À LA RECHERCHE DE LA FORME DE LA TERRE

Jean LEFORT

Le texte que l'on trouvera ci-après est une refonte de la conférence que j'ai prononcée en juin 2005 au lycée René Cassin à l'invitation de la Régionale APMEP de Strasbourg. Je remercie Nicole Bopp pour le travail de relecture et les conseils qu'elle m'a donnés pour améliorer et préciser certains passages.

Résumé : Depuis toujours l'Homme a cherché à expliquer le monde dans lequel il vit. D'abord mythiques les explications se font de plus en plus précises et scientifiques. Il y a 23 siècles apparaissent les premières mesures. À partir du XVII^{e} siècle, la triangulation puis la théorie font apparaître une Terre en forme d'ellipsoïde. À la fin du XIX^{e} siècle, on comprend qu'il faut faire appel à une surface orthogonale au champ de pesanteur, le géoïde. L'avènement des satellites artificiels et la création du GPS permettent aujourd'hui une excellente précision.

Mots-clés : Méridien - Ellipsoïde - Géoïde – GPS – Triangulation - Ératosthène – Huygens – Histoire des mathématiques – Géographie.

Introduction

Les interrogations de l'Homme sur les raisons de son existence, sur sa place dans l'Univers, sur son rôle, l'ont amené à essayer de comprendre le monde dans lequel il vit. Les mythes de création, les cosmogonies, vont de pair avec une réflexion sur la forme du monde ou de l'Univers.

L'imagination de l'homme est grande, mais pour expliquer il faut toujours partir du connu. Le connu c'est la tente où vivent les nomades, c'est le fleuve où s'abreuvent tant les hommes que les troupeaux et les animaux, ce sont les phénomènes météorologiques apportant bien-être ou malheurs, *etc.*

Les explications sont toujours anthropocentriques et gardons-nous de juger avec les connaissances actuelles les idées d'il y a 5000 ans. C'est grâce à la réflexion de ces ancêtres que nous avons pu progresser et faire que la science nous donne pouvoir sur le monde.

La réflexion scientifique c'est la méthode des essais et des erreurs, c'est faire des hypothèses et les justifier par l'adéquation de leurs conclusions avec l'observable. Si nous affinons l'observable nous devons affiner nos hypothèses.

Je vais essayer d'illustrer ce propos en montrant comment a évolué la représentation de la Terre au cours des âges historiques.

1. Les premières idées

Chaque peuple, chaque époque a eu ses mythes originels expliquant à la fois la création du monde et celle des humains. Mais, même si ils ont le mérite de dépasser la simple explication physique pour expliquer aussi le psychisme, l'observation de divers phénomènes naturels s'accorde mal avec des idées aussi simples que celles développées dans ces légendes.

Quand les marins s'aventurèrent assez loin en mer, ils se rendirent compte qu'ils voyaient d'abord le sommet des montagnes avant d'en voir le pied, de même que ceux restés à terre voyaient d'abord le sommet des mâts avant de voir l'embarcation elle-même. On ne pouvait guère expliquer cela que par un bombement de la surface terrestre. Il faut aussi expliquer les éclipses autrement que par un gros animal qui cherche à manger le Soleil ou la Lune.

Pythagore, 6 siècles avant notre ère, fut sans doute le premier, mais l'idée devait être dans l'air du temps, à penser que le monde et la Terre sont de forme sphérique. Le cercle symbole d'éternel recommencement est considéré comme la figure la plus parfaite. La sphère, du même coup, est la figure solide la plus parfaite puisqu'elle est en tout point identique à elle-même. Il n'est pas question d'associer la ligne droite (ou le plan dans l'espace) car notre conception de ligne droite infinie n'existe pas chez les grecs. Tout au plus peut-on avoir un segment (que l'on peut prolonger) ou une figure géométrique plane aussi grande que l'on veut. Par conséquent la ligne droite n'est pas en tout point identique à elle-même puisqu'elle a deux bouts. En raison de la perfection de la sphère, l'Univers ne peut être que sphérique et la Terre également.

La réflexion sur la forme de la Terre va de pair avec une réflexion sur sa place dans l'Univers. On trouvera dans les écrits de Platon (–428, –348) les conceptions de Pythagore et surtout de son disciple Philolaos sur l'Univers. Il y a là, à côté d'intuitions géniales, une mystique du nombre 10 qui, entre autres idées, empêche une explication correcte du mouvement des planètes.

Il est beaucoup plus instructif de lire les réflexions d'Aristote dans son ouvrage "Du Ciel" où il donne une série de raisons en faveur de la sphéricité de la Terre, raisons qu'il est intéressant de comparer avec nos connaissances actuelles :

> *Quant à sa forme* [de la Terre] *elle est nécessairement sphérique. En effet, chaque portion de terre a un poids jusqu'à son arrivée au centre, et la plus petite poussée par la plus grande, n'amène pas une surface ondulée, mais plutôt un tassement et une réunion d'une partie à une autre jusqu'à ce que le centre soit atteint* […]
>
> *Une autre preuve nous est fournit par l'évidence sensible. Car, sans cette sphéricité, les éclipses de Lune ne présenteraient pas les segments tels que nous les voyons. C'est un fait que si, dans les aspects qu'elle nous offre chaque mois, la Lune revêt toutes les variétés (puisqu'elle devient droite, bombée et concave), dans les éclipses la ligne qui la limite est toujours une ligne courbe, de sorte que, s'il est vrai que l'éclipse est due à l'interposition de la Terre, c'est la forme de la surface de la Terre qui, étant sphérique, sera la cause de la forme de cette ligne. – En outre, nos observations des astres montrent avec évidence, non seulement que la Terre est circulaire, mais encore que c'est un cercle qui n'est pas d'une grandeur considérable. En effet, il suffit que nous nous déplacions tant soit peu vers le Sud ou vers le Nord, pour amener une évidente modification du cercle de l'horizon, de sorte que les étoiles qui sont au-dessus de nos têtes sont tout à fait changées, et n'apparaissent plus les mêmes si nous nous déplaçons vers le Nord ou vers le Sud. En effet, il y a certaines étoiles qu'on voit en Égypte et dans le voisinage de Chypre, et qu'on n'aperçoit pas dans les régions situées au Nord ; et les étoiles qui, dans la région du Nord, n'échappent jamais à notre champ visuel, ont leur coucher dans les régions du Sud.* […]

2. La grandeur de la Terre

La Terre est donc sphérique. Mais quelle est donc sa dimension ? La première expérience connue est celle d'Ératosthène (–284, –192) dont tout le monde a entendu parler mais que nous allons reprendre en détail pour comprendre les limites de ses calculs.

Chargé par Ptolémée III Évergète de diriger la bibliothèque d'Alexandrie, Ératosthène fait la constatation suivante. En mesurant l'ombre d'un obélisque à Alexandrie le jour du solstice d'été, il évalue la distance zénithale du Soleil à 1/50 de circonférence (soit 7° 12'), il sait que ce même jour, à Syène (l'actuelle Assouan) le fond des puits est éclairé par le Soleil ce qui prouve que le Soleil passe au zénith. Il peut donc en conclure que la différence de latitude entre les deux villes est de 7° 12' (*figure 1*). En fait ceci n'est pas exact, on s'en doute. Assouan se trouve par 24° 54' N donc un peu plus au nord que le tropique qui, lui, se trouve par 23° 27' N. Ceci correspond à environ 160 Km mais n'empêche pas le Soleil d'éclairer le fond des puits. Par ailleurs Alexandrie a une latitude de 31° 12', mais Ératosthène l'évalue à 30° 39' soit un écart d'environ 60 Km. Mais heureusement les deux erreurs sont dans le même sens et elles se compensent donc en partie.

Une autre source d'erreur provient du fait que, contrairement à ce qu'estime notre savant, les deux villes ne sont pas sur le même méridien mais à 3° de longitude de différence (*figure 2*). Soit encore une erreur de l'ordre de 75 Km. Mais ceci ne va pas beaucoup jouer sur l'évaluation finale.

Reste à mesurer la distance en ligne droite de Syène à Alexandrie. Là c'est le règne de l'approximation. Si pour tous le Nil coule du Sud vers le Nord, son cours est loin d'être rectiligne. Que l'évaluation se fasse en journées de marche le long du fleuve ou en journée de navigation sur le fleuve, il faut tenir compte des boucles et dans le deuxième cas, de la vitesse du courant qui est loin d'être la même tout au long du parcours. Une mesure approximative sur une carte conduit à une différence de 870 Km en ligne droite à 1140 Km en suivant le fleuve. On voit donc que c'est sur ce point que l'erreur est la plus importante. Ératosthène évalue la distance en ligne droite à 5 040 stades.

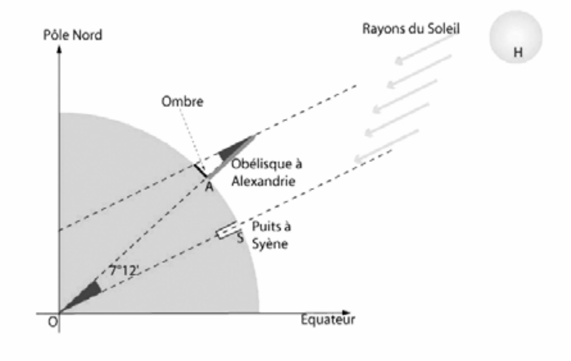


Figure 1 : Mesure de la Terre par Ératosthène

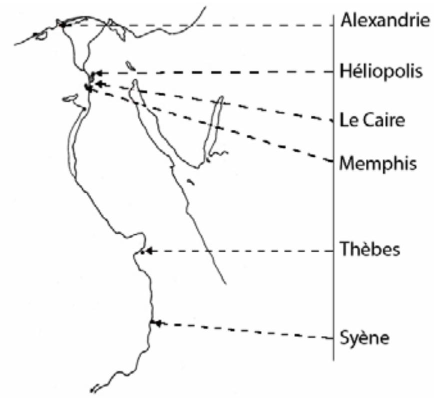


Figure 2 : Aperçu de l'Égypte ancienne

Deux remarques. Personne ne sait exactement combien valait le stade. Certes le stade fait 600 pieds, mais selon les pays le pied varie de 25 à 32 cm. Or Ératosthène est grec mais travaille en Égypte. Quel pied a-t-il utilisé ? Nous n'en savons rien.

Par ailleurs on peut s'étonner du choix de 5 040 stades pour 1/50 de circonférence. Cela fait exactement 252 000 stades pour la circonférence soit 700 stades au degré. A croire que, comme notre mètre, le stade est rattaché à la mesure du méridien. Il faut néanmoins admirer la prouesse d'Ératosthène. Son ordre de grandeur est très correct : entre 37 800 et 48 400 Km de circonférence.

L'idée d'Eratosthène fut reprise et améliorée vers 825. Le calife de Bagdad Al-Ma'mûn (786, 833) commandita deux expéditions pour déterminer la forme de la Terre. Une première expédition alla dans les plaines de Shinar, le long des côtes sud de la mer rouge. Elle détermina deux points sur le même méridien séparés de 1° en mesurant la hauteur du pôle à partir de la position des étoiles circumpolaires, puis elle mesura, en coudées hachémites, la distance entre ces deux points. En multipliant par 360, elle aboutit à une circonférence de 20 400 milles. Cependant ce calcul repose sur l'a priori d'une Terre sphérique. Pour justifier cette hypothèse une deuxième expédition fut envoyée faire deux mesures du côté de Sinjâr à 120 Km à l'ouest de Mossoul. Deux équipes, partant du même point, l'une vers le nord, l'autre vers le sud firent également une mesure d'un arc de 1° et la concordance de leur résultat permis d'affirmer la rotondité de la Terre.

Mais comme pour la mesure d'Ératosthène, nous ne savons pas transcrire en kilomètres les 20 400 milles, faute de connaître d'une part, le nombre de coudées dans un mille et d'autre part, la valeur de la coudée hachémite dans le système international. Diverses évaluations ont été faites pour la coudée qui oscille entre 493,2 mm à 501,2 mm, la valeur la plus probable étant 498,75 mm. Par ailleurs le mille contient-il 3000 ou 4000 coudées, plutôt cette dernière valeur. Les thuriféraires de la civilisation arabo-musulmane affirment que cela donne une circonférence de 39 986 Km soit une erreur de 877 m sur le degré de méridien à la latitude d'environ 15°.

Pour la petite histoire, retenons qu'il se trouva un des plus renommés docteurs en théologie, Takyuddin, qui menaça des pires châtiments divins un calife qui se permettait de troubler la dévotion des fidèles musulmans en diffusant des idées fausses et une philosophie athée, puisqu'il est bien écrit dans le Coran que la terre est plate et carrée ! L'avantage, en l'occurrence, de l'islam, c'est qu'Al-Ma'mun était aussi chef spirituel, ce qui lui permit de passer outre les foudres de Takyuddin.

3. Les mouvements de la Terre

L'étude de la forme de la Terre est inséparable de l'étude de ses mouvements éventuels et de sa place dans l'Univers. L'idée que c'est la Terre qui se déplace et non pas le ciel est une idée ancienne. Ainsi Aristarque de Samos (–310, –230) proposa, comme explication du mouvement des astres, la rotation de la Terre sur elle-même et son mouvement autour du Soleil. Déjà il se fera accuser d'impiété. On objecta également à Aristarque que si la Terre tournait autour du Soleil, on ne verrait pas les étoiles dans la même direction selon les saisons. À quoi Aristarque répondit que les distances des étoiles étaient telles que tout se passait comme si la Terre et le Soleil étaient des points.

La plupart des savants reviendront au cours des siècles sur cette possibilité de mouvements de la Terre. En faveur de ces mouvements ils prôneront le fait que l'on ne peut que constater des mouvements relatifs et qu'il est plus facile de ne faire bouger que la Terre qui est relativement petite que tous le cosmos et la sphère des fixes. Mais faute de comprendre la notion de force et même la simple composition des vitesses, ils n'ont guère d'arguments à rétorquer à ceux qui mettent en avant le fait que, par exemple, les oiseaux vont aussi vite d'est en ouest que d'ouest en est, qu'une flèche tirée à la verticale ne dévie pas et retombe aux pieds de l'archer,… C'est donc souvent des arguments purement idéologiques qui les feront pencher dans un sens ou dans l'autre.

Aryabhata vers 500 en Inde, Al-Bîrûni vers 1000 à Bagdad, pour ne citer qu'eux, penchèrent pour un mouvement de la Terre. Dans l'Europe chrétienne, malgré l'idéologie dominante due à Aristote (–384, –322) qui condamne tout mouvement, le débat d'idées est important comme en témoignent les écrits de Jean Buridan (1300, 1366) :

> *La Terre est sphérique ; et la figure sphérique comporte une certaine aptitude au mouvement sphérique ou circulaire. Or, il en est de l'aptitude naturelle comme il vient d'être dit de la puissance : on ne peut pas admettre qu'elle soit éternellement inefficace.* […]
> *Beaucoup ont tenu pour probable qu'on peut sans contredire à nos perceptions, admettre que la Terre se meut ainsi en cercle ; que si l'on désigne une partie quelconque de la Terre, cette partie achève chaque jour une révolution qui part de l'occident pour aller à l'orient, et revenir à l'occident. Dès lors il faudrait admettre aussi que la sphère des étoiles est immobile : c'est le mouvement de la Terre qui nous donnerait le jour et la nuit, et constituerait le mouvement diurne. Notre cas serait pareil à celui d'un navigateur qui, sur son vaisseau en marche, se croirait immobile, et attribuerait le mouvement à un autre vaisseau, réellement au repos :* […]

Nicole Oresme (1320, 1382) précisa que l'étude du ciel peut aboutir à la constitution d'un savoir qui ne peut cependant pas avoir la prétention de nous faire connaître les intentions de Dieu qui, elles, sont insondables. La discussion du mouvement de la Terre est une hypothèse parmi d'autres car nous sommes incapables de discerner les causes finales de la Création. Dans ce cadre, la science est soumise à la théologie.

Nicolas de Cuse (1401, 1464) reprit ces arguments. Il précisa que si l'on se trouvait sur Mars on aurait l'impression que Mars est immobile et en conclut que l'Univers *a son centre partout et sa circonférence nulle part, puisque sa circonférence et son centre sont Dieu qui est partout et nulle part.*

On sait que finalement, c'est à partir des travaux de Galilée et la publication en 1588 de *De mundi aetheri recentioribus phaenomenis* que l'on admit définitivement la rotation de la Terre ainsi que sa translation autour du Soleil. Restait à comprendre les raisons de ces mouvements.

4. Les premiers théoriciens

4.1. Galilée (1564, 1642)

S'il est assez facile de dater un événement physique, la naissance des idées est beaucoup plus délicate à déterminer puisque la rupture de la pensée résulte d'une longue maturation. L'invention de la lunette en Hollande, et son usage astronomique par Galilée vont donner un coup fatal à la dichotomie entre le monde infra lunaire, monde des hommes, corrompu par le péché, et le monde supra lunaire, celui parfait de Dieu. Malgré les critiques que font les péripatéticiens (ces philosophes aristotéliciens qui arpentent les rues pour y répandre leurs idées) sur l'usage d'un instrument qui ne donne pas à voir la réalité mais la travestit, Galilée saura convaincre le grand Duc de Venise et sa cour de l'utilité de cet instrument. C'est en voyant les montagnes de la Lune que Galilée se convainc de l'unité de l'Univers. Les lois sont les mêmes ici-bas et là-haut.

Je ne vais pas revenir sur les travaux de mécanique de Galilée. Il va étudier la composition des forces, montrer que la trajectoire d'un objet jeté est une parabole, étudier la cycloïde… Mais surtout il va introduire le premier principe de relativité en expliquant que rien ne distingue l'immobilité du mouvement rectiligne uniforme :

> *Enfermez-vous avec un ami dans une vaste salle sous le pont d'un grand navire, […] suspendez un seau dont l'eau tombe goutte à goutte par un orifice dans un autre bocal à col étroit posé sur le sol. Le navire étant arrêté, observez attentivement […] les gouttelettes tombant dans le bocal au sol ; et vous-même, lancez à un ami un objet et constatez que vous pouvez faire cela avec la même facilité dans l'une ou l'autre direction, quand les distances sont égales ; et qu'en sautant les pieds joints, vous traversez des espaces égaux dans tous les sens. Quand vous aurez observé avec soin toutes ces choses, […] faites marcher le navire aussi vite que vous voudrez, pourvu que le mouvement soit uniforme, sans oscillation par-ci ou par-là. Vous ne discernerez aucun changement dans tous les effets précédents et aucun d'eux ne vous dira si le navire est en marche ou arrêté : en sautant vous franchissez les mêmes espaces qu'auparavant ; vos sauts ne seront pas plus grands vers la poupe que vers la proue, bien que pendant le temps que vous restez en l'air, le plancher en dessous se déplace dans le sens contraire de votre saut, et en jetant quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de plus de force s'il se trouve à la poupe et vous à la proue que dans le cas contraire ; les gouttelettes tombent dans le bocal comme avant, bien que le bateau avance de plusieurs largeurs de main, pendant qu'elles se trouvent dans l'air ; […] et si, en brûlant une larme d'encens, on fait un peu de fumée, on la verra monter en haut et s'y maintenir sous forme d'un petit nuage, sans aller vers l'un ou l'autre côté. Et la raison pour quoi tous ces effets restent pareils est que le mouvement est commun au navire et à tout ce qu'il contient y compris l'air.*
> *[…] Un mouvement commun à plusieurs corps est nul et non advenu à l'égard de ces corps.*
>
> Dialogue, journée II, 1632

Ce sont indubitablement les idées de Galilée qui vont permettre l'essor de la physique au XVII^e^ et XVIII^e^ siècle. Mais si Galilée met en évidence des lois expérimentales, il n'a pas encore les moyens de trouver des lois générales qui permettent de faire des prévisions, ce qui est l'essence même de la science.

Notons que les perfectionnements de la lunette permettront de se rendre compte qu'une planète comme Jupiter est aplatie au pôle. Selon le principe de l'unité des lois physiques supra et sublunaires, si Jupiter est aplati, pourquoi pas la Terre ?

4.2. Kepler (1571, 1630)

On peut se demander en quoi Kepler, qui est avant tout connu pour sa découverte des trois lois qui portent son nom et qui régissent les mouvements des planètes, peut avoir à faire avec une étude sur la forme de la Terre. En fait, au même titre que Galilée, il met en place des lois expérimentales qui permettront ultérieurement à Newton de découvrir la théorie de la gravitation universelle.

4.3. Newton (1642, 1727)

L'histoire de la pomme a été trop souvent travestie et enjolivée. Très prosaïquement, Isaac Newton s'est posé la question suivante : "Pourquoi la pomme tombe-t-elle et la Lune ne tombe-t-elle pas ?" En montrant que la Lune tombe mais qu'elle avance suffisamment sur son orbite pour rester à la même distance de la Terre, Newton mettra au point la loi de la gravitation universelle. C'est une vraie loi théorique en ce sens qu'elle prédit les résultats expérimentaux de Galilée et de Kepler. Rappelons que, après des années de maturation et d'hésitation devant l'accueil qui aurait pu lui être fait, Newton publie en 1687 son œuvre majeure : "Philosophae naturalis principia mathematica".

Il n'est pas question de diminuer le mérite de Newton, mais il y a, à la fin du XVII^{e} siècle tout un développement des mathématiques qui va permettre la mise en place d'une théorie scientifique digne de ce nom. C'est le début du calcul différentiel et intégral, inventé par Newton (en parallèle avec Leibniz), mais il ne faut pas oublier le travail d'un Wallis, d'un Pascal…

Une fois en possession de sa théorie, Newton s'attaque à la forme de la Terre. Son idée de base, il la cite dans ses œuvres : *Si la Terre n'était pas un peu plus haute au voisinage de l'équateur qu'aux pôles, les mers baisseraient aux pôles et monteraient dans les régions équatoriales, inondant tout en ces lieux.* Newton va faire un calcul laborieux et très approximatif en supposant la Terre homogène et en équilibrant le poids de deux colonnes joignant le centre de la Terre, l'une au pôle, l'autre à l'équateur. En tenant compte de la rotation terrestre il montre que l'aplatissement vaut 1/230.

Remarquons toutefois que Newton avance une autre raison à l'existence du bourrelet équatorial : la chaleur qui, comme chacun sait, dilate les corps !

4.4. Huygens (1629, 1695)

Huygens va reprendre l'idée de Newton sur l'eau qui envahirait les régions équatoriales si la Terre était sphérique. Il démontre alors qu'à l'équilibre la surface de la Terre doit être en tout point orthogonale à la direction de la pesanteur. Cette pesanteur est la somme de la force attractive de la masse de la Terre (la gravité) et de la force centrifuge due à sa rotation diurne. Huygens va supposer que la masse de la Terre est concentrée au centre et il trouve une valeur de l'aplatissement de 1/578. Les calculs de Huygens peuvent être facilement refaits aujourd'hui avec les notations actuelles.

Plaçons nous dans un plan méridien et considérons un repère centré au centre de la Terre avec Oy axe des pôles et Ox un rayon équatorial. Notons $y = y(x)$ le profil du méridien. Un point P de coordonnées (x,y) de la surface terrestre subit une attraction newtonienne d'intensité $GM/(x^2+y^2)$ dirigée vers le centre O (G est la constante de la gravitation universelle et M la masse de la Terre). Cette attraction newtonienne est représentée par le vecteur

$$\vec{g}=\begin{cases}\dfrac{-GM}{x^2+y^2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \dfrac{-GM}{x^2+y^2}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}.$$

Par ailleurs la force centrifuge est perpendiculaire à *Oy* et vaut $\vec{f}=\begin{cases}\omega^2 x\\ 0\end{cases}$. En conclusion la pesanteur est représentée par le vecteur

$$\vec{g}+\vec{f}=\begin{cases}\dfrac{-GM}{x^2+y^2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\omega^2 x\\ \dfrac{-GM}{x^2+y^2}\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

qui doit être orthogonal à $\begin{cases}1\\ y'\end{cases}$. En effectuant le produit scalaire on obtient l'équation différentielle

$$-\frac{GM\ x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}+\omega^2 x-\frac{GM\ yy'}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=0 \quad \text{soit} \quad \frac{GM\left(x+yy'\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=\omega^2 x,$$

équation qui s'intègre à vue en

$$\frac{-GM}{\sqrt{x^2+y^2}}=\omega^2\frac{x^2}{2}+k.$$

On calcule la constante k en remarquant que pour $x=0$, $y=b$ et que pour $x=a$, $y=0$ ce qui conduit à

$$k=\frac{-GM}{b} \text{ et } \frac{-GM}{a}=\omega^2\frac{a^2}{2}-\frac{GM}{b}, \text{ soit en regroupant } \frac{a-b}{a}=\omega^2\frac{a^2 b}{2GM}. \qquad (*)$$

Prenons les valeurs actuelles des paramètres :

$GM = 3\,986\,005\times10^{8}$ m^3. s^{-2} ; $\omega = 7\,292\,115\times10^{-11}$ rd. s^{-1} et $a^2 b = (6\,371$ Km$)^3$.

On obtient pour l'aplatissement la valeur de

$$\frac{b-a}{a}=\frac{1}{579{,}75}.$$

On peut simplifier les calculs, comme l'avait fait Huygens en identifiant, dans le deuxième membre de (*), a et b au rayon moyen R connu à l'époque (les mesures de Picard de 1670 conduisaient à une circonférence de 40 036 Km) et en prenant pour $g=GM/R^2$ une valeur approchée de la pesanteur. La valeur obtenue diffère peu du résultat précédent, c'est ce qui importe.
On notera que la forme de la méridienne, dans le calcul de Huygens, n'est pas une ellipse mais une courbe qui, ici, s'en approche beaucoup :

$$\left(x^2+y^2\right)\left(\beta x^2-\gamma\right)^2=\alpha^2 \text{ avec } \alpha = 9{,}81 \text{ ; } \beta = 6{,}548\times10^{-23} \text{ ; } \gamma = 1{,}539\times10^{-6}.$$

4.5. Clairaut (1713, 1765)

C'est Clairaut qui parachèvera la théorie et signera l'acte de naissance de la géodésie dynamique. Mais nous sommes déjà au XVIII^e siècle. Il démontre que l'aplatissement de la surface d'une planète en équilibre ne dépend pas seulement de la masse et de la vitesse de rotation, mais encore de la répartition des masses à l'intérieur de la planète. Si la Terre est homogène, il retrouve la valeur de Newton, si toute la masse est concentrée au centre, c'est la valeur de Huygens. Clairaut ajoute que si la Terre était initialement fluide, les couches les plus denses sont les plus proches du centre et donc que la répartition des densités est intermédiaire entre le cas de Newton et celui de Huygens. Par suite son aplatissement est compris entre 1/578 et 1/230.

Surtout Clairaut va démontrer que la connaissance de la valeur de la pesanteur en deux points de latitudes différentes, valeurs qui peuvent être déterminées à l'aide des oscillations d'un pendule, permet de mesurer l'aplatissement du globe terrestre.

Malheureusement, l'imprécision des mesures de l'époque conduit à un rejet de la théorie de Clairaut et il faudra attendre 1825 pour que Laplace (1749, 1827) trouve un aplatissement de 1/308 à partir de la mesure d'un arc de méridien et 1/310 à partir de mesures de période de pendules. Les idées de Clairaut sont alors confirmées et l'on en vient, sur une proposition de Lamarck en 1802, à penser que la Terre se déforme lentement pour s'ajuster à sa figure d'équilibre.

5. La Terre est un ellipsoïde aplati

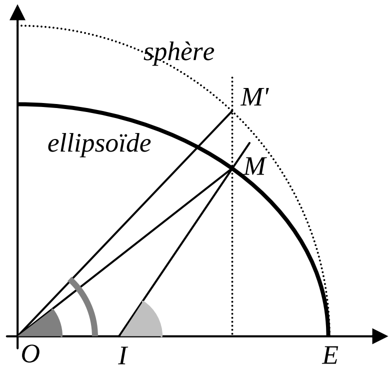
Les idées de Newton, contrairement à ce que peut laisser croire le paragraphe précédent, ne furent pas admises immédiatement. Il y eut d'un côté la rivalité entre l'Angleterre et les puissances continentales, mais aussi le problème de la vérification des idées théoriques sur le terrain.

Initialement, on ne disposait que des mesures faites en France par Picard puis par les Cassini au cours du XVIII^e siècle de Dunkerque à Perpignan. Or ces mesures laissaient entendre que les longueurs du degré de méridien diminuaient au fur et à mesure que l'on s'approchait du pôle nord ce qui laissait entendre que la Terre avait la forme d'un ellipsoïde allongé selon l'axe des pôles. Il s'ensuivit une longue polémique de près de 15 ans entre les théoriciens et les praticiens, polémique doublée de chauvinisme. Pourtant, un français, Richer, avait mesuré, dès 1672, la longueur du pendule battant la seconde à Cayenne et l'avait trouvée plus courte de 1 ligne ¼ (environ 3 mm). Cette différence ne pouvait pas être expliquée par la seule force centrifuge qui a un effet 4 fois moins important entre le pôle et l'équateur. Il fallait donc supposer un plus grand éloignement du centre de la Terre.

Il faudra cependant attendre la mission de Maupertuis en Laponie en 1737 puis 5 ans plus tard le retour de celle du Pérou pour enfin admettre les idées de Newton et des autres théoriciens.

D'où provenait donc l'erreur ? Essentiellement de deux sources : d'une part des erreurs de mesure de Picard et Cassini qui avaient travaillé dans l'urgence faute d'être assurés du financement des travaux ; d'autre part de la situation très particulière de la France où la forme moyenne de la Terre (ce qu'on appellera plus tard le géoïde) induit des modifications sur la direction de la verticale entraînant localement un ellipsoïde beaucoup moins aplati.

Le repérage sur un ellipsoïde ne pose pas trop de difficultés. Les méridiens sont tous identiques. Reste à déterminer la latitude. On distingue habituellement trois types de latitude (*figure 3*).



La latitude géographique : l'angle *EOM*
La latitude astronomique : l'angle *EIM* (*IM* est la normale en *M*)
La latitude mathématique : l'angle *EOM'* qui repose sur la représentation mathématique de l'ellipse : $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$

Figure 3

Après le formidable travail de triangulation fait en France, les autres pays vont aussi se lancer dans la triangulation. Chacun rattache sa triangulation à une base particulière. Ainsi la Suisse a créé une base du côté de Sausheim. En fait la triangulation n'est pas un art exact. Habituellement on mesure plusieurs bases. Par exemple sur un arc, on mesure une base au départ et une autre à l'arrivée et on compare la longueur mesurée de la base à l'arrivée avec la longueur fournie par la résolution de tous les triangles depuis la base de départ. Évidemment ça ne concorde jamais. Il faut donc répartir les erreurs sur l'ensemble de la triangulation en fonction de la précision des mesures.

Relier les triangulations de plusieurs pays nécessite d'une part une collaboration entre ces pays, ensuite une comparaison des algorithmes mis en œuvre et enfin un raccord des triangulations, ce qui oblige bien souvent à reprendre tous les calculs. Vaste travail. Et au XIX^e siècle, il n'est pas question d'imaginer relier des terres séparées par de vastes étendues marines.

Chaque pays va donc cartographier au mieux les régions sous sa souveraineté et choisir un ellipsoïde correspondant le plus exactement possible aux mesures faites. Les écarts entre ces différents ellipsoïdes ne sont pas bien grands, de l'ordre de ±1 Km sur le grand axe et le petit axe, avec un aplatissement α tournant autour de 1/300. Voici quelques exemples d'ellipsoïdes utilisés au XIX^e siècle, puis au XX^e.

Date	Nom	Pays	*a*	*b*	α	Utilisation
1810	Delambre	France	6 376 985	6 356 323,4	1/308,64	France
1810	Plessis	France	6 376 523	6 355 862,9	1/308,64	État-major
1819	Walbeck	Russie	6 376 895	6 355 833,8	1/302,78	Russie
1830	Everest	G. Bretagne	6 377 276,3	6 356 075,4	1/300,8	Inde, Asie SE
1841	Bessel	Allemagne	6 377 397,2	6 356 079	1/299,15	Europe centrale
1848	Airy	G. Bretagne	6 377 563,4	6 356 256,9	1/299,32	G. Bretagne
1866	Clarke	États Unis	6 378 206,4	6 356 583,8	1/294,98	Amérique Nord
1880	Clarke	(IGN. NTF)	6 378 249,1	6 356 514,9	1/293,46	Afrique, France
1909	Hayford	International 1924	6 378 388	6 356 911,9	1/297	
1940	Krasovsky	URSS	6 378 245	6 356 863	1/298,3	URSS
1965	Australien	Australien	6 378 160	6 356 774,7	1/298,25	Australie
1966	WGS 66		6 378 145	6 356 759,77	1/298,25	

1967		International 1967	6 378 157,5	6 356 772,2	1/298,25	
1972	WGS 72		6 378 135	6 356 750,5	1/298,26	NASA
1984	WGS 84	(GPS 80)	6 378 137	6 356 752,3	1/298,257	(Fr : RGF 93)

On comprend alors que, selon le choix de l'ellipsoïde, les coordonnées soient différentes. C'est une source d'erreur de plusieurs dizaines de mètres. Il y a évidemment aussi le problème de l'origine sur l'ellipsoïde. Ce problème n'est guère d'actualité aujourd'hui, mais historiquement il l'a été. Le tableau ci-dessous exprime dans divers systèmes un même point, la sortie nord de Strasbourg jonction A 4 – A 35 (source IGN).

Système de coordonnées géographiques	Longitude	Latitude géographique
NTF (méridien de Paris)	5°24´ 0" Est	48°36´00,0" Nord
NTF (méridien de Greenwich)	7°44´14,0" Est	48°36´00,0" Nord
ED50 (Greenwich)	7°44´16,4" Est	48°36´03,0" Nord
WGS84 (Greenwich)	7°44´12,2" Est	48°35´59,9" Nord

Pour des raisons de métrologie, on ne définit pas l'ellipsoïde à partir du petit et du grand axe car on tient également compte de la répartition des masses. Voici comment est défini le WGS 84 (ou GPS 80 ou RGF 93) :

1) **Le centre** est le centre d'inertie avec l'atmosphère.
2) **La masse** M est précisée en donnant le produit de la masse de la Terre, atmosphère comprise, par la constante G de la gravitation universelle : $G\,M = 3\,986\,005 \times 10^{8}\ m^{3}.s^{-2}$.
3) **Le petit axe** est l'axe moyen des pôles.
4) **La vitesse angulaire** correspond à un tour en une journée sidérale (environ 23 h 56 min) et vaut $7\,292\,115 \times 10^{-11}\ rad.s^{-1}$.
5) **Le demi grand axe** a est le rayon équatorial et vaut 6 378 137 m.
6) **Le rapport** $J_2 = \dfrac{C - A}{Ma^2}$ où C est le moment d'inertie par rapport au petit axe et A celui par rapport au grand axe ; on a $J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$.

A partir de ces données, il est possible d'en déduire d'autres, par exemple le demi petit axe $b = 6\,356\,752{,}314\ m$ ce qui conduit à l'aplatissement 1/298,257 222 101.

Dès le XIX[e] siècle on commença à penser que l'ellipsoïde de révolution n'était qu'une approximation commode de la surface terrestre, même débarrassée des montagnes. C'est en 1873 que le géodésien allemand Listing baptisa la forme de la surface d'altitude 0 du nom de géoïde. Schématiquement il s'agit de l'équipotentielle correspondant à la surface des océans au repos, surface que l'on prolonge sous les masses continentales. La répartition inégale des masses au sein de la Terre laisse penser que le géoïde va présenter des creux et des bosses par rapport à un ellipsoïde de référence, y compris au milieu des mers.

6. Le géoïde

Le géoïde n'est donc pas une surface dont la représentation mathématique est simple comme celle de l'ellipsoïde. Il faut pouvoir l'approcher globalement dans l'espace. On pourrait imaginer que l'on donne les 3 coordonnées, dans un repère convenable, de suffisamment de points pour que la surface soit définie avec une précision donnée à l'avance. C'est effectivement ce que l'on a fini par faire avec les satellites artificiels. Mais historiquement on a d'abord cherché à définir le géoïde par son altitude par rapport à un

ellipsoïde moyen. Encore faut-il se mettre d'accord sur un ellipsoïde moyen. Initialement on ne dispose que d'ellipsoïdes locaux qui approchent au mieux localement le géoïde, en fonction des bosses et des creux dudit géoïde (*figure 4*). L'idée est alors de moyenner les différents ellipsoïdes locaux. Mais avant l'avènement des satellites artificiels on n'avait guère d'idées sur la forme du géoïde dans les régions océaniques.
La question est de savoir ce que l'on entend par altitude 0. On pourrait penser qu'il suffit de se mettre d'accord sur un point qui par convention serait déclaré de niveau 0, puis de suivre par nivellement (on monte de tant de mètres, on redescend,…) pour retrouver le niveau 0 un peu plus loin. Ce raisonnement est fallacieux et nous allons voir pourquoi.

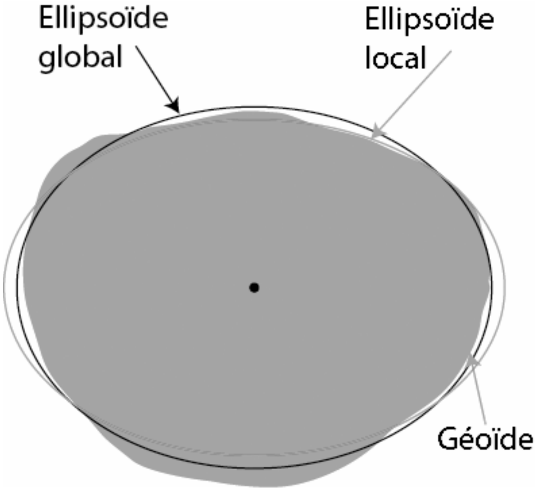


Figure 4 : Géoïde, ellipsoïde local et global

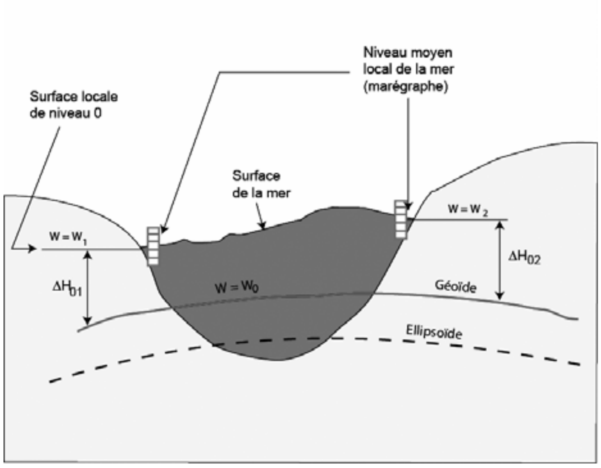


Figure 5 : Nivellement à travers les océans

6.1. Le niveau zéro

Se mettre d'accord sur un point d'origine 0 sans froisser les susceptibilités nationales n'est déjà pas évident, mais même en France les choix ont varié : Picard avait choisi le rez-de-chaussée du château de Versailles, Cassini avait adopté le niveau de la mer près de Perpignan, Collin proposa un point situé à 100 m en dessous de la cour de l'observatoire de Paris (!!!). C'est en 1860 qu'un décret ministériel fixa comme origine 0 le niveau moyen de la Méditerranée défini par le trait 0,40 m de l'échelle de marée de Fort Saint-Jean à Marseille.

Mais si on est sur un autre continent et que l'on choisit un niveau 0 comme niveau moyen de la mer ou de l'océan en tel endroit, peut-on être sûr que ces deux niveaux moyens donnent un même 0 ? (*figure5*).

Certes, ce sont Laplace et Gauss qui reconnurent que le niveau moyen des mers devait être une surface équipotentielle. Le choix de la Méditerranée où les marées sont de très faible amplitude est logique. Mais qu'est-ce qu'un niveau moyen ? Il faut faire intervenir le temps. Quelle durée : une lunaison, un an, 18 ans (il y a dans le mouvement de la Lune un terme de période voisine de 18 ans) ? Il y a aussi des marées terrestres, de quelques dizaines de centimètres. Dès que l'on prend en compte un temps assez long, on se trouve confronté à la fonte des glaciers qui entraîne le soulèvement des continents, *etc.* Par ailleurs il y a des courants marins dont le rythme est assez aléatoire et qui entraînent des modifications importantes des niveaux océaniques. Pensons par exemple au phénomène "el niño". Sur une échelle de temps de plusieurs dizaines d'années, la tectonique des plaques intervient avec des déplacements de l'ordre de quelques centimètres par an.

6.2. Le nivellement

Niveler, c'est positionner une lunette horizontalement entre deux mires distantes pour mesurer les hauteurs relatives de ces deux mires par rapport à la lunette et ainsi connaître la différence d'altitude entre les deux mires.

Il faut bien comprendre que le niveau 0 correspond à une surface équipotentielle, c'est-à-dire à une surface orthogonale en tout point à la direction de la pesanteur. Or les différentes surfaces équipotentielles n'ont aucune raison d'être régulièrement espacées d'une même quantité en mètres. Par la force des choses, l'arpenteur reste à la surface de la Terre et non pas sur une surface équipotentielle, sauf quand il suit une courbe de niveau. Cela se voit bien sur le dessin où l'on a représenté un champ fictif de pesanteur qui montre que les surfaces équipotentielles s'écartent plus ou moins les unes des autres (*figure 6*). Le nivellement ne permet pas de retrouver le niveau 0 après un cheminement et de plus selon le cheminement choisi le résultat ne sera pas le même. Pire, un même cheminement ne donnera pas le même résultat selon le choix du point intermédiaire et cela en raison de la courbure des lignes de champ de la pesanteur. Bien sûr les écarts ne sont pas importants mais la connaissance précise de la forme de la Terre est à ce prix (*figure 7*).

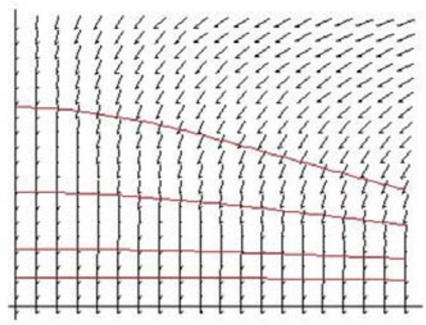


Figure 6 : Les équipotentielles ne sont pas régulièrement espacées

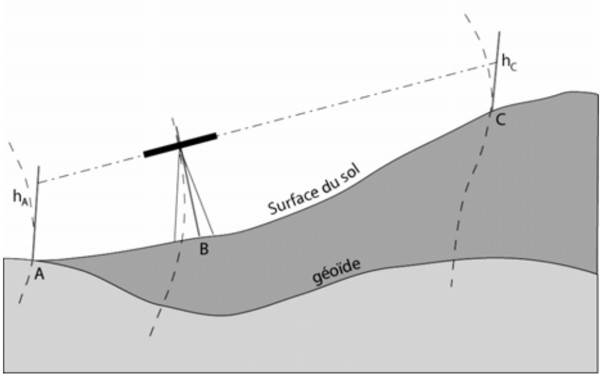


Figure 7 : La quantité $h_A - h_C$ dépend du choix de B en raison de la courbure des lignes de champ

6.3. L'influence des montagnes

C'est Pierre Bouguer qui, lors de l'expédition pour la mesure de l'arc de méridien au Pérou (1736-1743) remarqua une trop grande différence de la valeur de la pesanteur entre le niveau de la mer et le sommet des Andes. Un siècle plus tard, George Everest fit une observation analogue au voisinage de l'Himalaya : la déviation de la pesanteur n'est pas aussi importante qu'elle devrait l'être si cette chaîne de montagne était simplement posée sur la croûte ou sur le manteau terrestre. On en déduisit la théorie de l'isostasie qui n'est autre qu'une application du principe d'Archimède. Les montagnes flottent sur une couche plus dense et s'y enfoncent d'une quantité plus ou moins importante selon leur densité.

On définit ainsi aujourd'hui plusieurs types d'anomalies :

- ✓ L'anomalie à l'air libre qui est tout simplement la variation de la pesanteur au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la Terre. C'est de l'ordre de 0,3086 mgal par mètre (pour rappel la pesanteur au niveau de la mer varie de 978 gal à l'équateur à 983 gal aux pôles).
- ✓ L'anomalie de Bouguer qui tient compte de la seule partie de montagne située au dessus du niveau de la mer de l'ordre de 0,1968 mgal par mètre.
- ✓ L'anomalie isostatique due à l'effet d'attraction des masses compensatrices situées en profondeur sous le niveau de la mer. Il y a différentes façons de la calculer.

En fait il existe d'autres anomalies dues à des différences de densité à la fois dans le manteau et dans la croûte terrestre. Ce sont d'ailleurs ces différences qui sont exploitées en géologie minière.

L'amélioration de la précision des mesures gravimétriques à l'aide de pendules a permis de déterminer la pesanteur en tout point de la surface des continents. L'utilisation des satellites a permis de définir le niveau moyen des océans. On a pu également mesurer la pesanteur en altitude, y compris au niveau des satellites artificiels, ce qui n'est pas évident car l'intérieur d'un satellite est pratiquement en apesanteur. L'utilisation de résultats mathématiques comme les formules de Stokes, permet ensuite de récupérer les équipotentielles et en particulier le niveau 0. Cela permet de situer le géoïde par rapport à un ellipsoïde de référence. On utilise également l'étude de la trajectoire de deux satellites identiques dont la distance réciproque est mesurée au micromètre près (expérience GRACE : *Gravity Recovery And Climate Experiment*). Les écarts maximum du géoïde par rapport à un ellipsoïde de référence bien choisi sont d'une centaine de mètres. En voici une visualisation (*figure 8*).

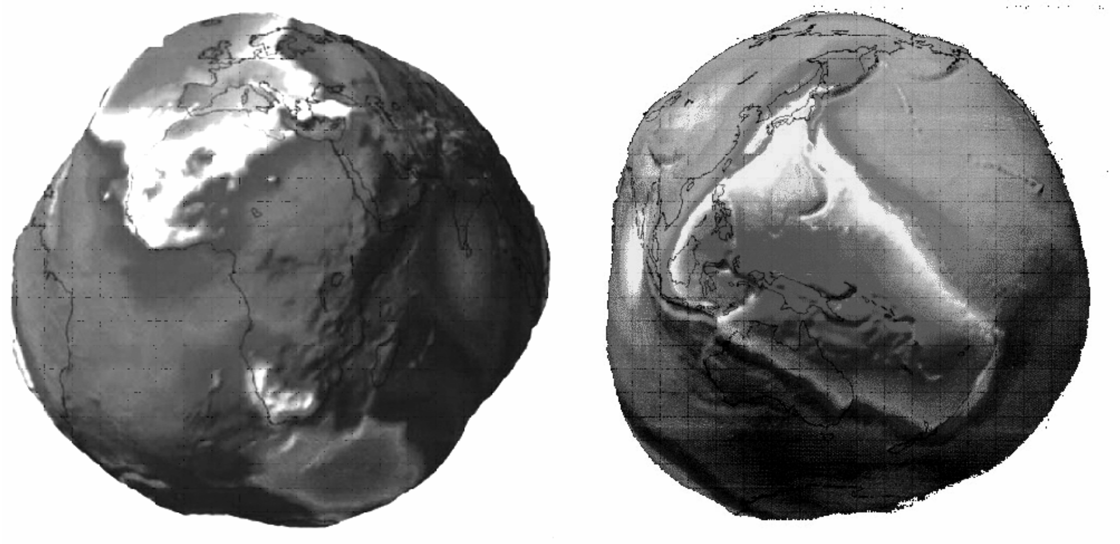


Figure 8 : Exagération d'un facteur 1000 des écarts du géoïde à la sphère

7. Aujourd'hui et demain

Nous avons vu très rapidement l'usage des satellites pour la détermination de la forme de la Terre. N'oublions pas que les premiers satellites n'étaient suivis que visuellement et que c'est petit à petit que l'on a pu tenir compte de la forme de leur orbite pour mettre en évidence et les variations de la gravité au niveau de l'orbite et les freinages dus aux restes de l'atmosphère.
Avec la précision des mesures et les aller et retour entre la théorie et la pratique, on peut suivre l'orbite d'un satellite à quelques centimètres près. Une des retombées essentielles en est la navigation par satellite ou GPS.

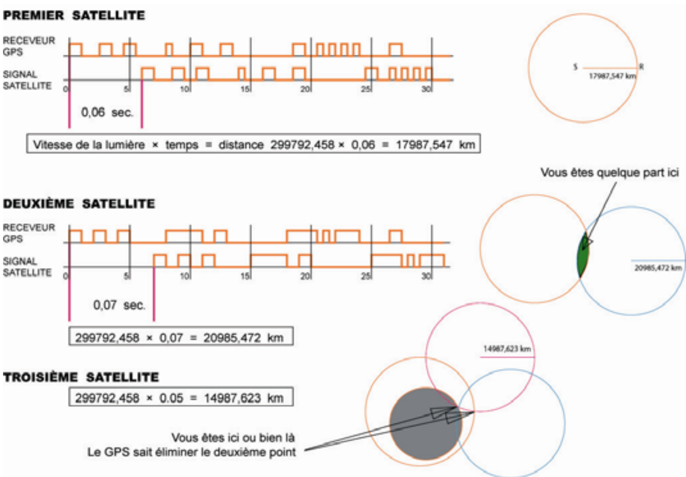


Figure 9 : Principe de fonctionnement du GPS

Je vais donc expliquer ici le fonctionnement du GPS qui est une extension du principe de triangulation. J'ai peu parlé de triangulation dans cette conférence puisque si, historiquement, la méthode a permis de déterminer la grandeur et la forme de la Terre, on a ensuite essentiellement utilisé des méthodes gravimétriques pour trouver la forme la plus précise de notre planète.

Dans le cas du GPS il s'agit d'une triangulation dans l'espace. On détermine la position d'un point sur terre ou dans les airs à l'aide d'une triangulation sur des satellites dont la position est connue. Il faut donc trois satellites : 1 satellite donne la position sur une sphère, 2 satellites la donnent sur un cercle, 3 sur deux points dont l'un est dans presque tous les cas aberrant. On va voir que les erreurs de mesures impliquent la nécessité d'avoir une mesure vis-à-vis d'un 4ème satellite. Pour que l'on ait toujours ce nombre minimum de satellites visibles il en faut une constellation (24) autour de la Terre (*figure 9*).

- ✓ La marche des satellites est contrôlée grâce à des stations terrestres. Éventuellement, un moteur permet de corriger les dérives dues à la pression du vent solaire, aux influences gravitationnelles de la Lune et du Soleil, au freinage dû à l'atmosphère qui subsiste à 20 000 Km d'altitude. Si les corrections de trajectoires sont insuffisantes, on transmet au satellite l'information sur sa nouvelle trajectoire, information retransmise vers les récepteurs GPS par un canal spécial. Ceci permet une précision de 20 cm sur la position des satellites.
- ✓ Le signal émis par chaque satellite est codé de façon pseudo aléatoire avec un code qui caractérise le satellite. Chaque satellite possède une horloge atomique interne qui assure la stabilité du codage.
- ✓ Le récepteur GPS reçoit le signal avec un retard de l'ordre de 7/100ème de seconde. Mais le récepteur ne possède pas une horloge atomique qui permet de mesurer très exactement ce retard et d'en déduire la distance. Comme l'écart entre les deux horloges est constant pendant la durée des mesures, le calcul de la distance à un 4ème satellite assure la mesure de cet écart.
- ✓ La célérité du signal n'est pas connue et sûrement moindre que 299 792 458 $m.s^{-1}$. Sur terre, il est possible de compenser cette erreur en utilisant le principe à l'envers. Un laboratoire bien équipé et dont la position terrestre est parfaitement connue mesure le temps mis par le signal pour parcourir la distance satellite – laboratoire et en déduit la célérité du signal. Si ce labo n'est pas trop loin du récepteur GPS, environ 200 à 250 km, on peut penser que les conditions atmosphériques sont les mêmes sur les deux trajets de l'onde et par suite les célérités identiques.
- ✓ Reste le problème des trajets multiples par réflexion sur les obstacles naturels ou artificiels : falaises, immeubles,… Ce problème n'a guère trouvé de solution.

En résumé, voici ce que donne l'accumulation des erreurs en nanosecondes et approximativement en mètres :

Stabilité en fréquence du satellite :	35 ns = 10,5 m
Position du satellite :	33 ns = 10 m
Traversée de l'ionosphère :	13 ns = 3,9 m
Traversée de la troposphère :	33 à 65 ns = 9,8 à 19,6 m
Stabilité de l'horloge de l'utilisateur :	9,7 ns = 2,9 m
Trajets multiples :	8 ns = 2,4 m
TOTAL :	environ 150 ns soit environ 45 m.

Si l'usage le plus connu du GPS est de déterminer sa position sur terre, sur mer ou dans les airs, ou bien comme aide à la navigation routière, grâce à un couplage avec des cartes et des plans de ville (avec sens interdit), c'est aussi un instrument bien pratique pour continuer à déterminer la forme de la Terre. A titre d'exemple, une expédition en mai 1999 a placé au sommet de l'Everest, une balise GPS qui permet de mesurer le déplacement de ce prestigieux sommet. Il ne s'élève pas de ses 8850 m, contrairement à l'attente mais se déplace vers le nord d'environ 6 mm par an sous la pression du sous continent indien.

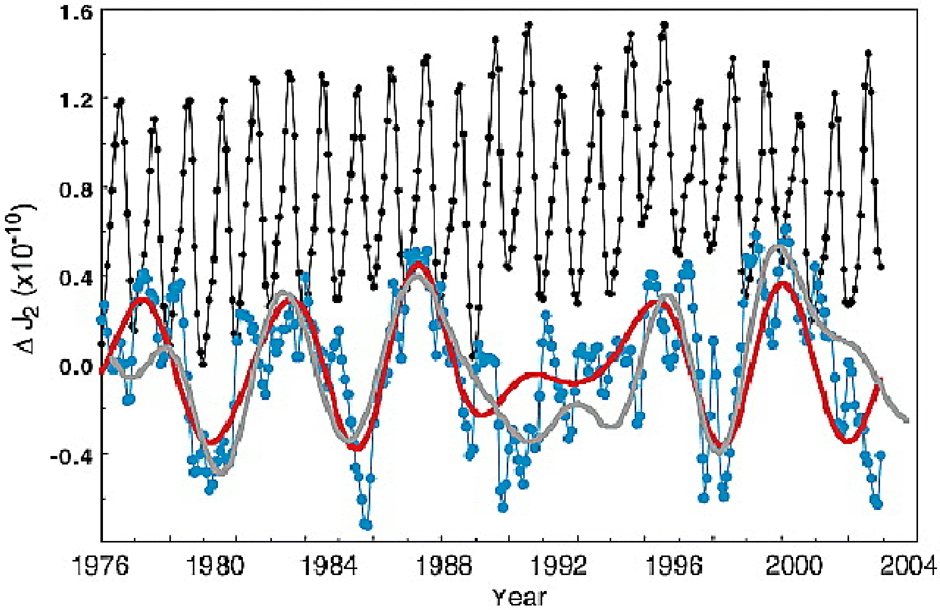


Figure 10 : En noir épais variation du J_2 et en gris du niveau moyen des océans. (Source NASA)

Mais ce sont des méthodes de gravimétrie à l'aide des deux satellites de GRACE qui depuis 28 ans nous renseignent sur les variations de la forme du géoïde (essentiellement dans les océans) avec une période d'un peu plus de 4 ans. Ces variations sont intimement liées aux changements climatiques (*figure 10*).

Conclusion

Chacun pourra choisir la conclusion qu'il veut bien tirer de cet exposé. Quant à moi, j'ai appris beaucoup de choses en travaillant sur ce sujet et sur des sujets connexes. J'en ai retiré quelques éléments qui m'ont permis d'illustrer de façon vivante mon cours que j'ai toujours voulu, au-delà du programme officiel, en phase avec l'histoire des sciences ainsi qu'avec la science d'aujourd'hui. Je suis certain que cela peut se faire à tous les niveaux d'enseignement, certes, pas de la même façon, mais le professeur dynamique et ouvert saura, j'en suis convaincu, adapter à des collégiens la question de la triangulation, du calcul de la hauteur d'une montagne, ou de la détermination de la position par GPS. Ces mêmes questions et d'autres comme le calcul de Huygens, peuvent être traitées de façon plus approfondie au lycée. Si certains peuvent en tirer un travail interdisciplinaire avec leurs élèves et les professeurs de physique, d'histoire ou de technologie, je n'aurai pas travaillé en vain.

Sources

Livres généraux

Bernard MAITTE et Anne-Marie MARMIER (1988), *COSMOS, Une histoire des représentations de l'univers,* Alias.

Jean-Jacques LEVALLOIS (1993), *Mesurer la Terre, 300 ans de géodésie française,* Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées / Association française de Topographie.

Jean LEFORT (2004), *L'aventure cartographique*, Belin – Pour la Science.

Sites Internet

Principe du GPS : http://www.trimble.com/gps (en anglais)

Pour la gravimétrie : Bureau de Gravimétrie International :
http://bgi.cnes.fr:8110/tutorial/debutbgi.htm

Mesures de la Terre : Applications à la classe :
http://expositions.bnf.fr/ciel/maths/index.htm

Le Géoïde : École Supérieure des Géomètres et Topographes :
http://mail.esgt.cnam.fr/fr/recherche/geoide.htm

Historique du géoïde : http://www.ens-lyon.fr/Planet-Terre/Infosciences/Geodynamique/Structure-interne

Site de la NASA :
http://www.nasa.gov/centers/goddard/earthandsun/earthshape.html

Jean LEFORT
24, rue Schweitzer
68920 Wintzenheim
jlefort.apmep@wanadoo.fr