Des tresses et des nœuds en mathématiques

Thomas Aubriot, Emmanuel Wagner

Résumé : Nous reprenons le contenu d'une conférence intitulée « Des Tresses et des Nœuds en Mathématiques » donnée dans le cadre du Jardin des Sciences. En particulier, nous définissons en parallèle les tresses et nœuds dans l'espace et expliquons comment à l'aide de projections et des mouvements dits de Reidemeister, nous pouvons nous ramener à une étude dans le plan. Ensuite nous mettons en évidence une structure sur les tresses et expliquons comment une opération sur ces tresses permet d'associer un mot à une tresse, ce qui permet ensuite de classer ces tresses. Dans le cas des nœuds, nous expliquons comment l'étude d'invariants permet de distinguer certains nœuds même si la classification complète des nœuds reste un problème ouvert.

Remerciements : Le CIES et le Jardin des Sciences nous ont donné la possibilité de faire une conférence intitulée « Des Tresses et des Nœuds en Mathématique » . Cette conférence a été suivie d'une série de questions qui nous ont incités à prolonger notre travail. Mme Bopp, directrice de L'IREM de Strasbourg, nous a permis dans le cadre de l'Ouvert de rédiger cet article. Nous la remercions ici ainsi que tous ceux qui nous ont incités à nous engager dans ces projets.

Mots-clés : Nœud – Tresse – Groupe – Invariant.

Introduction

Les tresses et les nœuds ont le privilège d'occuper régulièrement la Une des publications tant dans les revues de recherche que de vulgarisation. Cet engouement s'explique par la grande diversité des domaines reliés aux tresses et aux nœuds. Une recherche rapide sur le serveur de prépublication Arxiv donne plus de 300 réponses pour les mot braids (tresses en anglais) ou knots (nœuds) révélant ainsi la grande vitalité de la recherche en mathématique dans ces domaines. Mais cet engouement provient aussi de la diversité des applications de ces théories [8],[9] : de la cryptographie à l'ordinateur quantique en passant par la modélisation de trajectoires de particules ou encore la génétique ....

Nous présentons les tresses et les nœuds en partant de l'intuition que nous avons de ces objets dans la vie courante pour définir ensuite ces objets mathématiques. Plus précisement, les nœuds pour les mathématiciens sont des morceaux de ficelle refermés dans l'espace et entremêlés, tandis que les tresses sont des morceaux de ficelles attachés en haut et en bas et s'entremêlant. Une différence majeure avec les nœuds courants est donc que les nœuds et les tresses mathématiques ne se dénouent pas tous !

Une des première étapes pour simplifier ces objets et mieux travailler avec les nœuds et les tresses est de voir comment les représenter dans le plan. En projetant ces objets de l'espace sur un plan de manière générique, nous définissons des nœuds et des tresses dans le plan. Il convient alors de considérer les mouvements de Reidemeister qui décrivent comment se comportent les dessins dans le plan de nos nœuds ou tresses lorsque nous changeons de projection. Ces mouvements nous permettent d'établir que les nœuds et tresses de l'espace peuvent être représentés par leurs dessins dans le plan. Après ces définitions en parallèle des nœuds et tresses, nous expliquons comment clôturer une tresse pour en faire un nœud.

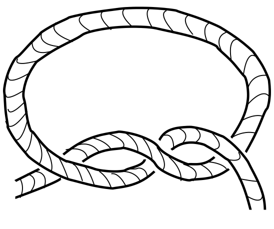
Le problème de la définition étant résolu, nous aimerions pouvoir distinguer deux nœuds ou deux tresses différents. Ce problème de classification, naturel pour les mathématiciens, est différent pour les nœuds et les tresses ; en effet, une structure de groupe, semblable à la structure des nombres entiers relatifs vis à vis de l'addition, peut être mise sur les tresses. Une composition peut être définie en collant l'une en dessous de l'autre deux tresses et cette opération est suffisament riche en propriétés pour nous permettre de découper une tresse en tresses plus simples et de réduire le problème de la classification des tresses à un problème plus simple (de classification de mots dont les lettres sont les tresses simples).

Pour les nœuds, nous pouvons encore assembler deux nœuds mais cette opération n'a pas la structure précédente et nous n'obtenons pas la classification de cette manière. Pour répondre à la question « Quand deux nœuds sont-ils semblables », les mathématiciens définissent alors des invariants. Un invariant est un objet mathématique associé à un nœud, par exemple son nombre minimal de croisement, qui nous permet de dire que deux nœuds avec un invariant différent sont différents. Le problème est que deux nœuds différents peuvent avoir le même invariant. Des invariants de plus en plus subtils et sophistiqués ont été attachés aux nœuds mais pour le moment, aucun invariant ne permet de distinguer tous les nœuds.

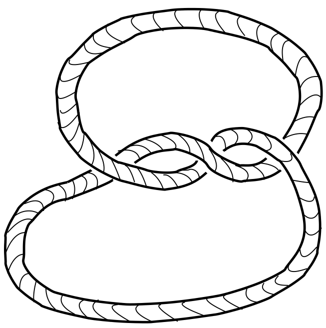
1. Définitions en parallèle des tresses et des nœuds

1.1. Nœuds et entrelacs

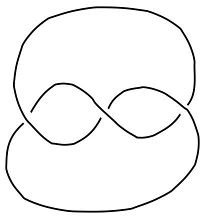
Lorsqu'on parle de nœuds, on ne s'imagine pas parler de mathématiques ; on associe plutôt ce terme à d'autres domaines tels que la marine ou l'escalade. De manière plus simple on pense à ses lacets de chaussures, en d'autres termes aux nœuds que l'on rencontre dans la vie courante, ceux que l'on fait avec des bouts de ficelle. Regardons de plus près le plus simple d'entre eux, le nœud plat :



Ce nœud est caractéristique de ceux que l'on peut faire, en particulier il est facile de le dénouer. Si l'on fait un nœud plus compliqué, on pourra toujours le dénouer, même si comme chacun en a fait l'expérience cela peut parfois être plus difficile et prendre plus de temps. Donc dans un certain sens tous les nœuds sont les mêmes puisqu'on peut tous les dénouer. Les mathématiciens, pour donner plus de diversité, modifient cette définition intuitive en recollant les deux extrémités pendantes du bout de ficelle, ce qui donne dans le cas du nœud plat le dessin suivant :



Pour le moment, les nœuds considérés, ont toujours une épaisseur (celle du bout de ficelle) ; nous allons maintenant considérer que notre ficelle n'a pas d'épaisseur, ce qui permet de la schématiser ainsi :



On notera que ce dessin permet d'indiquer si un brin passe au-dessus ou en dessous d'un autre brin.

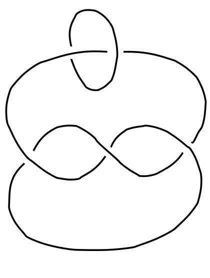
Pour pouvoir dessiner nos nœuds nous avons été obligés de les mettre à plat sur une feuille, mais en réalité ce que nous regardons ce sont ces mêmes nœuds mais dans l'espace ambiant (celui de dimension 3). Nous pouvons maintenant donner une définition d'un nœud.

Définition 1 *Un nœud est une courbe fermée sans points doubles dans l'espace, c'est-à-dire une application continue* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *telle que* $\gamma(0) = \gamma(1)$ *et* $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ *pour deux éléments distincts* t *et* t' *.*

Nous allons aussi considérer des objets un petit peu plus généraux : des entrelacs. Dans tout ce que nous avons fait précédemment nous n'avons pris qu'un seul bout de ficelle ; nous effectuons maintenant les mêmes opérations avec plusieurs morceaux de ficelle.

Définition 2 *Un entrelacs est une réunion disjointe de courbes fermées sans points doubles dans l'espace.*

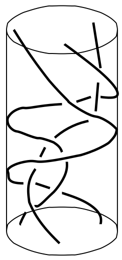
Voici un exemple d'entrelacs :



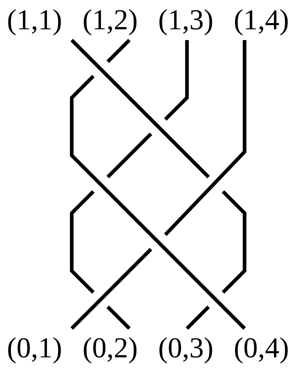
Une *composante* sera une des courbes fermées (ce qui correspond à un des bouts de ficelle). En utilisant ce vocabulaire, un nœud est un entrelacs à une composante. Nous remarquons que dans notre exemple une des composantes (un des bouts de ficelles) est un cercle. Ce cercle est le nœud (même si dans la vie courante on n'appellerait pas cela un nœud) le plus simple que l'on puisse faire, on l'appelle le *nœud trivial* (trivial signifiant en mathématiques le plus simple).

1.2. Tresse à n brins

De la même manière que pour les nœuds, nous considérons dans l'espace des bouts de ficelle attachés en haut et en bas comme le montre le dessin ci-dessous et s'entremêlant.



Pour les dessiner, nous projetons les tresses dans le plan. Nous pouvons toujours trouver une projection qui nous permette de dessiner les tresses comme des brins attachés en haut et en bas comme le montre la figure suivante. De plus, quitte à déformer les bouts de ficelle, il est toujours possible de considérer que les croisements se font seulement entre deux brins.



Nous pouvons alors donner une première définition mathématique d'une tresse à n brins.

Définition 3 *Une tresse géométrique est la donnée de n courbes ouvertes (les bouts de ficelle) attachées à leurs extrémités aux points de coordonnées $(1,1),\dots,(1,n)$ en haut et $(0,1),\dots,(0,n)$ en bas, qui descendent toujours et telles que les seuls points d'intersection entre ces courbes ouvertes soient des points doubles tels que nous sachions quel brin passe au-dessus de l'autre.*

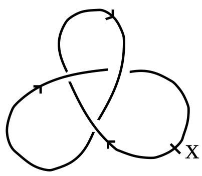
Nous représenterons le brin du dessus avec un trait continu et celui du dessous avec un trait coupé comme le montre l'exemple précédent.

1.3. Projection et mouvements de Reidemeister

Projection des nœuds

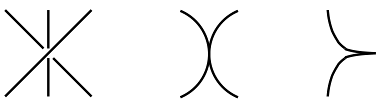
Dans la partie précédente, les nœuds et les entrelacs ont été définis comme des objets vivants dans l'espace, mais une représentation plane permet d'appréhender ces objets plus simplement. L'opération que l'on effectue est une projection (on prend notre bout de ficelle et on l'écrase sur un mur). On met ensuite en place une convention de dessin pour reconnaître dans chaque croisement la position relative des deux morceaux. La convention est la même que pour les tresses et est donnée par les diagrammes suivants :

Par exemple, si on considère le diagramme suivant et que l'on part de la marque × en suivant la flèche, on passe successivement au-dessus, au-dessous, au-dessus, au-dessous, au-dessus, au-dessous et on revient au point de départ.



Plus généralement, on peut toujours attribuer à un nœud ou à une composante d'un entrelacs un sens de parcours. Ce sens de parcours sera alors signifié sur le diagramme par une flèche. Un nœud (entrelacs) muni d'un sens de parcours sera appelé un *nœud (entrelacs) orienté*.

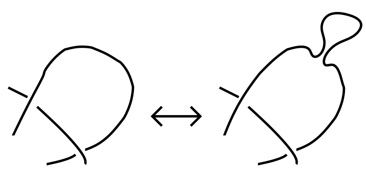
Le dessin du nœud dans le plan s'appelle un *diagramme de nœud*. Nous allons maintenant nous demander dans quelle mesure les diagrammes représentent les objets de l'espace. Pour cela on veut que la projection soit *générique*. Le terme générique signifie qu'à partir du diagramme on peut retouver le nœud ou l'entrelacs. Dans le cas contraire la projection est catastrophique comme dans les dessins ci-dessous :



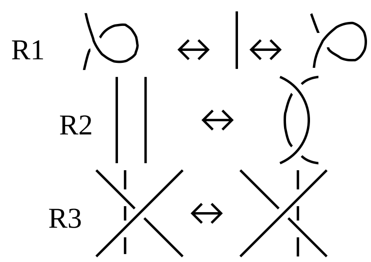
Si la projection ressemble localement à un de ces dessins, le nœud n'est pas parfaitement défini dans l'espace (il y a plusieurs nœuds qui ont cette projection). Heureusement, on peut montrer qu'il existe toujours une projection générique. Par diagramme d'un nœud ou d'un entrelacs, on entend en fait une projection générique d'un nœud ou d'un entrelacs.

Mouvements de Reidemeister pour les nœuds

Un des problèmes classiques en Mathématiques est le problème de classification des objets que l'on étudie. Dans cette optique, nous allons nous intéresser à la classification des nœuds et des entrelacs. Nous allons donc mettre en place des critères de classification. Par exemple, si vous voulez ranger votre bibliothèque, il faut d'abord décider si vous optez pour un classement thématique ou alphabétique, par auteur ou par titre. Dans notre cas il faut d'abord décider quand est-ce que deux nœuds seront pour nous les mêmes. Pour cela revenons un moment à nos ficelles. On prend un bout de ficelle, on le noue et on recolle les extrémités. On aimerait alors que toutes les manipulations que l'on peut faire avec notre morceau de ficelle dans l'espace sans le couper nous donnent toujours le même nœud : *deux nœuds sont les mêmes* si l'on peut transformer l'un en l'autre par une manipulation continue dans l'espace. Le terme manipulation continue signifie essentiellement sans couper le bout de ficelle. Les manipulations autorisées étant précisées, étudions leurs répercussions sur les diagrammes de nœuds. Elles sont essentiellement de quatres types et nous donnerons localement leurs dessins. Les déformations entre deux croisements, comme dans l'exemple suivant sont autorisées,



ainsi que les trois types de déformation mettant en jeu des croisements et que l'on appelle mouvements de REIDEMEISTER, du nom du mathématicien allemand qui les a découverts. Ces manipulations sont dessinées ci-dessous, la flèche signifiant que l'on peut passer d'un diagramme à l'autre, dans un sens ou l'autre.



On peut remarquer que pour passer d'un côté à l'autre d'une des flèches on passe par une situation catastrophique. Par exemple, dans le cas de R2 pour aller de la situation de droite à la situation de gauche, on tire les deux bouts l'un vers la droite l'autre vers la gauche et juste avant d'avoir deux bouts parallèles, on passe par la seconde situation catastrophique.

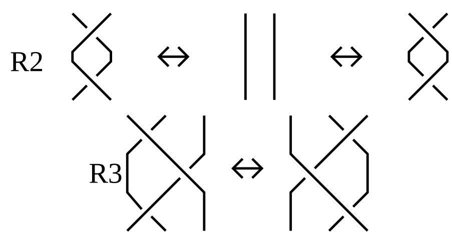
Il reste maintenant à savoir si toutes les manipulations d'un nœud dans l'espace peuvent être vues sur un diagramme de nœud grâce aux mouvements de REIDEMEISTER et aux manipulations entre les croisements (manipulations triviales). REIDEMEISTER en a donné la preuve [5].

Théorème 1 (Reidemeister 1927) *Si l'on peut transformer un nœud en un autre nœud par une manipulation continue dans l'espace, on peut obtenir le même résultat par une manipulation dont la projection consiste seulement en mouvements de* REIDEMEISTER *et en manipulations triviales du diagramme dans le plan.*

Ce théorème signifie que pour étudier la classification des nœuds dans l'espace, il suffit d'étudier leurs diagrammes en utilisant des manipulations triviales et des mouvements de REIDEMEISTER. On a donc ramené le problème de l'espace au plan, de la dimension trois à la dimension deux. De la même manière, ce résultat reste vrai pour les entrelacs, ainsi que pour les nœuds et les entrelacs orientés. Les mouvements de REIDEMEISTER pour les nœuds et entrelacs doivent être possible avec toutes les orientations, mais on peut montrer qu'ils s'obtiennent tous à partir des deux mouvements suivants.

Mouvements de Reidemeister pour les tresses.

Comme pour les nœuds, des projections génériques permettent d'obtenir la définition géométrique d'une tresse dans le plan. Il faut donc aussi tenir compte des mouvements possibles dans l'espace et de leur incidence sur le dessin dans le plan. Toutes les manipulations triviales (sans toucher aux croisements) sont donc autorisées ainsi que les mouvements de REIDEMEISTER. Cependant ces mouvements sont légèrement différents de ceux considérés pour les nœuds, par exemple le mouvement R1 de REIDEMEISTER imposant au brin de remonter est exclu. Nous avons en fait le mouvement R2 (en tenant compte de l'orientation du haut vers le bas) et qui est représenté sur la figure suivante et le mouvement R3 de REIDEMEISTER qui, lui, reste inchangé.



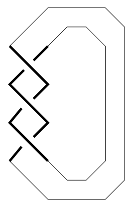
(1)

Nous pouvons alors définir les tresses dans le plan en permettant ces mouvements et elles correspondent à l'intuition comme l'affirme le théorème suivant (qui découle du Théorème de REIDEMEISTER).

Théorème 2 *En autorisant les manipulations triviales sans toucher aux croisements ainsi que les mouvements* R2 *et* R3 *de* REIDEMEISTER, *les tresses géométriques correspondent aux tresses dans l'espace.*

1.4. Clôture d'une tresse en un nœud

Les tresses et les nœuds provenant de morceaux de ficelle entremêlés dans l'espace, il est donc naturel d'essayer de relier les deux notions mathématiques que nous venons de définir pour représenter ces morceaux de ficelle. Cela est possible en effectuant la contruction suivante. Etant donné une tresse, nous pouvons la clôturer en reliant les extrémités entre elles sans ajouter de croisement comme le montre la figure suivante.

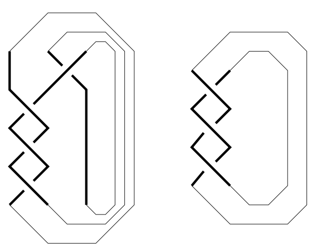


(2)

Nous obtenons alors un nœud ou un entrelacs. Le théorème d'ALEXANDER affirme alors que tous les nœuds et entrelacs peuvent être obtenus par clotûre d'une tresse.

Théorème 3 (Alexander 1923) *Tout nœud ou entrelacs est clôture d'une tresse.*

Ce résultat est un résultat d'existence aussi se pose une question naturelle : étant donné un nœud, comment trouver une tresse qui se clôture en ce nœud. Vogel [11] a donné un algorithme pour « déclôturer » un noeud. Nous pouvons alors « transporter » par clôture des résultats des tresses sur les nœuds. Cependant si on obtient certains résultats de cette manière, le problème de la classification des nœuds ne se déduit pas de la classification des tresses. En effet, nous allons voir que la classification des tresses provient d'une structure sur l'ensemble des tresses, mais cette structure ne peut pas être mise sur les nœuds. Notons aussi que des tresses très différentes peuvent donner par clôture le même nœud comme le montre l'exemple ci-dessous.



2. Une structure pour les tresses

Dans cette partie, nous montrons comment mettre une structure sur les tresses qui nous permet de réduire l'étude des tresses à une étude de mots et d'en déduire une classification.

2.1. Remarques générales

Commençons par regarder ces ensembles de tresses et leurs liens avec des ensembles connus comme les nombres ou les permutations.

Lien avec les nombres

Notons $\mathcal{B}_2$ l'ensemble des tresses à deux brins. Nous avons deux types de croisements élémentaires que nous dirons positifs ou négatifs comme l'indiquent les figures suivantes.

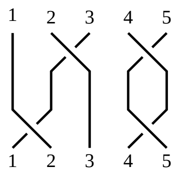
croisement positif

croisement négatif

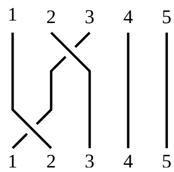
Pour les tresses à deux brins, nous pouvons compter le nombre de croisements avec leurs signes et obtenir un nombre entier relatif associé à la tresse. Le mouvement R2 de Reidemeister (1) correspond exactement aux opérations $1 - 1 = 0 = -1 + 1$ et la tresse de l'exemple (2), par exemple, correspond au nombre -3. Nous pouvons alors identifier les tresses à deux brins avec les nombres entiers avec signes ! Pour les entiers relatifs, nous avons une opération, l'addition, qui nous donne une structure. Nous allons construire la structure correspondante pour les tresses générales et nous illustrerons ses propriétés grâce à cet exemple des tresses à deux brins. Mais pour un temps encore continuons à regarder les liens avec un autre ensemble, les permutations.

Lien avec les permutations

Considérons la tresse à 5 brins ci-dessous :



Numérotons les brins et suivons-les. Le premier brin se termine en position 2 et le deuxième en position 3, le troisième brin terminant en position 1. D'autre part les brins 4 et 5 restent en position 4 et 5. Nous avons donc une permutation des positions associées à cette tresse que nous noterons $1 \to 2 \to 3$ ou encore (123). De la même manière, considérons une tresse à n brins et numérotons les brins. Suivons les brins et notons la position finale de chaque brin. Nous obtenons une *permutation* de $\{1, \ldots, n\}$ (c'est-à-dire une autre manière de ranger les nombres 1 à n) associée à la tresse. Notons que cette permutation est invariante par les mouvements de Reidemeister et nous pouvons alors définir une application de l'ensemble des tresses à n brins (noté $\mathcal{B}_n$) vers l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ (noté $\mathfrak{S}_n$). Cette application ne permet cependant pas d'identifier les tresses et les permutations comme le montre la figure suivante où la même permutation (123) est obtenue à partir d'une autre tresse.



En un sens les tresses représentent les permutations avec le souvenir des opérations effectuées !

Une tresse en général

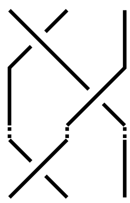
Jusqu'à maintenant, nous avons toujours considéré des tresses à n brins. Comment définir une tresse de manière générale ? Prenons une tresse à 3 brins et juxtaposons-la à une tresse à deux brins triviaux (c'est-à-dire ne s'entremêlant pas). Nous avons obtenu une tresse à 5 brins (voir l'exemple précédent). De manière générale, nous pouvons toujours juxtaposer des brins triviaux à côté d'une tresse pour lui donner le nombre de brins que l'on veut. On peut de cette manière considérer une tresse générale. Nous sommes alors prêts à regarder la structure de ces tresses.

2.2. Opération et structure sur les tresses

Pour mieux connaître les tresses, nous aimerions savoir comment obtenir une tresse à partir d'autres. Pour cela nous allons regarder comment créer une tresse à partir de deux autres et en faisant une analogie avec les nombres (qui correspondent aux tresses à deux brins) quelles propriétés, et donc quelle structure peut-on espérer pour les tresses, structure que nous récapitulerons rapidement dans un tableau (voir FIG. 1).

Comment construire une tresse à partir de deux autres ?

À partir de deux tresses, nous pouvons éventuellement ajouter des brins pour obtenir deux tresses de même taille et alors coller la seconde tresse en dessous de la première et relier les brins comme le montre la figure qui suit.



Nous obtenons ainsi une opération sur l'ensemble des tresses que l'on appelle la *composition* de deux tresses. Pour l'exemple des tresses à deux brins nous pouvons identifier une tresse avec le nombre de croisement. La composition de deux tresses s'identifie alors avec l'addition des nombres entiers relatifs.

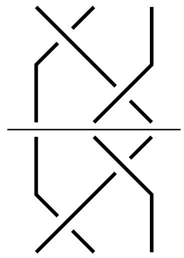
Quelles propriétés pour cette opération ?

Par analogie avec les nombres, cherchons quelles propriétés peuvent être vérifiées par cette composition.

La composition des tresses comme l'addition pour les nombres est *associative*. Pour les tresses, cela revient à dire que si nous prenons trois tresses que nous mettons les unes en dessous des autres, le résultat de la composition est le même si l'on relie d'abord les deux tresses du dessus et ensuite que l'on relie la tresse obtenue avec celle du dessous ou bien le contraire : on relie les deux tresses du dessous puis celle du dessus.

La composition comme l'addition possède un *élément neutre*. Considérons la tresse constituée de brins ne s'entremêlant pas ; nous l'appellerons la tresse triviale. La composition avec cette tresse ne change rien et la tresse triviale est donc un élément neutre.

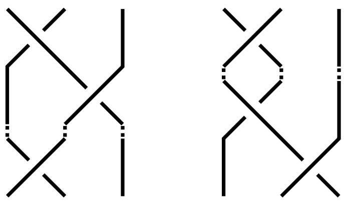
Chaque tresse admet une *tresse inverse*. Etant donné une tresse, nous devons trouver une autre tresse qui, quand on la compose, nous donne un résultat qui s'identifie à la tresse triviale (équivalent du zéro). Cela est possible en considérant l'image de la tresse dans un miroir. En composant une tresse avec son image dans un miroir, nous obtenons une tresse qui se réduit par des mouvements de REIDEMEISTER en la tresse triviale comme l'illustre la figure suivante.



Un ensemble qui possède une opération qui vérifie les propriétés précédentes (associativité et existence d'un élément neutre et d'inverses pour tous les éléments) est appelé un *groupe*. Nous avons donc le théorème.

Théorème 4 *La composition munit l'ensemble des tresses d'une structure de groupe.*

Remarquons que nous n'avons pas toutes les propriétés de l'addition des nombres. Par exemple l'addition est *commutative*. Pour les tresses, ceci n'est plus vrai si le nombre de brins est supérieur ou égal à trois. La figure suivante montre l'exemple de deux tresses à trois brins telles que le composé de ces deux tresses est différent selon l'ordre dans lequel nous faisons l'opération (il suffit pour s'en convaincre de remarquer que les deux permutations associées sont différentes).

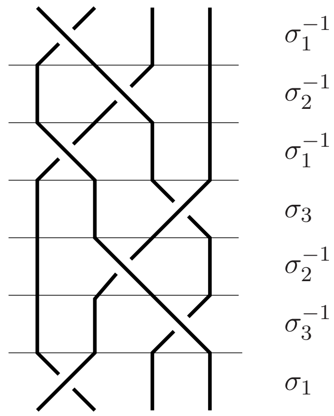


Intérêt de cette structure

Un intérêt de cette structure est de pouvoir réduire les tresses à des composés de tresses simples. En gardant toujours notre analogie avec les nombres, nous pouvons écrire $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ et donc réduire le nombre 5 à une addition de nombres simples, ici tous égaux à 1.

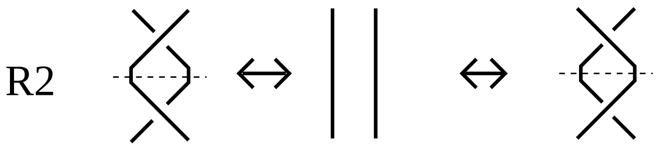
Nous pouvons faire de même pour les tresses. Pour cela nous devons dire quelles sont les tresses « simples ». Nous considérons les tresses constituées d'un seul croisement positif entre les brins i et $i+1$. Nous noterons cette tresse σ_i. De même nous noterons σ_i^{-1} la tresse constituée d'un seul croisement négatif entre les brins i et $i+1$.

Considérons maintenant la tresse à 4 brins de la figure qui suit.

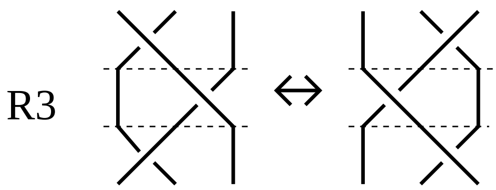


On étire la tresse pour isoler chaque croisement élémentaire et nous obtenons alors ce que nous appellerons un *mot* constitué des lettres σ_i. Le mot correspondant est alors $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_1$.

Notons que nous pouvons obtenir plusieurs mots à partir d'une tresse que cela soit en étirant autrement la tresse ou en faisant subir des mouvements de Reidemeister à la tresse. Heureusement, nous connaissons les relations que ces manipulations imposent aux mots. Précisément, lorsque nous pouvons obtenir deux mots différents en étirant différemment la tresse, cela impose une relation de la forme $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ et cela est possible dès que les brins $i, i+1, j$ et $j+1$ sont tous distincts c'est-à-dire quand $|i-j| \geq 2$. Le mouvement R2 de Reidemeister s'écrit $\sigma_i\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1}\sigma_i = T$, si T désigne la tresse triviale.



Le mouvement R3 de Reidemeister s'écrit lui $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.



On peut ensuite montrer que seules ces relations interviennent et par suite le groupe des tresses s'identifie aux mots constitués des lettres $\sigma_i^{\pm 1}$ et soumis aux relations précédentes, théorème dû à E. Artin [2].

Théorème 5 (Artin 1947) *Le groupe des tresses à n brins s'identifie au groupe engendré par $(\sigma_i^{\pm 1})_{i=1\dots n-1}$ avec les relations*

$$\begin{array}{rcll} \sigma_i\sigma_j &=& \sigma_j\sigma_i & \textit{pour tout } i,j \textit{ tels que } |i-j|>2 \\ \sigma_i\sigma_i^{-1} &=& \sigma_i^{-1}\sigma_i = 1 & \textit{pour tout } i=1,\dots,n-1 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &=& \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \textit{pour tout } i=1,\dots,n-2. \end{array} \tag{3}$$

Cette structure et cette écriture en produits de tresses simples (*générateurs*) et ensuite en mots permet de classifier les tresses et d'avoir des algorithmes qui déterminent si deux tresses sont identiques.

Opération	Mettre la seconde tresse en dessous de la première	additionner les croisements avec signe
Associativité	Oui	$(2+3)+5=2+(3+5)$
Élément neutre	La tresse triviale	$0+2=2+0=2$
Inverse	L'image dans un miroir	$2-2=-2+2=0$
Commutativité	Non	$2+3=3+2$
Générateurs	$(\sigma_i)_{i=1\dots n-1}$	1

Fig. 1 – Résumé de la structure des tresses

2.3. Travaux récents sur les structures : un ordre total

Récemment, une nouvelle structure a été construite sur les tresses. Dehornoy [3] a montré comment définir un ordre total sur les tresses, c'est-à-dire deux tresses étant données, décider laquelle est la plus grande. Pour les tresses dites *positives*, c'est-à-dire à qui nous pouvons associer un mot qui ne comporte que les lettres σ_i avec des puissances positives, cet ordre correspond à l'ordre lexicographique quand on se donne l'ordre des lettres $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{n-1}$. Par exemple $\sigma_1\sigma_2\sigma_4\sigma_2\sigma_1^2\sigma_8 < \sigma_1\sigma_4\sigma_2^3$ car pour la première lettre différente nous avons $\sigma_2 < \sigma_4$. Même si pour les autres tresses, la définition est un peu plus compliquée, cet ordre permet de dire que deux tresses α et β sont égales si et seulement si $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \alpha$. Des travaux récents ont aussi amélioré la rapidité de l'algorithme de différentiation des tresses et d'autres sont en cours pour créer des algorithmes de cryptographie à partir de calculs sur les tresses.

3. Invariants

Revenons aux nœuds et à leur classification.

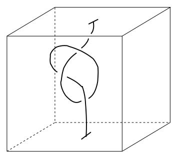
3.1. Utilisation du théorème de Reidemeister

On pourrait à priori penser que le théorème de Reidemeister donne la classification des nœuds. En effet si on se donne deux diagrammes de nœuds, il suffit pour savoir s'ils sont les mêmes d'appliquer un mouvement de Reidemeister sur l'un des diagrammes puis de comparer les diagrammes et de recommencer ainsi de suite. Si les deux diagrammes représentaient le même nœud ce processus aboutirait, dans le cas contraire il serait sans fin. Le problème c'est que l'on ne peut pas conclure si le processus ne s'arrête pas. Dans le cas où les deux diagrammes représentent deux nœuds distincts, on s'y est peut-être mal pris, ou il faut peut-être encore travailler un peu. Pour obliger ce processus à prendre fin, on peut essayer d'appliquer les mouvements de REIDEMEISTER seulement dans le sens où le nombre de croisements diminue. Malheureusement, cela ne suffit pas car il faut parfois compliquer la situation (augmenter le nombre de croisements) pour ensuite réduire le nœud. Par exemple, considérons le diagramme suivant :

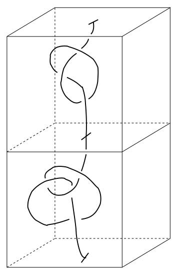
En fait on peut voir que ce diagramme est équivalent à celui du nœud trivial mais pour le transformer par mouvements de REIDEMEISTER en un cercle, il est nécessaire d'augmenter le nombre de croisements.

3.2. Une structure pour les nœuds ?

Que se passe-t-il quand on essaye de mettre une structure sur l'ensemble des nœuds ? Le premier point est de trouver comment mettre une composition sur l'ensemble des nœuds. Essayons de la définir comme nous l'avons fait pour les tresses : on coupe le nœud et on le met ensuite dans une boîte comme le montre le dessin ci-dessous (la boîte sert juste de support visuel).

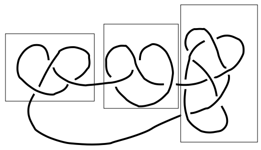


Pour composer les nœuds on colle les boîtes les unes au-dessus des autres :



Ensuite on peut recoller les deux extrémités pour obtenir un nœud.

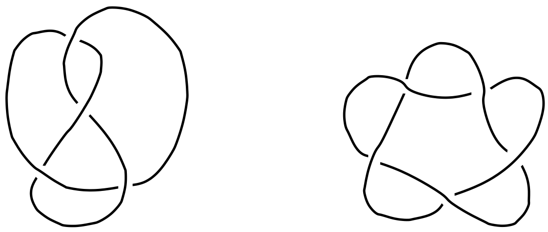
Considérons maintenant les propriétés analogues à celles que nous avons obtenues pour les tresses. L'élement neutre de cette composition est le nœud trivial. Ce produit de nœud est associatif et il est de plus commutatif. En serrant par exemple le premier nœud on peut le passer au travers du second le long de la ficelle et obtenir la composition dans l'autre sens. Le problème est qu'un nœud n'a pas d'inverse pour cette opération. Néanmoins par ce procédé on peut obtenir une décomposition des nœuds en *nœuds premiers*, qui sont ceux qu'on ne peut plus décomposer. On a alors, comme pour les nombres entiers, une arithmétique des nœuds. Schubert a étudié les propriétés de cette arithmétique dans les années 50. Par exemple, le nœud suivant a été décomposé en trois nœuds premiers.



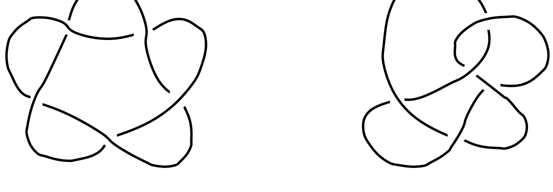
3.3. Construction d'invariants

Ni l'étude d'une structure sur les nœuds, ni le théorème de Reidemeister, n'ont permis de conclure à une classification des nœuds. Néanmoins ce théorème de Reidemeister est la clef pour la construction d'invariants. Afin de comprendre ce qu'est un invariant il faut d'abord préciser invariant par rapport à quoi ? Si l'on considère le nœud, l'invariance doit être par rapport aux manipulations continues de l'espace, mais comme on peut se ramener à un diagramme de nœuds, l'invariance est par rapport aux manipulations triviales et aux mouvements de Reidemeister.

Pour comprendre cette idée d'invariant, considérons un élément « caractéristique » du nœud comme le nombre de croisements. À un diagramme, on peut associer son nombre de croisements. Mais si nous effectuons un mouvement de Reidemeister R1, par exemple, ce nombre de croisements change. Ce n'est donc pas quelque chose qui dépend uniquement du nœud mais aussi de sa représentation. Par contre, en considérant le nombre minimal de croisements pour les diagrammes d'un nœud, nous avons un invariant. Les nœuds suivants



n'ont pas le même nombre minimal de croisements, ils sont donc différents, alors que les nœuds ci-dessous



ont le même nombre minimal de croisements mais sont aussi différents. Notons que s'il est facile de se convaincre en regardant les dessins que les nœuds sont représentés avec leur nombre minimal de croisements, trouver le nombre minimal de croisements d'un nœud est en général un problème très difficile.

De manière générale un *invariant* est l'association à un diagramme de nœud d'un certain objet algébrique (un nombre, un polynôme...). Pour que cette association soit un invariant, il faut qu'elle soit invariante par manipulations triviales et mouvements de REIDEMEISTER. Comme on l'a vu sur un cas particulier, un invariant sert en général à répondre par la négative à la question : est-ce que ces deux diagrammes représentent le même nœud ? Un invariant qui serait différent pour tous les nœuds distincts serait *complet*. Il existe beaucoup d'invariants tels que les polynômes d'ALEXANDER[1] (construit dans les années 1920) et de JONES[2] (1984) qui sont, contrairement au nombre minimal de croisements, facilement calculables . Nous savons que la majorité des invariants ne sont pas complets, néanmoins, on conjecture que les invariants de VASSILIEV (1989–90) le sont. En attendant, la classification des nœuds reste un problème ouvert.

Bibliographie

[1] J. W. ALEXANDER (1923), *A lemma on a system of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **9**, 93–95.

[2] E. ARTIN (1947), *Theory of Braids*, Annals of Math. (2) **48**, 101–126.

[3] P. DEHORNOY (1997), *A fast method for comparing braids*, Advances in Math. **125**, 200-235.

[4] C. KASSEL (2002), *Cents ans de topologie algébrique*, L' Ouvert **106**.

[5] K. REIDEMEISTER (1974), Knotentheorie, *Reprint Springer-Verlag.*

[6] D. ROLFSEN (1990), Knots and links, *Mathematics Lecture Series* **7**, (Corrected reprint of the 1976 original).

[7] A. SOSSINSKY (1999), Nœuds, Genèse d'une théorie mathématique (Origins of a mathematical theory), *Éditions du Seuil.*

[8] *La science des nœuds, théorie et applications*, Pour la science, dossier hors série - avril 1997.

[9] *Des tresses pour l'ordinateur quantique*, Pour la science, mai 2006.

[10] V. TOURAEV (1992), *Topologie des nœuds*, L' Ouvert **66**.

[11] P. VOGEL (1990), *Representations of links by braids : A new algorithm,* Comment. Math. Helvetici, **65**, No. 1, 104-113.

Thomas AUBRIOT
Emmanuel WAGNER
IRMA
Université Louis Pasteur, Strasbourg
aubriot@math.u-strasbg.fr
wagner@math.u-strasbg.fr

[1] On pourra consulter l'article « Cent ans de topologie algébrique » de C. KASSEL paru dans l'Ouvert 106 pour une définition de l'invariant d'Alexander.

[2] On pourra consulter l'article « Topologie des Nœuds » de V. TOURAEV paru dans l'Ouvert 66 pour une définition de l'invariant de Jones.