. Conclusions

Pour conclure cette synthèse, commençons par retenir six grands axes de réflexion ou points de vue fondamentaux, auxquels les diverses contributions peuvent être rattachées.

I. D'abord, il y a les facteurs constants en jeu dans la *résolution de problèmes* et la compréhension des stratégies générales et des actions successives des personnes résolvant des problèmes (Schœnfeld) ;

II. Ensuite, *la naissance et le développement de la pensée mathématique* de l'enfance à l'âge adulte, décrits dans leurs modalités fondamentales (Tall) ;

III. Puis le développement de la pensée et des connaissances mathématiques en tant que favorisée par des stratégies soigneusement adaptées : *les principes d'organisation d'un enseignement efficace* (Wittmann) ;

IV. Ensuite, *le développement de sujets mathématiques ou de structures importants* : la linéarité (Rouche), les transformations et les groupes (Bouckaert, Roelens, Ballieu et Guissard), l'orientation (Buekenhout et Frédérickx), les représentations planes et les projections (Cuisinier et al.), les limites (Grugnetti). Jaquet ainsi que Burgermeister et Coray ont étudié la problématique de la linéarité aux environs de 11 à 15 ans. Bailleul a parlé de la naissance de la logique. Dans tous les cas, on remarque l'apparition précoce d'une forme intuitive, élémentaire, d'une structure, quelque chose comme une structure à l'état naissant ;

V. *La nature des concepts mathématiques*, avec deux facettes principales, à savoir la verticale et l'horizontale : la flexibilité (Artigue), les images mentales et les représentations (Marchand, Hitt), les métaphores (Soto-Andrade), le normal confronté à l'exceptionnel (Volkert), une pluralité de paradigmes (Houdement et Kuzniak), un soutien trouvé dans l'histoire et les arts (Bšttcher ainsi que Ballieu et Guissard), et la notion de site mathématique (Erdogan) ;

VI. Les points de vue anthropologique et sociologique. Les malentendus et dysfonctionnements dus au manque de coordination entre institutions (Artigue) et enfin la myopie idéologique et le wishful thinking (Sierpinska).

Ces six axes ne sont pas beaucoup plus qu'une table des matières. Voyons maintenant s'il serait possible de formuler quelques observations et recommandations qui feraient sens pour ceux – enseignants, formateurs d'enseignants, concepteurs de programmes, responsables politiques et administratifs – qui exercent une responsabilité dans le domaine de l'éducation mathématique.

A. Les deux facettes de la pensée mathématique

La pensée mathématique est un contrepoint entre réalité et modèle abstrait, contexte et structure, c'est-à-dire phénomènes et théorie, représentations et propriétés abstraites, objets réels ou concrets et symboles. Ces deux facettes sont souvent qualifiées respectivement d'horizontale et de verticale. Toutes deux sont présentes et importantes à toutes les étapes de l'apprentissage, même si la verticale joue un rôle croissant au fur et à mesure que l'on avance dans les âges scolaires.

B. Une tendance d'ensemble vers la généralisation

La pensée et la connaissance mathématiques évoluent des structures élémentaires vers des structures de plus en plus générales. En devenant plus générales, les structures renvoient à un nombre croissant de référents, elles recouvrent de plus en plus d'objets, de situations et de phénomènes. Sur le chemin de la généralisation, on crée des symboles et des règles de calcul. Automatiser certaines parties de la pensée n'est pas un objectif en soi, c'est la condition pour libérer l'esprit et lui permettre de penser plus loin.

C. Des mutations

Chaque pas qui va d'un concept vers un autre plus général est une mutation, un soudain agrandissement du champ des référents avec, le plus souvent, un profond changement de signification (par exemple, des nombres naturels aux fractions positives, ou encore des nombres positifs vers les relatifs). Par conséquent, “la réorganisation des connaissances est une part importante de la construction des curriculums” (Tall).

D. Des connaissances qui aident ou embarrassent

Alors qu'une notion est habituellement mieux comprise grâce aux situations variées o elle s'applique, ces situations et la notion elle-même peuvent faire obstacle à sa généralisation. La signification ancienne subsiste dans le contexte ancien, mais elle change souvent radicalement dans le contexte élargi : d'o une incohérence apparente. Surmonter l'obstacle revient à réaliser la raison d'être de la généralisation.

E. Des niveaux de rigueur

Les garants de la vérité évoluent de la prime enfance à l'âge adulte. Il y a des niveaux successifs de rigueur (Freudenthal). Les premières preuves sont “paradigmatiques” : je vois un exemple, et je suis sûr que les choses se passeraient de la même façon dans *tous* les exemples analogues. Ensuite vient l'utilisation des implications, en partant de propriétés acceptées comme vraies pour une bonne raison quelconque. Puis vient la construction des théories axiomatiques amples.

F. Une vue longitudinale

L'éducation mathématique doit être envisagée dans son ensemble, de la prime enfance à l'âge adulte, car il existe d'importantes filiations depuis son début jusqu'à son terme. C'est pourquoi

– il faut favoriser tous les moyens qui permettent de renforcer la cohérence et de mettre en évidence la direction d'ensemble et le sens global des programmes ;

– il faut organiser des séquences (des trajectoires) d'apprentissage à long terme, s'inspirer de l'idée d'enseignement en spirale (Wittmann) ;

– la formation initiale et continue des enseignants devrait comprendre une instruction sur la façon dont les principales théories mathématiques évoluent à partir de leurs racines dans la pensée commune et de mutation en mutation, jusqu'à leur maturité (Rouche).

G. La résolution de problèmes

En plus d'être une science, les mathématiques sont une activité, qui consiste principalement à résoudre des problèmes. Pour enseigner la résolution de problèmes, les enseignants eux-mêmes devraient résoudre habituellement des problèmes : comment arriver à cela ?

H. Apprendre une science toute faite ou apprendre soi-même en découvrant

Les deux options sont trop radicales. Une solution intermédiaire est plus efficace, l'enseignant aidant les élèves à construire des relations entre les idées (Tall).

J. Les conditions sociales

Une attention accrue devrait être accordée aux cultures particulières des institutions d'enseignement. Les discontinuités au passage de l'une d'elles à la suivante et les différences de conception entre les écoles successives – la maternelle, l'école primaire, le collège et le lycée – peuvent déconcerter une proportion importante des élèves (Artigue).

K. Des politiques réalistes

Toutes les observations et recommandations ci-dessus demeureront lettres mortes et certaines seront même contre-productives si les mesures prises pour les mettre en œuvre ne tiennent pas compte du contexte réel et actuel de l'éducation (Sierpinska).