

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur

Volume 10

2005

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

ALAIN KUZNIAK

Département de mathématiques
IUFM d'Orléans-Tours
72 rue du Fg de Bourgogne
45000 Orléans
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
pluvin@math.u-strasbg.fr

Comité de rédaction

ALAIN BRONNER - Montpellier
CLAIRE DUPUIS - Strasbourg
VIVIANE DURAND-GUERRIER - Lyon
RAYMOND DUVAL - Lille
ATHANASIOS GAGATSI - Chypre

FERNANDO HITT - Montréal, Mexico
CATHERINE HOUEMENT - Rouen
MICHALIS KOURKOULOS - Crète
GUY NOËL - Mons
MONCEF ZAKI - Maroc

Responsable de publication

NICOLE BOPP – Directrice de l'IREM

Editeur

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. (33) 03 90 24 01 30

Fax (33) 03 90 24 01 65
Bibliothèque : (33) 03 90 24 01 61
<http://irem.u-strasbg.fr>
irem@math.u-strasbg.fr

SOMMAIRE

	Pages
EDITORIAL	3
RAYMOND DUVAL <i>Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements.</i>	5
DENIS TANGUAY <i>Apprentissage de la démonstration et graphes orientés.</i>	55
ROBERT ADJIAGE <i>Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports.</i>	95
CARL WINSLOW <i>Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : la dialectique matières-compétences.</i>	131
MARIA TRIGUEROS et ASUMAN OKTAÇ <i>La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire.</i>	157
C. ARMANDO CUEVAS V., SALVADOR MORENO G. et FRANÇOIS PLUVINAGE <i>Una Experiencia De Enseñanza del Objeto Función.</i>	177
ALINE ROBERT <i>De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique.</i>	209
INSTRUCTIONS POUR LES AUTEURS	251

EDITORIAL

EXTENSIONS POUR LES ANNALES

Le bon accueil fait aux derniers volumes des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives a conduit leur comité scientifique à veiller à ce que les auteurs d'articles puissent prétendre à une juste reconnaissance scientifique de leur publication. Cela supposait une inscription des Annales dans la base de données informatisée « MATHDI », cette inscription impose en particulier une bonne régularité de parution, annuelle en l'occurrence comme le titre l'indique, et aussi quelques autres contraintes, qui ont toutes parues à la fois fondées et acceptables. L'une d'elles conduira à demander aux auteurs francophones l'effort de proposer la traduction de leur titre et de présenter un Abstract en ce moderne latin qu'est la langue anglaise.

L'ouverture et la diffusion des Annales passent aussi par la publication d'articles rédigés en anglais et en espagnol. Cette extension ne doit pas conduire à négliger notre lectorat actuel, déjà assez étendu, et qui, en plus des didacticiens, comprend des formateurs d'enseignants, des animateurs IREM et des professeurs-stagiaires préparant des mémoires professionnels. Au comité scientifique de songer, par ses choix, à ce que ces diverses catégories de lecteurs continuent à être sainement et convenablement nourries. Ce disant, nous songeons aussi aux auteurs potentiels, à l'intention desquels nous reproduisons les quelques lignes qui suivent, extraites de la feuille de présentation des Annales, remise en particulier à MATHDI. Le texte complet dont ces lignes sont extraites se trouve en fin de ce volume.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socio-culturels variés sont les bienvenues. Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite.

Dans le même sens d'une reconnaissance à la hauteur des efforts de qualité de la publication, mais cette fois plus particulièrement à l'intérieur de la communauté francophone, des liens ont été établis avec l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM). Ladite association a accepté d'envisager un soutien analogue à celui qu'elle accorde par exemple à la revue « Petit x ». Par ailleurs, il se trouve que, précisément comme pour « Petit x » qui s'est étendu hors de Grenoble, la direction des Annales ne sera plus seulement assurée depuis Strasbourg. De nos jours, un tel fonctionnement en réseau bénéficie de ressources

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 3 - 4.

© 2005, IREM de STRASBOURG.

commodes et rapides et peut ainsi exister sans trop de pesanteurs. Cette nouvelle configuration conduira certainement à modifier le titre de la revue pour marquer à la fois son ancrage dans les mathématiques et son extension hors de Strasbourg. "Annales de Didactique des Mathématiques et de Sciences Cognitives" a été proposé.

Toutes ces modifications ne visent qu'à maintenir la vitalité des Annales et à accroître son potentiel d'attraction grâce à l'intérêt et à la diversité des volumes à venir.

Alain KUZNIAK & François PLUVINAGE

RAYMOND DUVAL

**LES CONDITIONS COGNITIVES DE L'APPRENTISSAGE DE LA
GÉOMÉTRIE : DÉVELOPPEMENT DE LA VISUALISATION,
DIFFÉRENCIATION DES RAISONNEMENTS ET
COORDINATION DE LEURS FONCTIONNEMENTS**

Abstract. Cognitive conditions of the geometric learning : developing visualisation, distinguishing various kinds of reasoning and co-ordinating their running

Geometry is a kind of knowledge area that requires the cognitive joining of two representation registers: on one hand the visualisation of shapes in order to represent the space and on the other hand the language for stating some properties and for deducing from them many others. The troubles of learning first come from the fact these two registers are used in a way which is opposite to their cognitive use apart from mathematics.

The way of seeing a geometrical figure depends on the activity for what it is used. Thus it can run in an iconic way or in a non-iconic way. The non-iconic visualisation involves that the first recognised shapes would be visually deconstructed. There are three kinds of shape deconstruction: deconstruction by using tools in order to construct any figure, the heuristic breaking down in order to solve problems and the dimensional deconstruction. This one is the central process of geometrical visualisation.

The analysis of language in geometry requires that three levels of discursive operations would be separated: verbal designation, property statement and deduction. This separation is important because the relation between visualisation and language changes completely from one level to the other. This variation conceals the most important cognitive phenomenon: the dimensional hiatus. Comings and goings between visualisation and language involve a jump into the number of dimensions in order to recognise the knowledge objects that are represented within each register.

Becoming aware of the dimensional deconstruction of shapes and understanding the process of the various discursive operations are the conditions for succeeding in making the two registers run in synergy. There are the crucial thresholds for learning in geometry. Is that really taken into account in the teaching ?

Résumé. La géométrie est un domaine de connaissance qui exige l'articulation cognitive de deux registres de représentation très différents : la visualisation de formes pour représenter l'espace et le langage pour en énoncer des propriétés et pour en déduire de nouvelles. Les difficultés d'apprentissage viennent d'abord de ce que ces deux registres sont utilisés d'une manière souvent contraire à leur fonctionnement cognitif normal en dehors des mathématiques.

La manière de voir des figures dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. On peut ainsi distinguer une manière de voir qui fonctionne de manière iconique et une manière de voir fonctionnant de manière non iconique. La visualisation non iconique implique que l'on déconstruise les formes déjà visuellement reconnues. Il y a trois types de déconstruction des formes : la déconstruction instrumentale pour construire une figure, la décomposition heuristique et la déconstruction dimensionnelle. La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.

ANNALES de DIDACTIQUE et SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 5 - 53.
© 2005, IREM de STRASBOURG.

Pour analyser le rôle du langage en géométrie, il faut distinguer trois niveaux d'opérations discursives : la dénomination, l'énonciation de propriétés, la déduction. Cette distinction est essentielle car le rapport du langage à la visualisation change complémentaire d'un niveau à l'autre. Cependant, sous cette variation, se cache un phénomène cognitif fondamental : le hiatus dimensionnel. Les passages entre visualisation et discours impliquent en géométrie un changement du nombre dimensions pour reconnaître les objets de connaissance visés dans chacun des deux registres.

La prise de conscience de la déconstruction dimensionnelle des formes et celle de la variété des opérations discursives sont les conditions pour que la visualisation et le discours fonctionnent en synergie malgré leur hiatus dimensionnel. Ce sont là les seuils décisifs dans l'apprentissage de la géométrie.

Mots clés. analyse fonctionnelle, codage, circuit de visualisation, contre-exemple, décomposition heuristique (des figures), déconstruction dimensionnelle (des formes), définition, droite, figure, hiatus dimensionnel, preuve, proposition, reconfiguration, représentation autosuffisante, source de conviction, unité figurale, visualisation iconique, visualisation non iconique.

... ne négliger d'aucune manière la géométrie
République VII, 527c

Parmi tous les domaines de connaissances dans lesquels les élèves doivent entrer, la géométrie est celui qui exige l'activité cognitive la plus complète, puisqu'elle sollicite le geste, le langage et le regard. Là, il faut construire, raisonner et voir, indissociablement. Mais la géométrie est aussi le domaine plus difficile à enseigner et l'un de ceux où, même lorsque les objectifs restent très modestes, les résultats atteints sont décevants. Il suffit de consulter les évaluations nationales au début du Collège, sans même rappeler les difficultés concernant la démonstration, pour constater un état de choses bien connu. Qu'est-ce qui, dans l'activité cognitive sollicitée pour faire de la géométrie, se révèle être trop complexe ou trop insaisissable pour les élèves, construire, raisonner pour justifier ou voir ? Arrêtons-nous un instant sur figures, lesquelles condensent en quelque sorte toutes les modalités de l'activité cognitive.

Voir une figure, en géométrie, exige que l'on dissocie ce qui relève de la grandeur, et donc ce qui dépend de l'échelle de grandeur à laquelle s'effectue l'acte de voir, et ce qui relève des formes discriminées, lesquelles sont indépendantes de l'échelle de grandeur. Le rapport aux figures, c'est à-dire la manière de regarder ce qu'elles donnent à voir, concerne la discrimination de formes et non pas la grandeur ou les changements d'échelle de grandeur. C'est d'ailleurs l'analyse que Poincaré faisait de "l'intuition géométrique" :

“ Quand, dans un théorème de géométrie métrique, on fait appel à cette intuition, c'est parce qu'il est impossible d'étudier les propriétés métriques d'une figure en faisant abstraction de ses propriétés qualitatives, c'est-à-dire celles qui sont l'objet propre de l'Analysis Situs....c'est pour favoriser cette intuition que le géomètre a

besoin de dessiner les figures, ou tout au moins de se les représenter mentalement. Or s'il fait bon marché des propriétés métriques ou projectives de ces figures, s'il s'attache seulement à leur propriétés purement qualitatives, c'est que c'est là que l'intuition géométrique intervient véritablement" (Poincaré, 1963, p.134-135).

La discrimination de ces "propriétés purement qualitatives" constitue le premier seuil critique pour l'apprentissage de la géométrie. Elle est le seuil peut-être le plus difficile à faire franchir aux élèves dans l'enseignement mais, aussi, le plus décisif pour leur faire comprendre ce qu'est une démarche géométrique.

Une telle affirmation peut surprendre. En effet, la reconnaissance des propriétés "purement qualitatives" semble directement enracinée dans la perception. En outre, le corpus des figures dont les programmes scolaires peuvent demander la connaissance est très restreint, et il correspond à des formes qui sont perceptivement remarquables et culturellement familières. Et, dans l'enseignement, ces figures se retrouvent au carrefour d'une grande variété d'activités : observation, reproduction, construction, description, définition, etc. Pourquoi la source profonde des difficultés auxquelles l'enseignement de la géométrie se heurte devrait-elle être d'abord cherchée dans cette intuition géométrique qui s'appuie sur la perception, celle-ci recouvrant aussi bien l'espace du monde environnant que les différents types de représentation (photos, cartes, plans, schémas, figures) auxquels il donne lieu ?

C'est la perception qui fait problème. Non seulement elle fonctionne en deçà de toute dissociation entre grandeur et discrimination visuelle des formes (Coren et alii, 1979), mais surtout elle impose une manière commune de voir qui va à l'encontre des deux manières de voir des figures qui sont sollicitées dans l'enseignement des mathématiques : l'une centrée sur la constructibilité des figures à l'aide d'instruments et l'autre centrée sur leur enrichissement heuristique pour y faire apparaître des formes qui ne sont pas celles que le regard y voit. Et on sait combien le passage du fonctionnement habituel de la perception des formes (Kaniza, 1998) à ces deux manières de voir, surtout à la seconde, peut déjà être difficile pour beaucoup d'élèves. Cependant, ces deux manières de voir ne sont que la manifestation en surface d'une troisième, laquelle constitue le mécanisme cognitif de la visualisation mathématique : la déconstruction dimensionnelle des formes. La construction de figures, ou leur utilisation heuristique, n'ont de sens que dans la mesure où elles s'inscrivent dans ce fonctionnement de la visualisation mathématique. Car, avec cette troisième manière de voir, l'espace n'est plus abordé sous l'aspect grandeur et changement d'échelles de grandeur, ni sous celui des propriétés topologiques et affines discriminant des formes, il est abordé sous l'aspect de ses dimensions et du changement du nombre de ses dimensions. Le changement du nombre de dimensions est au centre du regard géométrique sur les figures.

Mais revenons aux figures, dont Poincaré reconnaissait la nécessité cognitive pour

l'“intuition géométrique”. Leur principale caractéristique par rapport à ces autres représentation de l'espace environnant que sont les plans, les cartes, ou les modèles, est de ne pas être iconiques, c'est-à-dire de ne pas ressembler à un objet vu et connu dans la réalité. Cela veut dire en fait que la reconnaissance des objets représentés ne dépend pas d'abord de la discrimination visuelle des formes, mais d'hypothèses que l'on s'est donnée et qui vont commander *aussi* le regard sur les figures. Et là c'est un tout autre type d'activité qui se trouve mobilisé : la production discursive d'énoncés que l'on relie entre eux pour justifier, pour expliquer ou pour démontrer. Est-il besoin de rappeler que cela ne peut pas se faire en dehors du langage, mais que, comme pour la visualisation, on n'y fait pas fonctionner le langage de la même manière qu'on l'utilise en dehors des mathématiques ?

Ce sont ces conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie que nous allons analyser en détail dans cet article. Nous montrerons plus particulièrement que la visualisation et la production d'énoncés en géométrie requièrent des fonctionnement cognitifs qui sont différents et plus complexes que ceux mis en œuvre en dehors de la géométrie. C'est pourquoi leur développement et leur coordination doivent être considérés comme des objectifs d'enseignement aussi essentiels que les contenus mathématiques eux-mêmes. Car ici la compréhension des contenus ne peut se construire qu'à partir d'une synergie entre visualisation et langage. Ces conditions cognitives sont en quelque sorte des conditions pour apprendre à apprendre en géométrie.

Nous commencerons par mettre en évidence la spécificité des manières de voir pratiquées en mathématiques. Pour cela nous allons partir d'une idée très simple : c'est la tâche demandée qui détermine le rapport aux figures. La manière de voir une figure dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. Et cela nous permettra de soulever une question essentielle pour l'organisation des apprentissages, et qui est rarement abordée : la manière de voir qu'un type d'activité favorise aide-t-elle à entrer dans les autres manières de voir requises par les autres types d'activité ? Nous aborderons ensuite ce qui constitue le processus central de la visualisation géométrique : la déconstruction dimensionnelle des formes. Aucune des activités classiquement exploitées pour introduire les élèves à la géométrie ne permet vraiment de développer cette manière de voir. Et c'est pourtant la seule qui est requise par le développement des démarches discursives en géométrie : énonciation de propriétés, définitions, déduction d'autres propriétés, théorèmes... Y introduire les élèves exige un tout autre type d'activité pour les élèves que ceux habituellement exploités. Mais, par delà sa mise en œuvre didactique, c'est le problème plus global de l'articulation entre visualisation et discours géométrique que nous examinerons. En effet, c'est là que se situent non seulement les enjeux éducatifs de la géométrie, enjeux de formation générale comme Platon l'évoquait déjà, mais aussi ses enjeux scientifiques puisque cela concerne les manières mathématiques de prouver.

1. Classification des manières de voir en fonction du rôle des figures dans les activités géométriques proposées aux élèves

Le clavier des activités possibles pour faire travailler les élèves avec des figures de géométrie ou sur des figures de géométrie est extrêmement étendu. Les variations d'activité portent à la fois sur *la tâche à faire* (reproduire une figure selon un modèle ou la construire, ou effectuer des mesures, ou encore la décrire pour la faire reconstruire par un autre élève) et sur *le mode de l'activité demandée* (modalité concrète en utilisant un matériel manipulable, modalité représentationnelle en s'en tenant aux seules productions graphiques, ou modalité technique en imposant certains instruments). Or ce ne sont pas du tout les mêmes manières de voir qui sont sollicitées d'un type d'activité à un autre, même si ce sont les mêmes formes nD (pièces matérielles 3D à manipuler physiquement, figures 2D déjà construites ou proposées à construire, à modifier...) qui sont perceptivement données à voir. En prenant simplement comme critères le type d'opérations sur les formes données à voir et la manière dont les propriétés géométriques sont mobilisées par rapport à ce type d'opérations, on peut distinguer quatre manières de voir. Ces quatre manières de voir sont quatre entrées très différentes dans la géométrie.

	BOTANISTE	ARPENTEUR- géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR- bricoleur
1. Type d'opération sur les FORMES VISUELLES , requis par l'activité proposée	Reconnaître des formes à partir de qualités visuelles d'un contour : UNE forme particulière est privilégiée comme TYPIQUE	Mesurer les bords d'une surface : sur un TERRAIN ou sur un DESSIN (variation d'échelle de grandeur et donc de procédure de mesure)	Décomposer une forme en tracés constructibles à l'aide d'un instrument Il faut (souvent) passer par des TRACÉS AUXILIAIRES qui n'appartiennent pas à la figure "finale".	Transformer des formes les unes dans les autres. Il faut ajouter des TRACÉS REORGANISATEURS dans la figure finale pour initialiser ces transformations
2. Comment les PROPRIÉTÉS GEOMÉTRIQUES sont mobilisées par rapport à ce type d'opération	Pas de liens entre les différentes propriétés (pas de définition mathématique possible)	Les propriétés sont des critères de choix pour les mesures à faire. Elles ne sont utiles que si elles renvoient à <i>une formule permettant un calcul</i>	Comme contraintes d'un ordre de construction . Certaines propriétés sont obtenues par une seule opération de traçage , les autres exigent plusieurs opérations.	Implicitement par renvoi à un réseau plus complexe (une trame de droites pour la géométrie plane ou une trame d'intersections de plans...) que la figure de départ

Figure 1 : Quatre entrées classiques dans la géométrie

Le botaniste. C'est l'entrée la plus évidente et la plus immédiate. Il s'agit d'apprendre à reconnaître et à nommer les formes élémentaires qui sont utilisées en géométrie plane : types de triangles et de quadrilatères, configurations obtenues par les différentes positions de deux droites l'une par rapport à l'autre, éventuellement les formes circulaires et les formes ovales etc. Et il s'agit évidemment d'observer les différences entre deux formes présentant certaines similitudes (un carré et un rectangle) et de remarquer des similitudes entre des formes différentes (entre un carré et un parallélogramme). Ici, les propriétés distinguées sont des caractéristiques visuelles de contour.

En réalité ce type d'activité n'a rien d'une activité géométrique. Elle ne paraît géométrique que dans la mesure où elle porte sur des formes dites "euclidiennes". Mais le même travail d'observation pourrait (et devrait) être fait sur des feuilles d'arbres. Et parmi tous les modèles de formes planes que Piaget (1947, p.70) avait demandé de "copier", à des enfants de 2 à 7 ans, on aurait pu tout aussi bien glisser une feuille de platane et une feuille de marronnier, la forme d'un sapin et celle d'un épicéa, ou le dessin schématique d'une automobile. Rappelons que dans les observations de Piaget il s'agissait de copier "à main levée" sans utiliser aucun instrument, même pas une règle !

L'arpenteur géomètre. C'est l'entrée historique. Il s'agit d'apprendre à mesurer des longueurs sur un *terrain*, au sol, ou des distances entre deux repères, et à les reporter sur un *dessin* qui prend un statut de plan. *On se situe donc d'emblée à deux échelles de grandeur qu'il s'agit de mettre en correspondance.* Or cette mise en correspondance n'a rien de naturel ou d'évident, car il n'y a pas de procédure commune pour mesurer les distances réelles sur le terrain et pour mesurer les longueurs de tracés d'un dessin. Les tâches spécifiques de cette entrée vont donc consister à proposer des activités exigeant de passer d'une échelle de grandeur à une autre. Le problème du vitrier en est un exemple typique (Berthelot et Salin 94, p.40-41) : combien de mesures effectuer, et lesquelles, pour fabriquer une fenêtre qui rentre dans une ouverture ayant la forme d'un parallélogramme ? La mesure du rayon de la terre par Eratosthène en est un autre exemple célèbre.

Ce type d'activité montre les difficultés que beaucoup d'élèves rencontrent pour mettre en correspondance ce qu'ils voient sur le terrain et ce qui est dessiné sur une feuille. Or cette mise en correspondance exige que l'on privilégie des aspects qui sont essentiels pour la lecture d'un plan ou celle d'une carte de géographie (Berthelot et Salin 2000) : le choix d'objets repères, le choix de points ou d'axes de références pour représenter la position des objets les uns par rapport aux autres, la prise en compte de directions ou d'orientations ... Ces aspects ne sont pas toujours pertinents pour la représentation géométrique. En outre dans ce type d'activité *les propriétés géométriques sont mobilisées à des fins de mesure.*

Le constructeur. C'est l'entrée nécessaire. La particularité des figures géométriques, du moins de celles qui correspondent à des formes euclidiennes

élémentaires et à des configurations de formes élémentaires, est *d'être constructibles à l'aide d'instruments*. Les figures géométriques ne se dessinent pas à main levée, elles se construisent à l'aide d'un instrument qui guide le mouvement de la main, ou qui s'y substitue. Pourquoi ? Un instrument permet de produire une forme visuelle ayant une propriété géométrique et cette forme visuelle constitue la primitive de l'instrument, à cause de la régularité qu'il impose au mouvement de traçage, et *donc de l'invariance visuelle qu'il introduit dans le tracé*. Ainsi le trait droit ou le rond régulier, pour les instruments classiques que sont la règle (non graduée) et le compas. Sans l'utilisation d'instruments, il serait impossible de vérifier une propriété sur une figure.

C'est à travers l'utilisation d'un instrument que les élèves peuvent vraiment prendre conscience que les propriétés géométriques ne sont pas seulement des caractéristiques perceptives. En effet, l'utilisation d'un instrument donne la possibilité d'expérimenter, en quelque sorte, les propriétés géométriques comme **des contraintes de construction** : quand une forme visuelle n'est pas directement produite par un instrument, plusieurs opérations de traçage sont alors nécessaires pour l'obtenir et il y a un ordre pour ces opérations. Ne pas en tenir compte rend la construction impossible. Naturellement, tout changement d'instrument entraîne un changement dans les propriétés géométriques qui doivent être explicitement mobilisées.

C'est cette entrée qui a donné lieu aux innovations les plus spectaculaires pour l'enseignement de la géométrie au cours de ces vingt dernières années (Laborde 1994). Des logiciels de construction ont été développés. Leur avantage, outre celui déjà considérable d'exécution automatique des tâches de réalisation comme pour les calculatrices, est de supprimer complètement les approximations compensatrices de la main dans l'utilisation des instruments. Autrement dit, il n'est plus possible de réussir une construction "au juger", sans prendre en compte les propriétés géométriques. Ainsi dans Cabri Géomètre, une figure construite doit pouvoir conserver sa configuration si l'on bouge l'un de ses points

L'inventeur-bricoleur. Pour présenter cette quatrième entrée, il suffit d'évoquer les problèmes classiques du type suivant :

- (1) Comment partager, d'un seul coup de ciseau, un triangle de manière à pouvoir assembler les deux morceaux en un parallélogramme ?
- (2) Comment construire, à partir d'un carré donné, un autre carré deux fois plus grand (dont l'aire soit le double) ? (Ce problème peut être donné sur du papier quadrillé, ce qui réduit les opérations de mesure à un simple comptage de carreaux)

Ces problèmes ont en commun d'exiger une DÉCONSTRUCTION VISUELLE des formes perceptives élémentaires qui s'imposent au premier coup d'oeil, pour pouvoir obtenir la reconfiguration, ou la figure, demandée. Ces problèmes touchent une capacité fondamentale qui est la condition nécessaire à toute utilisation

heuristique des figures : **ajouter des tracés supplémentaires à une figure de départ** (c'est-à-dire celle qui accompagne un énoncé de problème, ou que l'on peut construire à partir d'un énoncé de problème) **afin de découvrir sur la figure une procédure de résolution**. Ce sont ces tracés supplémentaires qui vont permettre une réorganisation visuelle de la figure de départ. Ici, c'est la recherche de ce tracé supplémentaire qui constitue le problème : "comment partager d'un seul coup de ciseau... ?"

Passer d'une manière de voir à une autre constitue un changement profond de regard, qui est trop souvent ignoré dans l'enseignement. Car le fonctionnement cognitif impliqué par chacune de ces quatre manières de voir n'est pas le même, comme nous le montrerons plus loin. Mais on peut déjà souligner que chaque manière de voir induit un type particulier et limité de compréhension. La connaissance développée n'est pas la même selon le regard qu'un élève se trouve être capable, ou incapable, de mobiliser, et cela en présence de la même figure.

	BOTANISTE	ARPENTEUR- géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR- bricoleur
STATUT ÉPISTEMO- LOGIQUE	CONSTAT perceptif immédiat : "ça se voit sur..."	CONSTAT résultant de la lecture d'un instrument de mesure	RESULTAT <i>d'une procédure de construction</i>	RESULTAT <i>d'une décomposition de la figure de départ en unités figurales que l'on reconfigure autrement</i>
SOURCE COGNITIVE DE LA CERTITUDE	Superposition effectuée à l'œil ou en utilisant un gabarit	Comparaison des valeurs numériques qui ont été obtenues empiriquement	Nécessité interne à l'enchaînement des opérations de la procédure de construction.	Invariance des unités figurales qui sont les référents de la transformation de la figure de départ

Figure 2 : Mode de compréhension et de connaissance lié à chaque manière de voir

La diversité de ces manières de voir soulève les deux questions cruciales pour l'enseignement de la géométrie et pour l'organisation des situations d'apprentissage

(1) La pratique d'une activité favorise-t-elle l'acquisition des manières de voir liées aux autres types d'activité ? Privilégier, par exemple, les activités de construction entraîne-t-il le développement de la capacité heuristique à enrichir et à réorganiser les figures ?

Cette question du transfert, essentielle dans les apprentissages, peut être élargie :

(1bis) Y aurait-il un ordre, et donc une hiérarchie à respecter, pour introduire les activités propres à ces quatre entrées ? Par exemple, l'approche botaniste peut-elle être considérée comme la première étape nécessaire à toute acquisition de connaissances géométriques ?

(2) Quelle manière de voir l'utilisation du langage en géométrie (pour formuler des définitions et des théorèmes, pour les mettre en œuvre dans un raisonnement, pour avancer ou expliquer une conjecture...) requiert-elle ? Est-ce l'une de ces quatre manières de voir ou ne serait-ce pas au contraire une cinquième, totalement différente ?

Cette question nous renvoie à la question fondamentale tant d'un point de vue cognitif que d'un point de vue épistémologique :

(2bis) Comment, et jusqu'où, "voir" et "énoncer" peuvent-ils se rejoindre en géométrie ?

Ces questions sont cruciales parce que la prédominance donnée à l'une de ces quatre entrées, comme la méconnaissance de la complexité de l'articulation entre voir et dire, peuvent créer des obstacles qui, à moyen et long terme, vont se révéler insurmontables pour la progression des élèves. Et, cependant, ces questions sont rarement posées, tellement la réponse "oui" est considérée évidente pour la première, qu'on la prenne dans sa formulation stricte ou dans sa formulation élargie. Quant à la seconde question elle peut paraître bien étrange. Pourtant elle touche le nœud de toutes les difficultés auquel l'enseignement de la géométrie se heurte de manière profonde et récurrente.

2. Deux modes opposés de fonctionnement cognitif : la visualisation iconique et la visualisation non iconique

Rappelons tout d'abord la complexité des processus en jeu dans l'acte de "voir". Voir recouvre toujours deux niveaux d'opérations qui sont différents et indépendants l'un de l'autre, même si le plus souvent ils fusionnent dans la synergie d'un même acte. Ces deux niveaux d'opérations sont **la reconnaissance discriminative de formes** et **l'identification des objets correspondant aux formes reconnues**. Le problème cognitif majeur est celui de savoir comment se fait le passage d'une reconnaissance discriminative de formes à l'identification des objets donnés à voir.

Dans la perception du monde qui nous environne ces deux niveaux d'opération ne semblent pas dissociables puisqu'ils sont simultanés (du moins à l'échelle de notre conscience), l'objet étant immédiatement donné avec la forme qui permet de le distinguer. Cette fusion entre reconnaissance d'une forme et identification d'un objet, base de toute évidence perceptive, est la condition pour des réponses rapides et adaptées à des situations nouvelles et imprévues. En revanche, il n'en va plus de même pour la perception des représentations construites par production de tracés. Il n'y a aucune relation intrinsèque entre les formes reconnues dans un tracé et l'objet que ce tracé "veut" représenter. Comment alors peut s'effectuer le passage de l'un à l'autre ?

Le passage repose sur une “**ressemblance**” entre la forme visuellement discriminée et la forme typique de l’objet représenté. C’est cette ressemblance qui est généralement considérée comme constitutive de l’image. Ainsi, Pierce en a fait la caractéristique de toutes les représentations iconiques par opposition aux symboles et aux indices. Généralement cette ressemblance suffit pour reconnaître directement, et immédiatement, l’objet représenté, comme dans la perception du monde environnant. Ainsi il n’y a pas besoin de savoir lire pour regarder des bandes dessinées et en suivre le récit. Naturellement, ce mécanisme cognitif d’iconicité n’est pas toujours suffisant. Il faut parfois recourir à une **énonciation** implicite ou explicite. En d’autres termes, il faut parfois un apport verbal d’informations, intégré à l’image comme légende ou comme codage d’un élément figuratif, pour pouvoir identifier ce que les formes discriminées représentent. *Mais ce rôle auxiliaire de l’énonciation ne doit pas nous faire oublier l’importance du mécanisme d’iconicité.* Il continue à s’imposer de manière autonome chaque fois que quelque chose (dessin, figures ou formes de pièces à manipuler) est donné à voir.

Regardons maintenant comment ce passage s’effectue pour les différentes manières de voir sollicitées dans les activités de géométrie ? Pour deux d’entre elles, cela fonctionne comme pour n’importe quelle représentation visuelle en dehors de la géométrie. Mais cela n’est plus du tout le cas pour les deux autres qui, au contraire, exigent la neutralisation du mécanisme d’iconicité. Cependant ce passage n’est pas davantage assuré par un apport verbal d’information. Ce sont les impossibilités et les invariances découvertes dans une séquence de transformations visuelles, effectuées avec ou sans instrument, qui le permettent. Toute figure est générative d’une autre, par extension de sa procédure de construction ou par réorganisation visuelle des formes immédiatement reconnues. Ce processus est intrinsèquement autonome, même si dans le contexte d’un problème il peut être discursivement finalisé, et donc considérablement restreint. C’est l’appréhension opératoire fondée sur ce processus qui fait la fécondité intuitive des figures.

VISUALISATION ICONIQUE :		VISUALISATION NON ICONIQUE :	
ÇA RESSEMBLE AU profil d’un objet réel, ou à un ensemble d’itinéraires ou de déplacements sur un territoire ou à un modèle type (étalon). <i>La figure reste un objet indépendant des opérations que l’on effectue sur elle</i>		C’est une SEQUENCE d’OPERATIONS qui permet de reconnaître des propriétés géométriques, par l’impossibilité d’obtenir certaines configurations, ou par invariance des configurations obtenues. <i>La figure est une configuration contextuellement détachée d’un réseau ou d’une organisation plus complexes</i>	
BOTANISTE	ARPENTEUR- géomètre	CONSTRUCTEUR	INVENTEUR- bricoleur

Figure 3 : Deux mécanismes d’identification d’objets à partir de formes visuelles

2.1 Les impasses de la visualisation iconique pour l'apprentissage de la géométrie

La visualisation iconique repose sur une ressemblance entre la forme reconnue dans un tracé et la forme caractéristique de l'objet à identifier. Naturellement la situation n'est pas la même selon que le référent est un objet matériel dans l'espace environnant¹ ou une représentation de sa forme type. Dans le cas de la représentation, la visualisation iconique suppose la connaissance d'une forme type pour chaque objet géométrique à identifier. La comparaison entre les formes à reconnaître et les formes types tolère des écarts plus ou moins grands. Il y a par exemple une forme type du rectangle qui exclut une trop grande disproportion entre longueur et largeur. De même, la forme type d'un triangle requiert que les hauteurs restent situées à l'intérieur. Chaque forme type est associée à un nom qui permet de l'évoquer et qui lui confère ainsi le statut d'objet. Les impasses de la visualisation iconique pour l'apprentissage de la géométrie sont bien connues.

- La reconnaissance étant centrée sur le contour d'une zone ou d'une surface, ***une forme c'est d'abord un profil***. Cela veut dire que toutes les propriétés qui ne sont directement liées au contour caractéristique d'une forme (celles liées aux diagonales les quadrilatères remarquables) restent hors champ et donc moins facilement mobilisables quand les énoncés de problèmes ne les mentionnent pas explicitement. Cela veut dire aussi qu'il y a une résistance à sortir du contour fermé de la figure, en prolongeant par exemple les côtés pour faire apparaître les droites sous-jacentes.
- Les formes apparaissent comme étant ***stables***. Elles ne sont donc pas vues d'une manière qui permette de les transformer en d'autres formes semblables ou, surtout, différentes. Par exemple il est difficile d'apercevoir une superposition de parallélogrammes dans un réseau de droites d'où l'on voit d'emblée se détacher une juxtaposition de triangles. Et cela pourra être d'autant plus difficile que la reconnaissance des formes s'accompagne de l'énonciation, implicite ou explicite, du nom de ce que l'on identifie.
- La dissociation entre les opérations constituant l'acte de voir est d'autant plus nécessaire qu'il peut y avoir conflit entre la reconnaissance des formes par simple ressemblance à un exemple type et l'identification de l'objet auquel correspond la forme reconnue. Car les relations constitutives des objets ne sont pas des propriétés dont la présence peut être décidée d'un

¹ Lorsque le référent est l'espace physique environnant ou des objets matériels, l'établissement des correspondances entre les formes reconnues dans un tracé et le référent réel implique la mobilisation du corps de celui qui regarde (sa position, son orientation, ses déplacements ou ses gestes pour manipuler). Les cartes, les plans de ville, les schémas accompagnant des instructions de montage en sont un excellent exemple (Duval 2000)

simple coup d'œil. La vision ne permettant pour les relations entre deux unités figurales qu'une estimation perceptive sujette à illusion et avec des seuils de discernabilité étroits.

Ces tendances lourdes de la visualisation iconique vont contre le développement de ce qui doit devenir le geste réflexe pour faire de la géométrie : **décomposer toute forme**, que l'on reconnaît d'emblée dans un ensemble de tracés ou dans n'importe quelle figure de départ, **en une configuration d'autres unités figurales** du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions.

2.2. La visualisation non iconique ou la déconstruction de formes

La décomposition des formes discriminées, à commencer par celles qui apparaissent être visuellement simples, en unités figurales est le préalable à l'entrée dans le fonctionnement propre à la visualisation non iconique. Or le point essentiel est qu'il existe au moins deux manières radicalement différentes de décomposer une figure de départ en unités figurales. Pour les distinguer, il suffit de prendre comme critère la pratique, spécifiquement mathématique, dans la manière d'utiliser une figure de départ (une figure donnée avec un énoncé de problème ou constructible à partir de cet énoncé) : l'introduction de tracés supplémentaires. On la retrouve dans les deux modes de visualisation non iconique que nous avons distingués mais elle y intervient de manière radicalement différente. Dans un cas elle est imposée et produite par les instruments utilisés pour construire une figure. Dans l'autre, au contraire, elle doit être "imaginée" par celui qui regarde car le choix du tracé supplémentaire permet de voir une procédure de résolution du problème posé. Or cela renvoie à deux types de fonctionnements cognitifs qui n'ont rien de commun.

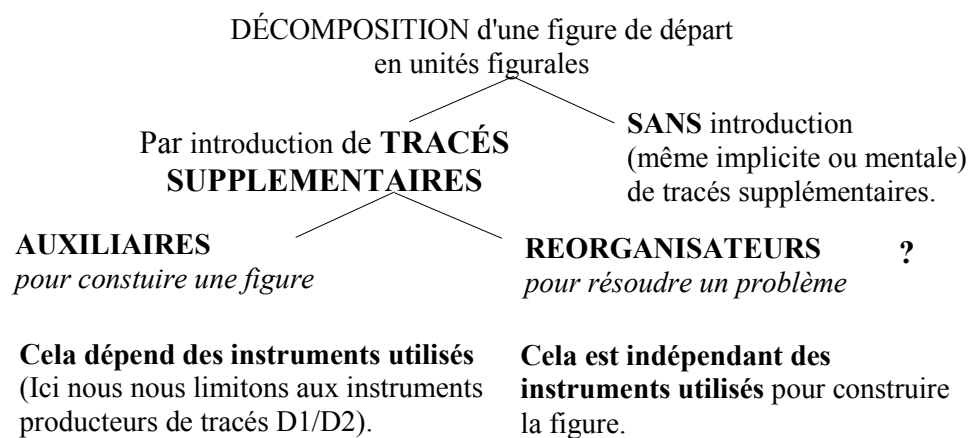


Figure 4 : Deux ou trois modes de visualisation non iconique ?

La caractéristique des figures géométriques, par rapport à tous les autres types de figures est qu'elles peuvent se construire à l'aide d'instruments et principalement d'instruments producteurs de tracés D1/D2². La production de chaque tracé correspond à la fois à une instruction formulable (les “ figures téléphonées ”) ou formulée (dans le menu d'un logiciel) et à la mobilisation d'une propriété géométrique en relation avec l'instrument utilisée (compas, règle non graduée, règle graduée...). Autrement dit l'activité de construction de figures, presque toujours des configurations de formes 2D/2D ou 3D/2D, repose sur leur déconstruction en tracés 1D/2D et 0D/2D. *Mais dans cette activité de déconstruction toute l'attention porte sur la reconstruction, car la déconstruction des formes 2D/2D est automatiquement faite par l'instrument tandis que la reconstruction exige que l'on se focalise sur l'ordre dans les instructions à donner pour les opérations de traçage à faire.* Or cette activité conduit à la production de tracés qui n'appartiennent pas à la figure à construire, soit qu'il s'agisse de tracés intermédiaires soit qu'il s'agit de tracés qui vont déborder le contour des formes à tracer : par exemple les droites qui sont les supports des côtés du carré ou du triangle à construire. *Nous appellerons ces tracés intermédiaires ou ces tracés supports des “tracés auxiliaires”*. D'ailleurs dans un environnement papier crayon, on peut souvent observer l'habitude désastreuse de les effacer, une fois la figure à construire obtenue.

La situation est totalement autre lorsqu'il s'agit de partir d'une figure pour résoudre un problème. Le problème du partage d'un triangle en un seul coup de ciseau de manière à assembler les deux morceaux en un parallélogramme en est l'exemple typique. Il s'agit de transformer un triangle en un parallélogramme par l'ajout d'un tracé supplémentaire. Il s'agit donc là de la déconstruction d'une forme visuelle de base pour obtenir une autre forme visuelle de base. Et le choix de ce tracé supplémentaire va dépendre de la manière dont les deux parties du triangle obtenues par ce tracé vont permettre de les réassembler sous la forme d'un parallélogramme. Il s'agit évidemment d'une déconstruction qui est sans rapport avec la déconstruction impliquée dans la construction des figures. Car le choix de

2 Le “dénominateur” correspond à la prise en compte de l'espace dans lequel les représentations sont produites :

- celui d'objets physiques qu'on peut manipuler physiquement (nD /3D) : maquettes de polyèdres (3D/3D), feuille papier que l'on peut plier ou découper (2D/3D), ficelles que l'on peut tendre (1D/3D) comme avec un géoplan. J'appellerai ces objets “objets maquettes” pour les distinguer des instruments produisant une trace ou un tracé.
- celui d'un support de projection (nD/2D) pour la représentation qui sera alors produite par des tracés ou par des empreintes : sable, papier, écran électronique

Cela permet donc de distinguer les activités géométriques réalisées matériellement et les activités géométriques qui sont réalisées représentativement. Souvent les objets maquettes sont utilisés pour une interprétation iconique des représentations graphiques. Cela apparaît d'ailleurs dans les définitions : la droite comme une ficelle tendue... Et cela stérilise l'ouverture de la représentation.

ce tracé est indépendant de la manière dont le triangle peut être construit et il n'y a rien de commun entre ce tracé supplémentaire à trouver et les tracés auxiliaires. Nous appellerons "tracés réorganisateurs" tous les tracés permettant de réorganiser une figure donnée en vue d'y faire apparaître des formes non reconnaissables dans cette figure donnée. L'utilisation heuristique d'une figure dépend évidemment de la capacité à "voir" les tracés réorganisateurs possibles.

Il faut souligner ici un point fondamental pour comprendre l'importance et la spécificité de l'acte de voir dans l'apprentissage de la géométrie : **la visualisation non iconique est totalement indépendante de toute énonciation explicite ou implicite.** En d'autres termes, elle n'est en rien subordonnée à une connaissance des propriétés géométriques. Cela semble trivial pour les activités de type construction de figures dans la mesure où ce sont les instruments utilisés qui commandent, dirigent ou contrôlent la décomposition visuelle des formes. En revanche cela l'est moins pour l'utilisation heuristique des figures. D'ailleurs, le plus souvent, on accorde accordent un rôle directeur à la connaissance des propriétés pour l'exploration des figures, comme si voir ne pouvait permettre de découvrir avant de savoir. Par exemple, faut-il vraiment connaître le théorème des milieux pour résoudre le problème de la reconfiguration du triangle en un parallélogramme ou, au contraire, une exploration des reconfigurations ne serait-elle pas une voie de résolution ? Et dans ce cas des apprentissages spécifiques pour rendre les élèves capables de "voir" le tracé réorganisateur non seulement pour ce problème mais pour beaucoup d'autres problèmes mathématiquement très différents, ne seraient-ils pas nécessaires ?

Nous reviendrons sur cette question qui touche le rôle heuristique de la visualisation dans la résolution de problèmes de géométrie élémentaire. Mais déjà nous pouvons faire les remarques suivantes : si l'on peut toujours modifier son discours sur des objets, on ne peut pas modifier les formes qui sont d'emblée reconnues dans une figure. Car à la différence de l'énonciation, et donc de la production d'explications ou de justifications, la reconnaissance visuelle de formes échappe à tout contrôle intentionnel. Il y a des lois d'organisation des données visuelles, mises en évidence par la *Gestalttheorie*, qui imposent la reconnaissance de certaines formes **contre** la reconnaissance d'autres formes, même si celles-ci sont verbalement évoquées. Cette résistance a conduit parfois certaines recherches didactiques à déplorer que dans la résolution de problèmes de géométrie les élèves observés soient arrêtés par la "perception" de la figure ! En fait, un apprentissage visant à rendre les élèves capables de "voir" le (ou les) tracé réorganisateur à ajouter pour trouver la solution d'un problème doit se faire au niveau de la reconnaissance des formes, et non pas à celui de l'identification des objets représentés qui autrement restera purement verbale.

2.3. Les acquisitions relatives à une manière de voir aident-elles à entrer dans les autres manières de voir ?

Cette question du transfert de ce qui a été acquis dans un type d'activité proposé en classe à un autre type d'activité, est la question cruciale pour l'enseignement de la géométrie au Primaire et au Collège. Vouloir privilégier une entrée comme devant être plus accessible que les autres revient à supposer la transférabilité plus ou moins spontanée, d'une manière de voir aux autres manières de voir.

Or passer de la visualisation iconique, qui est commune à tous les domaines de connaissance, à la visualisation non iconique, qui est spécifique aux mathématiques, exige un retournement complet du fonctionnement cognitif de l'acte de "voir". Cela équivaut à substituer au circuit spontané représenté par les flèches A1-A2 dans le schéma ci-dessous (Figure 5) soit le circuit C1-C2 correspondant à l'exploration réorganisatrice des figures soit le circuit inverse représenté par les flèches B1-B2-B3, considéré comme la démarche "conceptuelle".

RECONNAISSANCE DE FORMES

Formes discriminées au premier coup d'œil et intégrées au processus de visualisation iconique.

Traitement purement visuel

C1 ?

Formes obtenues par décomposition en unités figurales disponibles pour d'autres organisations visuelles non iconiques.

par mobilisation de propriétés

IDENTIFICATION DE L'OBJET REPRÉSENTÉ PAR LES FORMES RECONNUES

*identification par des hypothèses, par une légende.
On peut changer l'objet représenté rien qu'en changeant les hypothèses.*

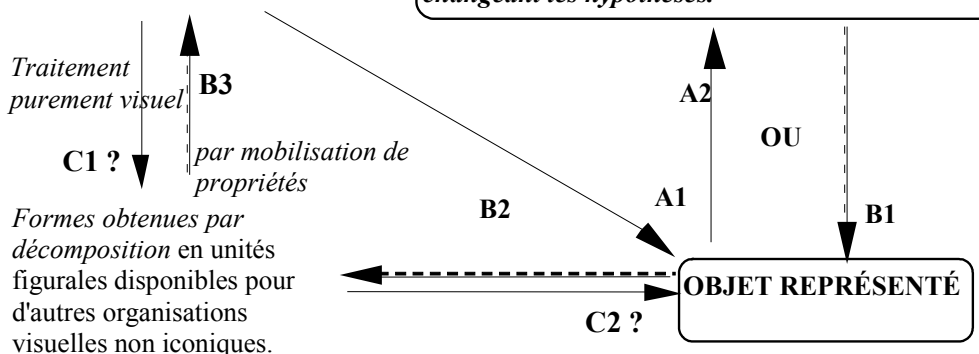


Figure 5 : Deux modes de fonctionnement cognitif pour identifier les objets représentés

Peut-on enseigner la géométrie comme si la grande majorité des élèves, au Primaire et au Collège, allaient découvrir et effectuer d'eux-mêmes un tel renversement, non seulement pour passer d'une visualisation iconique à une visualisation non iconique, mais, à l'intérieur de la visualisation non iconique, pour passer d'une déconstruction instrumentale des formes à une déconstruction

heuristique ? Ainsi peut-on considérer que les activités de construction, qui imposent instrumentalement une déconstruction des formes visuellement reconnues, soient suffisantes pour un transfert vers des compétences heuristiques ? Il semblerait que ce soit là une opinion largement partagée, du moins si l'on considère l'importance donnée depuis une trentaine d'année à tout ce qui touche aux activités de construction, même si cela ne semble pas aider la plupart des élèves à dépasser l'évidence perceptive immédiate et à développer des stratégies d'exploration visuelle des figures pour résoudre des problèmes de géométrie.

En fait, pour saisir la complexité cognitive du passage de la visualisation iconique à la visualisation non iconique, il faut oublier la gamme très riche de toutes les activités proposées aux élèves pour établir un pont entre ce qui serait pratique et ce qui serait théorique, ou entre ce qui serait concret et ce qui serait formel, ou entre ce qui serait spatial et ce qui serait proprement géométrique, ou encore entre ce qui serait matériel et ce qui serait " mental ". Il faut se poser la question qui est en amont de toutes ces oppositions trop globalisantes : quelle est la manière mathématique de voir que requiert toute démarche discursive en géométrie (énonciation de propriétés, définitions, théorèmes, déduction d'autres propriétés, etc.) ? Est-ce l'une des quatre manières de voir, ou seulement l'un des deux modes de visualisation non iconique ou faut-il en chercher une autre ? Nous retrouvons ici la question que nous avons laissée en suspens (*supra* Figure 4) : existe-t-il deux ou trois manières non iconiques de décomposer les formes ? Et s'il y en a une troisième, quel type d'activité peut y faire entrer les élèves ?

3. La manière de voir requise en géométrie : la déconstruction dimensionnelle des formes

La manière mathématique de voir les figures consiste à décomposer n'importe quelle forme discriminée, c'est-à-dire reconnue comme une forme $nD/2D$, **en unités figurales d'un nombre de dimensions inférieur à celui de cette forme**. Ainsi la figure d'un cube ou d'une pyramide ($3D/2D$) est décomposée en une configuration de carrés, de triangles, etc.. (unités figurales $2D/2D$). Et les polygones sont à leur tour décomposés en segments de droites (unités figurales $1D/2D$). Et les droites, ou les segments, peuvent être décomposés en "points" (unités $0D/2D$) (*infra* Figure 20). **Notons qu'avec les points nous sortons de toute visualisation**. En effet, les points ne sont visibles que lorsqu'ils apparaissent comme l'intersection d'unités $1D/2D$ (tracés sécants ou tracés formant un coin ("sommets", " angles "...)). Autrement dit, le marquage d'un point sur un tracé ou hors de ce tracé (par exemple pour fixer les extrémités d'un segment ou son milieu) relève d'un codage symbolique. C'est d'ailleurs à ce codage symbolique que l'on associe généralement des lettres !

Pour bien mettre en évidence le caractère irréductible de cette manière de voir à celles que nous venons d'analyser, et pour montrer qu'elle constitue le premier

seuil décisif pour l'apprentissage de la géométrie, il suffit ici de la comparer à la décomposition heuristique des formes.

3.1 La décomposition heuristique par division méréologique des formes reconnues

L'utilisation heuristique d'une figure exige souvent qu'on la regarde comme s'il s'agissait des pièces d'un puzzle. Mais cela suppose que l'on **décompose en unités figurales du même nombre de dimensions que la figure de départ**. Ainsi un triangle (2D/2D) peut être décomposé en d'autres triangles (2D/2D). Mais aussi, un cube matériel (3D/3D) ou n'importe quel autre solide peut être partagé en blocs qui seront aussi des polyèdres (3D/3D). *Ce partage, que nous appellerons une division méréologique (division d'un tout en parties juxtaposables ou superposables), se fait toujours pour reconstruire avec les parties ainsi obtenues une figure souvent très différente visuellement.* Cette décomposition s'inscrit donc dans un processus plus général de **métamorphose** (pour ne pas dire d'anamorphose, laquelle est une transformation par un processus de déformation continue). La décomposition méréologique des figures est l'une des démarches les plus anciennes dans l'histoire de la géométrie (Edwards, 1979). D'ailleurs, les premières "démonstrations" de la relation de Pythagore ont été fondées sur des opérations de décomposition en vue d'une reconfiguration méréologique (Padilla, 1992). Cette décomposition peut être :

- *strictement homogène* : la décomposition se fait en unités de même forme que la figure de départ. Les quadrillages constituent les figures fond (les "supports" de représentation !) qui souvent guident les premières opérations de décomposition méréologique.

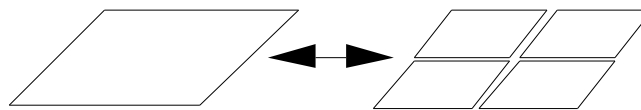


Figure 6

- *homogène* : la décomposition se fait en unités figurales différentes de la forme de la figure de départ, mais toutes de même forme :

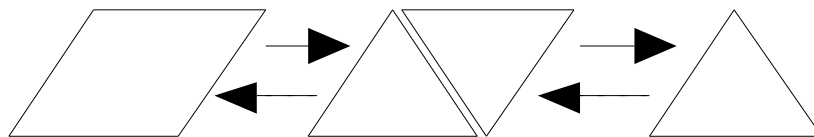


Figure 7

- hétérogène : la décomposition se fait en unités figurales de formes différentes entre elles. Le problème du partage d'un triangle en deux parties pour reformer un parallélogramme implique une décomposition hétérogène de ce type :

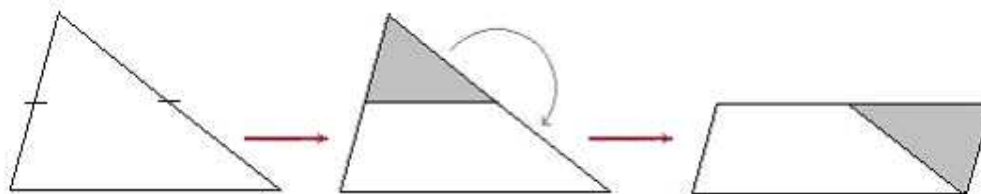


Figure 8

Les décompositions homogènes sont des transformations qui sont visuellement réversibles et qui peuvent être spontanément amorcées à la seule vue de la figure. En revanche, les décompositions hétérogènes ne sont pas visuellement réversibles.

Pour une figure de départ déterminée par un énoncé de problème, il y a évidemment plusieurs décompositions méréologiques possibles, mais toutes ne conduisent pas à la solution du problème. Il arrive même parfois que celles qui y conduisent ne sont pas directement visibles sur la figure. Autrement dit, il y a des situations où la figure aide à voir et d'autres où elle empêche de voir. On peut déterminer les facteurs qui favorisent ou inhibent ces processus de division méréologique et de réorganisation des formes reconnues (Duval, 1995b). Et ces facteurs peuvent être des variables didactiques pour des activités qui visent à faire entrer les élèves dans l'utilisation heuristique des figures.

La décomposition méréologique présente une double particularité :

- elle peut s'opérer **matériellement** (par découpage et réassemblage des pièces obtenues comme pour un puzzle), **graphiquement** (par ajout de ce que nous avons appelé plus haut des tracés réorganisateurs) ou même **simplement du regard** (et non pas " mentalement "). Ces trois modalités sont presque équivalentes à un détail près : quand une partie doit intervenir simultanément dans deux sous-reconfigurations différentes, il faut disposer matériellement de deux pièces pour cette même partie.
- la décomposition par division méréologique est très souvent sans lien direct avec le discours mathématique, et c'est pour cela qu'elle permet l'exploration purement visuelle d'une figure de départ pour détecter les propriétés géométriques à utiliser pour résoudre un problème posé.

3.2. La décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes

La déconstruction dimensionnelle présente deux caractéristiques qui l'opposent non seulement à la décomposition méréologique mais également à la déconstruction instrumentale

Elle se fait nécessairement en articulation avec une activité discursive. On pourrait même dire qu'elle est essentiellement d'ordre discursif. Pour la représenter graphiquement, il faut en quelque sorte transformer les figures géométriques en schémas. Ainsi la seule énonciation des propriétés caractéristiques d'un parallélogramme par exemple implique que l'on déconstruise dimensionnellement une figure simple 2D/2D en une configuration d'unités figurales 1D ou 0D/2D. *Car les propriétés d'un objet 2D/2D (par exemple un parallélogramme représenté par A ci-dessous) sont des relations entre des objets représentés par des unités figurales 1D/2D (les configurations B et C ci-dessous) ou 0D/2D.*

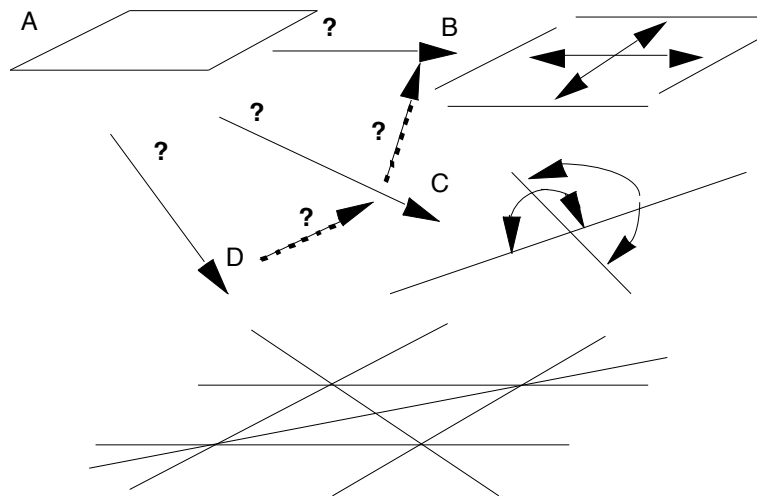


Figure 9 : Décomposition en unités figurales par déconstruction dimensionnelle d'une forme

Cette déconstruction dimensionnelle représente une révolution cognitive pour le fonctionnement spontané de la visualisation iconique ou non iconique. La déconstruction dimensionnelle des formes est une démarche qui va contre tous les processus d'organisation et de reconnaissance perceptive des formes. Ce qui n'est pas le cas de la décomposition de type puzzle : car celle-ci, au contraire, mobilise ce processus tout en cherchant à en dépasser les limitations ou les restrictions immédiates. Et la première loi de l'organisation et de la reconnaissance perceptive des formes est *la priorité immédiate et stable des unités figurales 2D sur les unités figurales 1D*. Cela veut dire non seulement que l'on voit d'abord un parallélogramme avant de voir quatre côtés, mais cela veut dire surtout que tous les

tracés que l'on perçoit d'emblée comme formant le contour de la surface restent, d'une certaine manière, non détachables de cette reconnaissance visuelle première. **Les côtés d'un polygone restent les bords non séparables de la surface qu'ils délimitent.** Et cela rend inconcevable et invisible le processus de déconstruction dimensionnelle des formes. Même les activités de construction de figures, où elle est imposée *de facto* par les instruments, restent pratiquement sans effet sur le fonctionnement cognitif qui impose la primauté visuelle des formes 2D sur les formes 1D ou les unités 0D. Car dans les activités de construction de figures, l'attention porte justement la reconstruction d'unités figurales 2D à partir d'unités figurales 1D automatiquement produites par l'instrument. C'est pourquoi la déconstruction dimensionnelle, c'est-à-dire le passage des surfaces aux lignes (les lignes n'étant pas visuellement des bords), représente une révolution cognitive par rapport aux autres types de visualisation. Il est plus difficile à réaliser encore que le passage des solides aux figures planes que l'on peut obtenir avec un plan d'intersection.

Alors que la décomposition méréologique peut être effectuée ou simulée matériellement avec des objets physiques que l'on sépare et que l'on réunit d'une autre manière, la déconstruction dimensionnelle ne peut pas être matérialisée. Elle ne peut même pas être montrée graphiquement, à moins d'introduire un couple de figures reliées entre elles *selon la structure proportionnelle* d'une équivalence ou d'une implication. Dans la Figure 9 ci-dessus le schéma fusionne trois propositions auxquels correspondent respectivement les liens, $A \rightarrow B$, $A \rightarrow C$, $A \rightarrow D$, ce qui n'est pas la manière habituelle de visualiser pratiquée dans l'enseignement et dans les manuels, celle-ci en restant le plus souvent à la manière de voir du botaniste !

On peut alors voir à la fois la similitude et surtout l'opposition entre division méréologique des formes 3D ou 2D et la décomposition dimensionnelle des formes nD. Alors que la division méréologique se fait en vue d'une reconfiguration faisant apparaître de nouvelles formes qui étaient non reconnaissables dans la figure de départ, **la déconstruction dimensionnelle se fait pour une (re)construction déductive des objets représentés.** Autrement dit, la division méréologique reste purement visuelle tandis que la déconstruction dimensionnelle est entièrement subordonnée à un discours axiomatique ou axiomatisable.

3.3. La décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes perçues correspond au fonctionnement profond de la visualisation en géométrie

Quand nous disons "fonctionnement profond", nous signifions par cette qualification que les autres manières de voir sont des manières de voir qui restent en surface. Et cela conduit à modifier la notion de "figure", qu'on entende ce mot dans son sens classique ou qu'on l'entende selon l'opposition entre dessin et figure, opposition qui en fait est celle entre le caractère particulier de toute visualisation réalisée et le caractère général des propriétés de l'objet représenté. Pour qu'une

figure donne lieu à une visualisation géométrique elle doit émerger de ce que nous avons appelé ailleurs un “circuit de visualisation” organisé autour d’une trame de tracés 1D/2D, car à partir d’un **réseau de droites** on peut faire apparaître une grande diversité de Formes 2D/2D. La résolution du problème ci-dessous (Figure 10) de la reproduction d’une figure avec une règle non graduée permet de bien mettre en évidence ce processus.

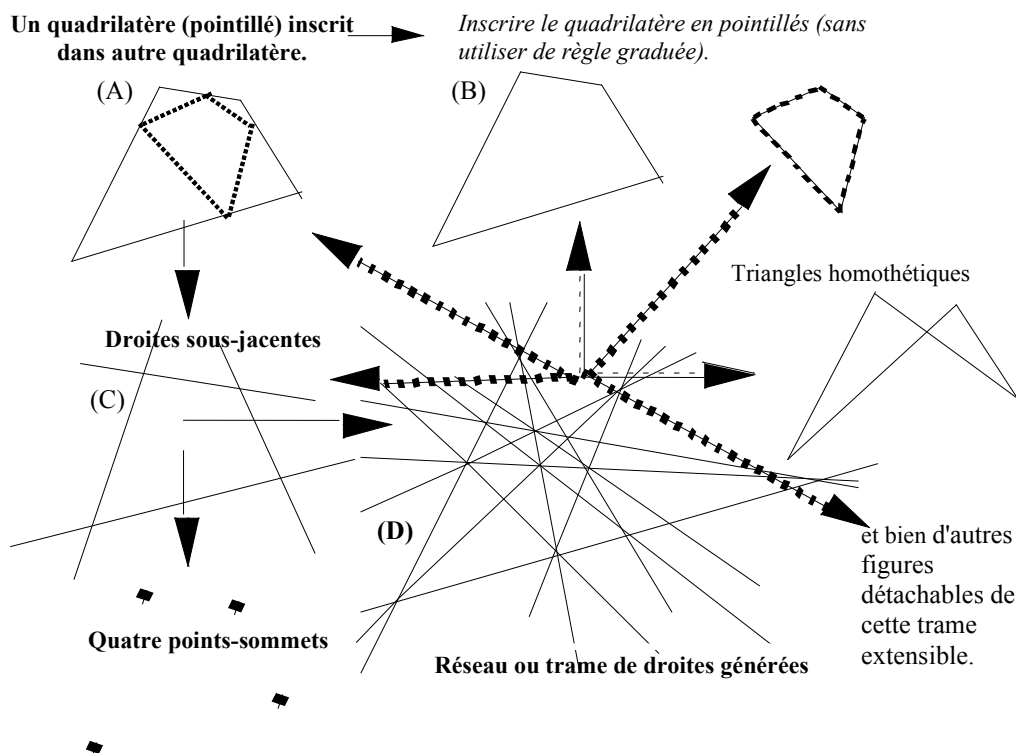


Figure 10 : Circuit de visualisation organisé à partir d'une trame de droites (D)

Pour reproduire dans le quadrilatère (B) le quadrilatère en pointillés qui est inscrit dans le quadrilatère A, il faut commencer par tracer les droites supports du quadrilatère (B). On obtient ainsi un premier réseau de droites qui peut être développé en les prolongeant pour faire apparaître de nouveaux points d'intersection et construire ainsi de nouvelles droites passant par ces points d'intersection. Sur réseau de droites (D) ainsi généré, on peut voir, c'est-à-dire détacher un grande variété de polygones dont ceux correspondant à la configuration initiale (A). C'est cette trame sous-jacente qui permet de passer de passer d'une figure à une autre, et donc de reproduire la figure demandée. Naturellement, pour penser à cette solution, il faut être capable de reconnaître dans

ce réseau une grande variété de figures.

Dans la visualisation iconique toute figure tend à être une représentation stable ou non modifiable parce qu'image ou représentation d'un objet. Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. Autrement dit toute figure, en géométrie plane, est une configuration transformable en d'autres, *chacune se détachant d'une même trame, au gré des propriétés ou des objets que l'on nomme*.

Deux points sont donc essentiels pour bien comprendre le fonctionnement en profondeur de la déconstruction dimensionnelle des formes.

— (1) Le champ réel du travail sur les figures est constitué par la trame des unités figurales 1D/2D, et non plus par les unités figurales 2D/2D qui sont souvent introduites comme les figures de base. A partir du réseau de droites on peut faire apparaître une grande diversité de formes 2D/2D. Mais cela requiert aussi la reconnaissance des formes non visibles immédiatement, du type de celle qui est requise dans la décomposition méréologique.

— (2) Cette déconstruction dimensionnelle des formes est le pré-requis pour une compréhension effective de toute énonciation des propriétés géométriques et donc pour leur mobilisation effective par les élèves dans la résolution de problèmes.

Pour illustrer ces deux points revenons au problème du reformatage d'un triangle en parallélogramme. La justification de la solution, mais non pas sa découverte qui peut être obtenue au terme de n essais de plusieurs reconfigurations, fait appel au théorème des milieux et aux propriétés du parallélogramme. **Mais, à l'inverse, suffit-il de connaître ce théorème pour trouver la solution ?** En d'autres termes, y-a-t-il une stratégie visuelle pour passer de la figure d'un triangle à la reconfiguration IV (Figure 11 ci-dessous) ? Il faut voir le triangle à partager sur le fond du réseau des droites qui en supportent les côtés, ou avoir le réflexe de générer ce réseau de droites (III) sous-jacents à cette figure. Ce réseau contient, parmi d'autres figures possibles, le triangle à partager ET le parallélogramme obtenu par reconfiguration. En outre, parce qu'il contient la figure de départ et la figure cible (le parallélogramme) ce réseau s'articule de manière pertinente et congruente à la justification mathématique.

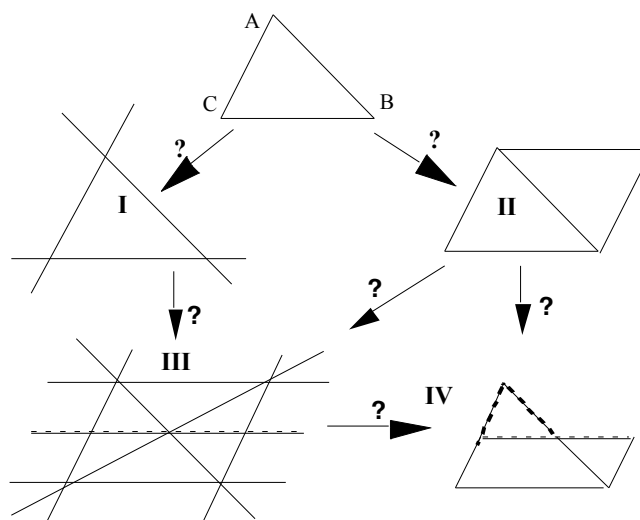


Figure 11 : Déconstruction dimensionnelle du triangle de départ

Un réseau de droites supports, construit à partir d'une figure de départ, contient potentiellement une grande variété de figures 2D que l'on peut faire apparaître au gré des questions que l'on se pose. Et un tel réseau permet donc *de voir le passage mathématique des unes aux autres*, c'est-à-dire les propriétés qui le rendent possible. Ainsi dans l'exemple que nous venons d'examiner, la seule figure qui permet de voir est III, toutes les autres n'étant que des sous-figures visuellement détachables de la configuration III comme dans l'exemple donné plus haut (Figure 10).

D'un point de vue cognitif cela veut dire que deux types de capacités doivent être développées parallèlement chez les élèves pour les faire entrer dans la manière mathématique de voir les figures :

- d'une part la déconstruction dimensionnelle des formes 2D perceptivement prégnantes, y compris celle des figures considérées comme étant des figures de bases, par la construction du réseau de droites dont les formes D2 ne sont que des sous-figures. L'acquisition d'une telle capacité est longue et demande l'organisation de séquences d'activités spécifiques (Godin, 2004),
- d'autre part la reconnaissance de toutes les 2D qui potentiellement peuvent être reconnues dans un réseau de droites où elles ne sont pas d'emblée visibles.

4. Comment, et jusqu'où, "voir" et dire peuvent-ils se rejoindre en géométrie ?

Ce qu'on appelle "figure" en géométrie est un tout dans lequel des hypothèses donnant des propriétés sont combinées avec une représentation visuelle. Concrètement, cela se traduit par le fait que le codage (des lettres codant des points d'intersections ou d'autres points, des marques codant les propriétés données dans les hypothèses) fait partie de la figure. Or une analyse en termes de registre de représentation conduit à ne voir là qu'une association de surface ! En réalité, les figures géométriques dépendent de deux registres de représentation qui sont cognitivement hétérogènes, car ils gardent leurs propres possibilités de traitement, ce qui veut dire qu'ils fonctionnent en parallèle et de manière indépendante. Pour s'en rendre compte il suffit rappeler la double variation suivante :

- pour une même représentation visuelle, on peut avoir plusieurs énoncés différents et donc des "figures géométriques" qui sont différentes du point de vue mathématique,
- pour un même énoncé, on peut avoir différentes représentations visuelles possibles, c'est-à-dire des "images" différentes si l'on tient compte du point de vue psycho-didactique courant et naïf.

Les problèmes spécifiques que pose l'apprentissage de la géométrie ne tiennent donc pas seulement à la complexité de la visualisation non iconique et à la déconstruction dimensionnelle des formes qui la sous-tend, ils tiennent aussi à la manière dont un discours géométrique peut s'articuler avec cette visualisation. Car l'activité géométrique présuppose toujours la synergie entre les fonctionnements propres à ces deux registres de représentation. Or cette articulation est cognitivement plus complexe que l'articulation spontanée entre langage et image, même si l'on prend en compte la diversité des manières de voir que nous venons d'analyser (Figure 1).

Pour en introduire l'analyse nous partirons d'une étude qui peut paraître très ancienne, mais qui a encore aujourd'hui le rare avantage de mettre en œuvre à la fois des variations d'énoncés et des variations de figures dans l'étude des problèmes donnés aux élèves (Dupuis, Pluvineau, 1978). Dans la présentation ci-dessous, nous avons évidemment séparé la figure et son double codage : le codage par des lettres qui a pour fonction de désigner sur la figure les objets dénommés dans l'énoncé, et le codage par des logo et des nombres qui a pour fonction de reporter sur la figure les hypothèses données dans l'énoncé.

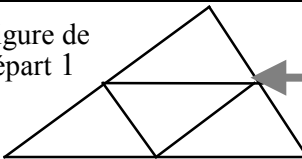
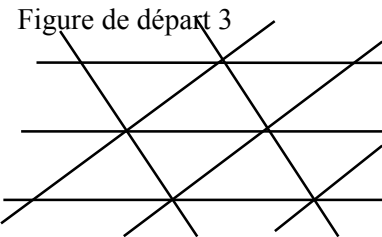
Registre de la visualisation : un jeu de réorganisations visuelles selon la forme ou selon le nombre de dimensions	ARTICULATION	Registre du discours : mise en œuvre, dans toute formulation, de trois types d'opérations discursives
Figure de départ 1  Figure de départ 2  Figure de départ 3 	<i>Quels éléments des énoncés permettent</i> <i>un ancrage dans la visualisation ?</i> <i>Quelle fonction</i> <i>remplit la figure par rapport à l'énoncé et à la résolution du problème :</i> - illustration ? - heuristique ? - objet support pour des mesures ?	Enoncé 1. A'C' et AC sont parallèles A'B' et AB sont parallèles B'C' et BC sont parallèles Prouver que A est le milieu de B'C' Enoncé 2 ABED et BCED sont des parallélogrammes. Prouver que B est le milieu de AC Enoncé 3 Enoncés de propriétés à mettre en œuvre... (par exemple, le théorème des milieux)
QUE VOIT-ON ? H1 Quelles sont les possibilités de transformation de la figure prise comme figure de départ qui sont visuellement accessibles ? H2 Quelles sont les organisations qui peuvent faire voir ce qui est cherché ?	<i>Le double codage suffit-il pour qu'il y ait communication et synergie de fonctionnement entre les deux registres ?</i>	QUE FAUT-IL VOIR ? A quoi correspondent visuellement : L1. les termes employés dans les énoncés (quand on pose un problème, quand on formule une conjecture, quand on donne des instructions ...) L2. les propositions (définitions, théorèmes ...) L3. les raisonnements pour justifier, ou prouver (déduction ou réfutation)

Figure 12 : Les deux questions du problème cognitif de l'articulation entre visualisation et discours

Dans cet exemple, les deux énoncés de problème sont comme deux descriptions analogues qui peuvent être faites de l'une des trois figures de départ, car ils donnent les mêmes hypothèses. Pourtant ils ne s'accordent pas de la même manière

à chacune de ces trois figures. Les résultats montrent que, d'une page à la suivante, les élèves peuvent ne pas du tout reconnaître le même problème présenté selon deux combinaisons différentes, comme si par exemple il n'y avait absolument rien de commun entre la figure de départ 1 et la figure de départ 2 (Dupuis, Pluvinage 1978, p. 75-79). Cependant l'intérêt de ce travail n'est pas là. Indépendamment de la "compétence" requise pour réorganiser visuellement une figure de départ, la variation même des deux énoncés permet de soulever une question beaucoup plus vaste : quels sont éléments discursifs qui, dans un énoncé, permettent de passer de la formulation des hypothèses à la figure et qui, donc, permettent d'articuler les démarches discursives de la pensée à la *mobilité de réorganisation visuelle de ce que l'on voit* ? Naturellement, dès qu'il est question de langage (et peut-il y avoir des hypothèses sans un langage ?), il est absolument nécessaire de prendre en compte au moins trois niveaux d'opérations discursives (Duval 1995a) : nommer ce dont on parle, en énoncer quelque chose, et mettre en relation ce que l'on dit avec ce qui vient d'être énoncé pour compléter, expliquer, justifier le propos. Ces trois niveaux d'opérations discursives sont sous-jacents à la production, verbale ou écrite, de toute formulation.

4.1. Quels mots pour dire ce qu'il faut pouvoir visuellement discerner sur une figure ?

La géométrie requiert l'utilisation d'un vocabulaire technique relativement lourd. On peut relever très vite dans le curriculum l'introduction d'au minimum une quarantaine de termes, et si nous faisons la somme de celui qui est introduit jusqu'en quatrième nous dépasserions très largement la centaine de termes ! Cependant le plus important n'est pas là, il est dans l'hétérogénéité sémantique de cette terminologie. Toute formulation en géométrie recourt à un vocabulaire qui recouvre au moins quatre types de termes dénominatifs³. Pour le faire apparaître, il suffit d'examiner la manière dont le sens de ces termes peut être mis en correspondance avec des unités figurales dans le registre de la visualisation. Une telle entreprise n'a rien d'arbitraire : elle est au cœur des exigences qui ont contribué au développement de la géométrie dans l'histoire. Les 23 définitions qui ouvrent les *Eléments*, et qui précèdent les "demandes" et les "notions communes",

3 Cette classification peut être affinée en distinguant des termes de relation entre des objets. Par exemple, "tangent" est un terme de relation entre un objet D2 et un objet D1 ou un objet D2. "Sécant" relèverait aussi de cette catégorie. Ces termes sont associés à des configurations particulières. La relation désignée est donc visuellement constatable, mais seulement dans le champ restreint de la feuille ou de l'écran. Au delà, dans le champ perceptif, cela devient indiscernable. Les rails de chemin de fer n'apparaissent pas parallèles ! L'expression "point à l'infini" se réfère à un tel saut. L'apport essentiel d'une telle classification est de mettre en évidence les manières différentes dont les termes géométriques peuvent être mises en correspondance avec des unités figurales et permettre ainsi un ancrage visuel pour la description verbale d'une situation.

constituent l'inventaire du corpus sémantique nécessaire à toute l'entreprise d'Euclide (Euclide, 1990). En ce sens, ces définitions sont tout autant des définitions sémantiques que des définitions mathématiques. Leur fonction est de fonder l'articulation du discours mathématique avec l'organisation de la perception visuelle formes.

1. Termes analytico-descriptifs donnant un statut d'«élément» à un tracé dans l'organisation visuelle de plusieurs tracés Directement associé à un seul tracé visuel	2. Termes dénominatifs d'objets d'étude : Associés à une organisation visuelle de plusieurs tracés en une forme typique	3. Termes de propriété caractéristique permettant de classer les objets d'études Associés à la comparaison de tracés en tant qu'éléments de l'organisation visuelle d'une forme typique	4. Termes de relation entre tracés (éléments) hors toute appartenance à une organisation visuelle Non décidables visuellement
Eléments D1 : côté, diagonale, corde, rayon... Eléments D2 : sommet, point d'intersection, angle Elément D3 : face, plan d'intersection(?)	Objets D1 : droite, segment, courbe Objets D2 : triangle, carré, parallélogramme, polygone, cercle.. Objets D3 : pyramide, tétraèdre, cube, prisme, polyèdre, sphère..	Liés à un type d'objets : — Milieu, centre — Isocèle, équilatéral, rectangle, quelconque — Régulier, convexe	<i>Parallèle perpendiculaire, symétrique, égal</i>
(EUCLIDE Livre I) Définitions : 1, 2, 3, 5, 6, 8, 13, 14, 17	Définitions : 4, 7, 9, 15, 16, 18, 19, 22	Définitions : 11, 12, 20, 21	Définitions : 10, 23

Figure 13 : Classification de termes géométriques en fonction de leur valeur descriptive d'un donné visuel

Dans les exemples, nous avons pris en compte le vocabulaire concernant les formes en fonction de la variation dimensionnelle, et non pas celui concernant les grandeurs (*longueur, aire, périmètre...*). Car les grandeurs échappent en grande partie à la visualisation, parce qu'elles imposent des seuils étroits d'estimation et qu'elles ne peuvent être appréhendées que par des opérations de mesure et des nombres.

L'important, dans l'analyse du vocabulaire utilisé en géométrie, n'est pas la quantité des termes techniques, mais l'étendue du spectre sémantique qu'il recouvre. En effet, pour décrire ce qu'il faut voir, les mathématiques recourent à

deux catégories de termes qu'on ne retrouve pas dans le vocabulaire commun, pourtant plus important, employé en dehors des mathématiques pour décrire ce que l'on voit : les termes analytico-descriptifs et les termes de relations entre tracés considérées indépendamment de leur appartenance à l'organisation visuelle de la forme d'un objet (colonnes 1 et 4). Et ce fait doit être mis rapproché de la caractéristique de la visualisation géométrique, la déconstruction dimensionnelle des formes. On peut d'ailleurs remarquer que 6 des 23 définitions d'Euclide sont uniquement des explicitations de la déconstruction dimensionnelle des formes (définitions 1, 2, 3, 5, 13, 14). La déconstruction dimensionnelle des formes devient l'étape intermédiaire nécessaire entre la reconnaissance perceptive immédiate des formes et l'identification des objets mathématiques correspondant, comme le montre d'ailleurs le simple examen des définitions qui peuvent être données des objets d'étude (colonne 2) ou des propriétés caractéristiques (colonne 3). Autrement dit, l'application d'un terme de dénomination d'objet (colonne 2) à une figure, ou à une sous-figure, implique la prise en compte des termes analytico-descriptifs et des termes de relations entre éléments.

Mais le problème pour l'apprentissage est que ces catégories de termes spécifiques aux mathématiques entrent en concurrence avec un vocabulaire non mathématique qui, lui, n'implique aucune déconstruction dimensionnelle des formes : *trait, ligne, vertical, horizontal, croisement...* Ce vocabulaire courant, essentiellement lié à une pratique graphique et à une pratique de déplacement sur des espaces de jeu (échiquier) ou sur des plans dessinés, a une valeur descriptive plus immédiate dans la mesure où il correspond soit à ce qui est produit par une action de traçage (*trait, ligne...*), soit aux repères physiques du sujet (*horizontal, vertical...*) soit encore à des relations directement perçues et exprimables par des oppositions qualitatives (*se couper / ne pas se couper, se toucher / ne pas se toucher.*).

Considérons maintenant les termes dénominatifs d'objets (colonne 2). Un certain nombre présentent l'avantage apparent d'appartenir à la fois au vocabulaire mathématique et au vocabulaire courant pour nommer ou décrire des objets ou des formes (architecturales par exemple) de l'environnement. Le choix et la compréhension de ces termes vont dépendre de la manière de voir, iconique ou non iconique, de celui qui regarde les objets de l'environnement ou leur représentation (*supra* II). Pour un sujet fonctionnant en mode iconique de visualisation, les termes analytico-descriptifs et ceux de relation ne sont d'aucune utilité, et peut-être aucun sens, pour dire ce qu'il voit. Ils deviennent au contraire essentiels pour fonctionner en mode non-iconique de visualisation.

4.2. Comment des propositions⁴ peuvent-elles être mises en correspondance avec une figure ou être converties en une figure ?

Le rôle du langage n'est pas de "mettre en mots" ce qui serait déjà clairement pensé ou vécu mais de mettre en propositions pour construire la pensée des objets de connaissance, du moins dans le domaine des sciences et des mathématiques. Ce que les propositions énoncent constituent un sens qui est irréductible à celui des mots qu'elles articulent. Cette irréductibilité apparaît avec les problèmes spécifiques que soulèvent aussi bien la production, orale et surtout écrite, que la compréhension des propositions, entendues ou lues : par exemple, la distinction entre une proposition et sa réciproque, bien qu'elles emploient les mêmes mots, ou encore la modification de sens liée à la quantification et à la négation, ou encore son changement de sens en fonction du statut qui lui est donné dans le développement d'un discours. La question de l'articulation entre visualisation et discours se pose alors d'une manière plus précise. Il s'agit de savoir si cette articulation se limite aux ancrages que les termes employés permettent d'établir dans la représentation visuelle ou si, au contraire, elle ne mobilise pas des interactions plus complexes.

L'articulation cognitive entre le registre de la visualisation et celui du langage ne se fait pas au niveau des mots mais à celui des propositions. En effet, la production d'une représentation n'est pas la même selon qu'elle se fait, ou qu'elle ne se fait pas, *en fonction de la production préalable d'une autre représentation dans un autre registre*. Ainsi, une figure peut être produite pour illustrer un énoncé, mais inversement un énoncé peut être produit pour décrire ou pour expliquer une figure. **Ces deux situations sont cognitivement totalement différentes et ne conduisent pas nécessairement aux mêmes productions.** Revenons à l'exemple plus haut (Figure 12) et prenons l'énoncé 1. A partir de cet énoncé 1 on peut construire la figure 3, puis la figure 1 en effaçant les traits qui dépassent pour obtenir un contour fermé. On ne construit pas la figure 2 : celle-ci suppose une réorganisation visuelle des formes reconnues dans les figures 1 ou 3. Cette réorganisation visuelle est la condition pour voir la figure 2 comme une sous-figure de la figure 1. Prenons

4 Nous prenons le terme "proposition" à la fois dans son sens grammatical large, lequel recouvre toute composition syntaxique comportant un verbe conjugué, et dans son sens logique plus restreint (excluant, par exemple, les questions ainsi que la plupart des actes de parole comme les promesses, les ordres, les demandes...). En mathématique, il faut y ajouter la restriction de l'emploi de ce terme à certains statuts dans l'organisation théorique du discours : celui de théorème. Nous ne pouvons ici que rappeler ce phénomène important pour les apprentissages et aussi pour la communication. Les propositions sont peu discernables à l'écoute d'une parole. Ce qui s'impose à l'écoute ce sont les mots et même ce qu'on appelle les mots clés, ces mots clés variant d'un individu à l'autre selon sa base de connaissances. C'est pourquoi l'expression écrite remplit un rôle spécifique, qui est irréductible à toute expression orale, pour la prise de conscience des raisonnements (Duval, 2001 p.190-195).

maintenant la figure 1. L'énoncé 1 peut être vu comme une description de la figure 1 mais non pas la l'énoncé 2, à moins que l'on soit capable de faire spontanément la réorganisation visuelle requise et que l'on pense au théorème à trouver pour résoudre le problème. Or cela est le point de vue du rédacteur de l'énoncé du problème et non pas celui d'un élève pour lequel l'articulation cognitive entre visualisation et langage n'est pas encore mise en place.

On peut ainsi vérifier qu'une figure et un énoncé (linguistique ou symbolique) ne remplissent pas l'un par rapport à l'autre les mêmes fonctions et n'ont donc pas le même statut. C'est pourquoi, lorsque deux représentations sont simultanément mobilisées dans deux registres différents, il devient essentiel de distinguer les statuts de représentation autosuffisante pour l'une et de représentation auxiliaire pour l'autre (Séminaire IUFM, 1999). Ainsi au niveau des propositions l'articulation entre figures et propositions est subordonnée à la fonction que ce qui est produit comme représentation auxiliaire remplit par rapport à ce qui est considéré comme représentation principale. *La formulation d'un énoncé et le choix d'une figure dépendent de la fonction que ce qui, dans un contexte donné, est considéré comme représentation auxiliaire doit remplir par rapport à ce qui est mathématiquement considérée comme représentation autosuffisante.* L'analyse fonctionnelle que présente le tableau suivant en donne une première idée.

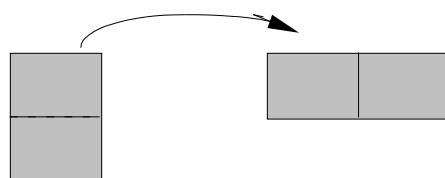
Fonctions que les figures peuvent remplir par rapport aux propositions (considérées comme représentations autosuffisantes)	Fonctions que les propositions peuvent remplir par rapport aux figures (considérées comme représentations autosuffisantes)
<i>Illustration ou exemple, comme support « intuitif »</i>	<i>Description (d'un état, d'une opération, d'une relation)</i>
<i>CONTRE-EXEMPLE</i>	<i>DÉFINITION D'UN OBJET</i> <i>Explicitation par l'apport d'une information ou d'une donnée (les hypothèses)</i>
<i>Objet quasi-matériel</i>	<i>Comparaison de grandeurs discrètes ou continues</i>

Figure 14 : Relation entre une proposition énoncée et une figure

Il suffit donc de changer le statut ou la fonction d'un énoncé pour changer son type de formulation. Voyons maintenant, à titre d'exemple, deux conséquences de cette analyse fonctionnelle de l'articulation entre figure et énoncé, c'est-à-dire de l'articulation entre visualisation et langage au niveau des propositions énoncées : la production d'une figure qui soit un contre-exemple, et les différentes définitions possibles d'une droite.

a. La production d'une figure comme contre-exemple d'une proposition avancée comme conjecture

D'un point de vue mathématique, la production d'un contre-exemple constitue la situation où l'articulation entre visualisation et formulation est la plus significative, puisque la figure est alors un exemple qui prend la valeur mathématique de preuve. *Mais on n'a peut-être pas prêté assez attention au fait que, d'un point de vue cognitif, cette articulation se fait au niveau d'une proposition énoncée et non pas à celui du raisonnement.* Une figure prend valeur mathématique de preuve quand elle est un exemple qui réfute une proposition avancée comme conjecture. La capacité, chez les élèves, à produire un contre-exemple présuppose à la fois le développement de "compétences" concernant la quatrième manière de voir, celle de l'inventaire bricoleur et une coordination déjà forte entre le registre de la visualisation et celui des différents niveaux d'opérations discursives. L'étude de cas faite à propos de la relation entre aire et périmètre (Balacheff 1988) illustre bien ce fonctionnement cognitif complexe qui est sous-jacent à la production d'une figure comme contre-exemple. Il s'agissait ici de discuter la proposition "deux rectangles qui ont la même aire ont le même périmètre". Pour rejeter cette proposition "le schéma ci-dessous "montre" bien cette transformation qui s'appuie sur l'invariance de l'aire par découpage et recollement :



l'aire (ou le produit) est trivialement conservée, quand au périmètre son augmentation résulte de l'inégalité..." (Balacheff 1988, p. 289). Or la production de ce contre-exemple, qui dépend de l'opération visuelle de reconfiguration, ne semble pas avoir été "à la portée des élèves", ou alors sa production semble avoir pris tellement de temps qu'elle a perdu tout effet de contradiction pour que la valeur épistémique liée à la compréhension immédiate de cette proposition, et associée à une évocation visuelle iconique, ait pu être remise en cause (*ibid.*, p. 299). D'une manière plus générale on pourrait montrer que la capacité à produire une figure comme contre-exemple requiert une pratique spontanée de cette manière de voir propre à l'inventeur-bricoleur. Corrélativement, on pourrait montrer que la visualisation la plus congruente avec des propositions (énoncés de théorème ou de définition) est une séquence de deux figures.

b. Figure et définition : le cas de la droite

Il peut paraître saugrenu de prendre le cas de la droite pour analyser l'articulation entre figure et définition, tellement la visualisation d'une droite semble primitive et évidente : ce serait le trait "droit" tracé à l'aide de cet instrument qu'est une règle. En outre, d'un point de vue mathématique, ce n'est pas *une* droite qui est

intéressante mais la relation entre *deux* droites, lesquelles peuvent être parallèles, sécantes, orthogonales, coplanaires ou non coplanaires, etc. Mais revenons à ces tracés censés servir de support immédiatement visible pour les termes de ces différentes relations mathématiques. Comment expliquer ce qu'ils représentent ou comment expliquer le sens du mot "droite" ne serait-ce que pour pouvoir distinguer un tracé "droit" et un tracé "courbe" ou, plus subtilement, une droite et un segment (non orienté) ? Bref comment ne pas confondre la droite et n'importe quelle ligne ou n'importe quel tracé graphique ? Le plus souvent, quand on ne s'en tient pas à l'évidence de l'usage empirique de la règle, on se contente de l'une des quatre types de définition, ou de description, suivants :

(a) On se fait une idée nette de la droite en regardant

- un fil très fin, court (?) et *bien tendu*
- un rayon de soleil pénétrant par un très petit trou dans une chambre obscure.

(b) "La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. Ce plus court chemin s'appelle la distance des deux points..." (Lepoivre et Poirson 1920 p.2)

(c) "Nous ne pouvons penser une ligne (droite) sans la tracer dans la pensée... le tracé de cette ligne est un mouvement" (Kant, 1976 p. 167).

(d) "Deux points distincts A et B sont éléments d'une droite et d'une seule. On dit "La droite AB"." (IREM 1979 p.164)

La première formulation (a) est iconique. Elle évoque un objet physique qui sert d'étalon en quelque sorte pour ce que l'on va appeler "droite". La deuxième formulation (b) est métrique. Mais cette formulation est visuellement aveugle. Car il ne faut surtout pas lui associer l'une des images de la formulation (a) ou encore l'usage de la règle, car alors on est conduit à un paradoxe dès que l'on est sur la sphère où les droites deviennent des cercles. En réalité cette formulation métrique implique, sans le préciser, le type de surface sur lequel on définit le "plus court chemin". La troisième formulation (c) est dynamique et iconique. Elle se réfère au mouvement qui la produit, *mouvement qui lui confère au moins deux propriétés : le fait que la droite peut toujours être prolongée au delà de son tracé* et le fait qu'elle est continue. La quatrième formulation (d) est affine. Elle s'oppose radicalement aux trois précédentes, puisque, selon le principe de recherche d'économie maximale qui régit la formulation des définitions mathématiques, elle caractérise une droite par seulement deux points sans même recourir à quoi que ce soit qui les rejoigne comme dans les formulations (b) ou (c). Cependant la difficulté de cette formulation n'est pas dans la suppression de la valeur visuelle du trait, car les deux points servent nécessairement d'appui pour tracer une droite. Elle est dans le fait que les points échappent à toute visualisation. Un point n'a pas d'existence visuelle propre, c'est-à-dire ne peut pas constituer une unité figurale identifiable. **Un point est toujours un effet de marquage, c'est-à-dire de codage, soit par une lettre,**

soit par un nombre (graduation d'une droite) pour fixer une extrémité ou une séparation et à ce titre relève du seul discours. La visualisation s'arrête aux tracés de segments qui sont les unités figuraies les plus petites, ou, si l'on préfère une formulation plus physique, qui sont les pixels de toute représentation géométrique. Il y a bien sûr les points "remarquables" qui apparaissent avec deux droites sécantes ou avec les sommets des polygones ou des polyèdres. Mais visuellement l'unité figurale est une configuration de deux traits prolongés ou non et, à ce titre, sont intrinsèquement liés à l'élément visuel D2 qu'est un angle (Figure colonne 1). En outre, ces points remarquables ne peuvent être que peu nombreux...

Que retenir de l'analyse de ces quatre types de formulation ? Les trois premières définitions sont en quelque sorte des descriptions d'une caractéristique optique immédiate (a), d'une procédure de mesure physique d'une distance entre deux repères fixés matériellement (b), ou d'un geste utilisant ou non un instrument de traçage (c). *Ces définition-descriptions sont des représentations auxiliaires par rapport à des représentations visuelles*, ou "perceptivo-gestuelle" pour reprendre l'expression proposée par G. Vergnaud, qui elles sont ici les représentations autosuffisantes. Et elles constituent un obstacle intuitif à la quatrième définition qui, elle, se fait en rupture avec toute visualisation. Et comment s'étonner que les élèves soient étrangement déconcertés par tous les problèmes dans lesquels on demande de montrer l'alignement de trois points, alors que sur la figure ils paraissent sur le même tracé ? De manière plus générale, les trois premières définitions sont des définitions pragmatiques et, à ce titre, elles s'opposent radicalement aux définitions mathématiques. Du moins si on s'en tient au fonctionnement cognitif qui est sous-jacent à la production et à la compréhension de ces définitions. Deux exigences, en effet, conduisent à un renversement des démarches cognitives quand on passe de définitions pragmatiques aux définitions mathématiques.

— **La prise en compte des cas possibles** et pas seulement celles des données observables. Toutes les définitions pragmatiques se font à partir d'un corpus de données observables et même, le plus souvent, à partir des données les plus fréquemment observables. Mais, en mathématiques, pour accepter ou pour réfuter une proposition avancée comme conjecture ou même seulement comme définition, un individu ne peut donc pas s'en tenir à la base de connaissances dont il dispose ou que l'expérience concrète lui fournit, il lui faut explorer différents cas possibles. C'est pourquoi la production d'un contre-exemple peut paraître résulter d'une "invention" au regard des connaissances dont un individu disposait.

— **La recherche d'une économie maximale.** Or quand il s'agit de définir les objets dont la connaissance dépend de l'observation et donne lieu à une visualisation iconique, c'est une exigence inverse, celle d'exhaustivité, qui s'impose dans la définition d'un objet. Il s'agit d'énumérer toutes les propriétés comme on énumère tous les détails importants. *Les définitions mathématiques*

résultent, au contraire, d'une démarche de réduction pour obtenir la description minimale : Parmi une liste de propriétés pouvant être attribuées à un objet, il s'agit de retenir uniquement celles qui suffiront pour retrouver, par déduction, toutes les autres. Naturellement cela ouvre à la voie à plusieurs définitions possibles d'un même objet. Ainsi on peut avoir au moins trois définitions différentes d'un parallélogramme.

4.3. Quels recouvrements entre visualisation et raisonnements pour justifier ou pour démontrer ?

Personne, bien sûr, ne confond l'énonciation de propositions et les démarches discursives par lesquelles on conduit et développe un raisonnement. Mais les choses deviennent plus délicates à distinguer, lorsqu'il s'agit d'expliquer en quoi un raisonnement se distingue d'une description ou d'une explication et, surtout, en quoi un raisonnement qui justifie, comme par exemple dans le cadre d'un débat pour une décision à prendre ou sur une question de société, est différent d'un raisonnement qui prouve comme en mathématiques.

Invoquer la logique, ou la "dérivabilité logique", est évidemment naïf, lorsqu'il s'agit des raisonnements qui sont faits dans la langue naturelle et avec ses ressources. Car cela ne permet pas de comprendre pourquoi les déductions valides n'ont aucunement force de preuve aux yeux des élèves et comment elles s'inscrivent dans la langue courante. Inutile de rappeler ce mur invisible auquel se heurte l'enseignement de la géométrie à partir du collège. L'utilisation de définitions et de théorèmes pour démontrer la vérité de nouvelles propositions ne génère aucune **conscience de nécessité** dans l'esprit des élèves. En effet, pour que puisse se produire cette conscience de nécessité il faut d'abord avoir compris le mécanisme discursif, très spécifique, par lequel une nouvelle proposition est déductivement produite comme conclusion d'autres propositions (hypothèses et théorème). Et c'est seulement sur la base de cette compréhension que le **transfert du degré de conviction** qui est attaché à une proposition (sa valeur épistémique⁵) peut se faire à une autre proposition, du moins pour celui qui effectue l'opération discursive du pas de déduction. Car les théorèmes ne s'utilisent pas et ne fonctionnent pas du tout comme des arguments. Les théorèmes mobilisent un mécanisme d'expansion discursive qui consiste en une substitution de propositions les unes aux autres, tandis que les arguments procèdent par composition accumulative de propositions les unes avec les autres, comme chaque fois qu'il s'agit de convaincre, ce mécanisme étant d'ailleurs commun à toutes les autres

⁵ Rappelons que le sens des propositions énoncées n'est pas univoque. Il comporte trois dimensions, selon que l'on considère soit leur contenu, soit leur valeur par rapport à une base de connaissances, soit leur rôle dans l'organisation d'un discours ou dans un acte de communication (Duval 2001 p.198). Tout raisonnement oblige à prendre simultanément en compte ces trois dimensions, ce qui n'est pas le cas pour les récits, les descriptions ou les explications.

formes de discours et à toute pratique de parole (Duval 1995 p. 123-131, 255-266). Et faut-il le rappeler ? personne ne parle en fonctionnant sur le mécanisme discursif de substitution, même pas le mathématicien en dehors des mathématiques ! Ce mécanisme d'expansion discursive par substitution convient mieux aux registres symboliques qu'à celui de la langue naturelle, mais c'est dans le registre de la langue naturelle que les élèves peuvent le mieux prendre conscience de sa spécificité si particulière et de sa force non seulement de preuve mais d'invention.

On voit donc qu'il ne faut pas confondre les raisonnements argumentatifs qui viennent à l'appui d'une proposition avancée comme choix, comme hypothèse (en dehors des mathématiques), ou comme conjecture et les raisonnements valides qui permettent de la démontrer. Il ne peut pas y avoir transfert d'apprentissage de l'un à l'autre parce que leurs fonctionnements respectifs sont en quelques sortes opposés et que la pratique des uns est communément répandue tandis que la pratique des autres est exceptionnelle parce que quasiment réduite au champ des mathématiques. On voit également que d'un point de vue didactique, il ne faut pas confondre raisonnement et preuve. Car les contre-exemples ne mobilisent pas du tout les mêmes opérations discursives que les déductions valides ou que les raisonnements par l'absurde. D'ailleurs les possibilités et le choix des démarches de preuve ne sont pas les mêmes selon que la conjecture s'avère être vraie ou fausse. Ce qu'*a priori* on ne peut pas savoir.

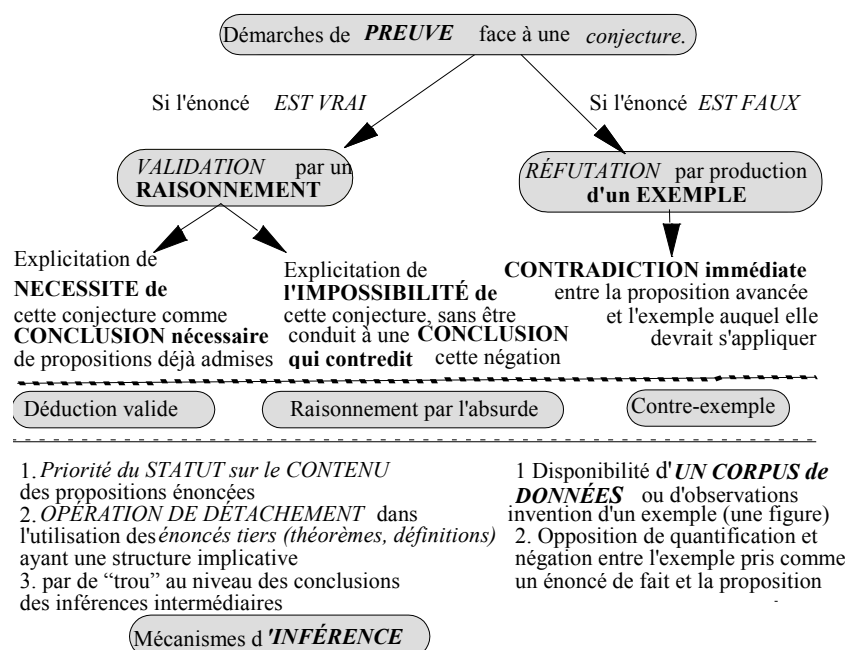


Figure 15 : Classification des démarches de preuve en fonction des processus cognitifs mobilisés

Ces rappels étaient indispensables pour bien poser la question des rapports entre visualisation et raisonnement (et non pas globalement preuve) : quel type de visualisation peut correspondre à une démarche de raisonnement et remplir soit la fonction heuristique qui est habituellement dévolue aux figures pour la résolution de problèmes soit la fonction de justification propre à l'argumentation ? Pour répondre à cette question nous devons distinguer trois situations très différentes. Il y a en effet des raisonnements qui suivent la visualisation, il y a ceux qui viennent compenser le défaut de visualisation, comme par exemple il s'agit de problèmes de géométrie dans l'espace et non plus de problèmes de géométrie plane, et il y a ceux qui au contraire s'affranchissent de toute visualisation.

4.3.1. Les raisonnements qui suivent la visualisation : la visualisation comme argument qui justifie

Nous nous limiterons ici à l'exemple plébiscité (si l'on relève le nombre de fois où il est cité ou mis en avant) : la visualisation donnée pour justifier la relation de Pythagore. Généralement on se limite à une séquence de deux figures, l'une donnant l'état initial et l'autre l'état final de la reconfiguration interne d'un carré en un autre carré (figure 16).

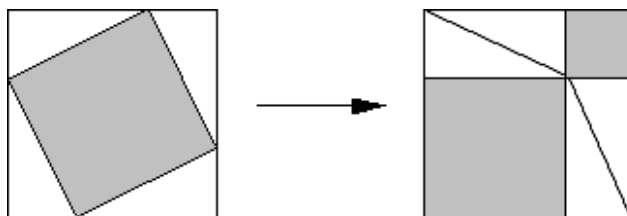


Figure 16 : Reconfiguration globale justifiant la relation de Pythagore

Evidemment, il s'agit là d'une visualisation tronquée qui ne montre pas grand chose et ne peut donc avoir telle quelle un pouvoir de preuve. Tout d'abord, on est supposé voir que le carré en pointillés dans l'état initial représente le carré de l'hypoténuse et que les deux plus petits carrés ombrés dans l'état final représentent la somme des carrés des deux autres côtés. Cette supposition nous renvoie à l'articulation du niveau précédent, entre une proposition (ici une conjecture) et une figure. Mais ici la question se pose à un autre niveau : Comment voir, ou faire voir, l'égalité que l'on veut prouver, parce que la partie en pointillés et les parties ombrées ne sont pas superposables ? *La visualisation est en fait dans la transformation représentée par la flèche.* Il faut donc l'effectuer d'une manière ou d'une autre pour voir.

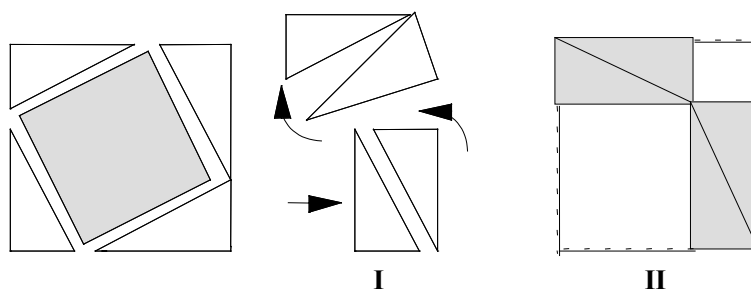


Figure 17 : Transformation combinant deux reconfigurations

Les quatre triangles doivent être reconfigurés en deux rectangles puis ceux-ci doivent être disposés dans le cadre du carré initial de manière à y faire apparaître deux carrés. L'invariance de cette transformation est assurée par le fait que les unités figurales qui ont été déplacées au cours de ces deux reconfigurations sont restées les mêmes. Et elle va permettre d'effectuer un calcul qualitatif. En effet cette transformation visuelle ne permet pas de voir l'égalité, puisqu'il n'y a pas de superposabilité possible. Pour la mettre en évidence, il faut un calcul qui explicite ce qui est invariant dans ces deux reconfigurations (Figure 18). Naturellement, au lieu d'effectuer ce calcul, on peut se contenter d'une description verbale qui prendra alors valeur d'un argument ou d'explication.

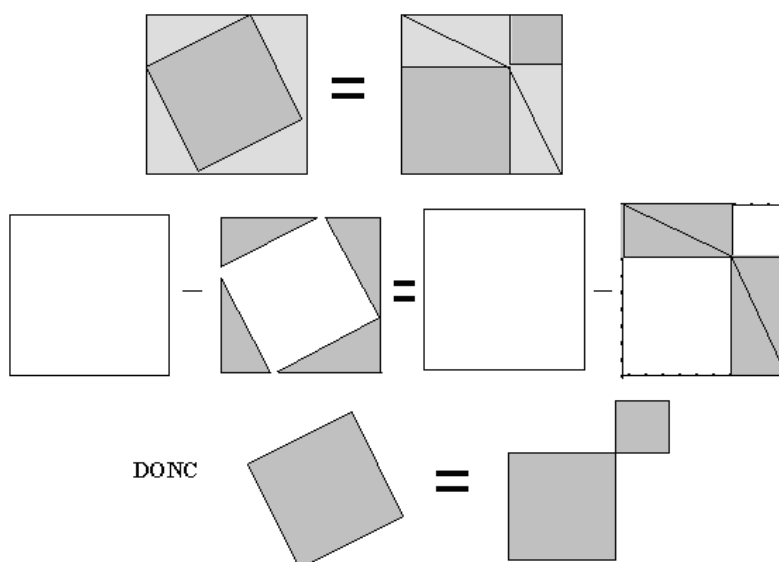


Figure 18 : Mise en évidence de l'égalité entre les aires par un calcul qualitatif

On peut faire trois remarques qui permettent de généraliser cette analyse

— (1) Au niveau de l'articulation entre visualisation et raisonnement, la visualisation consiste non pas dans une figure mais **une séquence d'au moins trois figures**. Et cette séquence doit correspondre à des opérations visuelles effectuelles sur des unités figurales 2D⁶, ou s'il s'agit de géométrie dans l'espace, sur des unités figurales 3D/2D ou 3D/3D. **Mais cette visualisation exclut des opérations sur des unités figurales 1D** (et a fortiori la référence à des points).

— (2) La séquence de figures constitue une représentation autosuffisante. L'explication verbale ou symbolique des opérations constitue une représentation auxiliaire.

— (3) Aucun théorème, aucune connaissance de propriété mathématique, n'est mobilisée dans cette séquence et, s'il y a raisonnement, ce raisonnement ne se distingue pas d'une simple démarche descriptive. On pourrait aussi présenter cette description sous la forme d'un syllogisme, mais une telle présentation n'apporterait rien de plus puisqu'elle ne dépasse pas la description d'opérations que l'on peut effectuer par un balayage visuel ou même mettre en scène matériellement avec des pièces de puzzle. De toutes manières ici quelle que soit la forme d'explicitation adoptée, symbolique, descriptive ou syllogistique, elle apparaît seconde par rapport à la séquence visuelle et tombe sous l'adage "un diagramme vaut dix mille mots" !

Pour mieux comprendre l'importance de ces remarques, regardons une autre démonstration de Pythagore, celle d'Euclide (Euclide 1990, p. 282-284 ; IREM de Strasbourg 1986, p. 245-247), qui semble aussi s'appuyer sur une visualisation. Mais, d'un point de vue cognitif, elle fonctionne complètement à l'envers de l'exemple que nous venons d'analyser. Par rapport à notre remarque (1) elle implique la prise en compte des opérations figurales avec des unités 1D et se limite à une seule figure. Par rapport à la remarque (2) il y a inversion des statuts : c'est le discours qui constitue la représentation autosuffisante tandis que la figure est une représentation auxiliaire qui remplit deux fonctions différentes, support descriptif pour certaines parties du discours et support illustratif pour ne confondre les objets d'ancrage des différentes propositions. Par rapport à la remarque (3), elle suppose la mobilisation et l'utilisation de théorèmes. Les remarques (2) et (3) montrent que, pour être compris, le raisonnement d'Euclide suppose la compréhension du mécanisme discursif de substitution sans lequel l'application d'un théorème, c'est-

⁶ Ces opérations peuvent être faites par un simple balayage du regard (et s'il est fait très rapidement on pourrait être tenté de parler d'activité mentale !) ou par des manipulations de pièces de puzzle (ce qui suppose que l'on puisse disposer de plusieurs pièces pour chaque unité figurale à prendre en compte mais ainsi on introduit subrepticement un problème de représentation sémiotique dans ce qui veut être une manipulation purement matérielle)

à-dire un pas de déduction valide⁷, ne peut générer la conscience de nécessité pour la conclusion ainsi obtenue. On pourrait montrer que dans le cas de la démonstration d'Euclide, le lien avec la figure ne se fait pas au niveau du raisonnement mais à celui des opérations discursives inférieures : d'une part le vocabulaire pour ancrer sur certaines unités figurales et d'autre part les propositions énoncées pour focaliser sur la relation existant entre deux unités figurales ainsi identifiées. Au niveau du raisonnement (donc de l'organisation permettant de dériver les propositions les unes des autres) il n'y a plus aucune correspondance avec la figure.

4.3.2. *Les raisonnements qui s'affranchissent de toute visualisation*

Tout raisonnement fonctionnant avec l'utilisation de définitions et de théorèmes (ceux-ci étant parfois appelés, de manière impropre mais moins théorique, "propriété") est indépendant de toute visualisation et même peut se faire contre toute visualisation. Et cela pour une raison simple que nous avons déjà indiquée. Ce type de raisonnement, à la différence de l'argumentation, dépend d'un mécanisme discursif de substitution de propositions les unes aux autres, et non pas du mécanisme général et spontané de composition accumulative de propositions.

Certes, on peut toujours proposer des problèmes dans lesquels des figures constituent le champ apparent du travail et qui vont servir d'appui pour les raisonnements. Mais dans ce cas, on en reste au type de situation que nous venons d'analyser, celui de la démonstration d'Euclide où la figure ne peut être qu'une représentation auxiliaire : les correspondances ne se font pas au niveau du raisonnement mais à celui des termes désignant des unités figurales et à celui des propositions. Et là la question de la preuve, telle qu'elle a été posée en didactique entre les années 1980 et 1990, reste entière : *"Comment faire pour que la démonstration fonctionne comme preuve pour les élèves, c'est-à-dire pour que les élèves soient convaincus par un résultat mathématique ?"*. Cette question a été en fait peu entendue car on l'a réduite trop souvent à cette autre question pourtant totalement différente : *"quelles propriétés ou quels théorèmes utiliser pour démontrer telle conjecture ?"*. Faire trouver les bons théorèmes pour un problème, toujours lié à un contenu particulier, ne suffit pour faire naître cette conscience dynamique de nécessité qui se développe avec le fonctionnement discursif spécifique s'articulant autour des définitions et des théorèmes. Et sans cette

⁷ Rappelons ici qu'il ne faut pas confondre la validité d'un pas de déduction, laquelle repose sur le mécanisme de substitution, et la validité d'un enchaînement de pas valides laquelle repose sur le fait qu'il n'y a pas de "trou" dans l'enchaînement des pas (qui n'est pas un enchaînement de propositions) parce que chaque conclusion intermédiaire est transformée en prémisses d'un nouveau pas. Ces deux niveaux d'organisation discursive sont rarement distingués dans les travaux didactiques consacrés à l'initiation aux preuves qui *valident* un résultat par un raisonnement *valide* ! Les élèves soupçonnent-ils seulement ce double jeu si étranger à toute pratique de la parole, même dans les débats ?

conscience dynamique de nécessité il ne peut pas y avoir d'expérience des preuves mathématiques.

La très grande majorité des voies explorées se sont repliées sur la visualisation ou sur l'argumentation, laissant entière la question de l'entrée dans la compréhension et de la production des raisonnements valides, lesquels sont souvent disqualifiés par le recours à l'adjectif "formel" dont les connotations sont évidemment très négatives d'un point de vue éducatif. Nous avons, au contraire, essayé de faire découvrir aux élèves comment et POURQUOI l'utilisation d'un théorème rendait nécessaire l'affirmation de la proposition que l'on en tire comme conclusion, et comment une preuve pouvait se construire et s'imposer à partir de plusieurs utilisations successives de théorèmes. Pour cela il nous fallu faire le détour par une visualisation, qui n'avait rien de géométrique mais qui permettait aux élèves d'explorer eux-mêmes les deux niveaux d'organisation déductive qui constituent les raisonnements valides (Duval et Egret 1989). Ce type de visualisation non géométrique était donc présenté aux élèves comme représentation autosuffisante, puis dans une deuxième temps les élèves étaient invités à le décrire librement. Le discours était donc introduit comme une représentation auxiliaire par rapport à la visualisation de l'organisation déductive qu'ils avaient découverte. On a alors pu observer rapidement cette évolution : la transformation rapide et radicale des discours produits par rapport aux démarches mathématiques attendues. La prise de conscience de l'accès à un nouveau champ d'opérations s'était produite chez les élèves, leur donnant à la fois l'initiative et le contrôle dans l'utilisation des théorèmes et dans la conduite des raisonnements.

Peu important ici les résultats obtenus ou non obtenus jusqu'à présent, dans chacune des voies explorées, pour répondre à la question : " comment faire pour que la démonstration mathématique fonctionne vraiment comme une preuve pour les élèves ?". Leur diversité permet d'attirer l'attention sur une observation triviale mais trop peu prise en compte. *Il y a plusieurs sources de conviction pour chaque individu et les types de contrôle possibles pour chacune ne sont pas les mêmes.* Nous avons déjà pu le montrer à propos des différentes manières de voir (Figure 2). Mais cette donnée essentielle pour toute analyse des preuves ne se limite pas aux différentes manières de voir. Il y a une source de certitude qui vient du consensus qui s'établit dans un groupe au terme de discussions. Et il y a aussi une conviction qui vient d'un raisonnement valide, effectué dans le contexte d'un corpus de connaissances déjà prouvées et, aussi, bien assimilé par celui qui effectue le raisonnement valide. *Le type de réponse didactique que l'on donne à cette question de la compréhension des preuves en mathématiques revient toujours à privilégier l'une de ces sources de conviction par rapport aux autres.* Ecarter l'entrée de la compréhension du fonctionnement des raisonnements valides, indépendamment de toute visualisation ou de toute argumentation, c'est finalement fermer tout accès à des démarches de preuve dans les situations où la visualisation peut être prise en défaut (ce qui arrive vite en géométrie plane), ou s'avère insuffisante comme pour

la géométrie dans l'espace, ainsi que dans les situations où il faut prendre du recul par rapport au consensus que les débats imposent dans un groupe. Ce choix peut être paraître légitime du point de vue d'une éducation mathématique commune, mais c'est un choix dommageable pour la formation générale des individus.

5. Au cœur de l'articulation entre visualisation et discours (*définition, théorème, preuve, explication*) en géométrie : le hiatus dimensionnel

Nous venons de balayer le spectre très large des opérations discursives qui sont mobilisées dans toute formulation faite en langue naturelle, qu'il s'agisse de raconter, de décrire, d'expliquer, d'argumenter dans un débat, de raisonner de manière valide... La complexité du langage n'est pas d'abord celle du vocabulaire mais celle de la diversité des toutes les opérations discursives qui sont mobilisées dans l'expression. Et, en géométrie, comme d'ailleurs dans tous les domaines scientifiques, l'expression ne consiste pas à mettre en mots, à la manière dont on peut apprendre à mettre des mots sur ses émotions et sur ses "vécus", mais à articuler des propositions, dont la richesse de sens est irréductible à celles des mots employés.

Nous avons également vu que, selon le niveau des opérations discursives qui se trouve privilégié, le rapport entre dire et "voir" variait considérablement. Derrière cette variation, dont la complexité est plus grande en géométrie que dans tous les autres domaines, il y a un phénomène cognitif fondamental : le hiatus entre le nombre de dimensions pris en compte pour identifier une unité figurale dans ce qui est visualisé et le nombre de dimensions pris en compte pour nommer les objets et les relations que l'on identifie. Nous avons déjà mentionné ce phénomène du changement du nombre de dimensions à effectuer, dans le sens de l'augmentation lorsqu'on passe du dire au voir et dans le sens de la réduction quand on passe du voir au dire (Duval 1995 p.192). Le tableau ci-dessous en présente une analyse plus détaillée. On peut y voir que l'articulation entre la visualisation et le discours y est représenté par les obliques à double orientation. Mais on peut y voir aussi que cette articulation présuppose la capacité à effectuer la déconstruction dimensionnelle des formes pour ce qui concerne la visualisation (flèches en pointillés descendantes).

NOMBRE DE DIMENSIONS pour les objets étudiés : - par les propositions que l'on énonce - pour les unités figurales correspondantes qui les représentent dans la «figure»	VISUALISATION Les formes d'unités supérieures (<i>flèches pleines</i>) absorbent celles d'unités inférieures qui les «composent», en les rendant inséparables du tout visuel immédiatement identifié	DISCOURS GÉOMÉTRIQUE avec ses trois niveaux d'opérations discursives relativement aux - objets désignés - relations entre objets - dérivations «déductives» de propositions
3D/2D		
2D/2D		
1D/2D		
0D/2D		

Figure 19 : L'articulation entre visualisation et discours en géométrie

On remarquera d'une part l'opposition entre les flèches montantes et descendantes dans chacun des deux registres de représentation et d'autre part l'existence de flèches obliques correspondant à l'articulation des représentations produites dans chacune des deux registres.

Regardons d'abord les flèches en traits pleins dans chacun des deux registres. Les flèches montantes avec ombre portée représentent le mouvement spontané de la visualisation qui tend à fusionner *les unités figurales de rang inférieur* EN UNE SEULE UNITÉ FIGURALE DE RANG SUPÉRIEUR. C'est d'ailleurs cela qui fait la puissance cognitive de la visualisation. Les flèches descendantes représentent les démarches d'analyse et de raisonnement propres à la géométrie pour établir les définitions, pour établir des théorèmes. L'articulation entre la visualisation et le discours géométrique suppose que l'on aille contre le mouvement ascendant de la visualisation, c'est-à-dire contre cette priorité visuelle des unités figurales de dimension supérieure sur les unités figurales de dimension inférieure.

Regardons maintenant les flèches en pointillés. Les flèches descendantes avec ombre portée représentent la déconstruction dimensionnelle des formes, dont nous avons vu qu'elle constitue le trou noir didactique de toutes les activités faites avec ou à partir des figures. Les flèches noires montantes représentent au contraire **l'ordre didactique d'exposition dans l'introduction scolaire des connaissances**. Toutes les progressions de connaissance semblent organisées selon le même ordre "conceptuel" :

((((points→ droites)→ segments de droites)→ polygones)→polyèdres)

Car la connaissance des propriétés relatives aux différentes configurations possibles que l'on peut former à partir des relations entre des droites et celle des propriétés relatives à la comparaison de deux segments doivent fournir les briques élémentaires avec lesquelles on peut construire les connaissances relatives aux polygones et à toute la géométrie plane (en intégrant bien sûr l'usage du compas et la figure du cercle). **Cela va donc en sens contraire du travail long et nécessaire de déconstruction dimensionnelle pour entrer la compréhension des connaissances géométriques.** Privilégier cet ordre revient à faire comme si la déconstruction dimensionnelle était évidente, alors qu'elle est contraire au fonctionnement normal et intuitif de la visualisation (flèches montantes avec ombre portée). C'est cette contradiction cognitivement paralysante que nous avons essayé de représenter dans le tableau ci-dessous.

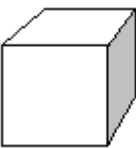
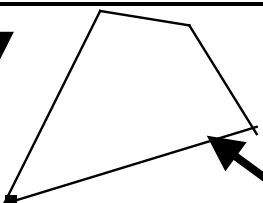
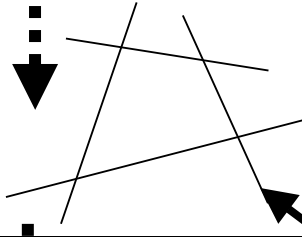
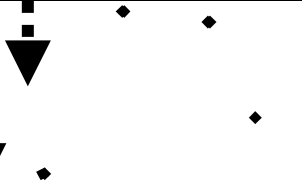
NOMBRE DE DIMENSIONS	VISUALISATION	DISCOURS «FORMEL» D'EXPOSITION
3D/2D		Un polyèdre
2D/2D		Un polygone qui est soit une FACE de polyèdre soit la FIGURE OBTENUE PAR UN PLAN D'INTERSECTION d'un autre polyèdre
1D/2D		Les droites ayant entre elles des relations (PERPENDICULAIRES, PARALLELES, CONCOURANTES etc) permettant de distinguer les propriétés de polygone et les droites se réduisant à des segments . D'où la possibilité de les comparer et la notion de MILIEU
0D/2D		Les Points qui peut être d'intersection de droites, ou sommets d'un polygone Et qui ne sont pas ceux arbitraires que l'on marque sur une droite ou sur un plan et qui apparaissent indépendants

Figure 20 : Contradiction cognitive sous-jacente à l'introduction des connaissances géométriques

Nulle part, en dehors de la géométrie, on ne trouve pareil hiatus dimensionnel entre image et langage, entre visualisation et verbalisation. Et ce hiatus dimensionnel prend, dans l'enseignement de la géométrie, deux formes en quelque sorte inverses : le hiatus dimensionnel qui est intrinsèque aux démarches géométriques et le hiatus dimensionnel didactique résultant de l'organisation de l'acquisition des connaissances, telle qu'on peut l'observer dans les manuels ou dans les programmes.

Les raisons profondes de la deuxième forme du hiatus dimensionnel sont d'une part la déconstruction dimensionnelle des formes, que l'on croit assurée par le seul usage des instruments produisant des tracés droits, et d'autre part l'orientation du discours géométrique, et donc la polarisation de toutes les opérations discursives vers la production de preuves impliquant les raisonnements valides, mais en ne retenant du langage que le premier niveau des opérations discursives, celui qui se traduit par l'emploi de termes pour désigner les objets. Les fonctionnements cognitifs essentiels à construire sont naïvement ignorés ou délibérément rejetés. Comment s'étonner de la réticence que l'enseignement de la géométrie suscite chez beaucoup d'élèves, parfois aussi chez certains enseignants, et par suite de la marginalisation de la géométrie ?

6. Conclusion

Visualisation et discours constituent deux types de fonctionnement cognitif qui ont souvent été opposés, tant d'un point de vue pédagogique, psychologique que mathématique. Cependant leur articulation est absolument décisive pour l'apprentissage de la géométrie. Car l'activité géométrique repose sur la synergie cognitive de ces deux registres de représentation. Le problème particulier et récurrent, auquel tout enseignement de la géométrie se heurte, tient au fait que l'articulation entre visualisation et discours y est plus complexe que dans tous les autres domaines de la connaissance, en raison du hiatus dimensionnel inhérent à la démarche mathématique elle-même. Comment en analyser le mécanisme cognitif ?

Il faut prendre en compte deux points de vue : le point de vue fonctionnel et le point de vue structural. Etant donné que l'articulation entre voir et dire mobilise simultanément deux représentations, il faut regarder quelle fonction la représentation prise comme représentation auxiliaire peut remplir par rapport à la représentation prise comme représentation autosuffisante du point de vue mathématique. Et cela peut être, selon les cas, la représentation visuelle ou ce qui est énoncé. Mais comme cette articulation implique que des correspondances de contenu puissent être établies entre les deux représentations, indépendamment de leur statut de représentation auxiliaire ou autosuffisante, il faut aussi regarder la manière dont des unités de sens et des unités figurationnelles peuvent être discernées et organisées dans chacune des représentations mises en synergie cognitive. Là, l'analyse doit devenir plus précise dans la mesure où tout discours met en œuvre

trois niveaux d'opérations discursives : c'est à chacun de ces niveaux que l'analyse structurale de mise en correspondance doit être menée. Apparaît alors une grande variation, à la fois fonctionnelle et structurale, selon le niveau auquel on se place.

1. L'ancrage cognitif d'un énoncé sur une figure se fait, au niveau de la désignation d'unités figurales, par l'emploi de termes qui impliquent la déconstruction dimensionnelle des formes visuellement reconnues.
2. L'interaction cognitive entre visualisation et discours ne commence vraiment qu'au niveau des propositions que l'on énonce, quel que soit leur statut (constat, définition, conjecture...) dans le discours produit. Car c'est à ce niveau seulement qu'une figure peut remplir une fonction (illustration, contre-exemple..) par rapport à un énoncé et réciproquement. D'un point de vue structural, cela se traduit par le fait que la visualisation requiert un enchaînement de deux figures qui peuvent être des sous-figures de la figure de départ, ou l'enchaînement de la figure de départ et de l'une des ses transformations visuelles. Le fait que la conversion visuelle d'un théorème conduise à un enchaînement de deux figures a d'ailleurs été souligné depuis longtemps.
3. Une articulation cognitivement productive entre visualisation et discours ne commence qu'au niveau des transformations de représentation qui peuvent être conduites, de manière indépendante, dans chacun des deux registres. Mais ici tout va dépendre du registre que l'on va privilégier pour les demandes de justification ou de preuve.
 - Ou bien l'on privilégie la visualisation avec les invariants d'opérations (méréologiques ou autres) qui sont mises en œuvre, et alors le raisonnement peut être assimilé à une explication descriptive de ces transformations visuelles réellement faites ou verbalement évoquées. La source de la conviction vient alors de la visualisation, celle-ci reposant non pas sur une figure mais sur une séquence d'au moins trois figures dans laquelle les opérations portent nécessairement sur des unités figurales 2D ou 3D.
 - Ou bien l'on privilégie le discours avec ses mécanismes propres de déduction valide et alors la visualisation remplit une fonction heuristique pour "trouver" les théorèmes à mettre en œuvre, ce qui implique que le regard se focalise essentiellement sur des unités figurales 1D. La source de la conviction ne vient plus de la visualisation mais de la compréhension et du contrôle des raisonnements déductifs développés.

Cependant ces deux voies ne peuvent pas du tout être mises sur le même plan. La première est en fait vite limitée. Car il y a beaucoup de situations où les raisonnements doivent compenser un défaut de visualisation ou doivent se faire

contre la visualisation. Les seules situations où visualisation et discours se rejoignent, dans une demande de preuve, est la production d'un contre-exemple (sous réserve que son invention ne demande pas des mois ou des années de travail !). Mais là nous redescendons du niveau des raisonnements à celui des propositions énoncées et ce type de production dépend surtout des capacités des élèves à effectuer des transformations visuelles de figures. Autrement dit, selon le type de preuve que l'on demande aux élèves, il peut y avoir convergence locale ou une divergence radicale entre les processus de visualisation et les processus de raisonnement.

C'est dans le champ de cette activité cognitive à la fois très diversifiée, mais aussi complexe, que les connaissances géométriques peuvent se construire. La simplicité des contenus mathématiques que l'on choisit et introduit comme les bases de l'enseignement de la géométrie présuppose en fait des manières de voir et des modes de raisonnements qui s'écartent de ceux qui sont pratiqués en dehors des mathématiques ou qui parfois s'y opposent. Définir des progressions pour l'acquisition des "savoirs" en géométrie, sans prendre en compte les variables correspondant à aux différents fonctionnements cognitifs que nous venons d'analyser ne peut conduire, à moyen ou long terme, qu'en impasse. La simplicité des démarches géométriques est au terme de ces différentes prises de conscience que les élèves doivent faire aussi bien pour la visualisation que pour la production et la compréhension du discours géométrique.

On ne peut donc pas s'attendre à ce que les élèves non seulement prennent conscience de ces fonctionnements cognitifs spécifiques mais aussi mettent en place les coordinations complexes nécessaires à leur synergie, du seul fait qu'on les ferait travailler sur des contenus mathématiques. Et il suffit de se rappeler un fait important. Si on demande une production discursive à des élèves on obtient des textes radicalement différents selon le type de représentation visuelle qui leur sert d'appui. On ne peut pas espérer que les élèves, qui en restent très légitimement aux fonctionnements cognitifs propres à la visualisation iconique, puissent entrer dans la compréhension d'énoncés et de démarches discursives qui s'appuient sur une visualisation non iconique et qui requièrent le réflexe optique de la déconstruction dimensionnelle des formes. D'où l'importance d'un travail long et spécifique pour faire entrer dans ces manières si particulières de voir qui sont propres à la géométrie. Mais on ne peut non plus espérer que les élèves qui seraient essentiellement entraînés aux manières de voir du constructeur ou de l'inventeur bricoleur, c'est-à-dire à une construction instrumentée des figures ou à des justifications par des transformations figurales, puissent entrer dans la compréhension du fonctionnement des déductions valides sans lesquelles il ne peut y avoir de preuves fondées sur des définitions ou des théorèmes. Car le fonctionnement discursif des raisonnements mathématiques est, si l'on ose dire, un fonctionnement "anti-parole".

La méconnaissance de la complexité cognitive impliquée dans toute démarche de géométrie n'est pas seulement dommageable pour l'enseignement, elle l'est également pour les recherches sur les apprentissages de la géométrie. Ainsi on peut s'interroger sur la méthodologie mise en œuvre dans l'analyse des productions "langagières" des élèves, quand elle est conduite essentiellement, sinon exclusivement, en fonction des contenus mathématiques. La complexité des fonctionnement discursifs étant ignorée, l'interprétation du discours des élèves ne relève-t-elle pas alors d'un commentaire libre, propre à chaque chercheur, plutôt que d'une mise en évidence contrôlable (et donc comparable à d'autres corpus de productions "langagières") des observations ou des conclusions qui en sont tirées ? On pourrait aussi de la même manière s'interroger sur l'analyse des tâches proposées en relation avec la visualisation, que celles-ci soient faites dans le cadre d'un manuel, d'une fiche ou d'un logiciel. Un grand progrès sera fait pour l'enseignement de la géométrie, pour lui donner une place éminente dans la formation générale de l'individu, lorsque les contenus mathématiques seront regardés par rapport à l'activité cognitive qu'ils sollicitent et que le développement de cette activité deviendra un objectif indissociable des objectifs mathématiques.

Bibliographie

- BALACHEFF N., 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Thèse Université Grenoble 1. Grenoble.
- BERTHELOT R., SALIN M-H., 1994, L'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire. *Grand N*, **53**, 39-56.
- BERTHELOT R., SALIN M-H., 2000, L'enseignement de l'espace à l'école élémentaire, *Grand N*, **65**, 37-59.
- COREN S., PORAC, C., WARD L.M. ,1979, *Sensation and Perception*. New-York: Academic Press.
- DUPUIS C., PLUVINAGE F., Duval R., 1978, Etude sur la géométrie en fin de troisième in *Géométrie au Premier Cycle*, II, Paris, A.P.M.E.P., 65-101.
- DUVAL R., EGRET M.A., 1989, L'organisation déductive du discours: interaction entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **2**, 41-65.
- DUVAL R. , 1995 a, *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.
- DUVAL R., 1995b, Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processings. in *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematic Education* (Ed. R. Sutherland & J. Mason), 142-157, Berlin : Springer.
- DUVAL R., 2000, Costruire, vedere e ragionare in geometria : quali rapporti ? *Bolletino dei docenti di matematica*, **41**, 9-24. Bellinzona.
- DUVAL R., 2001, Ecriture et compréhension, dans *Produire et lire des textes de démonstration* (Ed. Barin & alii), p.183-205. Paris : Ellipses.
- EDWARDS C.H., 1979, *The historical Development of Calculus*. Berlin : Springer.
- EUCLIDE, 1990, *Les Eléments*, volume 1 Livres I à IV, (Tr. B. Vitrac). Paris : PUF.
- GODIN M., 2004, De trois regards possibles sur une figure au regard «géométrique», à paraître dans les *Actes du séminaire national de didactique*.
- IREM de Strasbourg, 1979, *Mathématiques 4^{ème}*, Istra.
- IREM de Strasbourg, 1986, *Mathématiques 2^e*, Istra.
- KANIZA G., 1998, *La grammaire du voir* (tr. A. Chambolle). Paris : Diderot éditeur.
- KANT E.,1976, *Critique de la raison pure* (tr. Barni). Paris : G.F.
- LABORDE C. 1994, Enseigner la géométrie : permanences et révolutions. *Bulletin APMEP*, **396**, 523-548.

LEPOIVRE G. et POIRSON A., 1920, *Cours de Géométrie théorique et pratique*, I . Lille : Janny.

PADILLA V.1992, *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*, Thèse U.L.P.: Strasbourg, 1992.

PEIRCE C.S., 1978, *Ecrits sur le signe* (Choix de textes, tr. G. Deledalle). Paris : Seuil.

POINCARÉ H., 1963, «Pourquoi l'espace a trois dimensions» dans *Dernières pensées*. Paris : Flammarion.

PIAGET J. (1947) 1972, *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : P.U.F.

Séminaire IUFM, 1999, *Conversion et articulation des représentations analogiques* (Ed. R. Duval). IUFM Nord Pas de Calais.

Sites Internet présentant l'évaluation CE2-6^e :

pour l'année scolaire en cours : <http://evace26.education.gouv.fr/> et
pour les années antérieures : <http://cisad.adc.education.fr/eval/>.

APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION ET GRAPHES ORIENTÉS

Abstract. Learning formal proof by organizing oriented graphs: an experiment

According to Duval, traditional tasks of analysing, reading or writing proofs don't enable pupils to discriminate between formal proof — a (logical) *computation*, where each proposition obeys criteria of *validity* and is brought in for its *operative status* — and argumentation — a *discourse*, where propositions obey criteria of *relevance* and are organised by simple *accumulation*.

Pushing more radically Duval's proposed research orientations and trying as much as possible to *isolate difficulties*, we have designed tasks in which pupils organise, within the empty boxes of an oriented graph, the propositions of a geometrical proof, the general idea of which they have been previously introduced to. The sequence of tasks has been experimented with three 1st year secondary classes (12-13 years old) in Montreal, in the spring of 2004.

A first analysis of the data that have been gathered allows us, among other things, to conclude that:

- the deductive structure, consisting of chained inferences, is neither spontaneously, nor easily understood by pupils;
- the passage from what seems to be a satisfactory understanding of a proof, of how the general ideas are linked in it, to a logically well-controlled written production of that proof, constitutes a fundamental leap for pupils and deeply hinges on their mastery of the deductive structure;
- the organizational work required by the proposed tasks may contribute to pupils' better understanding of the mechanisms that rule this structure.

Résumé. Selon Duval, les tâches traditionnelles d'analyse, lecture et écriture de démonstrations ne permettent pas aux élèves de distinguer entre une démonstration formelle, c'est à dire un enchaînement logique de propositions dont chacune respecte des critères de validité et a sa place en vertu de son statut dans la démarche, et une argumentation, dont les propositions obéissent à des critères de pertinence et se contentent de s'accumuler.

En développant plus radicalement des pistes de recherche proposées par Duval et en tentant dans la mesure du possible d'isoler les difficultés, nous avons proposé à des élèves de remplir par des propositions les boîtes vides du graphe orienté d'une démonstration géométrique préalablement présentée. La séquence d'activités a été expérimentée auprès d'élèves du début de l'enseignement secondaire (12 – 13 ans) au printemps 2004 à Montréal.

Une première analyse des données recueillies nous a notamment permis de conclure que :

- la structure déductive, consistant en enchaînements d'inférences, n'est ni spontanément, ni aisément comprise des élèves;
- le passage d'une compréhension apparemment satisfaisante d'une preuve, des liens entre ses idées générales, à sa rédaction sous l'égide d'un bon contrôle logique,

constitue un saut fondamental pour les élèves et est intimement lié à leur maîtrise de la structure déductive;

- le travail d'organisation qui a été proposé aux élèves a pu contribuer à une meilleure compréhension par les élèves des mécanismes qui régissent cette structure.

Mots-clés. enseignement secondaire, géométrie, démonstration, pas de déduction, inférence, enchaînement logique, graphe de démonstration, rédaction.

LA FLÈCHE

*Mère de la flèche est la pensée :
comment étendre ma portée vers là-
bas ? par delà ce fleuve, ce lac, cette
montagne ?*

Paul Klee

1. Introduction

Les difficultés qu'ont les élèves avec la démonstration, notamment en géométrie, ont été abondamment analysées et commentées par les didacticiens des mathématiques, comme s'en convaincra quiconque jette un œil sur le site d'adresse

<http://www.lettredelapreuve.it/>.

Les travaux de Duval (1991, 1992-93, 1995, 2001 ; Duval & Egret, 1989), à cet égard, remettent en question nombre d'études qui, dans la foulée des travaux de Piaget et des van Hiele, focalisent sur la maîtrise des règles logiques comme celles de l'implication ou de l'inclusion des classes. Pour Duval (1995, p. 212), l'apprentissage des démarches de raisonnement intrinsèquement liées à l'utilisation d'un langage (naturel ou formel) passe par la nécessaire capacité à juger de la validité d'un raisonnement selon des critères autres que le recours à l'empirisme, l'apport d'informations supplémentaires ou l'établissement d'un consensus au sein d'un groupe. Le respect des règles logiques d'organisation des propositions fait certes partie de ces critères, mais « ... la connaissance de ces règles ne rend guère sensible au caractère valide ou non valide d'un raisonnement, pas plus que celle des règles de grammaire n'aide la plupart des élèves à écrire correctement... »¹ (op. cit., p. 212).

¹ Thom (1974, p. 45) va plus loin : « ... la connaissance explicite de la définition formelle de l'activité peut perturber cette activité, qui fonctionnait fort efficacement jusque-là sans théorie : à la manière de ces individus scrupuleux qui hésitent à parler une langue parce qu'ils en connaissent trop bien la grammaire et ont peur de commettre des fautes. »

Si l'on envisage les raisonnements non plus selon leur degré de conformité aux lois logiques formelles, mais sous l'angle des interactions sociales s'exprimant à travers les pratiques discursives usuelles, l'on se heurte à une rupture cognitive profonde : les raisonnements spontanés alors mis en œuvre, qui visent à convaincre et obéissent à des critères de pertinence, ne permettent pas d'entrer dans le fonctionnement cognitif de la démonstration qui obéit, elle, à des critères de validité et cherche à prouver (op. cit., p. 213). Comment faire face à cette rupture dans l'enseignement ?

Les travaux de Duval ont servi de cadre théorique à la conception d'une activité dont le présent article rend compte. Dans la section 2, nous tentons de faire une synthèse de ceux-ci, et en illustrons certains aspects sur la base de l'analyse d'une preuve extraite d'un manuel québécois. Dans la section 3, nous formulons quelques-unes de nos réflexions suscitées par ces travaux. Elles sont de prime abord de nature théorique, mais les résonances des écrits de Duval dans notre propre expérience d'enseignement ont certainement servi d'élément déclencheur. La section 4 rend compte de la conception des trois tâches qui constituent l'activité, de leur expérimentation dans trois classes de secondaire 1 (12-13 ans) et des premières conclusions que nous en tirons.

2. Cadre théorique

2.1. Le raisonnement

Dans son livre *Sémiosis et pensée humaine*, Duval (1995, p. 217) propose la caractérisation suivante du raisonnement :

D'une façon générale, tout discours ayant pour but de prouver la vérité d'un énoncé ou de faire admettre par un interlocuteur le « bien-fondé » de son affirmation, ou de son rejet, est reconnu comme « raisonnement ». Autrement dit, les deux caractéristiques suivantes sont nécessaires pour qu'un discours puisse être reconnu comme un raisonnement :

- être orienté vers un énoncé-cible, c'est-à-dire vers la proposition à justifier,*
- être centré sur la valeur, logique ou épistémique, de cette proposition et non pas sur son contenu.*

Duval appelle *propositions* des unités discursives combinées par le discours. Le « sens » n'y est pas uniquement fonction de leur contenu sémantique, mais aussi de leurs valeurs logique, épistémique et sociale. Les valeurs logiques (de vérité) possibles pour une proposition sont *vrai*, *faux*, ou *indéterminé*. Duval distingue :

- la *valeur épistémique sémantique*, qui est le degré de fiabilité du contenu de la proposition au moment de son énonciation (évident, certain, vraisemblable, possible, peu probable, impossible, absurde...), bien sûr fonction du contenu mais aussi de l'état de connaissances et du milieu socioculturel de l'interlocuteur (émetteur ou récepteur) ;
- la *valeur épistémique théorique* (conventionnel, possible, impossible, nécessaire, authentique...), en principe indépendante de l'interlocuteur, et qui est celle associée au statut de la proposition dans le cadre théorique sous-jacent, quand il y en a un : définition, axiome, conjecture, théorème, hypothèse en mathématiques ; principe, loi, règle, convention, article de contrat, etc. dans les autres domaines.

Contrairement à ce qu'il en est des autres formes d'expansion discursive comme l'explication ou la description, le fonctionnement cognitif du raisonnement — en quoi tel raisonnement est valide ou non ; comment cette validité doit être appréhendée pour entraîner la conviction... — ne dépend pas tant du contenu sémantique des propositions en cause que de son interaction avec les valeurs logique et épistémique, la fonction première du raisonnement étant de changer la valeur épistémique de l'énoncé-cible (op. cit., pp. 217-233).

2.2. Argumentation et démonstration

Pour Duval, l'argumentation et la démonstration sont deux types de raisonnement fondamentalement distincts. Le lecteur pourra consulter Duval (1991) ou Duval (1995, chap. V) pour une caractérisation détaillée de chacun. Dans le tableau ci-dessous, nous avons cherché à faire la synthèse de ce qui distingue les deux démarches.

Argumentation	Démonstration
○ De nature dialogique.	○ De nature logique.
○ Aucune autre contrainte d'organisation que celles propres à un <i>discours</i> .	○ Organisation stricte autour de l'unité structurale qu'est <i>l'inférence</i> , cela rapprochant la démonstration d'un <i>calcul</i> .
○ Se développe à partir des relations de contenu entre les propositions, en interaction avec les valeurs	○ Chaque proposition y a l'un des trois statuts opératoires : prémisse, règle d'inférence, proposition inférée. Ce

épistémiques *sémantiques* que leur donne l'interlocuteur émetteur. Celles-ci, elles-mêmes fonction des contenus et de leur appréhension (variable selon l'état des connaissances et le milieu socioculturel de l'émetteur), sont généralement en opposition avec les valeurs que leur donne l'interlocuteur récepteur, cette opposition agissant comme moteur de l'argumentation.

statut est déterminé par l'organisation déductive et non par le contenu, et est en outre discriminé par la valeur épistémique *théorique* de la proposition, qui doit pour cela « refouler » la valeur épistémique sémantique adjugée par un interlocuteur éventuel.

- Structure non hiérarchisée, qui repose sur le cumul d'arguments, dans le respect obligé de la *continuité thématique*.
- Cherche à modifier la valeur épistémique *sémantique* qu'a l'énoncé-cible pour l'un des deux interlocuteurs.
- La conclusion et sa valeur de vérité n'en découlent ni nécessairement, ni uniquement, puisqu'elles y sont défendues par la *pertinence* du contenu des propositions avancées, et non par la validité des opérations discursives mobilisées ; l'argumentation *convainc*, mais ne *prouve* pas.
- Structure en arbre (ou encore modulaire, à plusieurs arbres²), où les inférences s'enchaînent par « recyclage » de la proposition inférée, sans nécessaire continuité thématique.
- Cherche à modifier la valeur épistémique *théorique* de l'énoncé-cible.
- Chaque proposition inférée est uniquement et nécessairement déterminée par l'inférence, dont la *validité* peut être théoriquement contrôlée. C'est le cas en particulier de l'énoncé-cible, dernière proposition inférée, dont la nécessité « prouve » alors sa valeur logique de vérité.

² Par exemple, une preuve qui fait appel à un ou plusieurs *lemmes*, dont le ou les résultats sont recyclés non pas comme prémisses, mais comme (nouvelles) règles d'inférence ; voir par exemple la seconde preuve, § 4.2.

2.3. Le passage de l'une à l'autre

Une thèse de Duval (1991, 1992-93, 1995 ; Duval & Egret, 1989) est à l'effet que les élèves ne perçoivent ni ne comprennent aisément les exigences propres à la démonstration mathématique, qu'ils appréhendent et traitent comme des argumentations. Tentons de cerner les causes de ce dysfonctionnement.

1. Les manuels et les enseignants ne prennent pas toujours le soin de distinguer lesquelles, parmi les démarches discursives *explication*, *illustration commentée*, *heuristique*, *argumentation*, *démonstration*, ils sont en train d'utiliser ; voir par exemple Dreyfus (1999, § 4).
2. L'argumentation est la forme de raisonnement à laquelle les élèves sont confrontés au primaire, tant en mathématiques que dans les autres disciplines. La recension systématique (voir Tanguay, 2002, § 5) des problèmes et exercices de géométrie synthétique dans une des collections de manuels du secondaire (12 à 17 ans) la plus utilisée au Québec, montre que parmi les problèmes dont la solution passe par un véritable raisonnement déductif, la très grande majorité ne nécessite en fait que ce que nous avons appelé une *déduction locale*, à savoir une déduction en un seul pas. Or, quand la complexité du raisonnement reste en deçà de l'enchaînement déductif, l'élève n'est pas confronté à la difficulté de coordonner les propositions selon leur statut opératoire changeant : voir le point 5. Nous supputons que cette prédominance des problèmes à déductions locales sur les problèmes à enchaînements déductifs n'est pas propre aux manuels québécois.
3. La *structure locale* qui est celle, ternaire, de l'inférence, n'est que rarement explicitée en démonstration écrite (cf. l'Annexe 1) :
 - soit que la règle d'inférence soit immédiate au point qu'on ne juge pas bon de la mentionner (ex. : la transitivité de la congruence ou du parallélisme) ;
 - soit que pour alléger la rédaction, l'on évite de répéter la proposition « recyclée », ou l'on regroupe deux inférences en une seule, ou deux conditions de la règle d'inférence en une seule, etc. ;
 - soit que le texte, pour des raisons d'organisation, de formulation, de mise en page, n'explicite pas, ou rende équivoque le statut opératoire des propositions invoquées ;
 - soit que le statut théorique de certaines propositions n'ait pas été clairement préétabli (c'est par exemple souvent le cas des preuves qui mobilisent la géométrie des transformations).

4. Même quand la structure de l'inférence est lisible, c'est ce que Duval (1995, p. 244) appelle « l'utilisation algorithmique de l'énoncé-tiers » — à savoir, la vérification que toutes les conditions sont réunies dans les prémisses pour que la règle d'inférence s'applique et que se détache la proposition inférée — qui est relégué à l'implicite par les contraintes rédactionnelles. Le caractère opératoire des liens entre prémisses, énoncé-tiers et conclusion reste alors masqué pour l'élève, qui n'y voit que des relations symétriques de proximité sémantique, de nature argumentative (cf. l'Annexe 1).
5. La structure globale de la démonstration peut elle aussi rester inintelligible pour l'élève. Elle repose fondamentalement sur la variabilité du statut opératoire des propositions. Or, l'appréhension par l'élève de cette variabilité nécessite de sa part une décentration par rapport au contenu, à ses valeurs épistémique sémantique et logique (cf. l'Annexe 1). En outre, cette décentration passe par une nécessaire intelligibilité de la structure locale et du rôle qu'y joue le statut théorique de chaque proposition, si bien que les difficultés soulevées aux points 3 et 4 nourrissent en quelque sorte celle dont il est ici question :

Les propositions étant considérées en dehors de leur contexte [théorique] d'énonciation et leur « sens » se trouvant réduit à la seule composante de leur contenu, leur organisation en pas de déduction se fait alors en fonction de leur contenu et non en fonction de leur statut opératoire. Il en résulte que la valeur épistémique théorique ne peut plus être dissociée de la valeur épistémique sémantique qui reste dominante (Duval, 1995, p. 303).

Nous reviendrons sur ce point à la section suivante, d'une part pour y prendre en compte les plus récentes réflexions de Duval (2001) sur la *pratique orale* du texte de démonstration par les élèves, d'autre part pour développer certains aspects du problème sur lesquels Duval n'a à notre avis peut-être pas assez insisté.

6. Les points 3, 4 et 5 sont exacerbés par la similitude linguistique des deux formes de raisonnement, notamment par le fait qu'elles emploient les mêmes connecteurs, malgré qu'ils y aient des fonctions différentes ; voir Duval (1992-93 ; 1995, p. 305) ou Duval et Egret (1989).

3. L'appréhension de la structure déductive en démonstration

3.1. Prégnance de la valeur de vérité

Plus que le contenu, c'est à notre avis la valeur de vérité des propositions en jeu qui fait écran aux structures locale et globale en démonstration. L'organisation déductive impose en effet une hiérarchisation, une « orientation³ » des combinaisons propositionnelles, qui doit primer non seulement sur les liens sémantiques, mais même sur les liens logiques théoriques. Expliquons-nous. Un élève prend par exemple connaissance de la preuve donnée à l'Annexe 1. Il doit comprendre que la congruence des angles aux sommets du triangle $\Delta ACC'$ *précède* la congruence des côtés. Il ne peut saisir la structure de la preuve que s'il conçoit, au moment où les affirmations et justifications 5 sont énoncées, que la congruence des angles aux sommets est **déjà vraie**, quand celle des côtés n'est **pas encore vraie** ! Cette appréhension doit se faire à l'encontre de l'équivalence logique théorique « isocèle si et seulement si isoangle » (celle qu'a apprise l'élève il y a peu) mais surtout, en dépit du sentiment qui s'est imposé à lui dès qu'il a saisi l'affirmation 3, en conformité avec ce qu'il perçoit de la figure d'accompagnement, à savoir que les propositions « $\Delta ACC'$ est équilatéral » et toutes celles qui en découlent *sont vraies*.

Car selon nous, la valeur de vérité est beaucoup plus en cause ici que la valeur épistémique sémantique. Avec les années, l'élève s'est convaincu, comme ses enseignants ne se sont jamais fait faute de lui rappeler, que la mathématique est par excellence la science où les énoncés doivent être sans ambivalence soit vrai, soit faux. Et l'on a insisté, souvent même à l'encontre des conceptions spontanées des élèves : « les nombres premiers sont impairs » est un énoncé faux car... (Zazkis et Levy, 2001) ; « les carrés sont des rectangles » est un énoncé vrai car... (Furinghetti et Paola, 1991). Ces mêmes enseignants ont bien prévenu l'élève des pièges de l'empirisme et de « l'évidence », tout particulièrement en géométrie, mais du moment que le manuel affirme, en *argumentant* cette affirmation, que le triangle $\Delta ACC'$ est équilatéral ! Comment « l'équi-angularité-latéralité » du triangle saurait-elle n'être tout à coup qu'**à moitié vraie** ?!!

Autrement dit, quand l'élève a atteint ce stade où il est capable de remettre en question l'évidence, où il a dépassé le désormais consacré « ça se voit sur le dessin », celui-là, en « bon élève », refoule la valeur épistémique sémantique qu'il prête spontanément à l'énoncé, mais c'est alors pour laisser toute la place à la valeur

³ Au sens où les graphes propositionnels qui modélisent le raisonnement sont orientés, c'est-à-dire que les arêtes y sont des flèches ; cf. les annexes 4, 5 et 6.

de vérité, et augmenter d'autant son poids d'entrave au raisonnement⁴. Et ce, aussi longtemps qu'il n'a pas pris conscience de cette autre valeur épistémique qu'est la valeur théorique, et n'a pas « ... découvert une organisation du raisonnement centrée sur le seul statut des propositions » (Duval, 1995, p. 231). Cette « prégnance » de la valeur de vérité est notamment exacerbée à l'égard des preuves par l'absurde, comme le suggère l'analyse de trois productions⁵ d'étudiants (Tanguay, 2003, § 5.3), que nous avons retenues comme particulièrement typiques et révélatrices sous ce rapport.

3.2. Graphes orientés, linéarité et pratique orale de l'écrit

On vient de le voir, la structure déductive en démonstration impose une organisation hiérarchique des propositions, où même la relation d'adjacence entre deux propositions théoriquement équivalentes est en général hiérarchisée. Cette structure de graphe orienté (voir annexes 4, 5 et 6) est bien sûr de complexité variable, complexité que le texte écrit, dans sa linéarité, a tendance à masquer. Ce sera entre autres le cas si une proposition inférée est recyclée comme prémisse, non pas de l'inférence qui suit dans le texte, mais d'une inférence énoncée plus tard.

Considérons, par exemple, la conclusion de la preuve donnée à l'Annexe 1. Des prémisses $m \overline{AC} = m \overline{CC'}$ (affirmation 5) et $m \overline{CC'} = 2 \times m \overline{CB}$ (affirmation 6), on infère que $m \overline{AC} = 2 \times m \overline{CB}$ (affirmation 7). Mais l'affirmation 6 est elle-même conclusion d'une inférence qui s'insère entre 5 et 7. Veut-on justifier l'alignement des points C , B et C' , de fait préalable à cette inférence, que l'affirmation 5 s'éloignera alors d'autant dans le texte de l'inférence dont elle est une des prémisses, et dont la transitivité de l'égalité est la règle. Et où insérer affirmations et justifications si l'alignement de C , B et C' est déduit :

- des égalités $m\angle CBA = 90^\circ = m\angle ABC'$,
- du fait que ces deux angles sont adjacents,
- pour conclure par additivité que $m\angle CBC' = 180^\circ$?

⁴ Cette difficulté pour l'élève — se décentrer par rapport à la valeur de vérité des propositions — constitue à notre avis un véritable *obstacle*, au sens de Brousseau (1998), dont on pourrait entendre la saga de l'*Axiome de la parallèle* comme un écho historico-épistémologique : ce n'est que quand l'axiome de la parallèle a pu être considéré non plus sous l'angle exclusif de sa valeur de démontrabilité, mais bien pour son statut opératoire à l'intérieur d'une parmi différentes géométries possibles, que le problème de son indépendance a pu être définitivement élucidé.

⁵ Il s'agit d'extraits d'examens, où des étudiants de 1^{re} année de Cégep (17-18 ans) devaient montrer par l'absurde que $(2+\sqrt{3})/4$ est irrationnel, sachant que $\sqrt{3}$ l'est, et dont des exemples analogues avaient été traités en cours.

En même temps que l'affirmation 3, de façon à partager avec celle-ci la règle de conservation de la mesure des angles par symétrie ? Juste avant l'affirmation 6, pour bien faire ressortir que l'alignement de C , B et C' en est une prémisse ? Quelle que soit l'organisation retenue, le texte écrit aura à rendre compte d'un tel enchevêtrement qu'il faudra un usage particulièrement fin des connecteurs⁶ pour le clarifier.

Que le texte rende compte habilement ou non de la structure, un syndrome risque de se manifester chez l'élève, à savoir sa *pratique orale du texte*, que Duval diagnostique comme suit :

Qu'il s'agisse d'écrire ou qu'il s'agisse de lire, on peut toujours se contenter d'un traitement local, rapide et ininterrompu (sans retour en arrière et sans délai), comme lorsqu'on intervient ou que l'on écoute dans une conversation ou dans une discussion. Et il semble que beaucoup d'élèves s'en tiennent à cette pratique et rencontrent beaucoup de difficultés à entrer dans une pratique écrite de l'écrit... (p. 191). (...) Cette limitation subjective aux fonctionnements propres à l'expression orale n'empêche pas l'accès à l'écrit, du moins en tant qu'objet culturel jouant un rôle dans la vie sociale et dans les loisirs. Elle est même souvent suffisante pour réussir scolairement. Mais les possibilités de traitement, d'exploration, de contrôle, de réflexion que l'expression écrite offre restent méconnues et inutilisées (Duval, 2001, p. 189).

La compréhension de la structure d'une démonstration tant soit peu complexe nécessite de la part de l'élève un travail — de lecture ou d'écriture — ponctué de pauses, de retour sur les propositions déjà énoncées, de réaménagements et simultanisations (pour rapprocher des propositions ou blocs de propositions non contigus dans le texte), de recul, d'appréhension globale (pour saisir certains éléments de macro-organisation), de contrôle, de réflexion. Toutes choses que ne permet pas cette « linéarisation de la pensée » (op. cit., p. 191) imposée par une pratique orale du texte, faite de fluence, de séquentialité, d'irréversibilité⁷.

Du moins peut-on penser que la pratique orale du texte ne nuit pas à l'appréhension de la structure *locale* de la démonstration ; voire, espérer que la linéarisation du traitement par l'élève facilite cette conception hiérarchisée, orientée, de l'enchaînement des propositions, dont nous avons vu à la section précédente qu'elle pouvait être entravée par la prégnance de la valeur de vérité. Mais rien n'est

⁶ La fonction des connecteurs en démonstration est de marquer le statut opératoire des propositions (voir Duval, 1992-93).

⁷ Le fait d'imposer un format *en deux colonnes* ne prévient en rien, à notre avis, du syndrome de la pratique orale du texte, l'élève fonctionnant alors selon la séquence : affirmation 1, justification 1, affirmation 2, justification 2, etc.

moins sûr. Il est possible qu'au contraire, l'élève prête à la simple linéarité de l'expansion discursive ce qu'il devrait en fait comprendre comme une hiérarchisation fondamentalement structurelle de l'organisation déductive. Certaines réactions des élèves, au cours du travail de constitution des preuves comme graphes orientés (voir point 4, § 4.4.2), nous semblent révélatrices à cet égard. La situation paradoxale pourrait donc être la suivante : l'élève doit saisir une structure en arbre, orientée, qu'il doit pour cela travailler globalement, par retours en arrière, réaménagements, etc. Mais ce qu'il conçoit est une structure par cumul, un agglomérat de relations non orientées, et [peut-être *parce que*] son travail s'effectue en mode strictement linéaire, sans réversibilité. La pratique orale du texte, assurément une entrave à l'appréhension de la structure globale en démonstration, le serait donc *également* pour la structure locale. L'étude de cette question mériterait en tous cas d'être poussée plus avant.

3.3. Démonstration et intuition

Selon Fischbein (1982, p. 10, notre traduction), « ... les structures intuitives sont des composantes essentielles de toutes formes actives de compréhension et de réflexion tant soit peu productives »⁸. Pour lui, l'intuition (intellectuelle) a la même fonction au niveau symbolique qu'à la perception au niveau concret : donner accès à une forme de cognition qui soit directe, globale et immédiatement disponible. C'est là selon lui qu'on se heurte à ce qu'il appelle le *paradoxe fondamental de l'apprentissage de la preuve* :

Le concept de preuve formelle (non inductive, non intuitive, non empirique) ne peut devenir un instrument efficace pour les processus de raisonnement que si, et seulement si, il acquiert les qualités requises par le comportement empirique d'adaptation !

Autrement dit : les voies formelles de raisonnement et de preuve peuvent se libérer des contraintes du savoir empirique si elles atteignent ces qualités qui confèrent à la recherche empirique sa productivité spécifique ; à savoir ces formes globales, synthétiques, intuitives d'anticipation et d'interprétation (op. cit., p. 17, notre traduction).⁹

⁸ (...) the intuitive structures are essential components of every form of active understanding and of productive thinking.

⁹ The concept of formal, noninductive, nonintuitive, non-empirical proof can become an effective instrument for the reasoning process if, and only if, it gets itself the qualities required by adaptive behavior!

In other terms: formal ways of thinking and proving can liberate themselves from the constraints of empirical knowledge if they become able to include in themselves those qualities which confer on the empirical search its specific productivity. We refer to the global, synthetic, intuitive forms of guessing and interpreting.

Plus qu'un paradoxe, il s'agit ici d'après nous d'un véritable cercle vicieux. Pour être opératoires (au sens de Fischbein), les mécanismes logiques de la démonstration doivent accéder, dans l'entendement de l'élève ou de l'étudiant, au stade de la connaissance intuitive, c'est-à-dire à une forme de cognition directe, globale, efficace, immédiatement disponible. Mais une telle forme de cognition n'est possible que si elle embrasse des structures ou des schèmes relativement stables, invariables, comme le sont les règles et contraintes qui régissent l'organisation déductive en démonstration. Au contraire, l'argumentation revêt autant de formes et structures qu'il y a de contextes, de contenus et de combinaisons de contenus issus des propositions sous-jacentes : « ... l'argumentation a pour caractéristique essentielle de n'avoir pour contraintes d'organisation que celles inhérentes à toute pratique spontanée du discours » (Duval, 1995, p. 213). Ainsi, tant que l'élève aborde la preuve à travers des schèmes argumentatifs de raisonnement, ne peut-il intégrer la démonstration en une « ... forme structurale interne de nécessité qui est caractéristique d'une adhésion intuitive » (Fischbein, 1982, p. 15)¹⁰. Et tant qu'il n'est pas parvenu à une telle adhésion intuitive sera-t-il condamné à aborder la preuve à travers des schèmes de raisonnement de nature argumentative.

Comme le suggère Fischbein, cette absence d'adhésion intuitive pourrait expliquer des comportements — symptômes de la difficulté des élèves à saisir la nature apodictique de la démonstration — comme : se déclarer satisfait d'une preuve et demander du même souffle plus de vérifications empiriques (Fischbein et Kedem, 1982) ; ou reprendre à zéro une démonstration en l'adaptant à un cas particulier auquel on cherche à appliquer le résultat général déjà démontré (Vinner, 1983) ; ou considérer qu'une démonstration géométrique ne s'applique qu'à l'unique cas illustré par la figure d'accompagnement (Chazan, 1993). D'un point de vue psychologique, c'est peut-être le sentiment inconscient d'être pris dans un cercle vicieux qui se révèle consciemment à l'élève dans sa conviction panique qu'il n'y comprendra jamais rien en démonstration. Faute de maîtriser ses mécanismes d'organisation interne, se rabattra-t-il sur les manifestations externes de la preuve formelle, notamment sur ses aspects *ritualistes*, en lien avec un fort effet de contrat (Harel et Martin, 1989).

¹⁰ (...) *an internal structural form of necessity which is characteristic of an intuitive acceptance.*

4. Des tâches de découverte de la structure déductive

4.1. Hypothèses de recherche

Comment faire découvrir à l'élève ce que, dans Duval et Egret (1989), on appelle *la structure profonde* de la démonstration ? Nous avons adopté, dès la première analyse, certaines des orientations de recherche proposées par Duval (1991, 2001 ; Duval & Egret, 1989), pour les raisons qu'il a données, et que nous ne reprendrons pas ici :

- dissocier les tâches heuristiques et les tâches d'organisation déductive ;
- faire interagir une représentation non discursive, par graphes orientés (ou schémas sagittaux) avec un traitement rédactionnel de la preuve.

Nous avons choisi de prendre quelques distances vis-à-vis de ces mêmes orientations en ce qui a trait à la construction du graphe par l'élève (Duval, 2001, p. 201). Nos hypothèses sont les suivantes.

- a) L'apprentissage de la démonstration est un processus de longue haleine, qui doit commencer tôt. Sans en faire un objet d'enseignement magistral, sans même nécessairement les énoncer explicitement, il faut chercher à faire comprendre aux élèves aussitôt que possible les « règles du jeu ».
- b) L'élève est pris dans des cercles vicieux qu'il faut briser. Celui du rapport de l'intuition à la démonstration (cf. § 3.3). Celui de la prise de conscience de la valeur épistémique théorique et du statut opératoire variable des propositions : comment la faire naître si l'élève n'arrive pas à se décentrer des contenus et valeurs de vérité ? Celui de l'appréhension de la structure hiérarchisée, globalement et localement, de la démonstration : comment la saisir tant qu'elle n'est perçue que comme un cumul d'arguments symétriquement inter-reliés ? Quels choix peut faire l'élève, dans sa construction d'un graphe propositionnel, s'il n'a pas encore compris comment doit en être la structure ?

Nous faisons le pari qu'on peut, dans un premier temps, faire travailler les élèves (nous verrons plus loin comment) sur des graphes déjà construits, avec des propositions et des justifications (règles d'inférence) déjà énoncées ; quitte à déléguer de plus en plus d'éléments de la tâche (le choix des règles, la construction du graphe...) à mesure que progresse l'apprentissage. Il y a en outre ici l'idée, vieille comme la science et la pédagogie, de chercher à *isoler les difficultés*.

- c) Nous en avons discuté au point 2, § 2.3, les démonstrations à schématiser devront enchaîner plus d'une inférence. Nous faisons de plus l'hypothèse que les mécanismes logiques de la démonstration ont plus de chance d'être intégrés

si à la structure par enchaînement d'inférence répond, à un niveau supérieur, une structure analogue par enchaînement et « recyclage » des théorèmes.

- d) Nous faisons pour finir l'hypothèse que le travail *en équipes* — assorti des inévitables échanges argumentatifs — sur l'organisation des propositions dans les graphes favorisera cette *adhésion intuitive* aux mécanismes logiques de la démonstration (cf. § 3.3), dans la mesure où ceux-ci émergeront tant soit peu des délibérations entre coéquipiers.

4.2. Conception des tâches

Pour aller dans le sens de la tradition scolaire et des programmes, nous avons opté pour un travail de la démonstration en *géométrie plane*. Nous avons décidé, pour les raisons exposées au point a) ci-dessus, de concevoir et soumettre une première (courte) séquence de tâches à des élèves de Secondaire 1 (12-13 ans).

Le modèle de la tâche a ensuite été arrêté : elle consiste à organiser une « preuve » dont on a d'abord trouvé les grandes lignes lors d'une discussion de classe dirigée par l'enseignant, pendant laquelle est introduite la figure d'accompagnement. Par équipes de trois ou quatre élèves, ceux-ci doivent ensuite placer des énoncés (écrits sur petits cartons rectangulaires, donnés pêle-mêle) dans les cases vides d'un schéma sagittal, où seul l'énoncé-cible est déjà inscrit et numéroté, dans la dernière case. De façon à bien marquer, à la fois le statut particulier des justifications (les règles d'inférence) et la structure ternaire de l'inférence, celles-ci sont énoncées et numérotées sur une feuille à part. Les élèves disposent de pastilles numérotées, trois ou quatre pastilles de chaque numéro. Les numéros correspondant aux règles doivent être placés dans les bulles attachées aux flèches-inférences : voir annexes 4, 5 et 6.

Les règles sont choisies pour leur évidence, leur universalité, leur caractère de non-démontrabilité, mais l'on ne cherche ni à axiomatiser l'ensemble du corpus géométrique du niveau en cause, ni à réduire le nombre de règles au minimum, ni à faire une construction formelle stricte¹¹, à la Hilbert. Une conséquence parmi d'autres : certains éléments de preuve — le fait par exemple que deux angles soient adjacents — ne seront pas justifiés et seront implicitement admis sur une base perceptive. Après le travail sur le graphe, les élèves doivent individuellement rédiger un message (« dans leurs propres mots ») pour convaincre l'élève Thomas (« qui ne croit jamais ce que ses professeurs lui disent ») de la vérité (« hors de tout doute raisonnable ») de l'énoncé-cible.

¹¹ On pourrait donc parler d'une *axiomatique de contenu* (Duval, 1995, pp. 277-301) qui ne serait que locale.

Comme résultat-cible d'une première série de tâches, notre choix s'est porté sur le théorème de la somme des mesures des angles intérieurs du triangle :

- d'abord bien sûr parce que le résultat est au programme du niveau concerné ;
- ensuite parce qu'il ne relève pas de l'évidence perceptive, et est même pris en défaut lorsque soumis à la vérification empirique d'une classe de jeunes qui mesurent des angles au rapporteur¹² ;
- finalement parce que plusieurs preuves « quasi-formelles » du résultat sont à la portée de l'élève.

Nous avons cherché, dans un premier temps, à tenir compte de la recommandation du Ministère de l'Éducation du Québec, pour qui « ... c'est notamment par la géométrie des transformations que l'élève se créera un réseau de relations lui permettant de faire des déductions pour se convaincre de la véracité d'une affirmation » (MEQ, 1993, p. 35). Nous avons donc conçu une preuve dont la construction figurale préalable consiste à tracer les images du triangle $\triangle ABC$ par les deux translations de vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. On y fait appel à des règles d'inférence comme :

- une translation applique sur elle-même toute droite qui est dans la direction de la translation ;
- une translation applique sur une droite qui lui est parallèle toute droite qui n'est pas dans la direction de la translation ;
- une translation applique un angle sur un angle de même mesure ;

règles dont le caractère d'évidence est discutable. La complexité du schéma déductif résultant a achevé de nous convaincre que cette preuve ne devait pas être retenue.

La seconde preuve envisagée consiste en une adaptation du raisonnement exposé dans Hanna et Jahnke (1993, p. 436) :

- 1) on montre que la somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle rectangle est de 180° ;
- 2) on généralise en appliquant 1) aux deux triangles rectangles obtenus en traçant, dans un triangle quelconque, une des hauteurs dont le pied est sur un des côtés.

¹² Les enseignants collaborateurs ont eu la consigne de mener une activité de validation empirique du résultat par mesurage, avant l'activité de démonstration.

L'organisation en deux modules nous est apparue intéressante, parce que l'utilisation du résultat 1) comme règle d'inférence dans 2) rend explicite cette idée du « recyclage ». Pour établir le résultat 1) en restant dans l'esprit du programme du MEQ, on peut par exemple appliquer au triangle rectangle une rotation de 180° autour du milieu de l'hypoténuse, et montrer que le quadrilatère ainsi formé est un rectangle. Mais l'enchaînement déductif résultant a été jugé trop compliqué par les enseignants-collaborateurs compte tenu du niveau, et cette preuve n'a pas été retenue elle non plus.

Et pourquoi pas la preuve « classique », qui consiste à tracer la parallèle à AB qui passe par C (A, B, C les sommets du triangle), et à invoquer la congruence des angles alternes-internes ainsi formés ? Il se trouve que le programme du MEQ ne prévoit l'étude des angles correspondants, alternes-internes et alternes-externes qu'en 4^e secondaire. Nous avons alors pris la décision d'incorporer la démonstration de la congruence des alternes-internes à l'activité. Après concertation avec les enseignants collaborateurs, ceux-ci ont accepté d'insérer dans leur planification trois tâches d'une période¹³ chacune :

1. Une première tâche de reconstitution d'un schéma déductif, pour la preuve que *les angles opposés par le sommet ont même mesure*. Nécessaire à la preuve 2, le résultat est intuitivement évident. L'idée générale de la preuve, bien que simple, fait quand même l'objet d'une discussion préliminaire entre la classe et l'enseignant. Et le travail sur le schéma, pas si facile, permet aux élèves de s'initier aux « règles du jeu » et de s'appropriier les énoncés qui vont servir de justifications : voir Annexe 4.
2. Une deuxième tâche de reconstitution d'un schéma déductif, pour la preuve que *les angles alternes-internes, déterminés par deux parallèles coupées par une sécante, ont même mesure*. Il faut consacrer une demi-heure de la période à définir *angles correspondants*, *angles alternes-internes*, à expliquer pourquoi la congruence des angles correspondants sera tenue pour acquise (« on ne peut pas tout démontrer ! »), en revenant sur la « philosophie » de la démarche déductive. La constitution du deuxième schéma n'est pas précédée d'une recherche commune des grandes lignes de la preuve et de fait, les élèves n'auront aucune difficulté à l'organiser. Voir Annexe 5.
3. La reconstitution du schéma déductif, pour la preuve que *la somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle est de 180°* . Les deux résultats précédents, maintenant démontrés, se sont ajoutés à la liste des règles d'inférence. L'idée de la preuve fait l'objet d'une discussion

¹³ Une période au secondaire dure de 55 à 75 minutes. Il s'agissait ici de périodes de 75 minutes.

préliminaire. La construction figurale préalable est donnée en même temps que l'amorce du message pour l'élève Thomas (voir Annexe 7). La reconstitution du schéma est plus difficile mais les élèves sauront déjà mieux en quoi consiste la tâche et s'y engageront plus rapidement. Voir Annexe 6.

Réajusté puis approuvé par les enseignants-collaborateurs, le choix des règles d'inférence est d'abord décidé en ajustant deux variables dont les effets opposés sont :

- obtenir des démonstrations où même les pas en apparence anodins seront rendus explicites ;
- obtenir des schémas de complexité raisonnable.

Ce choix est pour l'instant imposé *ex cathedra* aux élèves, mais on peut penser que si des activités analogues étaient planifiées sur une base régulière, à plus long terme, il pourrait faire l'objet d'un travail de toute la classe.

4.3. Premières expérimentations

L'activité est constituée des trois tâches décrites ci-dessus. Elle a été menée auprès de trois classes de Secondaire 1 (12-13 ans) à Montréal, aux mois de mars, avril et mai 2004. Les élèves n'avaient jusqu'alors été introduits à la preuve en mathématiques que sous la forme des justifications et explications informelles usuellement données au primaire.

La première tâche était précédée d'une introduction, où l'on expliquait aux élèves qu'ils auraient à reconstituer une « vraie preuve mathématique », faite d'une série de déductions, « comme dans une enquête de Sherlock Holmes ou de Colombo ». Un exemple de *déduction* était représenté au tableau sous forme schématique (avec la « bulle » de justification), puis discuté.

On trouvera la liste des justifications, distribuée à chaque fois sur une feuille volante, à l'Annexe 2. Pour la première tâche, seules les quatre premières règles apparaissaient dans la liste. La première règle, plus obscure, était expliquée à partir d'un exemple, en introduction, avec un rappel de ce que sont des angles adjacents. Il faut mentionner que les élèves du Québec ne commencent l'algèbre qu'en secondaire 2 (13-14 ans) ; d'où le libellé et les notations un peu embarrassés dans les justifications 3, 4 et 9. Les figures d'accompagnement, reproduites et laissées au tableau à chaque fois, sont données à l'Annexe 3.

Les séances, neuf en tout, ont été filmées par un assistant de recherche. Compte tenu de la piètre qualité du son de la toute première séance (bruit ambiant trop important), nous n'avons gardé de cette classe que trois ou quatre équipes, volontaires pour accomplir les tâches 2 et 3 pendant deux périodes libres, sur

l'heure du midi. Pour les deux autres classes, nous avons plutôt décidé de suivre une seule équipe à la caméra-vidéo, branchée à un micro de table qui ne capte que les sons du voisinage immédiat. Les discussions d'une autre équipe ont été enregistrées avec magnétophone et micro de table. Cela a permis aux huit équipes de chacune de ces deux classes de faire l'activité, pendant les heures de cours. Le chercheur a pris des notes et l'enseignant collaborateur, qui assistait à chaque fois, a été invité à faire de même. Les grands cartons ont été photographiés à intervalles (plus ou moins) réguliers. Il faut ajouter à cela les preuves « pour convaincre Thomas », rédigées par les élèves. L'analyse de cet ensemble de données, sa confrontation avec l'analyse a priori et les conclusions à en tirer feront l'objet d'autres articles. Nous nous contenterons ici de rendre compte de ce qui a le plus frappé les membres de l'équipe de recherche, incluant les trois enseignants.

4.4. Premières observations

4.4.1. La réussite

Pour la première tâche, vingt-deux équipes sur vingt-quatre ont réussi une reconstitution du schéma, dans quelques cas à une règle d'inférence fautive près (à chaque fois, la règle 4 invoquée à la place de la règle 3 : voir point 3, § 4.4.2). Le temps de réussite a varié entre 30 et 55 minutes (l'introduction demande de 15 à 20 minutes). Une équipe a réussi le schéma à l'inversion de deux propositions près, avec donc une inférence qui n'en n'était pas vraiment une. Une équipe a tourné en rond pendant toute la période, sans jamais débloquer.

Le second schéma déductif a été réussi par toutes les équipes en 5 à 15 minutes. Avec les explications préalables sur les angles alternes-internes et la rédaction du message pour Thomas, les élèves ont été occupés pour tout juste une heure. Par ailleurs, la facilité avec laquelle ils se sont acquittés de la tâche les a certainement confortés dans leur capacité à réussir la troisième tâche.

Dans des temps variant entre 30 et 65 minutes, les dix-neuf équipes (trois sur l'heure du midi et seize en cours) ont réussi la reconstitution du troisième schéma, mais avec de l'aide à divers degrés. D'abord, le numéro 9 est systématiquement placé dans la dernière bulle par l'animateur après une vingtaine de minutes (le numéro y était déjà pour deux des équipes). Dans deux des classes, on a dû revenir pour expliquer, exemple à l'appui, la règle 9 (des élèves ne comprenaient pas le mot *substitution*). Avec quatre à cinq équipes qui disaient n'arriver à rien, le chercheur ou l'enseignant ont repris l'idée générale de la preuve : « essayez de traduire cette idée avec les propositions que vous avez... ». En montrant ensuite certains éléments de la preuve correctement établis dans leur schéma (« cette partie

là est correcte, comment intervient-elle dans l'idée générale ? Essayez de raccorder ça aux deux dernières propositions¹⁴ »), ces équipes ont fini par débloquer.

4.4.2. Autres éléments à relever

Dès la deuxième tâche, les élèves se mettaient rapidement au travail, sachant très bien ce qu'ils avaient à faire. Ils semblent avoir apprécié les tâches, mais difficile de dire quelle part attribuer au fait que l'activité les changeait de leur routine.

- *Contrôle possible par les élèves.* Ceux-ci semblent en effet en mesure de valider par eux-mêmes leur schéma. L'erreur la plus fréquente, celle du « raccourci déductif », qui consiste à faire une seule déduction avec ce qui aurait dû en être deux ou trois,

Exemple, première tâche : de ce que $\angle MOQ$ et $\angle QON$ sont adjacents, par la règle 1, les élèves déduisent que

$$m\angle MOQ + m\angle QON = 180^\circ$$

finit pratiquement toujours par être corrigée, parce que les élèves restent alors pris avec des énoncés qu'ils ne savent plus où placer, et reconsidèrent l'organisation des propositions. Ce qui ne veut pas dire qu'ils ont à chaque fois identifié précisément ce qui n'allait pas avant : nous y reviendrons. S'il leur arrive de demander au chercheur ou à l'enseignant de vérifier un schéma fautif, leur manque de conviction est très net à chaque fois ; par exemple, dans un des enregistrements : « On pense qu'on a fini mais on pense que ça ne marche pas ». Nos interventions ont alors consisté à montrer du doigt deux « déductions », une bonne, une mauvaise, en demandant pour chacune : « Expliquez-moi cette déduction-là dans vos mots », ou « essayez de m'expliquer comment fonctionne cette déduction ». La conclusion qu'une déduction n'en est pas vraiment une fait alors rapidement consensus dans le groupe. À l'inverse, les élèves savent quand le schéma est réussi (au bon choix d'une justification près), et leur conviction que tel est le cas se manifeste alors clairement.

- *Les stratégies.* Aucune équipe ne semble avoir adopté une stratégie systématique. Quelques équipes, les plus efficaces, ont cherché à travailler davantage « à reculons », mais pas systématiquement. Les schémas se construisent par zones, par morceaux qu'on cherche ensuite à connecter entre eux. Le travail local se fait selon des considérations géométriques, logiques, symboliques (« On met tous les MOQ et les POM de ce côté-là, et les autres là »), des recherches de symétrie, en un mélange difficile à dissocier. Les équipes les plus inefficaces sont celles qui ne prennent en

¹⁴ Les élèves ont tout de suite compris où devait aller l'avant dernière proposition qui est l'instanciation, dans le contexte de la figure d'accompagnement, de la proposition-cible.

compte les justifications qu'après coup. Une des enseignantes a dû intervenir auprès de deux équipes qui ignoraient complètement les justifications, et n'arrivaient à rien. Il apparaît clairement que la traduction de la preuve en un enchaînement de déductions ne se fait que très laborieusement, de façon non systématique et mal contrôlée ; et que *même quand la preuve est bien saisie dans ses grandes lignes, l'utilisation de ce canevas comme guide pour l'organisation déductive ne va absolument pas de soi*. Un élève qui, de façon convaincante, a su synthétiser la 3^e preuve devant ses coéquipiers, s'exclamera : « Mais je ne sais pas comment l'expliquer avec ce tableau là ». Et l'autre de renchérir : « On comprend mais pas avec le tableau ». La traduction inverse, du schéma à la preuve écrite « pour Thomas », ne va pas de soi elle non plus : voir le cinquième point ci-dessous.

- *Algèbre*. Certains élèves ont du mal à identifier la règle 3 (transitivité de l'égalité) quand un des termes de l'égalité est une somme : cf. les déductions à deux prémisses dans l'Annexe 4. Ils n'arrivent pas à envisager la somme comme *un seul* nombre, et invoquent alors la règle 4 simplement parce qu'elle fait apparaître une somme. Cela nous fait dire que l'activité serait probablement mieux adaptée aux 2^e ou 3^e secondaires (13-15 ans), après l'introduction à l'algèbre. Son insertion en Secondaire 2 serait compatible avec l'échéancier des contenus géométriques du *nouveau* programme, dont l'implantation au Québec débute en septembre 2004.
- *Graphes orientés*. Les élèves ont pris conscience de la structure fondamentalement orientée du graphe propositionnel, surtout par l'entremise des déductions où intervient la règle 2. Spontanément, ils ont majoritairement fait de $m\angle MON = 180^\circ$ une prémisse pour inférer, par la règle 2, que l'angle MON est plat. Il s'agit probablement d'un effet de l'enseignement des angles qui fait de la mesure l'objet premier : on mesure d'abord des angles au rapporteur et on classe ensuite selon les mesures obtenues (« un angle droit est un angle qui mesure 90° , un angle aigu est un angle qui mesure moins de 90° », etc.). Mais devant l'impossibilité de raccorder l'énoncé *$\angle MON$ est un angle plat* à quoi que ce soit, ils prennent conscience de l'équivalence des deux énoncés (« qu'un angle plat égale 180 et qu'un angle de 180 soit plat, c'est la même chose », dira l'un d'eux à sa coéquipière), et de la nécessité de les placer dans le bon ordre pour avancer dans le schéma.
- *Preuves écrites*. Les messages pour Thomas rédigés par les élèves ne sont pas concluants du point de vue de la recherche. Ceux de la deuxième tâche, en général bien rédigés, portent sur une démonstration trop facile pour donner des informations significatives. Par manque de temps, les messages pour les première et dernière tâches ont été laissés à faire à la maison. Parmi

ceux, peu nombreux, que nous avons pu récupérer par la suite, certains avaient visiblement fait l'objet d'une révision parentale. Dans un des groupes plus rapide, la consigne pour la troisième tâche ayant donné lieu à un malentendu entre le chercheur et l'enseignante, les élèves ont rédigé un message par équipe, et ont pu remettre le message pour Thomas à la fin de la période. Deux équipes ont cependant débordé de cinq à dix minutes, pour figoler.

Sur les huit messages ainsi obtenus, trois messages cherchent à suivre le schéma en reprenant les énoncés, mais montrent à divers degrés une maîtrise imparfaite de l'organisation déductive. Le premier message reproduit à l'Annexe 7 est l'un d'eux. Un message, le second de l'Annexe 7, suit de près le schéma en montrant cette fois une bonne maîtrise de l'organisation déductive, à une confusion dans l'identification de deux sécantes près (vraisemblablement une étourderie). Chez les quatre autres des huit équipes, on a cherché à se réapproprier la démonstration. Les textes produits présentent à chaque fois une version simplifiée du raisonnement, mais montrent par ailleurs une assez bonne maîtrise de celui-ci. Le troisième texte de l'Annexe 7 reproduit la plus condensée d'entre ces « preuves ». La quatrième production de l'Annexe 7 est celle où l'effort de réappropriation est le plus marqué.

5. Conclusion

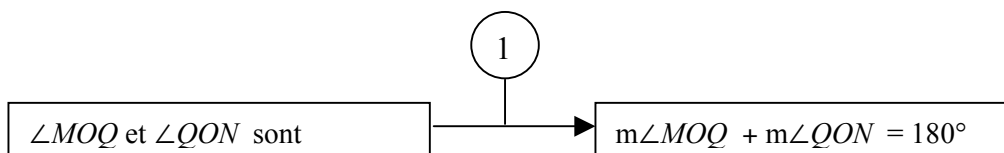
5.1. Retour sur les hypothèses

À travers ces activités, qu'ont compris les élèves des règles du jeu de la démonstration géométrique ? Ont-ils saisi : ce qu'est une inférence ? l'unicité et nécessité de la proposition inférée quand les prémisses satisfont aux conditions d'application de la règle ? la nature calculatoire, automatique¹⁵ de la structure en arbre selon laquelle s'organisent les enchaînements ?

Le point décisif dans un apprentissage de la démonstration est la découverte d'un pas de raisonnement valide dont la validité puisse être éprouvée par l'élève lui-même sans aucun recours à un contrôle externe (accord d'un interlocuteur, consensus d'une communauté, conformité à un schéma logique...) (Duval, 1995, p. 312).

Dans la mesure où la reconstruction du graphe ne s'est pas faite uniquement selon des critères logiques et géométriques, où l'adéquation entre l'organisation déductive et ce que les élèves comprennent du raisonnement reste difficile, où des élèves n'arrivent à se décentrer de l'évidence géométrique $m\angle MON = 180^\circ$, pour corriger l'inférence fautive

¹⁵ Au sens par exemple où le serait un programme informatique.



qu'avec le secours externe de la conformité au schéma (voir l'exemple, § 4.4.2), on peut se demander ce qui restera de l'activité aux élèves, du point de vue de leur apprentissage de la démonstration. Duval (2001, p. 201) insiste sur la nécessité de faire construire le graphe par l'élève, pour que celui-ci découvre par lui-même comment l'organisation du graphe se fait et se contrôle en prenant en compte le statut opératoire des propositions. Nous affirmons pour notre part que le travail sur un graphe déjà construit peut contribuer à jeter les bases de l'apprentissage escompté. Devant ses coéquipiers qui permutaient sans cesse les énoncés « AB et PQ sont parallèles », « AC est une sécante pour les droites AB et PQ » et « $m\angle ABC = m\angle BCQ$ » dans trois des cases du troisième schéma, une élève défendra la solution valable en s'exclamant :

NON ! C'est à cause d'une sécante qui traverse une parallèle ! C'est à cause qu'il y a deux parallèles coupées par une sécante qu'ils sont alternes-internes et c'est à cause qu'ils sont alternes-internes qu'ils sont égaux !

Dans au moins une autre équipe, nous avons pu prendre acte de la découverte par des élèves de ce qui fait un pas de raisonnement valide. Un étudiant à la maîtrise, laissant momentanément la caméra, explique aux membres d'une équipe qui ne s'entendent pas que chaque déduction doit en principe pouvoir être analysée et validée indépendamment des autres. Il a pu assister par la suite à un déblocage rapide et significatif du travail de l'équipe. Les autres points relevés en section 4.4, sans être absolument concluants eu égard aux hypothèses émises en 4.1 a) et b), montrent tout de même que le type d'activités proposé permet effectivement d'isoler les difficultés et de concentrer l'attention des élèves sur certains des mécanismes fins de l'organisation déductive.

En outre, le travail sur des schémas déjà construits permet aux élèves d'accéder plus tôt à des enchaînements deductifs plus complexes. À cet égard, la deuxième tâche s'est avérée nettement trop facile. Elle met en oeuvre ce qui en théorie est plus qu'une simple *déduction locale* (cf. Tanguay, 2002, § 3.3). Mais la dernière inférence, où intervient la transitivité de l'égalité, est trop immédiate pour que soient provoquées les difficultés d'un véritable enchaînement. Si la deuxième tâche a rassuré les élèves quant à leur capacité à réussir la troisième, elle n'a cependant produit aucune donnée significative du point de vue de la recherche — par exemple, des messages pour Thomas tous à peu près uniformes — sinon que de confirmer la validité de l'hypothèse avancée en 4.1 c).

Le travail en équipes a-t-il favorisé ou défavorisé une adhésion intuitive aux mécanismes logiques de la démonstration ? Les élèves sauront-ils adapter le mode de travail non linéaire qui a été le leur pendant l'activité, à un travail individuel plus standard de recherche et de rédaction d'une preuve ? Il est trop tôt à notre avis pour statuer sur ces questions, et par ailleurs peu probable que l'analyse plus fine des données permette de répondre de façon décisive.

5.2. Extensions anticipées

Pour être mieux fixé, de même que pour mieux étayer les affirmations à travers lesquelles nous avons cherché à confirmer les hypothèses a) et b) émises en §4.1, il faudra expérimenter à plus long terme, avec des activités réparties sur plus d'une année, déléguant de plus en plus d'éléments de la tâche comme l'énonciation des propositions, le choix des règles ou la construction du graphe. Il faudra pouvoir établir des points de comparaison avec un enseignement plus traditionnel, faire des entrevues individuelles, avoir un meilleur contrôle des phases d'institutionnalisation des activités¹⁶, etc. Nous ne sommes surtout pas en train d'affirmer que tout travail de démonstration en géométrie devrait faire l'objet de telles activités. Nous envisageons plutôt qu'elles soient intercalées, à intervalles réguliers, dans des séquences d'enseignement comme celles que proposent Gaud et Guichard (1984), Pluinage (1989) ou Arsac et al. (1992), en complémentarité avec des activités de découverte, de recherche de conjecture, de validation inductive, de construction, etc.

Ces expérimentations encore à venir permettront également d'explorer des questions plus pointues, comme celle qui touche à l'appréhension de la nature fondamentalement orientée de la structure locale en démonstration, question soulevée à la fin de la section 3.2 et liée aux incontournables problèmes qu'ont les élèves avec les implications et leur réciproque. Comme un relecteur l'a justement relevé, la difficulté de cette appréhension pourrait être due aux formes d'énonciation des règles d'inférence fournies aux élèves, cette énonciation adoptant très souvent de fait une forme non orientée. La règle « tout angle plat mesure 180° », par exemple, n'est certes pas optimalement formulée pour favoriser l'appréhension « si plat, alors 180° » (cf. § 4.4.2). Il faudra donc s'interroger sur la place que doit prendre, en démonstration, l'aptitude de l'élève à lire « dans le bon sens » un énoncé en langage naturel, que cet énoncé corresponde à une implication simple ou à une équivalence. Il faudra en parallèle s'interroger sur la pertinence,

¹⁶ Pratiquement absentes de la présente expérimentation à cause des contraintes de temps, les phases d'institutionnalisation constitueraient ces moments privilégiés où, sur la base du travail accompli dans les activités, l'on ferait le point en classe sur ces fondements de la démonstration dont il est ici question ; entre autres, la possibilité d'une validation isolée de chaque inférence, indépendamment de ses liens avec les autres.

pour l'enseignant de mathématiques, de chercher à proposer, systématiquement ou non, des énoncés de référence non ambigus.

5.3. Un premier bilan

Comme premier bilan, nous avançons que la présente expérimentation met en évidence la justesse de certains des diagnostics de Duval :

- le raisonnement déductif par enchaînement d'inférences n'est pas spontanément compris des élèves, ni dans sa structure locale, ni dans sa structure globale ;
- la nécessaire décentration par rapport aux contenus, à la valeur épistémique d'évidence ou à la valeur logique de vérité, ne va pas du tout de soi pour l'élève, et il s'agit pour lui de quelque chose de beaucoup plus complexe et profond que de répondre aux consignes « tu n'as pas le droit de te fier à la figure » ou « tu dois justifier chacune de tes affirmations » ;
- comme le relève également Dreyfus (1999), le passage de la compréhension de prime abord satisfaisante d'une preuve, des idées en cause, de leur articulation dans les grandes lignes, à la production écrite de cette preuve en un raisonnement logiquement bien contrôlé, constitue pour l'élève un saut fondamental, dont la difficulté tient à beaucoup plus qu'à sa *maladresse à rédiger*, et est intimement lié à sa maîtrise de la structure déductive.

Pour Duval (2001, p.197), ce saut n'est possible que si l'élève accède à une pratique écrite de l'écrit, à travers laquelle il produit le texte de démonstration non plus à des fins de communication, mais pour en contrôler et la validité, et l'absence de lacunes. Avant Duval, Balacheff (1987) avait parlé d'une adhésion de l'élève-étudiant à une position théorique, au centre de laquelle celui-ci met la connaissance plutôt que la nécessité de convaincre « l'autre », et où prévaut sa très personnelle et simple *satisfaction intellectuelle*.

On objectera que la majorité des élèves n'a pas besoin d'accéder à une telle position théorique, et que la rationalité « ... fondée sur le dialogue et orientée vers la régulation des interactions sociales » (Duval, 2001, p. 204), qui s'exprime entre autres à travers l'argumentation, est suffisante à la formation d'un citoyen éclairé. Ce serait à notre avis refuser au citoyen ce plus sophistiqué parmi les outils de contrôle de la rationalité, qui n'est pas autre chose que *la rigueur* et dont nous sommes convaincus qu'il devrait être au cœur même de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

5.4. Remerciements

L'auteur tient à remercier Nathalie Krikorian, Valériane Passaro et Louis Trottier pour avoir rendu l'expérimentation possible, ainsi que les deux relecteurs pour la finesse et la pertinence de leurs suggestions.

Annexe 1

Analyse d'une preuve extraite de Breton (1997, p. 28), manuel de 4^e secondaire (15-16 ans). Pour simplifier l'exposé, nous avons rempli les boîtes (vides dans le texte destiné à l'élève, qui doit compléter), avec ce que propose le *Guide d'enseignement* de la collection comme « solution ». Notre analyse commence immédiatement après.

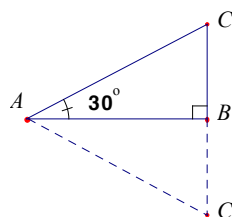
Énoncé : Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.

Hypothèses : $m \angle ABC = \boxed{\dots 90^\circ}$;

$m \angle BAC = \boxed{\dots 30^\circ}$.

Conclusion : $m \overline{CB} =$

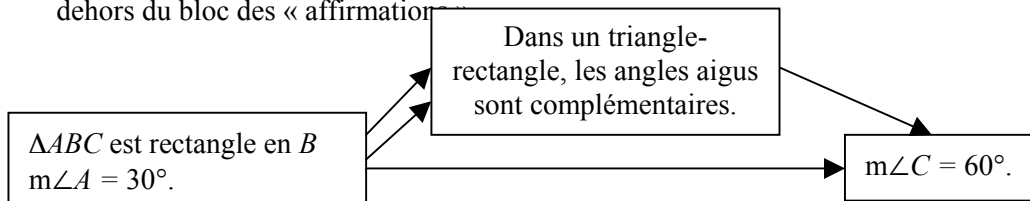
$\boxed{\dots \frac{1}{2} m \overline{AC}}$.



AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
1° On a $m \angle C = 60^\circ$.	1° Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont $\boxed{\dots \text{complémentaires.}}$
2° Traçons l'image du $\triangle ABC$ par une réflexion d'axe AB .	2° Afin d'obtenir $\triangle AC'B$.
3° L'angle C et l'angle C' mesurent 60° chacun. De plus $\angle CAB$ et $\angle BAC'$ mesurent 30° chacun.	3° Car les réflexions... $\boxed{\dots \text{conservent les mesures des angles.}}$
4° Le $\triangle ACC'$ est équiangle.	4° $\boxed{\dots \text{car tous les angles mesurent } 60^\circ.}$
5° Les côtés du $\triangle ACC'$ sont congrus et $m \overline{AC} = m \overline{CC'}$.	5° Tout triangle équiangle est aussi $\boxed{\dots \text{équilatéral.}}$
6° Mais $m \overline{CC'} = 2 \times m \overline{CB}$.	6° Car les réflexions... $\boxed{\dots \text{conservent les mesures des segments.}}$
7° Donc $m \overline{AC} = 2 \times m \overline{CB}$ ou $m \overline{CB} = \frac{1}{2} \times m \overline{AC}$.	7° Par substitution et en appliquant la règle de transformation de l'égalité par division.

L'examen de cette preuve nous amène à faire les constatations suivantes.

- a) L'identification des prémisses et des propositions inférées reste partout implicite. C'est le cas des prémisses de la première inférence, dont il n'est pas dit que l'élève les identifiera, énoncées qu'elles sont comme « hypothèses », en dehors du bloc des « affirmations ».



L'affirmation 3 regroupe en fait deux inférences de même règle (l'image d'un angle par symétrie axiale¹⁷ est un angle de même mesure), et mêle en les mettant sur le même pied prémisses ($m\angle C = 60^\circ$, $m\angle CAB = 30^\circ$) et propositions inférées ($m\angle C' = 60^\circ$, $m\angle BAC' = 30^\circ$). L'affirmation 4 est inférée de 3, et prémisses pour inférer 5. L'affirmation 5 regroupe la proposition inférée de 4 (les côtés de $\triangle ACC'$ sont congrus) et son instantiation $m\overline{AC} = m\overline{CC'}$ qui servira, avec l'affirmation 6, de prémisses pour inférer 7.

- b) Les affirmations et justifications 2 devraient avoir un statut à part : elles ne relèvent pas du raisonnement déductif à proprement parler, mais plutôt de la construction figurale préalable.
- c) Les justifications viennent *après* la proposition inférée, et ne sont pas toujours énoncées comme des « règles » (par ex., la justification 4). Elles n'apparaissent donc pas explicitement comme *règle permettant de passer des prémisses à la proposition inférée*. La justification 5 est en fait la concaténation d'une double application de la règle *isocèle si et seulement si isoangle*, qui est celle ayant statut théorique de *théorème* dans le manuel.
- d) Des inférences sont totalement escamotées, probablement parce qu'elles constituent des « évidences perceptives » que le rédacteur de la preuve n'a pas cru bon justifier. C'est le cas par exemple du fait que l'image par symétrie, d'un angle est un angle, d'un segment est un segment, d'un triangle est un triangle. Ou encore, du fait que $m\angle CAC' = 60^\circ$, nécessaire à l'affirmation 4 et qui découle, par additivité de la mesure des angles, de ce que $\angle CAB$ et $\angle BAC'$ sont adjacents. Plus grave à notre avis est cette omission : on tient pour acquis que C , B et C' sont alignés ce qui de fait ne va pas de soi : voir § 3.2.

Il faut bien comprendre qu'il ne s'agit pas ici de faire le procès du libellé de cette preuve, typique d'un format « en deux colonnes » relativement standard. Les sous-

¹⁷ On dit « réflexion » au Québec, y compris dans les documents officiels du Ministère de l'Éducation.

entendus, omissions, regroupements et autres raccourcis de rédaction sont inévitables en pareils cas, pour peu qu'on veuille éviter à l'élève un texte étourdissant, indigeste par ses redondances et sa surenchère de précisions. Il s'agit plutôt d'être conscient que la structure par enchaînements d'inférences peut rester totalement opaque à un élève moyen ou faible, qui percevra les affirmations et les justifications comme autant « d'arguments », égaux en poids, dont l'ordonnance sur papier n'est nécessitée que parce qu'il faut bien que les choses soient écrites les unes à la suite des autres. Ces arguments gravitent dans son esprit pour soutenir ces affirmations d'emblée tenues pour vraies, à savoir que $\Delta ACC'$ est équilatéral et que AB en est axe de symétrie. En particulier, les affirmations 3, 4 et 5 et les justifications 4 et 5 risquent d'être « aplaties », pour n'être inter-reliées que par des relations sémantiques symétriques d'interchangeabilité et ainsi avoir, pour un tel élève, toutes exactement le même statut ; ou alors des statuts théoriques mal dissociés des valeurs épistémiques sémantiques, et d'autant plus flous que la preuve ne discrimine pas clairement ce qu'on est autorisé à « voir » sur la figure de ce qu'on doit justifier.

Annexe 2. Liste des justifications (ou règles d'inférence) ...

... pour les tâches décrites à la section 4.2 (voir également annexes 4, 5 et 6). Pour la première tâche, seules les quatre premières règles étaient données.

- ① La mesure d'un angle résultant de la juxtaposition de deux ou plusieurs angles adjacents, égale la somme des mesures de ces angles.
- ② Tout angle plat mesure 180° .
- ③ Propriété de l'égalité : si $\blacksquare = \odot$ et $\odot = \ominus$, alors $\blacksquare = \ominus$.
- ④ Simplification dans une égalité : si $\odot + \blacksquare = \odot + \circ$, alors $\blacksquare = \circ$.
- ⑤ Les angles opposés par le sommet ont même mesure.
- ⑥ Les angles correspondants, déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante, ont même mesure.
- ⑦ Les angles alternes-internes, déterminés par deux parallèles coupées par une sécante, ont même mesure.
- ⑧ Par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite.
- ⑨ Substitution : si deux quantités sont égales, on peut substituer l'une par l'autre dans n'importe quelle égalité.

Annexe 3. Les figures d'accompagnement

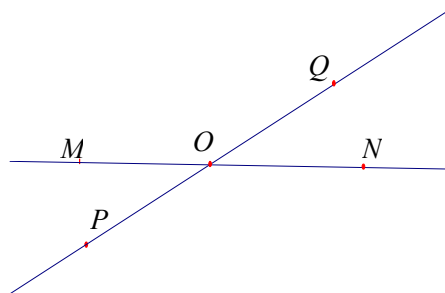


Figure d'accompagnement pour la première tâche

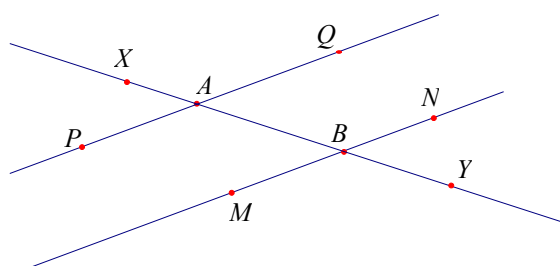


Figure d'accompagnement pour la deuxième tâche

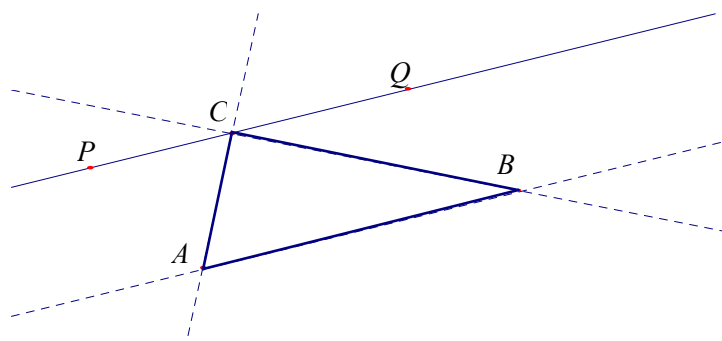
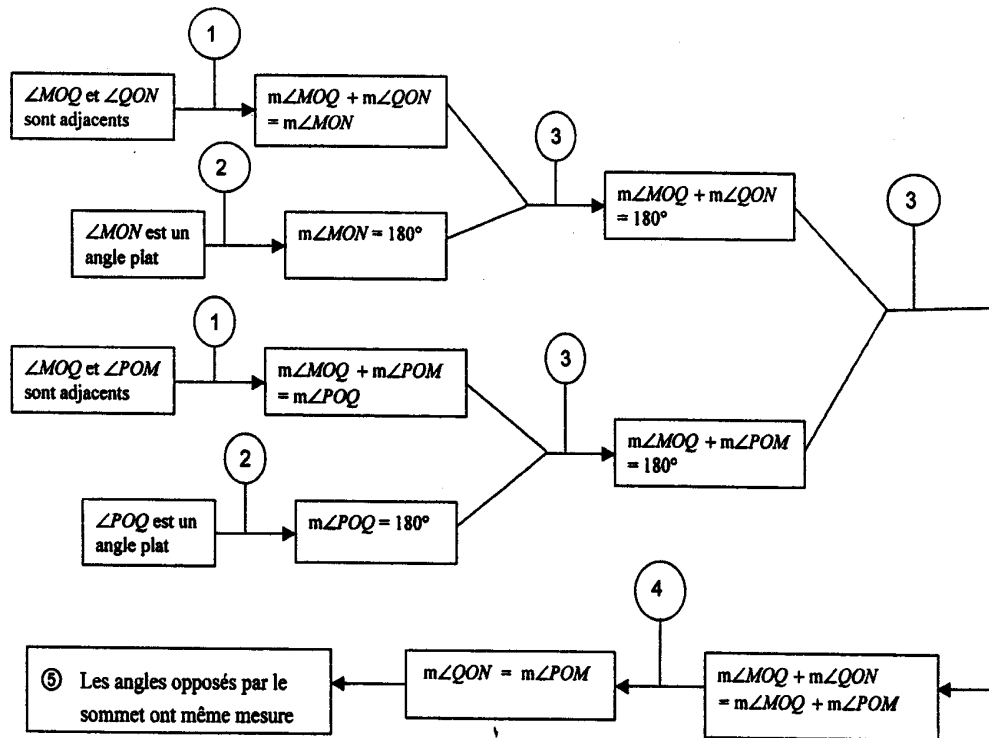
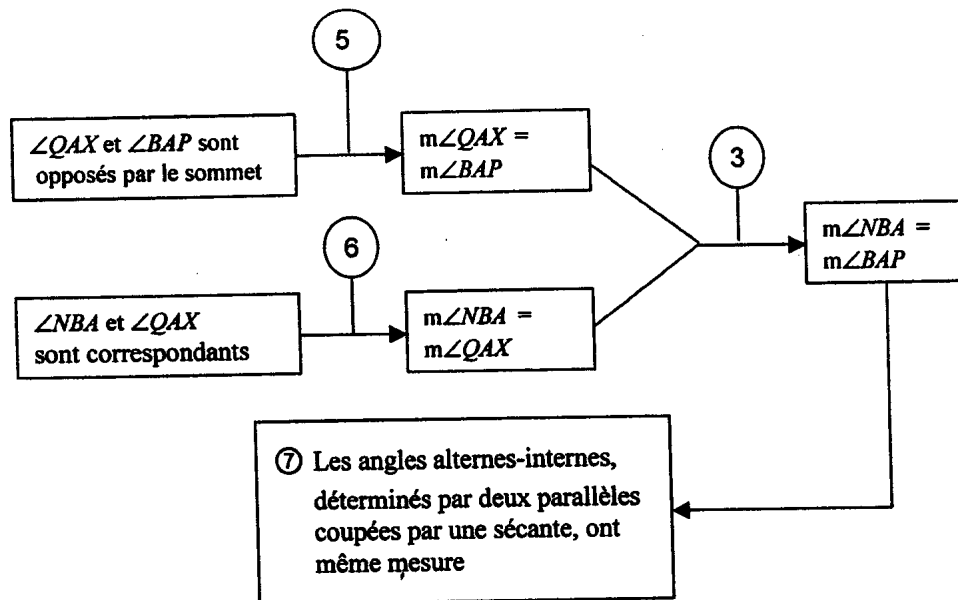


Figure d'accompagnement pour la troisième tâche

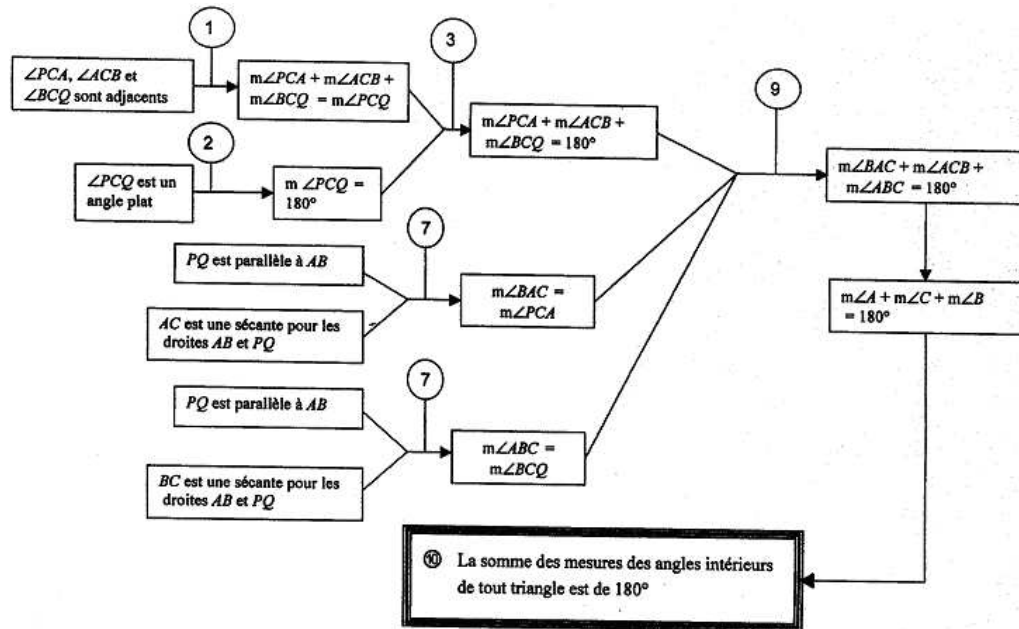
Annexe 4. Solution pour la première tâche



Annexe 5. Solution pour la deuxième tâche



Annexe 6. Solution pour la troisième tâche



Annexe 7

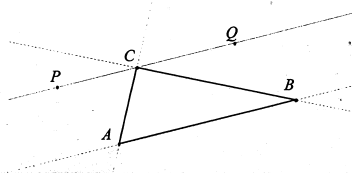
La preuve de la troisième tâche, telle que rédigée par quatre équipes de trois ou quatre élèves chacune. Les élèves ont eu la consigne de poursuivre le « message pour l'élève Thomas » dont le début, y compris la figure, était donné.

Message pour l'élève Thomas, de l'École des Sept Tiques
(Commission scolaire des Douteurs)

Cher Thomas, j'ai tracé un peu plus bas sur la feuille un triangle $\triangle ABC$ quelconque, et je vais te *prouver mathématiquement* que

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ.$$

J'ai prolongé les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ du triangle. Tu es d'accord avec moi que par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite. Je peux donc tracer l'unique parallèle à la droite AB qui passe par C . Sur cette parallèle, je place deux points P et Q de chaque côté de C (c'est pour faciliter l'identification des angles).



$\angle PAC$, $\angle ACB$ et $\angle BCQ$ sont adjacents.

$$m\angle PAC + m\angle ACB + m\angle BCQ = 180^\circ \quad (\text{la somme des mesures de deux ou plusieurs angles adjacents égale la mesure de l'angle obtenu par juxtaposition de ces angles})$$

$\angle PCQ$ est un $\angle$ plat

$$m\angle PCQ = 180^\circ \quad (\text{tout } \angle \text{ plat} = 180^\circ)$$

$$m\angle BAC + m\angle ACB + m\angle ABC = 180^\circ$$

$$m\angle PCA + m\angle ACB + m\angle BCQ = m\angle PCQ$$

$$m\angle A + m\angle C + m\angle B = 180^\circ$$

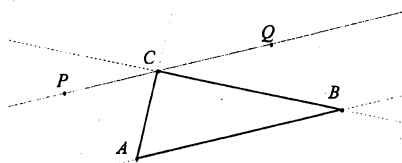
La somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle est de 180°

Message pour l'élève Thomas, de l'École des Sept Tiques
(Commission scolaire des Douteurs)

Cher Thomas, j'ai tracé un peu plus bas sur la feuille un triangle $\triangle ABC$ quelconque, et je vais te prouver mathématiquement que

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ.$$

J'ai prolongé les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ du triangle. Tu es d'accord avec moi que par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite. Je peux donc tracer l'unique parallèle à la droite AB qui passe par C . Sur cette parallèle, je place deux points P et Q de chaque côté de C (c'est pour faciliter l'identification des angles).



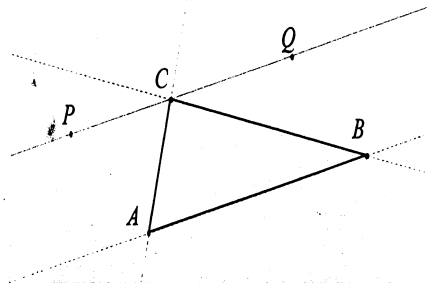
- L'angle $\angle PCA$, $\angle ACB$, $\angle BCQ$ sont adjacents la mesure de $\angle PCA + m\angle ACB + m\angle BCQ = m\angle PCQ$. $\angle PCQ$ est un angle plat et mesure 180° . Donc $\angle PCA + \angle ACB + \angle BCQ = 180^\circ$.
La droite PQ est parallèle à AB . AC est sécante pour les droites AB et PQ donc les angles alternes internes déterminés par 2 droites parallèles coupées par une sécante ont même mesure donc l'angle $\angle ABC$ et $\angle BCQ$ sont congrus.
La droite PQ est $\parallel$ à AB . BC est une sécante pour les droites AB et PQ étant donné que les angles alternes-internes, déterminés par deux $\parallel$ coupées par une sécante, ont même mesure donc l'angle $\angle BAC = \angle PCA$. On peut faire la substitution et arriver à $m\angle BAC + m\angle ACB + m\angle ABC = 180^\circ$.
Donc la mesure de $\angle A + m\angle C + m\angle B = 180^\circ$.

Message pour l'élève Thomas, de l'École des Sept Tiques
(Commission scolaire des Douteurs)

Cher Thomas, j'ai tracé un peu plus bas sur la feuille un triangle $\triangle ABC$ quelconque, et je vais te *prouver mathématiquement* que

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ.$$

J'ai prolongé les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ du triangle. Tu es d'accord avec moi que par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite. Je peux donc tracer l'unique parallèle à la droite AB qui passe par C . Sur cette parallèle, je place deux points P et Q de chaque côté de C (c'est pour faciliter l'identification des angles).



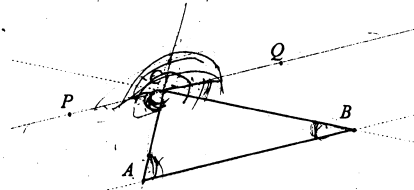
Si $m\angle PCA$ est alterne-interne avec $m\angle CAB$ alors on peut substituer $m\angle CAB$ à la place de $\angle PCA$ et si $\angle QCB$ est alterne-interne avec $m\angle CBA$ alors on peut substituer $m\angle CBA$ à la place de $\angle QCB$. Donc les $\angle PCA + \angle ACB + \angle QCB =$ la droite PQ qui mesure 180°

Message pour l'élève Thomas, de l'École des Sept Tiques
(Commission scolaire des Douteurs)

Cher Thomas, j'ai tracé un peu plus bas sur la feuille un triangle $\triangle ABC$ quelconque, et je vais te prouver mathématiquement que

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ.$$

J'ai prolongé les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ du triangle. Tu es d'accord avec moi que par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite. Je peux donc tracer l'unique parallèle à la droite AB qui passe par C . Sur cette parallèle, je place deux points P et Q de chaque côté de C (c'est pour faciliter l'identification des angles).



L'angle BCQ et l'angle CAB sont alternes-internes, donc égaux. Il en est de même pour les angles CAB et PCH .
Finalement, si on ajoute l'angle ACB aux angles BCQ et PCH , on obtient un angle plat donc 180° .
L'idée est relativement simple c'est comme si on déplaçait l'angle CAB et qu'on le mettait à la place de l'angle PCH et qu'on faisait la même chose pour l'angle ABC que l'on mettrait à la place de l'angle BCQ . On aurait alors tout les angles du triangle les uns à côté de l'autre et on verrait qu'à trois ils forment un angle plat donc 180° .

Bibliographie

- ARSAC G., CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN, G. GUICHARD, Y. & MANTE, M., 1992, Initiation au raisonnement déductif au collège. *Presses Universitaires de Lyon*.
- BALACHEFF N., 1987, Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, n°2, mai 87, 147-176.
- BRETON G., en coll. avec A. DESCHÊNES, A. LEDOUX et B. CÔTÉ , 1997, Réflexions mathématiques, Mathématiques 436, Vol. 2. *Les éditions CEC inc.* Montréal.
- BROUSSEAU G., 1998, Théorie des situations didactiques. Éditions *La pensée sauvage*, Grenoble.
- CHAZAN D., 1993, High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 24, 359-387.
- DREYFUS T., 1999, Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, n°38, 85-109.
- DUVAL R., 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational studies in Mathematics*, vol. 22, 233-261.
- DUVAL R., 1992-93, Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, n°31, 37-61.
- DUVAL R., 1995, Sémiosis et pensée humaine. Éditions *Peter Lang*, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.
- DUVAL R., 2001, Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In *Produire et lire des textes de démonstration*. Collectif coord. par É Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde. Ellipses. Paris.
- DUVAL R. & EGRET M. A., 1989, L'organisation déductive du discours. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. N°2, 25-40. IREM de Strasbourg.
- FISCHBEIN E., 1982, Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 3, n°2 (novembre), 9-19.
- FISCHBEIN E. & KEDEM I., 1982, Proof and Certitude in the Development of mathematical Thinking. In *Proceedings of the sixth International Conference for the Psychology of mathematical Education*, A. Vermandel (ed.), p. 128-131. Universitaire Instelling, Anvers (Pays-Bas).

- FURINGHETTI F. & PAOLA D., 1991, On some obstacle in understanding mathematical texts. In *Proceedings of the XVth PME Conference*, Vol. 2, p. 57-63. Assise, Italie.
- GAUD D. & GUICHARD J. P., 1989, Apprentissage de la démonstration. *Petit x*, n°4, 5-25.
- HANNA, G. & JAHNKE H. N., 1993, Proof and Application. *Educational Studies in Mathematics*, N° 24, 421-438.
- HAREL, G. & MARTIN, W. G., 1989, Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 20, n°1, 41-51.
- MEQ, 1993, Programme d'Études, Secondaire 1, Mathématique 116. *Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec*. Québec.
- PLUVINAGE F., 1989, Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. N°2, 5-24. IREM de Strasbourg.
- TANGUAY D., 2002, Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, Vol. 2, n°3, 371-396.
- TANGUAY D., 2003, Un enseignement de la preuve au collégial. *Actes du 45^e Congrès de l'Association Mathématique du Québec (AMQ)*, publiés sous la dir. d'André Ross, 82-103. Les éditions Le Griffon d'argile, Sainte-Foy, Québec.
- THOM R., 1974, Mathématiques modernes et mathématiques de toujours. In *Pourquoi la mathématique ?*, sous la dir. de R. Jaulin, 39-56. Éditions 10-18, Paris.
- VINNER S., 1983, The Notion of Proof: Some Aspects of Students' Views at the Senior High Level. *Proceedings of the VIIth International Conference for the PME*, 289-294. Rehovot, Israël: Weizmann Institute of Science.
- ZAZKIS R. & LEVY B.-S., 2001, Truth Value of Mathematical Statements : Can Fuzzy Logic Illustrate Students' Decision Making ? *Focus on Learning in Mathematics*, Vol. 23, n°4, 1-26.

DENIS TANGUAY
UQAM

Département de mathématiques, section didactique
tanguay@math.uqam.ca

ROBERT ADJIAGE

DIVERSITÉ ET INVARIANTS DES PROBLÈMES METTANT EN JEU DES RAPPORTS

Abstract. Concerning the problem solving by 9-to-13 year-old pupils, in the case of quantity ratio and proportionality, researchers have considered numerous variables. Strangely, one of them, the physical-empirical context often referred to, is little taken into account. The goals of this paper are to better define the values of this variable and validate its pertinence. I thus first made a classification of the involved problems, providing the values of the new variable. A questionnaire was then elaborated. It presents for solution six items, one representative of each of the six problem-types of the classification. The survey was conducted with two types of population: 12-to-13 year-old pupils, and primary school teacher-trainees as a reference population. The findings show that the variations (success rate and procedures used) are important from one item to the other in the pupil group, and slight in the teacher-trainee group. These variations are attributed to the physical context, as the other variables are constant in the questionnaire. This study, along with other previous researches, allows us to draw the complexity of ratio problems closer around two principles of separation / articulation between the physical and the mathematical worlds, and between the rational registers. Furthermore, it permits to consider that the diversity of those problems lies in the physical-empirical domain, while their unity can be located in the mathematical one.

Key words. Fraction, proportionality, physical context, quantity, ratio, semiotic register.

Résumé. Nombre de variables ont été étudiées par les chercheurs qui ont tenté d'expliquer la complexité des problèmes mettant en jeu des rapports au niveau des élèves de 9-13 ans. Mais curieusement, une variable est peu examinée : il s'agit du contexte physico-empirique auquel se réfère usuellement un énoncé du type considéré. Cet article définit les valeurs de cette variable et établit sa pertinence didactique. Une classification des énoncés de problème concernés est d'abord entreprise. On dégage ainsi six valeurs, soit six problèmes-types, pour cette nouvelle variable. A des fins de validation, un questionnaire en six items, chacun représentant un des six problèmes-types, a été soumis à deux types de population : 121 élèves de cinquième (12-13 ans) et 110 étudiants en première année d'IUFM comme population de référence. Les résultats montrent que les variations d'un item à l'autre, sur le plan de la réussite comme sur celui des procédures utilisées, sont beaucoup plus importantes dans le groupe des élèves que dans celui des étudiants. Comme les autres variables ont été bloquées lors de l'élaboration des six problèmes-types, nous attribuons ces variations aux changements du contexte physico-empirique. Cette étude permet de : resserrer l'analyse de la complexité des problèmes de rapports autour de deux principes de séparation et d'articulation des univers physique et mathématique ; situer la diversité de ces problèmes dans le champ physique et leur unification dans le champ mathématique.

Mots-clés. Fraction, proportionnalité, contexte physique, grandeur, rapport, collège, registre sémiotique.

1. Introduction

La présente étude s'insère dans un projet de recherche plus vaste mené depuis 6 ans sur les notions de nombre rationnel et de proportionnalité, leur enseignement et leur apprentissage au niveau des élèves de 9-13 ans. Le nombre impressionnant de publications sur le sujet depuis une trentaine d'années a eu des retombées significatives sur l'enseignement, notamment par le biais des instructions officielles qui ont été amenées à préciser les acquisitions, les hiérarchiser et les étaler beaucoup plus dans le temps que par le passé. Cependant, un certain nombre de difficultés persistent. Tout d'abord au niveau des enseignants, qui ont du mal à percevoir l'unité de ces nouvelles instructions, les méconnaissent parfois, et ont tendance, en l'absence d'un modèle d'enseignement suffisamment structuré et compact – « *an overall instructional scheme* » selon Kieren (1976, p. 133) –, à se rabattre sur des modèles simplificateurs et donc peu généralisables (Adjage, 1999, p. 204). Au niveau des élèves ensuite, tant lors des phases d'apprentissage que de résolution de problèmes. En ce qui concerne les dernières, les items des évaluations nationales à l'entrée en 6^e qui leur sont consacrés suscitent toujours un taux d'échec élevé. En ce qui concerne les premières, nos observations directes d'élèves nous ont permis de relever une difficulté structurelle des ingénieries issues de la recherche. Ces dernières proposent souvent de donner du sens aux notions mathématiques par des expériences physico-empiriques préalables, réelles ou évoquées, mettant en jeu des grandeurs. Kieren (1976, p. 115), par exemple, note à propos de la construction du rationnel-opérateur que : « *The obvious related instructional activity is work with similar figures* », ce qu'il illustre par l'histoire de la maison de « *Mr Smith* », « *smaller than Mr Jones' house, but [is] exactly like it* » (*ibid*, p. 116), dont les élèves doivent évaluer différentes dimensions en faisant fonctionner un modèle implicite de dilatation. Dans un tel contexte, les notions mathématiques apparaissent comme des outils (Douady, 1984, pp. 9-11) puissants pour décrire ces expériences et prédire des résultats. Certains traitements manipulatoires utiles à la réalisation de ces expériences sont supposés, quant à eux, expliquer les traitements mathématiques et particulièrement leurs « bizarreries ». Or notre constat est que les transferts entre les manipulations dans le champ physico-empirique et les traitements qui leur correspondent dans le champ mathématique ne se font pas ou se font mal. Par exemple, pour donner « donner du sens » à la fraction-mesure $\frac{p}{q}$ et à la recherche de fractions équivalentes $\frac{mp}{mq}$,

l'ingénierie de Brousseau (1987, pp. 1-18) s'appuie sur la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier telle que q – ou mq – feuilles identiques aient une épaisseur totale de p cm – ou mp cm. Mais, dans un contexte ultérieur purement mathématique, nombre d'élèves ayant parfaitement compris et interprété ces mesures se montrent plus sensibles à l'apparence formelle des signes (« $\frac{2}{5}$ ne peut

pas être égal à $\frac{40}{100}$ car 2 est différent de 40 et 5 est différent de 100 ») qu'à leur référence (« si 5 feuilles ont une épaisseur de 2 mm, 100 feuilles ont une épaisseur de 40 mm »). De plus, l'évocation par l'enseignant du contexte d'apprentissage – l'épaisseur de la feuille de papier – semble à ce stade apporter plus de brouillage que d'aide.

En entamant cette recherche, notre but était de produire un modèle d'enseignement compact, articulé autour de quelques principes explicites, afin de faciliter la tâche des enseignants. Ce modèle devait prendre en compte les travaux antérieurs et tirer les conséquences des difficultés avérées. Le point de départ a été la difficulté des élèves à gérer le transfert décrit ci-dessus. Pour dépasser cette difficulté, il convenait de préciser les deux domaines situés à la source – le domaine physico-empirique – et au but – le domaine mathématique relatif aux notions et à la tranche d'âge concernées – de ce transfert, puis de s'intéresser aux articulations entre ces deux domaines.

En effet, lorsqu'on examine les études didactiques sur l'acquisition du concept de rationnel, on constate que les deux composantes, le monde physico-empirique des grandeurs et le monde mathématique des nombres purs y sont peu discernées. Toutes envisagent diverses acceptions d'un nombre rationnel via la notion de rapport de grandeurs et sa conservation sous certains types de manipulations : rationnel-mesure et rationnel-dilatation chez Brousseau (1986, pp. 87-94) ; les cinq sous-constructions (part-whole-relations, ratios, quotients, operators, measures) nécessaires à l'acquisition de la notion pour Kieren (1980, pp. 134-136) ; rapport scalaire, rapport fonctionnel¹ et rapport de mesure pour Vergnaud (1983, pp. 162-166) ou Comin (2000, pp. 100-101). Dans notre tentative de clarification, nous avons décidé de séparer ce qui relevait du champ mathématique et ce qui relevait du champ physique. Ainsi, la notion de nombre rationnel serait ancrée dans le premier, ses diverses acceptions dans le second. Cette claire séparation nous a semblé être la condition nécessaire pour que les élèves puissent accepter l'existence et l'utilité d'un transfert entre les deux univers, et son rôle dans la compréhension et la mise en œuvre de la notion.

Mais quelles pouvaient être les caractéristiques d'une approche purement mathématique de la notion de rationnel ? Une deuxième préoccupation des chercheurs, régulièrement évoquée mais peu étudiée nous a fourni les premiers

¹ Si F et G sont deux grandeurs variables proportionnelles, donc reliées par une fonction linéaire : $G=aF$, un rapport comme $\frac{G_1}{G_2}$ ou $\frac{F_1}{F_2}$ entre deux valeurs de G ou deux valeurs de F est dit scalaire (ou interne) ; un rapport tel que $\frac{G_1}{F_1}$ ou son inverse est dit fonctionnel (ou externe).

éléments d'une réponse acceptable. Kieren (1976, p. 102) par exemple écrit à propos de l'addition des fractions : « ...[it] works the way it does mainly for axiomatic reasons and is **no longer natural**. ». Plus récemment, on peut lire dans le « 2002 Yearbook » (Smith, p. 3) : « ... numerals like $\frac{3}{4}$ that represent **relationships** between **two** ... quantities, rather than a **single** (three apples)... ». De quoi est-il question ici, sinon de la manière dont des signes renvoient à certaines facettes d'un objet mathématique et se combinent par un traitement ? Ici les **deux** signes 3 et 4 expriment **un seul** nombre, trois-quarts, dans une forme fractionnaire qui valorise son aspect rapport, là où une expression décimale (0,75) du même rationnel pourrait plutôt valoriser son insertion, en tant que nombre-mesure, entre les entiers 0 et 1. De plus le traitement évoqué par Kieren, l'addition (par exemple $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$) entre en conflit avec le même traitement effectué dans un autre système d'expression des mêmes nombres (par exemple $0,75 + 0,75$). C'est dans ce sens que le traitement fractionnaire « *is no longer natural* » *contrairement au traitement décimal* « *which form a natural extension (via our numeration system) to the whole numbers* » (Kieren, 1976, 102). Cette complexité d'ordre sémiotique nous a paru le mieux rendre compte des difficultés des élèves à produire ou comprendre des traitements formels sur des nombres et à concevoir les objets mathématiques sous-jacents. La théorie de Duval (1995 ; 1996), tirant toutes les conséquences du mode d'accès essentiellement sémiotique aux objets mathématiques en général, et aux rationnels en particulier, était tout à fait adaptée à nos préoccupations. Conformément à cette théorie, un enseignement donné doit tout d'abord procéder à un repérage de différents systèmes (les registres sémiotiques) permettant d'exprimer et de traiter les objets mathématiques concernés. Lors de sa mise en œuvre, cet enseignement doit clairement séparer ces différents systèmes pour mieux les articuler. La théorie distingue bien, comme opérations cognitives différentes, les traitements (internes à un registre donné) et les conversions (entre deux registres). Cette dernière opération est essentielle, selon Duval (1995, pp. 36-44 ; 2000, pp. 63-64), pour prendre conscience de l'existence d'objets mathématiques, au-delà de la diversité de leur expression. Pour la première expérience d'enseignement des rationnels que nous avons initiée (Adjage, 1999), nous avons retenu trois registres : les droites graduées, les écritures fractionnaires et les écritures décimales. Les élèves (une classe expérimentale suivie sur deux ans) se sont approprié ces registres dans l'environnement informatique des séries ORATIO et NovOra spécialement conçues et développées à cet égard (Adjage et Heideier, 1998). Cette appropriation s'est faite par la mise à l'épreuve, au moyen de tâches spécifiques bien définies, du potentiel de traitement (comme comparer $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$) et de conversion (comme passer de $\frac{3}{4}$ à 0,75) des trois registres (Adjage, 1999 à 2001b ; Adjage et Pluvinaige, 2000). Cette expérience a eu des conséquences probantes en termes

d'apprentissages, attestées par les résultats des élèves concernés, comparés à ceux d'un échantillon national, aux évaluations d'entrée en 6^e. Mais elle a aussi fait ressortir la nécessité d'intégrer une composante physique substantielle à cet enseignement. Ce qui nous amène à évoquer le deuxième temps de notre recherche et l'objet spécifique de cet article.

Le concept mathématique de rationnel et la notion de proportionnalité qui lui est attachée trouvent leur origine dans la mise en relation de deux grandeurs, homogènes ou pas (Comin, 2000, pp. 96-105). Or les grandeurs et leur mise en rapport, surtout à l'âge qui nous préoccupe, sont fortement ancrées dans l'univers physico-empirique et sont l'objet d'expériences sensibles avant d'entrer en interaction avec le symbolisme mathématique (Behr et Al, 1981, pp. 206-207). Comin (2000, p. 180) tire un bilan peu glorieux des changements curriculaires des années 70-80 qui tendaient à rejeter, dans l'enseignement de la proportionnalité, la référence aux grandeurs au seul bénéfice de la fonction linéaire.

Ayant décrit le versant mathématique de la notion de rationnel à cet âge à travers une variable sémiotique, il nous restait à en étudier le versant physique à travers une variable spécifique. Rappelons que notre hypothèse majeure est que l'acquisition de la notion de rationnel dépend de la capacité à articuler ces deux versants et que, pour être à même de les articuler, il convient d'abord de bien les séparer en précisant leur nature respective.

Nous pouvons à présent résumer le but de la présente étude en trois points :

- détailler la nature de la variable physico-empirique et ses valeurs, à savoir les différents types de situations physiques mettant en jeu des rapports ;
- valider la pertinence de cette variable au moyen d'une enquête menée parallèlement sur une population d'élèves de 12-13 ans et sur une population de référence formée d'élèves professeurs des écoles, ainsi que cela sera détaillé plus loin ;
- proposer notre analyse de la complexité des notions de rapports, de rationnels et de proportionnalité et en déduire les grandes lignes d'un modèle d'enseignement « structuré et compact ».

2. Nature et valeurs des variables prises en compte dans l'étude didactique des situations mettant en jeu des rapports

Dans cette section, il sera question d'énoncés verbaux décrivant des situations mettant en jeu des rapports dans un contexte que nous qualifierons de physico-empirique. Il s'agit de situations communément désignées comme « des problèmes tirés de la vie de tous les jours ». Cette désignation est d'ailleurs parfois abusive car nombre d'élèves n'ont que rarement rencontré ou expérimenté finement les

situations évoquées. Ils sont alors amenés à imaginer ou à reconstituer mentalement une expérience, et donc à traiter dans un premier temps le problème au moyen d'opérations non exclusivement mathématiques. Toutes les observations prouvent la grande sensibilité des élèves aux variations d'énoncés – ce que les enseignants appellent souvent « l'habillage du problème » – à problème mathématique sous-jacent constant, ainsi que Noelting (1980, p. 218) par exemple le laisse entendre : « *Perceptual variations in the situation, or difficulties arising from a lesser or greater familiarity with the problem, [which] can both lead to the phenomenon of horizontal decalage...* ». Ces variations dépendent à la fois de l'expérience physico-empirique évoquée et du texte – lexique, grammaire, syntaxe – qui la décrit et la transforme en problème, les deux étant fortement liés : on n'énonce pas un problème de fréquence de la même manière qu'un problème d'agrandissement. Notre modèle n'envisagera que la variation du type d'expérience physico-empirique. C'est cette variable que nous avons qualifiée de « physique » jusqu'à présent, que nous appellerons désormais variable « de contexte » et que nous allons décliner en six valeurs dans la sous-section suivante.

2.1. La variable de contexte

A cet égard, nous allons considérer des « objets » issus :

- soit de l'univers physico-empirique,
 - objets matériels (baguette, peinture...),
 - objets immatériels (tirs au but, « chances » – j'ai 3 chances sur 4 de réussir...)
- soit de l'univers mathématique (segments, surfaces...).

A chacun des objets considérés, on peut attacher une ou plusieurs grandeurs : longueur (d'une baguette, d'un segment, d'un parcours...), volume ou masse (d'un pot de peinture), réussite, échec (pour des tirs au but) ...

Un même objet enfin peut être considéré dans des états différents : avant ou après agrandissement par exemple.

La classification ci-dessous part d'un rapport de deux grandeurs quelconques, $\frac{G_1}{G_2}$, et examine les circonstances (types de situations) dans lesquels ce rapport peut être mobilisé en fonction : du nombre des grandeurs en jeu, puis, le cas échéant, du nombre d'objets sous-jacents, puis, le cas échéant, de l'états dans lequel on les examine.

A. Deux grandeurs distinctes sont mobilisées

$\frac{G_1}{G_2}$ exprime le rapport de deux grandeurs hétérogènes fonctionnellement liées parce qu'elles se rapportent à un même « objet ». C'est le cas de d'une problème de vitesse constante (ou de débit ou de rendement...) par exemple où on considère le rapport, $\frac{L}{T}$, de la longueur et de la durée d'un même parcours.

B. Une seule grandeur est mobilisée

a) Deux objets sont considérés

- **en état de dissociation** : c'est le cas d'un problème de mesure où on considère le rapport, $\frac{L_1}{L_2}$, des longueurs de **deux** baguettes par exemple, L_2 jouant le rôle d'une unité arbitrairement choisie ;

- **en état de fusion** : c'est le cas d'un problème de mélange où on considère le rapport, $\frac{M_1}{M_2}$ ou $\frac{V_1}{V_2}$, des masses ou des volumes de **deux** ingrédients (peinture noire/peinture blanche par exemple) fondus en **une** nouvelle entité (peinture grise) ;

- **en état de séparation** : c'est le cas d'un problème de fréquence où on considère, par exemple, le rapport, $\frac{R}{E}$, des réussites et des échecs d'**un** lot de candidats séparés en **deux** par l'introduction des modalités R et E .

b) Un seul objet est considéré

- **dans deux états différents ou sous deux aspects différents** : c'est le cas d'un problème de dilatation où on considère le rapport, $\frac{L_1}{L_1'}$, des longueurs du même côté d'une figure avant et après agrandissement .

- **dans un seul état** : c'est le cas d'un problème de changement d'unité où on considère le rapport, $\frac{m_1}{m_2}$, des mesures du même volume de lait par exemple, au moyen de deux unités différentes.

Commentaires

1. On obtient ainsi six types de situations, mettant en jeu des rapports, parmi lesquels les situations de mesure occupent une place à part. D'une part parce que les cinq autres types de situations, au niveau de scolarité où on les examine, mobilisent des mesures ; d'autre part parce que les deux termes, L_1 et L_2 , du rapport exprimant la mesure d'une grandeur variable L_1 par rapport à une grandeur unité L_2 , ne sont pas fonctionnellement liés, L_2 étant arbitraire

et restant constante quand L_I varie. Ce n'est pas le cas des autres situations où les deux termes du rapport considérés sont ou peuvent être fonctionnellement liés, (par exemple par la nuance de gris souhaitée pour un mélange de peintures noire et blanche).

2. Un problème donné peut appartenir a priori à une des six catégories recensées et, après traitement dans **l'univers physique** (reformulation du contexte ou réalisation, effective ou évoquée, de tout ou partie de « l'expérience physique » engendrant le problème), passer dans une autre catégorie. Un exemple sera donné en 5.2.
3. Enfin, il convient de mettre en parallèle ces six situations avec les cinq sous-constructions de Kieren (1980, pp. 134-136) qui font référence en la matière. Pour résumer, nous dirons que la préoccupation majeure de ce dernier est de proposer « *five **ideas** of fractional numbers... as a basis for a rational number construct* » (1980, p. 134), sans préciser la **nature** de ces « *ideas* » : si les sous-constructions « *quotient* » et « *operator* » renvoient avant tout aux mathématiques, celles de « *ratio* » (« *quantitative comparisons of two quantities* ») et de « *measure* » (« *counting the number of whole units... then equally subdividing a unit...* ») se rapportent à des grandeurs physiques et aux opérations concrètes de report et subdivision ; celle de « *part-whole* » enfin est une sous-construction cognitive générale dont les quatre autres dépendent fortement. Notre préoccupation étant de séparer, pour mieux les articuler, les deux domaines mobilisés pour appréhender la complexité d'un rationnel, il importait d'ancrer délibérément les six types de situations trouvés dans le domaine physico-empirique. Ces situations s'appuient donc avant tout sur **l'évocation d'une expérience**. Elles permettent aussi de donner un contenu précis au terme de « contexte physico-empirique » relatif aux notions étudiées. Bien entendu, ces deux ensembles ne sont pas indépendants. Ainsi, nos situations « mesure », « dilatation » et « rapport de grandeurs hétérogènes » sont à rapprocher des catégories « *measure* », « *operator* » et « *ratio* » de Kieren ; une même situation de « fréquence » – ou de « mélange » – peut renvoyer à une « *part-whole relation* » (3 réussites sur un total de 7 lancers) ou à un « *ratio* » (3 lancers réussis pour 4 échecs) ; enfin, un changement d'unité peut être appréhendé par un ratio (4 bouteilles pour remplir 9 verres) ou un « *operator* » permettant par exemple de calculer la mesure V , en verres, d'un volume donné en fonction de sa mesure B en bouteilles : $V = \frac{9}{4}B$. L'exemple fourni en 5.2 devrait aider à mieux mettre en parallèle l'approche de Kieren et la nôtre.

2.2. Les principales variables prises en compte par d'autres études

Avant de présenter l'enquête destinée à valider la variable de contexte, nous allons rappeler les principales variables prises en compte par d'autres chercheurs.

1. *Variable de but* (nature de la question de l'énoncé) : calculer une quatrième proportionnelle ; calculer un rapport (Brousseau, 1986, pp. 122-126) ; comparer des rapports (Noelting, 1980) ...

2. *Variable de statut* (statut du rapport en jeu : mesure, scalaire, opérateur fonctionnel¹ (Vergnaud, 1983, pp. 145 et 162).

3. *Variable numérique* (nature et taille du nombre exprimant le rapport en jeu) : entier, décimal, rationnel non décimal, appartenant à un domaine familier, non familier....

4. *Variable d'expression* (mode d'expression du nombre exprimant le rapport en jeu) : langue naturelle, paire d'entiers – comme dans 3 réussites pour 5 échecs –, écriture fractionnaire, écriture décimale, droite graduée, surface fractionnée.... (Adjage, 1999, pp. 129-152 ; 2001b, pp. 11-16).

Exemple : pour illustrer la différence entre les variables 3 et 4 : 3 pour 5, $\frac{3}{5}$, 0,6 sont trois représentations différentes (variable 4) du même rapport décimal « trois-cinquièmes » (variable 3) et on sait que les énoncés mobilisant l'une ou l'autre de ces représentations n'ont pas le même taux de réussite dans une population d'élèves donnée.

Dans la suite, la **variable de contexte portera le numéro 5 et les autres variables porteront le numéro de leur introduction ci-dessus.**

3. L'enquête

Pour établir la pertinence de la variable 5, « de contexte », nous avons mené une enquête, auprès de deux populations qui seront précisées en 3.2, fondée sur un questionnaire présenté en 3.1. L'idée est de confirmer la sensibilité d'une population d'élèves de 12-13 ans aux variations du contexte physico-empirique des énoncés, donc de la variable de contexte, même lorsque le problème mathématique sous-jacent reste constant. Afin de relativiser l'impact de cette variable, nous avons interrogé sur le même questionnaire une deuxième population de référence, très différente de la première en âge et en compétences.

3.1. Le questionnaire

Le questionnaire, fourni en annexe 1, propose aux populations testées la résolution de six exercices ou items représentant chacune des six valeurs de la variable 5 (voir

2.1). Pour tester la pertinence de cette dernière, nous avons contrôlé les variables 1 à 4 en délimitant strictement leur domaine de variation. C'est ce que nous allons examiner dans cette section, en distinguant l'item 1 MES (mobilisation d'un rapport dans un contexte de mesure) des cinq derniers items (recherche d'une quatrième proportionnelle).

3.1.1. Les items 2 à 6

Au-delà de la diversité des énoncés, un seul problème mathématique, précisé en 4.2, est sous-jacent à chacun des items 2 à 6.

- *La variable 1 « de but »*

La question de chaque exercice est de même nature : elle porte sur la recherche d'une quatrième proportionnelle, donc le calcul d'un état. Nous avons éliminé d'autres questions comme le calcul d'un coefficient de proportionnalité ou la comparaison de rapports, car le calcul d'un état vient avant le calcul d'une transformation, et a fortiori avant la mise en relation de transformations, dans les instructions officielles. La variable 1 « de but » est donc maintenue constante.

- *La variable 2 « de statut »*

Deux types de rapport, externe ou interne¹, sont susceptibles d'être mobilisés, sans que la mobilisation de l'un ou l'autre soit privilégié par la nature des données² (voir ci-dessous), quel que soit l'item.

- *La variable 3 « numérique »*

Les rapports – internes et externes¹ – de chaque énoncé sont rationnels, décimaux non entiers, et prennent des valeurs de difficulté comparable.

- *La variable 4 « d'expression »*

Aucun énoncé ne mobilise explicitement des écritures fractionnaires – bien que les rapports externes et internes¹ soient des rationnels non entiers –, ceci afin d'éviter qu'un échec trop massif et/ou des refus de répondre risquent de rendre délicates les interprétations. Les rapports sont fournis au moyen de paires d'entiers naturels (exemple : réussite de 3 pour 4 et pas $\frac{3}{4}$) appartenant à un domaine numérique familier.

Traiter l'un ou l'autre de ces cinq items est donc neutre vis à vis de ces quatre variables. Aucune de ces dernières ne devrait influencer les procédures mobilisées.

² Ce qui ne serait pas le cas si le rapport interne par exemple était entier et le rapport externe non entier, favorisant ainsi l'usage du premier.

3.1.2. Cas particulier de l'item 1 (MES)

MES est un peu particulier. Il représente la catégorie 1 de la classification fournie en 2.1. Cet item est le seul qui ne demande pas de calculer une quatrième proportionnelle, mais seulement d'exprimer le rapport d'une grandeur³ B à une unité b . Une recherche de quatrième proportionnelle associée à cet item comme : « 8 baguettes B ont la même longueur que 15 baguettes b . Et 17 baguettes B ? » est en fait prise en charge par CHGTU (item 5). MES vise ainsi à évaluer la capacité à mobiliser un rapport pour exprimer une mesure. Ainsi, il suppose la mise en œuvre d'une compétence implicitement requise pour résoudre les autres items. La variable 1 « de but » y prend une valeur 'calcul d'un rapport' différente de celle prise dans les autres items ; la variable 2 « de statut » prend la valeur 'rapport de mesure' ; les variables 3 « numérique » et 4 « d'expression » y prennent des valeurs analogues à celles prises dans les autres items.

Précisons enfin, pour conclure la section 3.1, que l'ordre de présentation des items variait d'un groupe testé à l'autre afin de minimiser les effets d'amalgame par proximité.

3.2. Les conditions de l'enquête et le public testé

L'enquête a été réalisée au cours de l'année scolaire 2003-2004. Elle a été menée auprès de deux types de public : **121** élèves de 5^e ^[4] (12 ans) et **110** élèves-professeurs des écoles (désignés par PE dans toute la suite) en première année d'IUFM⁵. Le panel des classes de 5^e a été choisi dans des zones urbaines et rurales, et comprend une classe de ZEP⁶. L'étude des résultats obtenus par ces élèves aux évaluations nationales en mathématiques à l'entrée en 6^e permet de considérer cet échantillon comme représentatif.

Les notions de fraction par fractionnement de l'unité (trois fois un cinquième de tarte) et de fraction quotient de deux entiers d'une part (3 tartes à partager en cinq invités) ; l'usage de fractions comme opérateurs de proportionnalité, dans toutes sortes de situations physico-empiriques, d'autre part, figurent au programmes de 6^e ^[7]. Cet enseignement est repris et approfondi au cours de la 5^e. La population d'élèves testée peut donc être considérée comme outillée relativement aux contenus d'enseignement qui nous préoccupent.

³ Nous noterons en caractère droit, B ou b , l'objet baguette, et en italique B ou b la longueur de cet objet.

⁴ La 5^e est en France la deuxième année de l'école du second degré.

⁵ Les IUFM forment l'ensemble des professeurs du premier et du second degré en France.

⁶ Zone à Eduquer en Priorité. Nombre d'élèves scolarisés en ZEP sont en situation socio-économique difficile.

⁷ La 6^e est l'année qui précède la 5^e.

Les professeurs des écoles enseignent toutes les disciplines à l'école primaires (3-11 ans) et ne sont donc pas, pour l'immense majorité, des spécialistes en mathématiques. Ce sont des adultes recrutés au niveau licence, certains ayant déjà une expérience professionnelle, dans l'enseignement ou ailleurs. Ils ne sont appelés à enseigner qu'une première approche des rationnels, des rapports et de la proportionnalité, cette dernière notion étant abordée dans un contexte numérique essentiellement entier. Mais la maîtrise de ces problèmes, largement requise au concours de recrutement, est considérée par les professeurs des écoles comme primordiale pour un exercice dominé de leur futur métier. Il nous a semblé pertinent de retenir cette population comme population de référence car atteindre leur niveau de compétence dans le domaine étudié nous semble être un objectif ambitieux mais raisonnable pour l'ensemble de la population scolaire.

4. Les principaux résultats de l'enquête et leur interprétation

4.1. La réussite et l'échec

Items	MES	MEL	HET	FREQ	CHGTU	DIL	m
Population	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	
PE (effectif total 110)	87% 96	84% 92	91% 100	90% 99	80% 88	86% 95	86%
Rang (items 2 à 6)		4	1	2	5	3	
5 ^e (effectif total 121)	8% 9	12% 15	21% 25	26% 31	10% 12	14% 17	
Rang (items 2 à 6)		4	2	1	5	3	15%

Tableau 1 : réussite par item et par population ; les effectifs bruts sont en sous-colonne de droite, m est la moyenne obtenue aux six items

Comme cela était attendu, les élèves de 5^e échouent massivement alors que les PE réussissent tout aussi massivement. Dans un cas comme dans l'autre, HET et FREQ sont les items les plus réussis. En 5^e, la probabilité de réussir l'un de ces items est significativement différente de celle de réussir l'un quelconque des quatre autres items : sous l'hypothèse contraire H_0 (test de Mac Nemar dans sa version loi binomiale), la probabilité d'obtenir les résultats observés varie entre 0,01% pour FREQ vs MES et 5,77% pour HET vs DIL (seule valeur au-dessus de 5%). En

revanche, le critère de la réussite ne permet pas de discerner HET et FREQ en 5° comme en PE (probabilité respective de 20,88% et 50% selon le même test).

MEL et DIL forment un deuxième groupe d'items non discernables par leur réussite en 5° et en PE (probabilité respective de 38,72% et 33,18% selon le même test).

Si l'on met MES à part, donc parmi les items 2 à 6, CHGTU est le moins réussi dans les deux cas. Il est d'ailleurs remarquable que les cinq items 2 à 6 se rangent pratiquement de façon analogue dans l'une et l'autre population, avec une inversion non significative de HET et FREQ.

MES en revanche n'occupe pas du tout la même position dans les deux populations. Il est de loin le moins réussi en 5°, alors qu'il occupe une position médiane supérieure en PE. Le tableau croisant, en 5°, la réussite à MES avec la réussite à au moins un des items 2 à 6, ne permet pas d'établir de lien entre MES et les autres items car il illustre presque une situation d'indépendance :

$$\chi^2 \approx 1.5 ; P(\chi^2 > 1.5) \approx 21\%$$

MES \ Autres items	R	E	Total
R	5	39	44
E	4	73	77
Total	9	112	121

Tableau 2 : Tableau croisant la réussite à MES et à au moins un des items 2 à 5

Deux types d'interprétations peuvent être proposés.

1. Problèmes de formulation

Dans la phrase « Exprimer la longueur d'une baguette B par rapport à la longueur d'une baguette b » les termes « Exprimer » et « rapport » ont-ils été compris par les élèves de 5° ? Une formulation alternative comme « Quelle est la longueur de B avec b comme unité » aurait-elle été mieux comprise ? le problème aurait-il été mieux réussi ? Nous ne le pensons pas. Pour nous, le problème majeur serait plutôt un problème de référence.

2. Problèmes de références

A côté d'un fort pourcentage (48%) d'absence de réponses, on trouve 33% d'élèves de 5^e qui cherchent à calculer explicitement B et b au moyen d'une unité, par une expression comme « $B = 15\text{mm}$ et $b = 8\text{mm}$ ». Ces élèves n'ont donc pas compris que B et b ne sont déterminables qu'à une homothétie près, ou encore que seul le rapport $\frac{B}{b}$ est calculable et pas B et b séparément, ce qui n'est pas le cas des autres items ou chaque terme des rapports envisagés est soit donné, soit calculable au moyen d'une unité appropriée. Ceci est à rapprocher de ce que Vergnaud (1990, p. 29) appelle le « *detour behaviour* », qui consiste, pour un sujet donné, à accepter qu'un calcul puisse servir à relier des quantités inconnues ($8B = 15b$) au lieu de fournir tout de suite l'inconnue ($B = \dots$). Vergnaud considère que c'est un des plus « *important aspects of the jump between arithmetic and algebra* ». Les élèves examinés n'ont pas encore accompli ce saut, à ce moment de leur scolarité où l'étude explicite de l'algèbre n'a pas commencé. Ils ne sont donc pas outillés, ne serait-ce que pour entrer dans ce problème. A l'inverse les PE, qui ont bien intégré le calcul algébrique, n'éprouvent pas de difficulté conceptuelle. Leur réussite à cet item dans des proportions comparables aux autres items est donc bien interprétable.

Conclusion du paragraphe 4.1

En résumé, ces premiers résultats font apparaître : un gros décalage de réussite entre les deux populations alors qu'elles sont toutes deux outillées pour la résolution de ces problèmes ; une première différenciation entre les items, suivant le type physico-empirique de ces derniers⁸ ; une distribution des rangs de réussite quasi identique entre les deux populations en ce qui concerne les items 2 à 6, signalant une permanence de certaines difficultés et réussites, selon le contexte physico-empirique⁸, pour le calcul d'une quatrième proportionnelle ; un item 1 atypique dans le lot, parce que structurellement différent des autres, mais aussi par les références algébriques qu'il suppose. En tout état de cause, il convient d'examiner de plus près les procédures, soit les moyens de réussir ou d'échouer, pour compléter nos interprétations.

4.2. Les procédures observées (Items 2 à 6)

Dans cette section, nous nous limitons à l'étude des items 2 à 6 qui sont des variations physico-empiriques d'un même problème mathématique, dont nous rappelons les principales caractéristiques :

Données : une fonction linéaire f , trois entiers a , b , c tels que : $a < b < c$, $a \in \{4; 5\}$; $b \in \{3; 5; 7; 8; 9\}$; $c \in \{9; 11; 13; 25\}$; (les rapports

⁸ N'oublions pas que les autres variables sont bloquées.

externe, $\frac{b}{a}$, et interne, $\frac{c}{a}$, sont décimaux et supérieurs⁹ à 1); $c = ka + 1$, $k \in \{2; 3; 6\}$.

Question : sachant que $f(a) = b$, calculer $f(c)$.

Pour notre propre relevé des procédures présenté dans le Tableau 3 ci-dessous, nous nous référons principalement à la classification établie par Vergnaud (1983, p.148) dans un but différent du nôtre¹⁰. Ainsi, parmi les procédures exactes, COEF, MULT, UNIT, XPRO, désignations mises à part, ont été prises en compte et distinguées par Vergnaud. En revanche, nous séparons en deux procédures, ADD et LICO, l'unique catégorie « *Scalar Decomposition* » de Vergnaud, parce que la multiplication est mobilisée dans la deuxième et seulement l'addition dans la première. L'usage explicite de fractions équivalentes, FRAC, non retenu par Vergnaud, est ici considéré comme une procédure distincte, conformément à l'analyse de Kieren (1976, p.102-103) pour qui l'interprétation d'un rationnel comme classe d'équivalence de fractions diffère, d'un point de vue didactique, de son interprétation comme ratio ou opérateur.

Parmi les procédures incorrectes, Nous distinguons ADIN et ADEX, comme Vergnaud l'a fait sous les désignations de « *Erroneous Scalar and Erroneous Function* ». Enfin, nous considérons qu'APPRO est une procédure distincte des deux précédentes à cause de la relation qui lie a et c dans les items 2 à 6 : $c = ka + 1$. La présence du terme 1 dans cette relation amène nombre d'élèves à démarrer correctement leur raisonnement en utilisant le scalaire multiplicatif k , mais à le finir de façon erronée en ajoutant 1, au lieu de $f(1)$, au résultat intermédiaire.

Naturellement, les formules mathématiques spécifiées dans le Tableau 3 en colonne 2 ne sont que rarement explicitées par l'une ou l'autre des populations testées. Elles sont en revanche fort utiles pour interpréter leur démarche en actes et les classer.

Code	Formule mathématique	Exemple pour l'un ou l'autre item
COEF	$f(x) = mx$	DIL : Le coeff. d'agr. est de $\frac{7}{4}$, le pont agrandi mesure donc en cm : $9 \times \frac{7}{4} = \frac{63}{4}$.

⁹ Sauf pour FREQ où $\frac{b}{a} < 1$, vu qu'il s'agit d'une fréquence.

¹⁰ Vergnaud a surtout cherché à interpréter les différences de fréquence de mobilisation de ces procédures en termes d'isomorphisme de mesures. Il insiste ainsi sur la difficulté des élèves à mobiliser certaines procédures qui n'ont du sens que si on comprend qu'elles portent sur des nombres et pas sur des grandeurs.

MULT	$f(kx) = kf(x)$	CHGTU : $13 \div 4 = 3,25$. Donc nombre de verres : $9 \times 3,25 = 29,25$ _
ADD	$f(\Sigma x_i) = \Sigma f(x_i)$	CHGTU : $4 + 4 + 4 + 1 = 13$, donc avec 13 bouteilles, on remplit : $9 + 9 + 9 + 2.25 = 29.25$ verres
LICO	$f(\Sigma \lambda_i x_i) = \Sigma \lambda_i f(x_i)$	FREQ : $25 = 6 \times 4 + 1$, donc en 25 lancers il réussit : $6 \times 3 + 0,75 = 18,75 \approx 19$
XPRO	$ax = bc$	MEL : $11 \times 8 = 5 \times x$ donc $x = \frac{11 \times 8}{5} = 17,6$. Donc pour 11 p. peint. noire, il faut 17.6 p. peint. blanche
UNIT	$f(c) = cf(1)$	HET : 1 l de miel pèse $\frac{5}{4} kg$, donc 9 l de miel pèsent en kg : $\frac{5}{4} \times 9 = \frac{45}{4}$
FRAC	$\frac{b}{a} = \frac{kb}{ka}$	FREQ : $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{18}{24}$, donc à peu près 18 réussites sur 25 lancers
ADEX	$f(x) = x + b$	DIL : le mât est agrandi de 3 cm (7-4), donc le pont aussi, soit en cm : $9 + 3 = 12$
ADIN	$f(x + b) = f(x) + b$	MEL : 6 p. de peint. noire de plus, donc 6 p. de peint. blanche de plus, soit $8 + 6 = 14$
APPRO	$f(ax + 1) = af(x) + 1$	HET : $9 = 2 \times 4 + 1$, donc 9 l pèsent en kg : $2 \times 5 + 1 = 11$
ALEA		Combinaison des données sans logique apparente
0		Absence de réponse
ELSE		Autres réponses

Tableau 3 : codage des procédures observées

4.2.1. Les constats

Nous avons relevé, individu par individu, le nombre de procédures différentes mobilisées (parmi les 13 procédures décrites en 4.2). Par exemple, un individu qui utilise : {COEF, COEF, MULT, COEF, ADD} ou {ADEX, UNIT, ADIN, UNIT, ADIN} pour résoudre les problèmes 2 à 6 aura mobilisé trois procédures différentes.

Les tableaux qui suivent synthétisent les observations.

PE						Total
Nombre de procédures différentes mobilisées	1	2	3	4	5	
Effectifs (données brutes)	40	38	27	3	2	110

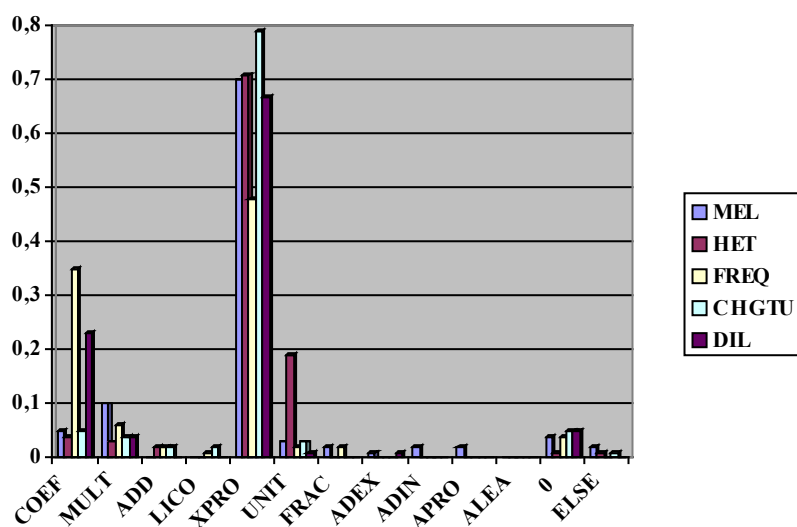
Effectifs (pourcentages p_i)	36%	35%	24%	3%	2%	100%
---------------------------------	-----	-----	-----	----	----	------

Tableau 4 : effectif des PE ayant mobilisé 1,2, 3, 4, 5 procédures différentes

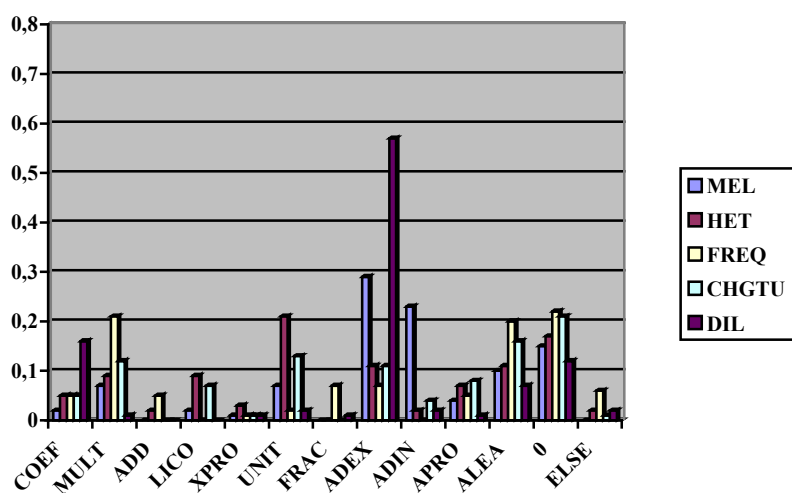
5 ^e						Total
Nombre de procédures différentes mobilisées	1	2	3	4	5	
Effectifs (données brutes)	1	21	35	44	20	121
Effectifs (pourcentages)	1%	17%	29%	36%	17%	100%

Tableau 5 : effectif des élèves de 5^e ayant mobilisé 1,2, 3, 4, 5 procédures différentes

Un examen de ces tableaux fait apparaître que 82% des élèves de 5^e ont mobilisé trois procédures différentes ou plus, alors que 71% des PE ont mobilisé 1 ou 2 procédures différentes. Par ailleurs, l'examen comparé des Graphique 1 et Graphique 2, ou des Tableau 7 et Tableau 8 fournis en annexe 2, fait apparaître pour les PE une procédure, XPRO, mobilisée préférentiellement **quel que soit l'item** considéré. Une telle procédure élective n'existe pas en 5^e (ADEX est surtout associée à DIL et dans une moindre mesure à MEL). On notera aussi que l'item traité influe fortement sur la fréquence de choix d'une procédure en 5^e : au-dessus d'une procédure donnée du Graphique 2, lorsque la couleur change, la longueur de la barre a tendance à changer.



Graphique 1 : effectif des PE (%) selon les procédures (items 2 à 6)



Graphique 2 : effectif des élèves de 5° selon les procédures (items 2 à 6)

L'examen des fréquences de mobilisation de deux procédures par les PE : COEFF (surtout pour FREQ et DIL) ; UNIT (surtout pour HET) relativise un peu le constat de leur choix massif pour XPRO. Cela peut s'expliquer par l'existence, dans la langue naturelle, de désignations standard comme : « le coefficient de réussite » (dans FREQ, l'expression « 3 paniers sur 4 » invite à la prise en compte du coefficient de réussite $c = \frac{3}{4}$) ou « le coefficient d'agrandissement » ($c = \frac{7}{4}$ dans DIL), fréquemment utilisées et renvoyant à des observations courantes. Ce qui n'est pas le cas pour les autres items. En ce qui concerne HET, le choix assez fréquent de UNIT peut s'expliquer par le recours, très répandu, à des références unitaires dans les situations de la vie courante mettant en jeu des grandeurs comme les masses, les volumes, les durées, la monnaie... (masses spécifiques, prix unitaires...). On constatera d'ailleurs, en ce qui concerne DIL et HET, que l'usage de COEF et UNIT se distingue déjà en 5^e de l'usage des autres procédures.

En ce qui concerne les élèves de 5^e on observera, sur un fond prédominant de fortes variations déjà relevé plus haut, l'existence d'une ou deux procédures privilégiées par item, se détachant nettement des autres procédures : ADEX et ADIN pour MEL ; UNIT pour HET ; MULT pour FREQ ; UNIT pour CHGTU, (mais nettement moins détachée des autres procédures que dans HET, puisque talonnée par MULT et ADEX) ; ADEX pour DIL. On relèvera dans ce dernier cas le score très élevé de la procédure fautive ADEX, significativement plus élevé que pour tous les autres items : « agrandir » reste toujours très lié à « ajouter » à cet âge !

4.2.2. L'interprétation

Des variations significatives observées chez les élèves de 5^e ne se retrouvent pas, ou très peu, chez les PE. Les premiers ont tendance à changer de procédure en changeant d'item, n'ont pas de procédure élective quel que soit l'item, sont influencés par l'item dans leur choix de procédure exacte ou erronée. Examinons la variation la plus significative, à savoir la tendance très nette des élèves de 5^e à changer de procédure en changeant d'item et tentons de l'expliquer à partir des cinq variables que nous avons repérées (cf 2). Un changement de procédure est souvent associé à une adaptation à un changement de valeur d'une variable didactique. Par exemple, dans les problèmes de comparaison de mélanges (jus de fruit, eau) de Noelting (1980, pp. 244-245), une élève testée utilise, selon notre codage, COEFF pour comparer les mélanges (2,1) vs (4,3) : « On the left...two times more juice than water, while on the right ... one glass of water too much to keep the same proportion ». Pour comparer les mélanges (5,2) vs (7,3), la même élève utilise FRAC, en considérant les relations partie-tout (jus de fruit/mélange) exprimées par les fractions $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{10}$: « On the left... $\frac{50}{70}$ juice while on the right... $\frac{49}{70}$ only... ». La prise en compte du rapport entier 2 pour 1, suffit en effet à

traiter le premier cas, alors qu'aucun rapport entier ne permet de traiter le deuxième. Dans ce cas, c'est la variable 3, « numérique » qui rend bien compte du changement de procédure constaté. Mais dans notre questionnaire nous avons strictement contrôlé cette variable, de telle sorte qu'elle ne peut être liée au choix d'une procédure. Comme de la même manière nous avons contrôlé les variables 1, 2, 4, seule la variable « de contexte », parmi les cinq variables retenues, semble susceptible d'expliquer les variations observées. Ce qui est un argument de poids en faveur de la pertinence de cette dernière.

On peut certes tenter d'expliquer les phénomènes constatés au moyen d'autres variables. Par exemple, la longueur ou la lisibilité des énoncés. Les items les mieux réussis en 5° ne sont-ils pas FREQ et HET, dont les énoncés sont les plus courts ? Mais CHGTU, dont l'énoncé est à peine plus long que celui de FREQ, est le moins bien réussi. On peut cependant envisager, malgré ce contre-exemple, que la complexité des énoncés ait un certain impact sur la réussite. Mais on voit mal comment elle pourrait influencer le choix des procédures. Nous avons retenu, pour chaque item, la formulation juste suffisante à sa compréhension. Or, il se trouve que la formulation est fonction du contexte physico-empirique auquel on se réfère : on ne décrit pas une expérience de fréquence comme une expérience d'agrandissement. Il n'y a pas moyen d'échapper à des variations dans la longueur et la lisibilité des énoncés, sauf à recourir à des artifices de langage qui risqueraient d'apporter plus de brouillage que de transparence. La complexité d'un énoncé est donc une variable dépendante de la variable de contexte. Cette dernière reste donc, en l'état de nos recherches, celle qui nous semble le mieux rendre compte des variations observées dans le choix des procédures.

4.3. Expressions numériques et changements de registres

Ce paragraphe vise à déterminer les observables susceptibles d'expliquer certains facteurs de la réussite des PE. On peut bien sûr évoquer un plus grand achèvement dans l'appropriation du champ conceptuel (Vergnaud, 1991) de la proportionnalité : une meilleure identification des divers types de problèmes qui en relèvent et une meilleure expertise du modèle mathématique linéaire sous-jacent. Mais ce constat ne nous ouvre pas de nouvelles voies d'enseignement à destination des élèves du collège. Ce que nous recherchons, ce sont les moyens qui permettent de transformer des données verbales décrivant une expérience (l'énoncé) en écritures arithmétiques ou algébriques résolvantes et les moyens de traitement de ces dernières. Julo (1995, p 29) décrit trois phases entre la lecture de l'énoncé d'un problème et sa résolution : interprétation et sélection des données ; structuration ; opérationnalisation. Le passage d'une phase à l'autre suppose des réorganisations, des changements de représentations et donc de l'expression du problème et des moyens de traitements qu'elle autorise. « *Or, si les élèves ont beaucoup de mal à changer de registre* », selon Duval (2001, p 91), les mathématiciens professionnels passent continuellement du rhétorique au formel, c'est même ce qui distingue le

fonctionnement cognitif du mathématicien du fonctionnement commun.... Ou encore « *L'activité mathématique.... nécessite des changements de direction de la pensée qui apparaissent comme des ruptures.... Tout se passe comme s'il fallait brusquement changer la manière de représenter les données, ou penser à autre chose, à l'encontre du déroulement spontané du jeu d'associations qui a été induit par la première compréhension du problème ou les premiers traitements engagés.* » (Duval ; 2001, p 85). On doit donc retrouver des traces de cette mobilité inter-registres, ou de cette absence de mobilités entre les productions des PE et celles des élèves.

Or, du côté des moyens d'expression, deux phénomènes d'importance séparent les PE et les élèves de 5^e :

- Usage massif des fractions pour exprimer les rapports chez les PE1, usage très limité de ces dernières par les élèves de 5^e ;
- Changements de registres¹¹ fréquents chez les PE1 et totalement anecdotiques chez les élèves.

Les deux traitements suivants de FREQ, extraits de deux copies différentes, l'une d'un PE l'autre d'un élève de 5^e, sont deux manières très différentes de réussir. Ils vont illustrer, le premier comme exemple et le deuxième comme contre-exemple, les deux points ci-dessus.

Copie 1 : 4 essais pour 3 réussites. Pour 24 essais (6×4) on a 18 (6×3) réussites. Le 25^e essai peut être réussi ou pas. En 25 lancers, le joueur peut donc réussir 18 ou 19 paniers.

Copie 2 : $25 \times \frac{3}{4} = \frac{75}{4}$, $\frac{75}{4} = 18.75$; le joueur peut espérer réussir 18 ou 19 paniers.

Dans la copie 1, la réussite est obtenue en suivant une logique quasi physique et séquentielle de déroulement de partie. Dans la copie 2, l'étudiant interprète mathématiquement l'énoncé physique en termes de rapport dont il mobilise une expression fractionnaire ($\frac{3}{4}$). Il utilise ensuite cette fraction comme un opérateur linéaire pour calculer la réussite. Il est capable d'effectuer un produit (traitement interne au registre fractionnaire), puis d'accepter comme équivalentes l'expression d'un rapport valorisant les deux termes rapportés (75 et 4) et une expression du lien entre ces deux termes, au moyen d'un nombre (18.75)¹², le tout finalisé par la

¹¹ Nous avons comptabilisé comme changement de registre tout passage d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale, entière ou non entière, (ou vice versa).

¹² Voir dans : Adjage, 1999, pp. 19 et 135-137, en quoi les écritures fractionnaires et décimales constituent deux registres différents. Le passage de l'une à l'autre est une

recherche d'un nombre entier de paniers (retour à la nécessité physique) mieux appréhendé par une expression décimale que fractionnaire du rapport obtenu.

Dans le premier cas, on a une procédure très contextualisée, dont on ne peut prédire qu'elle sera généralisable. Dans le deuxième, on a une modélisation très maîtrisée et finalisée, dont on peut penser qu'elle sera mobilisable dans des circonstances très différentes.

Les deux tableaux qui suivent permettent de mesurer l'ampleur du phénomène à l'échelle des deux populations observées.

PE (110)	MES		MEL		HET		FREQ		CHGTU		DIL	
a/b	85%	94	74%	81	78%	86	77%	85	84%	92	71%	78
$\alpha.\beta\tilde{\gamma}$	11%	12	74%	81	85%	94	63%	69	75%	82	81%	89
Chgt Reg	10		88		81		140		105		69	

5 ^e (121)	MES		MEL		HET		FREQ		CHGT U		DIL	
a/b	2%	2	0%	0	0%	0	10%	12	5%	6	2%	3
$\alpha.\beta\gamma....$	19%	23	15%	18	45%	54	11%	13	26 %	31	17%	21
Chgt Reg	0		1		0		14		9		3	

Tableau 6 : Examen comparé de modalités de l'expression dans le traitement des six items.

**a/b : usage d'écritures fractionnaires ; $\alpha.\beta\gamma....$: usage d'écritures à virgule ;
Chgt Reg : usage d'un changement de registre**

Les sous-colonnes de gauche proposent les effectifs en pourcentage, les sous-colonnes de droite les effectifs bruts (sur un total de 110 étudiants en PE et de 121 élèves en 5^e). Les totaux dépassent parfois 100% car certains élèves et étudiants, qui changent de registres, utilisent des fractions et des nombres à virgules.

La disponibilité des écritures fractionnaires pour exprimer le rapport de B à b est sans doute déterminante dans la réussite à MES (87% en PE), tant l'énoncé est congruent à l'équation : $8B = 15b$, équation qui se résout à moindre coût au moyen d'une fraction (l'expression décimale du rapport est bien sûr envisageable, mais est simplifiée par le détour fractionnaire). Sur les 96 PE (87%) qui posent cette équation, 90 réussissent en utilisant des fractions pour leur résolution, 1 seul

opération (conversion) en général plus coûteuse sur le plan cognitif qu'un traitement interne à un registre donné comme : $25 \times \frac{3}{4} = \frac{75}{4}$ (Duval, 1995, pp. 40-42).

réussit en n'utilisant pas de fraction (en fait un décimal), et les qui 5 échouent sont ceux qui n'ont pas réussi à mobiliser de fraction.

En 5^e en revanche, c'est l'item le moins réussi (8%) avec un taux d'utilisation de fractions réduit à 2%. Cette expression fractionnaire est à ce point adaptée au résultat que seuls 11% des PE utilisent un autre mode d'expression, en l'occurrence décimal, ce qui explique le taux de changement de registres le plus faible de la série.

En ce qui concerne *FREQ*, le passage par l'écriture fractionnaire est un excellent intermédiaire car $\frac{3}{4}$ est très congruent à l'énoncé : « 3 paniers sur 4 ». Le résultat fractionnaire $25 \times \frac{3}{4} = \frac{75}{4}$ est en revanche peu satisfaisant car on cherche un résultat entier. D'où l'importance de savoir changer de registre pour passer de $\frac{75}{4}$ à son expression décimale, exacte puis/ou approchée, ce qui suppose que $\frac{75}{4}$ soit reconnu comme un nombre, situé entre deux entiers consécutifs. Les procédures choisies par 92 PE (83%) sont *XPRO* et *COEF*. Sur ces 92 PE, 82 réussissent en utilisant des fractions pour leur résolution, 6 réussissent en n'utilisant pas de fraction (en fait un décimal), 1 échoue sans utiliser de fraction, 3 échouent en utilisant les fractions. On notera par ailleurs qu'en 5^e cet item est le plus réussi (26%) et que c'est aussi celui où les écritures fractionnaires ont été le plus mobilisées (10%).

Avec un taux de mobilisation des fractions (84%) supérieur au taux la mobilisation d'un décimal (75%), *CHGTU* est aussi l'item le plus traité en PE au moyen de la procédure *XPRO* ($13 \times 9 = 4 \times x$), facilitante lorsqu'on dispose des écritures fractionnaires. *HET* et *DIL* en revanche ont un taux de mobilisation des fractions (respectivement 78% et 71%) inférieur au taux de mobilisation des décimaux (respectivement 85% et 89%) en PE. Ce n'est pas très surprenant, vu que ces items requièrent des unités usuelles (kg, l, cm) du système métrique, très associé au système décimal, particulièrement en France. Ce qui peut expliquer les occurrences de changement de registres les plus faibles (respectivement 81 et 69) après *MES*. *MEL* occupe une position médiane en termes de changements de registres et mobilise autant les écritures fractionnaires et décimales (74%). Ce qui le différencie nettement de *CHGTU* avec qui il a pourtant en commun le recours à des unités hors système métrique (pots, bouteilles et verres).

5. Ce qu'apporte cette étude à l'analyse de la complexité des notions de rapport, de rationnel et de proportion et à leur enseignement

Cette enquête établit que les PE réussissent la modélisation et le traitement de problèmes physico-empiriques mettant en jeu des rapports, dans le cas de

l'expression d'un rapport de mesure et dans celui de la recherche d'une quatrième proportionnelle. Pour cela, ils ont réussi à :

- Appréhender chaque situation physique particulière ;
- Reconnaître un même problème mathématique sous-jacent au-delà des habillages physico-empiriques différents (usage massif de XPRO¹³) des items 2 à 6 ;
- Traiter l'ensemble des items en faisant preuve de flexibilité inter-registres, ce qui permet de rester congruent à l'énoncé et donc de le résoudre sans détour piégeant, puis d'interpréter et de contrôler, dans les termes appropriés au contexte, la solution mathématique.

Les cinquièmes y sont peu parvenus, faute de maîtriser suffisamment toute la complexité des notions de proportionnalité et de nombre rationnel. Nous allons donc résumer, dans les sections qui suivent, notre modélisation de cette complexité et quelques conséquences sur l'enseignement des notions concernées.

5.1. La complexité des notions de rationnel et de proportionnalité simple¹⁴

Nous prenons acte de l'existence d'une variable physico-empirique didactiquement pertinente en déclinant cette complexité sur deux univers séparés et articulés :

1. Un univers physico-empirique représenté par six types de situations présentées en 2.1 ;
2. Un univers mathématique comprenant un **seul type d'objets**, les nombres rationnels, auxquels on accède et que l'on traite (mise en relation de ces nombres) au moyen de divers registres d'expression (Adjage, 2003, pp. 130-132 ; pp. 134-137).

Un deuxième niveau de séparation et d'articulation apparaît à l'intérieur de chacun de ces univers, entre les six situations physico-empiriques d'une part, et entre les divers registres d'autre part.

Dans cette approche, la diversité – par exemple au sens où Kieren (1980, p. 134) évoque « *five separate fractional or rational number thinking patterns* » – de la notion se situe du côté de l'univers physico-empirique, l'unicité du côté de

¹³ Il n'est pas question de dire que l'usage massif de XPRO par les PE est un exemple à suivre. Pour une analyse détaillée de l'algébrisation de la proportionnalité, voir Comin (2000, pp. 123-149). La stabilité de cette procédure (mais toute autre procédure aurait convenu), malgré la diversité des situations, est seulement un indicateur pertinent pour notre étude.

¹⁴ Au sens de Vergnaud (1983, pp. 129-140) qui distingue en outre, dans le champ conceptuel de la proportionnalité, les catégories « produit de mesures » (pp. 134-138) et « proportion multiple » (pp. 138-140) qui n'entrent pas dans notre étude.

l'univers mathématique. L'appréhension de cette unicité, au-delà des diverses formes d'expression sémiotique des rationnels, permet le repérage de structures mathématiques communes à des classes de **situations** physico-empiriques, donc la modélisation. Enfin, pour parcourir toute la diversité de ces situations, il y a lieu de conjuguer la variable 5, « de contexte », avec les quatre autres variables décrites en 2.2. On transformera notamment ces situations en problèmes en jouant sur la variable 1 « de but », relative à la question posée (calcul d'une quatrième proportionnelle, calcul d'un rapport, comparaison de deux rapports...).

Le Schéma 1 qui suit illustre cette complexité au moyen de deux situations physico-empiriques cognitivement fort **différentes**, que l'on peut néanmoins appréhender par un **unique** objet mathématique (par exemple le rationnel « trois-cinquièmes »), admettant lui-même des expressions cognitivement très **différentes**. Le niveau principal de séparation/articulation entre les univers physique et mathématique est représenté par la double flèche épaisse ; le niveau secondaire par les doubles flèches minces.

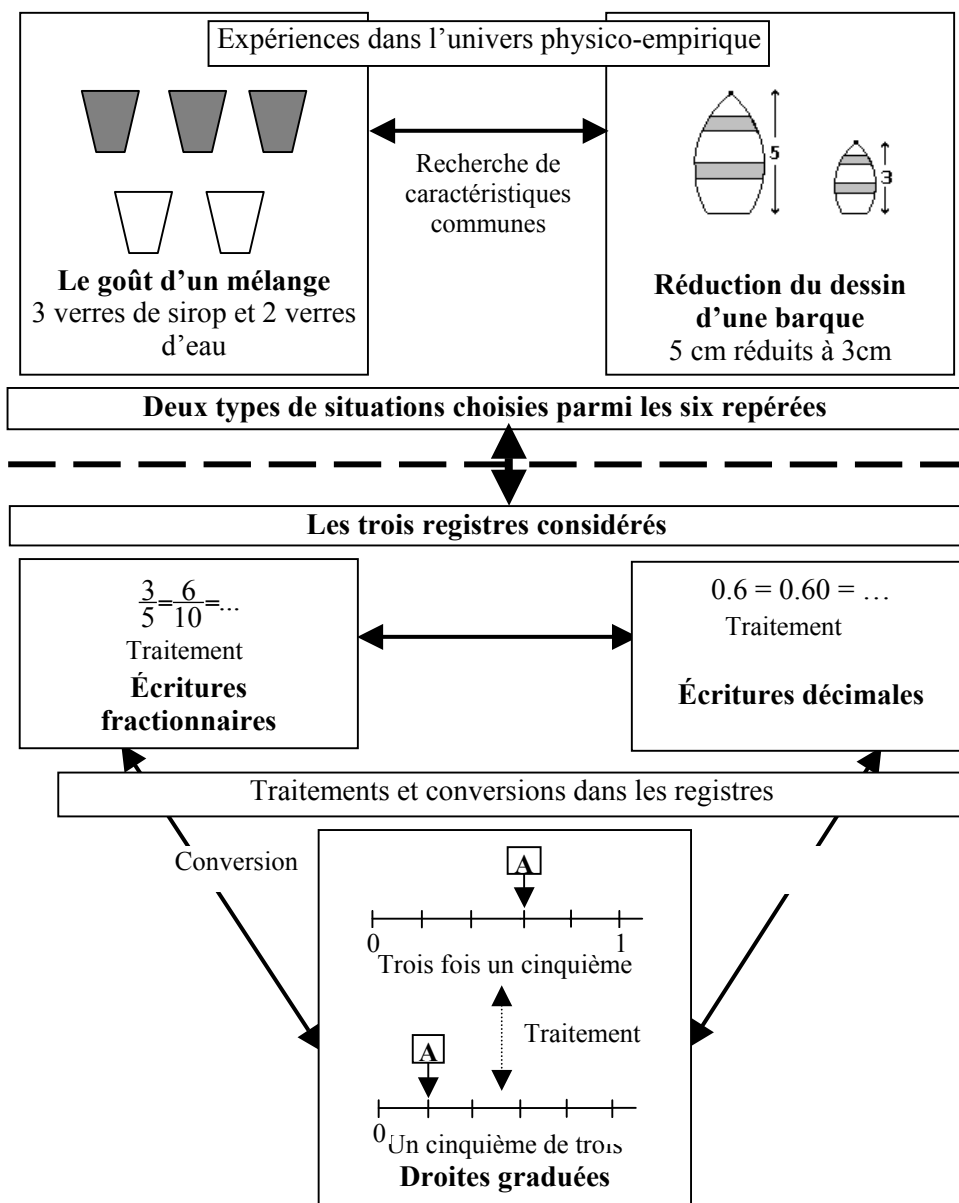


Schéma 1 : complexité de la notion de rapport

5.2. Un exemple de séquence d'enseignement prenant en compte cette complexité

On a tout à gagner en ne rabattant pas, dans l'enseignement, l'univers physico-empirique et l'univers mathématique l'un sur l'autre, tant ils diffèrent par : les modalités envisageables de leur investigation (approche multi-sensorielle et/ou instrumentée réelle ou évoquée pour l'un, mobilisation d'une sémiotique spécifique pour accéder aux objets mathématiques de l'autre) ; la nature des traitements et preuves qu'il est légitime d'y mener (mesures répétées et comparées par exemple pour le premier, théorèmes et règles formelles pour le second).

La question principale est : comment mener concrètement un enseignement qui organise les différents niveaux de séparation et d'articulation évoqués en 5.1 et aboutisse à la reconnaissance, par les élèves, d'un modèle mathématique, la linéarité, permettant d'unifier des classes entières de problèmes ? Un traitement approfondi de cette question sera l'objet d'un autre article. Il nous a paru cependant judicieux de proposer ici, à titre d'exemple, une séquence-type de résolution de problèmes qui devrait apporter quelques éclaircissements sur les contenus et méthodes d'un tel enseignement.

Soit le problème suivant, tiré de Brissiaud (2000, p.48) : Cinq personnes décident de se partager équitablement trois pizzas. Une d'entre elle étant pressée, on décide de faire chauffer la part qui lui revient au four. Quel morceau de pizza doit-on découper ?

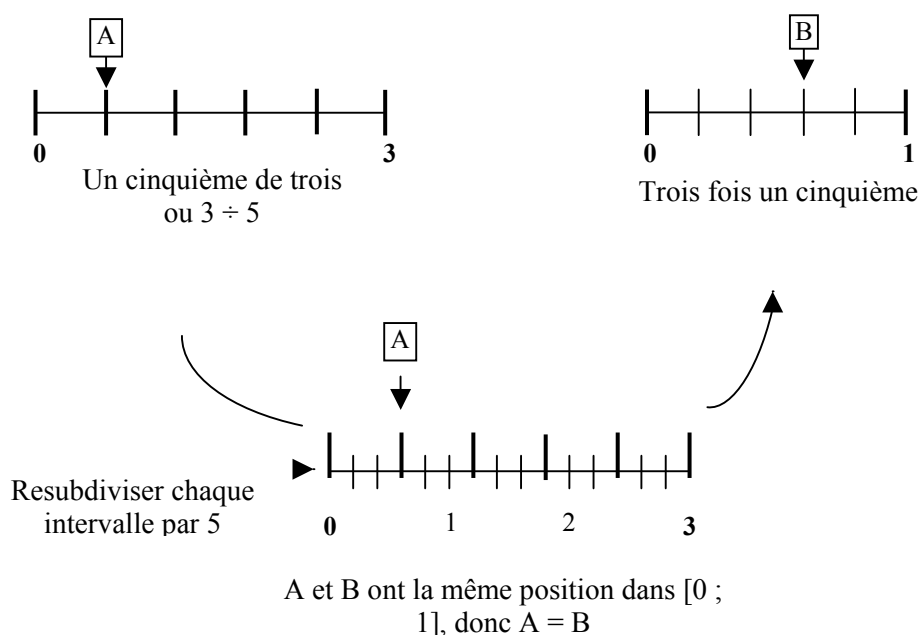
Selon l'analyse de Kieren (1980, p. 122), il s'agit d'un problème de quotient, l'évaluation du résultat dépendant d'une relation partie-tout : 3 parts d'un tout découpé en 5 parts. Mais concrètement, lorsque l'on pose ce problème à des enfants, la plupart découpent des pizzas dessinées en morceaux, par exemple :



Trois pizzas, cinq invités ($3 \div 5$)

Part d'un invité $\frac{3}{5}$

Les gestes de découpage en morceaux et de « recollement » qui sont ici évoqués mettent en jeu plus un sens pratique qu'une pure notion mathématique comme celle de quotient. Selon notre analyse, cette manipulation est un traitement dans l'univers physico-empirique qui permet de reformuler un problème de rapport de deux grandeurs hétérogènes (Quantité de pizzas / Quantité de personnes) en un problème de mesure (mesurer la part d'un invité avec une pizza comme unité). Du point de vue adopté dans cet article, la notion de quotient appartient à l'univers mathématique. Elle peut être abordée, dans un premier temps, indépendamment du problème ci-dessus (principe de séparation), par exemple comme traitement, dans le registre des droites graduées, du problème mathématique suivant : « Compare les deux nombres A et B ci-dessous » :



Ce problème est effectivement posé dans NovOra (Adjage & Heideier, 1998). Il peut se résoudre en ne recourant qu'aux ressources du registre des droites graduées, ainsi qu'il est suggéré ci-dessus.

On pourra enfin conclure cette séquence en ouvrant avec les élèves un « *débat scientifique* » au sens de (Legrand, 2000) : « En quoi les deux problèmes 'parts de pizzas' et 'traitement de $3 \div 5$ sur droite graduée' sont-ils les mêmes ? En quoi sont-ils différents ? » (principe d'articulation). On peut à présent institutionnaliser puis réinvestir, au sens de Douady (1984, p.16), la modélisation par un quotient d'un problème de partage.

6. Conclusion

Nous nous sommes avant tout attaché dans cette étude à **objectiver** la complexité des rationnels, en tant que savoir à enseigner et à apprendre. C'est la raison pour laquelle nous avons peu « visité » l'univers **mental** des élèves, nous bornant à traiter des données d'observation, rapportées par d'autres chercheurs ou par nous-même, et à en déduire la pertinence de certaines variables. Ceci nous a permis d'élaborer des **objets** d'enseignement et de conjecturer l'importance de leurs interrelations. Nous espérons que la prise en compte de ces produits de la recherche par l'enseignement permettra aux élèves de se construire des « *thinking patterns* » au sens de Kieren (1980, p. 134) pertinents. Seul l'examen de productions d'élèves nous permettra d'apprécier le degré de notre réussite.

Nous avons déjà évalué la mise en œuvre des produits de cette recherche par une expérience d'enseignement qui a duré deux années scolaires consécutives (6^e puis 5^e). Le tout est décrit dans un article actuellement en phase de révision après soumission à « Educational Studies in Mathematics » (ESM). Cet article compare l'évolution des élèves d'une classe dite « partiellement expérimentale » (contenus et méthode d'enseignement usuels mais stricte délimitation du corpus de problèmes physico-empiriques aux six types décrits ici, environnement papier/crayon) à celle des élèves d'une classe dite « pleinement expérimentale » (mise en œuvre systématique des résultats de la présente étude, environnement ORATIO et NovOra pour l'étude des trois registres). Notre hypothèse est que les productions des élèves de la classe « pleinement expérimentale » devraient se rapprocher quantitativement et qualitativement de celles de la population de PE, alors que celles de la classe « partiellement expérimentale » devraient rester plus proches de celles de la population des élèves de 5^e étudiée dans le présent article.

L'exemple proposé en 5.2 permet d'envisager les grandes lignes du protocole d'enseignement de la classe « pleinement expérimentale ». Il repose non sur des injonctions à séparer et articuler, mais sur des confrontations de problèmes, de méthodes de résolution spontanées ou provoquées, de prises de conscience suscitées par des débats scientifiques entre les élèves arbitrés par le professeur, d'institutionnalisations. La droite graduée, avec échelle simple ou double, est centrale dans cet enseignement. Grâce à l'environnement informatique, nous avons pu la munir de ressources qui en font un véritable registre sémiotique au sens de Duval (1995, p 21; 2000, pp. 62-66). La droite graduée ainsi équipée fonctionne à la fois comme registre de transition entre les univers physique et mathématique d'une part, entre les registres fractionnaire et décimal d'autre part. Mais c'est aussi un moyen puissant d'interpréter et de traiter tout problème appartenant à une des six catégories que nous avons décrites, ainsi que l'exemple 5.2 le laisse entrevoir. C'est peut-être enfin un moyen de « réconcilier » la mise en rapport des grandeurs (Euclide utilisait une représentation linéaire des grandeurs) et la fonction linéaire,

ce qui est un objet de débat depuis les années 80 (Vergnaud, 1983, pp. 142-149 ; Brousseau, 1986, pp. 39-62 ; Comin, 2000, p. 180...).

Nous pouvons à présent préciser ce que nous entendons par un modèle d'enseignement des rapports, des rationnels et de la proportionnalité « structuré et compact » (voir l'introduction). Les deux axes physique et mathématique, eux-mêmes spécifiés au moyen de six types de problèmes et trois registres, permettent de structurer l'enseignement concerné. La droite graduée introduit de la cohésion à l'intérieur de chaque axe et crée du lien entre les deux axes. Elle peut fonctionner comme « point de compactification » de l'univers des rapports, qu'on l'observe du point de vue de l'enseignement ou de l'apprentissage.

Signalons enfin pour terminer que nos travaux sur la modélisation des problèmes verbaux ne se restreindront pas au domaine de la proportionnalité. Nous entamons actuellement un nouveau cycle de recherche, exploitant des hypothèses analogues, sur la mise en équation de problèmes du premier degré.

Annexe 1 : Le questionnaire de l'enquête

Pour chaque exercice, écrire les calculs, explications et dessins aux endroits prévus.

Item1 : MES

En mettant bout à bout 8 baguettes identiques B, j'obtiens la même longueur qu'en mettant bout à bout 15 baguettes identiques b. Exprimer la longueur d'une baguette B par rapport à la longueur d'une baguette b.

Item2 : MEL

Pour obtenir un gris foncé, un fabricant recommande de mélanger dans un seau 5 pots de peinture noire avec 8 pots de peinture blanche. J'ai versé 11 pots de peinture noire dans le seau. Combien de peinture blanche dois-nous verser pour obtenir le même gris foncé ?

Item3 : HET

4 litres de miel pèsent 5 kg. Combien pèsent 9 litres de miel ?

Item4 : FREQ

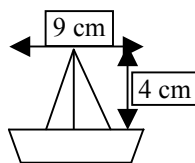
Un joueur de basket réussit en moyenne 3 paniers sur 4. Combien de paniers peut-il espérer réussir en 25 lancers ?

Item5 : CHGTU

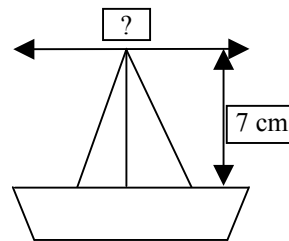
On verse du lait dans des verres identiques. Avec 4 petites bouteilles de lait, on remplit exactement 9 verres. Et avec 13 petites bouteilles de lait ?

Item6 : DIL

J'agrandis le dessin d'un voilier en le passant dans un photocopieur. La hauteur du mât est de 4 cm sur l'original. Elle est de 7 cm sur la photocopie. Le pont a une longueur de 9 cm sur l'original. Quelle est sa longueur sur la photocopie ?



Original



Photocopie

Annexe 2 : Effectifs d'étudiants ayant mobilisé telle procédure pour tel item

PE	MEL	HET	FREQ	CHGTU	DIL	Total
COEF	6	4	39	6	25	80
MULT	11	3	7	4	4	29
ADD	0	2	2	2	0	6
LICO	0	0	1	2	0	3
XPRO	77	78	53	87	74	369
UNIT	3	21	2	3	1	30
FRAC	2	0	2	0	0	4
ADEX	1	0	0	0	1	2
ADIN	2	0	0	0	0	2
APPRO	2	0	0	0	0	2
ALEA	0	0	0	0	0	0
0	4	1	4	5	5	19
ELSE	2	1	0	1	0	4
Total	110	110	110	110	110	550

Tableau 7 : Effectif des PE ayant mobilisé telle procédure pour tel item
(se rapporte à Graphique 1)

5 ^e	MEL	HET	FREQ	CHGTU	DIL	Total
COEF	2	6	6	6	19	39
MULT	9	11	25	15	1	61
ADD	0	3	6	0	0	9
LICO	3	11	0	9	0	23
XPRO	1	4	1	1	1	8
UNIT	8	26	2	16	2	54
FRAC	0	0	8	0	1	9
ADEX	35	13	9	13	69	139
ADIN	28	3	0	5	2	38
APPRO	5	8	6	10	1	30
ALEA	12	13	24	19	8	76
0	18	21	27	26	15	107
ELSE	0	2	7	1	2	12
Total	121	121	121	121	121	605

Tableau 8 : Effectif des élèves de 5^e ayant mobilisé telle procédure pour tel item
(se rapporte à Graphique 2)

Bibliographie

- ADJIAGE R., & HEIDEIER A., 1998, *Didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.
- ADJIAGE R., 1999, *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.
- ADJIAGE R. et PLUVINAGE F., 2000, *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble, Vol.20.1, 41-88.
- ADJIAGE R., 2001a, *Fondements théoriques et présentation des logiciels de la série ORATIO*, Actes du XXVII^e colloque de la COPIRELEM, 309-317, IREM de Grenoble, 100 rue des Mathématiques BP-41, 38402 Saint Martin d'Heres cedex.
- ADJIAGE R., 2001b, *Maturations du fonctionnement rationnel. Fractions et décimaux : acquisitions d'une classe, projets de **programme 2000** pour l'école élémentaire*, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, 7, 7-48.
- ADJIAGE R., 2003, *Registres, grandeurs, proportions et fractions*, Actes du colloque Argentoratum 2002, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, 8, 127-150.
- ADJIAGE R., 2004, *Rationnels, proportionnalité et double échelle dans un environnement informatique*, Actes du XXX^e colloque de la COPIRELEM, 249-270, 19-21 mai 2003, Avignon.
- BEHR M., POST T., LESH R., 1981, *Construct analyses, Manipulative aids, Representational Systems and the Learning of Rational Numbers*, In Proceedings of the fifth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 203-209, Grenoble, France : PME.
- BRISSIAUD R., 2000, *J'apprends les maths*, manuel scolaire CM2, RETZ (éd), Paris.
- BROUSSEAU G., 1981, *Problèmes de didactique des décimaux*, RDM, Vol 2.1, 37-128, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
- BROUSSEAU G., 1986, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.
- BROUSSEAU G. et N., 1987, *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.
- BROUSSEAU G., 1998, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, éditions, Grenoble.
- COMIN E., 2000, *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire*, thèse, Université de Bordeaux 1.

- DOUADY R., 1984, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques, une réalisation de tout le cursus primaire*, Doctorat d'état, Université de Paris VII, Paris.
- DOUADY R. et PERRIN M.J., 1986, *Nombres décimaux, liaison école-collège*, IREM, Université de Paris VII, Paris.
- DUPUIS C et PLUVINAGE F., 1981, *La proportionnalité et son utilisation*, RDM Vol. 2, pp. 166-212, La Pensée Sauvage (éd.), Grenoble.
- DUVAL R., 1993, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 5, pp. 37-65, IREM de Strasbourg.
- DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.
- DUVAL R., 1996, *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
- Duval R., 1998-1, *Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6, 139-163, IREM de Strasbourg.
- DUVAL R., 1998-2, *Signe et objet, questions relatives à l'analyse de la connaissance*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6, 165-196, IREM de Strasbourg.
- DUVAL R., 2000, *Basic Issues for Research in Mathematics Education*, Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Vol 1, 55-69, July 23-27, 2000, Hiroshima-Japan.
- DUVAL R., 2001, *Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres*, Actes du colloque « Journée en hommage à Régine Douady », 83-105, IREM Paris 7.
- FIGUERAS O., FILLOY E. et VALDEMOROS M., 1987, *Some Difficulties which Obscure the Appropriation of the Fraction Concept*, PME XI, vol.1, 366- , Montréal.
- HART K. & SINKINSON A., 1989, *They're useful - Children's view of Concrete Materials*, PME XIII vol. 2, 60- 66, Paris.
- JULO J., 1995, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaire de Rennes.
- JULO J., 2000, *Aider à résoudre des problèmes, Pourquoi ? comment ? quand ?* Actes du XXVII^e Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, 9-28, IREM de Grenoble.

- KIEREN T.E., 1976, *On the mathematical, cognitive, and instructional foundations*, in Lesh R.A. & Bradbard D.A. (eds), *Number and Measurement*, ERIC/SMEAC, 101-144, Columbus.
- KIEREN T.E., 1980, *The rational number construct - its elements and mechanism*, in T.E. Kieren (ed), *Recent Research on Number Learning*, ERIC/SMEAC, 125-150, Columbus.
- LEGRAND M., 2000, *Sciences, Enseignement, Démocratie et Humanisme*, Actes du XXVII^e Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, 9-28, IREM de Grenoble.
- NOELTING G., 1980, *The development of proportional reasoning and the ratio concept*, Educational Studies in mathematics, Vol. 11, 217-253, Cambridge.
- PITKETHLY A. & HUNTING R., 1996, *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, 5-37, Cambridge.
- PLUVINAGE F., 1998, *La nature des objets mathématiques dans le raisonnement*, Annales de didactique des mathématiques, 6, 125-138, IREM de Strasbourg.
- SMITH J. P. III, 2002, *The development of Student's Knowledge of Fractions and Ratios*, 2002 Yearbook, 3-17, NCTM, Reston Virginia.
- STREEFLAND L., 1993, *The Design of a Mathematics Course, a Theoretical Reflection*, Educational Studies in Mathematics, Vol.25, 109-135, Dordrecht, Holland.
- VERGNAUD G. et Laborde C., 1994, *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?*, Hachette Education (ed), 57-93, Paris.
- VERGNAUD G., 1991, *La théorie des champs conceptuels*, RDM vol. 10/2.3, 133-169, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
- VERGNAUD G. et al., 1990, *From Arithmetic to Algebra: negotiating a jump in the learning process*, Proceedings of the Fourteenth PME Conference, 27-34, Mexico.
- VERGNAUD G., 1983, *Multiplicative Structures*, in R. Lesh and M. Landau (eds), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press, 127-174, New York.

ROBERT ADJIAGE

IUFM d'Alsace - 1 rue de Neuvic - 67100 Strasbourg
robert.adjiaage@alsace.iufm.fr

CARL WINSLØW

DÉFINIR LES OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE : LA DIALECTIQUE MATIÈRES – COMPÉTENCES

Abstract. Defining goals of mathematics education: the contents – competencies dialectic

The description of goals of mathematics education has several potential ends, external (justification, declaration...) as well as internal (planning, evaluation...). Although these ends are not independent, the usual forms of description have a tendency to serve but a part of these ends. In this paper, we examine the notion of “competency” as a possible solution to these problems. We also consider some examples of its use especially in the Danish context.

Key words. Mathematics education, curriculum, contents, competencies

Résumé. La description des objectifs de l'enseignement mathématique a plusieurs finalités potentielles : externes (justification, déclaration...), internes (planification, évaluation...). Quoique ces finalités ne soient pas indépendantes les formes usuelles des descriptions ont tendance à ne remplir qu'une partie de ces finalités. Dans cet article, nous examinons si la notion de « compétence » apporte des solutions à ces problèmes, ainsi que des exemples de son usage notamment dans le contexte du Danemark.

Mots clés. Enseignement mathématique, programmes, contenu, compétences.

1. Le problème

Quels sont les objectifs de l'enseignement des mathématiques, et comment les décrire ? Évidemment, la réponse dépend du contexte et de la personne qui répond. Globalement, elle est profondément liée à la *raison d'être* de l'enseignement, qui dépend à son tour – au moins pour le grand public – fortement de la nécessité, pour l'individu, de posséder des connaissances mathématiques afin de réussir dans les formations supérieures ou dans la société en général. Ces besoins sont bien sûr réels, généralement reconnus, et en même temps, assez mal compris. A ceux-ci s'ajoutent les notions, souvent encore moins précises, de valeurs d'une culture mathématique, provenant de perspectives assez diverses : le point de vue historique surtout (c'est un domaine cultivé depuis l'Antiquité), ainsi que les points de vue philosophique (puisant ses racines également dans l'Antiquité, mais aussi dans la pensée d'une multitude de philosophes depuis Descartes et Kant) et idéologique (par exemple, pour la participation du citoyen dans la vie démocratique). Il y a un écart évident entre ces idées générales et la tâche de cerner les objectifs d'un enseignement concret, avec ses choix incontournables de sujets, méthodes, notions *etc.* à enseigner. Souvent, le didacticien doit considérer – comme une partie des

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 131 - 155.

© 2005, IREM de STRASBOURG.

conditions données – les objectifs formulés dans les programmes régissant l'enseignement en question.

Or il y a plusieurs raisons pour se livrer à une réflexion plus approfondie sur la nature des objectifs. La plus importante est la *nécessité de cohérence à travers les systèmes*. Actuellement, la nature des programmes varie énormément en fonction des contextes (niveau, pays, institutions...) – non seulement par ses contenus (ce qui est évident) mais aussi par ses catégories et par la manière employée pour les décrire. Un obstacle que l'on rencontre pour arriver à des catégories communes est le problème du « programme implicite ». Souvent, la tradition joue un rôle au moins aussi important que les prescriptions officielles, même si certains manuels sont obligatoirement utilisés. Surtout, la pratique plus ou moins centralisée des *examens* par lesquelles on évalue les résultats de l'enseignement, a une influence considérable sur la mise en œuvre des programmes dans l'enseignement. Bien que cette pratique soit censée être en accord avec le programme, elle est souvent plus nettement en relation avec les attentes du système éducatif par rapport aux activités liées au sujet enseigné. Dans le cas usuel où le succès de l'apprenant (et de son maître) dépend de ses savoir-faire, les pratiques d'évaluation peuvent être bien plus déterminantes qu'un programme officiel. Plus généralement, les objectifs réellement en jeux sont, en grande partie, *implicites*.

Ces conditions se retrouvent sans doute dans toutes les disciplines scolaires. Nous nous intéresserons à la nature *spécifique* des difficultés – et de la nécessité – à expliciter les objectifs d'un enseignement mathématique. Localement, il s'agit du *contrat didactique* qui, selon Brousseau (1986), reste forcément en partie implicite : que l'enseignant ne dise pas 'ce qu'il faut faire', sous peine de réduire la tâche de l'élève à une simulation, est même une condition pour un enseignement qui vise à développer la compréhension autonome de l'élève. Cela, évidemment, ne veut pas dire que les objectifs locaux ne doivent pas être explicités pour l'enseignant, ou qu'il faut les dissimuler à jamais à l'élève. Mais les objectifs locaux sont continuellement *négociés* dans l'interaction entre les deux parties, en fonction de leurs actions et de leurs décisions. La situation est *asymétrique* dans le sens (et dans la mesure) où l'enseignant 'sait mieux'. Le 'savoir mieux' ne veut pas seulement dire que l'enseignant sait mieux la *matière mathématique*, mais surtout qu'il sait ce qu'il faut *pouvoir en faire*. Et cela nous ramène à un niveau plus global, qui est de savoir si cette potentialité – essentiellement un *potentiel d'action* – possède des traits susceptibles d'être explicités et généralisés. En mathématiques, nous parlons souvent de tels traits, par exemple de 'bien raisonner', de 'focaliser sur l'essentiel', de 'choisir les bons outils', ou de 's'exprimer clairement'. Tout cela, qui a l'apparence d'une généralité banale, ne l'est pas quand on y réfléchit : par exemple, de 'bien raisonner', en mathématiques, fait référence (entre autres) aux contraintes spécifiques des inférences valides dans un raisonnement

mathématique. Il n'y a donc, *a priori*, aucune raison pour ne pas chercher à préciser plus finement de tels 'traits du pouvoir faire'.

C'est finalement en prenant de telles exigences au sérieux que nous arriverons à cerner des objectifs plus globaux de l'enseignement des mathématiques en tant que telles. La matière, sans doute, ne consiste pas en des îlots isolés de notions et de faits variés, avec ses méthodologies particulières pour les traiter. Même les didacticiens se sont peut-être trouvés un peu trop éblouis par la cohérence des structures plus abstraites (relations, transformations) de notre discipline pour vouloir répondre à la question initiale telle qu'elle se pose du point de vue de l'élève : quels sont les objectifs de l'enseignement dans le sens du *pouvoir faire* à atteindre pour l'élève, et surtout, ces objectifs ne sont-ils pas, aussi, munis d'une certaine cohérence spécifique aux mathématiques ? Cette façon de poser la question s'impose pour deux raisons.

Premièrement, on ne peut pas, en dehors de contextes très spécialisés, justifier un enseignement mathématique en se bornant à se référer à des éléments de contenu, surtout si on veut maintenir que l'enseignement mathématique porte bien sur une seule discipline. Certes, pour beaucoup de ceux qui apprennent les mathématiques sans choisir ni la discipline ni la matière, la motivation se trouve ailleurs, qu'elle soit interne ou externe. Et on ne peut pas rendre compte des attentes de la société vis-à-vis de l'éducation mathématique dans les termes de la seule matière enseignée.

Deuxièmement, il faut expliquer comment il se fait que les enseignements de divers éléments (voire de diverses branches) des mathématiques s'articulent entre eux – au-delà de leur interdépendance logique. Par exemple, les pratiques de raisonnement en géométrie euclidienne ne sont pas indépendantes de celles qui ont cours en l'analyse. Il n'y a pas d'ordre nécessaire ici ; quoique la tradition puisse mettre l'expérience d'une pratique avant une autre, le soutien mutuel des deux instances du 'pouvoir raisonner' n'est pas nécessairement dépendant de la structure du contenu.

Dans le reste de cet article, nous allons discuter pourquoi et comment les notions de *compétences* fournissent des cadres possibles pour un traitement plus systématique des problématiques que nous venons d'esquisser. Il est clair que l'on ne peut pas entièrement séparer le traitement théorique de l'emploi pratique de ces cadres, mais nous avons fait le choix d'accorder la plus grande partie de la section principale (2) au premier et de ne présenter pour le second que l'esquisse d'une expérience contrôlée (section 3). Les raisons de ce choix tiennent d'une part à la taille envisagée pour cet article, d'autre part à une estimation de ce qui est susceptible d'intéresser le lecteur au premier chef.

2. La notion de compétences

La notion de *compétences* est à la mode aussi bien dans les sciences de l'éducation (voir par ex. la revue périodique *Education permanente* 1999, no. 140-141) que dans le discours politique (voir par ex. Rychen et al., 2003). Quoique son usage par les différents auteurs de tels discours varie considérablement, il paraît être lié à un changement assez cohérent de la façon dont ceux-ci conçoivent la nature de l'éducation en tant que telle. Qu'on le veuille ou non, il représente en particulier un défi pour l'idée classique que la formation d'un individu consiste essentiellement en l'acquisition d'un certain ensemble de savoirs. Il ne s'agit pas seulement de l'internalisation qui s'opère dans l'acquisition au moment où les savoirs objectifs (déterminés par un certain *canon* de textes, indépendamment des individus) se transforment dans des *connaissances* du sujet. Il s'agit d'une insistance sur le fait que ce qui compte en pratique – et ce qui peut être effectivement évalué – ce sont les *potentiels d'action* de l'individu, liés à ces connaissances mais dépendant aussi des contextes où les actions sont réalisées. Ici les 'contextes' impliquent aussi des *interactions sociales* (dans un milieu scolaire, dans une entreprise etc.) et il s'en suit que les potentiels de l'individu ne sont pas purement individuels – ils dépendent du milieu social, aussi bien pour leur développement que pour leur réalisation. Un changement s'opère donc également par rapport à l'objet de la formation : il ne s'agit plus seulement de l'individu mais aussi des organisations sociales. Finalement, le développement et la réalisation des potentiels d'actions sont considérés comme co-existant dans toutes ces organisations : on réalise ces potentiels et on les développe non seulement dans la vie scolaire mais aussi dans la vie du travail et dans la vie privée. Il y a donc une extension, aussi bien dans le temps que par rapport aux institutions, de la notion de formation : elle n'est plus vue comme une affaire essentiellement liée aux institutions scolaires ou au 'temps de scolarisation', précédant le temps de travail. Ainsi, les objectifs de formation à réaliser dans les organisations scolaires sont considérés dans un système plus large du développement de l'individu et des organisations dont il fait partie.

La réaction des didacticiens face à ces discours n'est pas toujours enthousiaste : *Un ... point de vue, en émergence ... consiste à voir dans une École fortement diluée dans la société civile un réseaux de lieux de diffusion et de validation de compétences variées, constamment et localement redéfinissables, acquises et validées sans référence ni révérence obligée aux savoirs « monumentaux »... Dans une telle problématique, l'École peut prendre l'allure d'une salle des marchés où, loin des trop longs détours de la connaissance « théorique », on gère fiévreusement un « portefeuille de compétences » qu'il convient d'actualiser rapidement pour répondre aux demandes des différents marchés sur lesquels l'individu est censé réaliser sa valeur. (Chevallard, 2002, 54-55).*

Ces propos reflètent aussi un certain dépaysement (non réservé aux seuls didacticiens !) par rapport à la « dissolution institutionnelle » (voulue ou prévue) de l'apprentissage. Que deviennent les notions à la base de la didactique – le milieu, les situations, les contrats – toutes enracinées, au moins dans leur emploi, à l'organisation scolaire et aux savoirs d'une discipline ? Peut-on effectivement formuler les objectifs de la formation avec des notions abstraites comme 'potentiel d'action', organisations sociales, *etc.* ? Où est le savoir mathématique dans tout cela ?

La didactique des mathématiques est, effectivement, particulièrement mise au défi. Le savoir mathématique est certes enraciné dans les milieux universitaires où il est, pour partie, développé, ainsi que dans les milieux scolaires chargés de l'entretenir. Mais par ses interactions avec d'autres savoirs (intellectuels et autres), il est également omniprésent hors du milieu scolaire, et en effet, une grande majorité d'individus n'en éprouve un besoin réel qu'en fonction de cette présence. Il ne s'agit pas, pour le didacticien, d'accepter d'emblée les déplacements des discours sur la formation que nous venons d'évoquer – il s'agit de les préciser, voire parfois même de les corriger, en vue d'identifier ce qu'ils apportent en défis et en ouvertures pour la réflexion sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. En particulier, il s'agit d'examiner – et c'est notre sujet ici – les apports possibles de la notion de *potentiel d'action* (et après précision, de *compétence*) à notre réflexion sur la description des objectifs de l'enseignement mathématique.

2.1. Éléments de matière

Partons de territoires familiers : la *matière* d'un enseignement mathématique se décrit dans les termes de la discipline : équations du second degré, différentiation, homothétie... Plus précisément, parlons d'un *élément de matière* pour désigner le conglomérat de structures conceptuelles et textuelles impliqué par une telle expression : des notions de base, des formes de représentation, des définitions, des méthodes, des théorèmes, *etc.* (voir fig. 1 pour ces structures en fonctions des exemples d'éléments évoqués).

Pour l'enseignant ainsi que pour le didacticien, chacune de ces expressions évoque également une structure mathématique encadrante, des bases théoriques nécessaires, des explications à faire, peut-être des *situations fondamentales* (Brousseau, 1986) pour faire sentir à l'élève la pertinence de la matière en question... bref, de telles étiquettes communément utilisées pour désigner un élément de la matière à enseigner évoquent aussi des éléments auxiliaires pour la mettre en relation avec des pratiques scolaires que l'enseignant est censé initier et gérer.

	Notions de base	Formes de représentation	Définitions	Méthodes	Théorèmes
Équations du second degré	Variable, inconnue, solution...	[symbolisme algébrique] $x^2 + \dots$	Équation de type $ax^2 + bx + c = 0$ où...	Complément de carrés, formules, vérification, ...	Si $b^2 - 4ac \geq 0$, ..., solutions conjuguées, ...
Différentiation	Fonction, variable, ...	f' , dy/dx , ∂f , [tangente], ...	Si a est... $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \dots$	[m. de calcul, approxim., ...]	Si a est un extrem., alors $f'(a) = \dots$
Homothétie	Espace, point, transformation...	[figures géom., symbolismes ...]	Soit $P \dots$ et $k \dots$ $\underline{Cm_C(P)} = k_m \underline{CP}$	Calcul vectoriel, constructions ...	Préservation du parallélisme, ...

Figure 1 : exemples d'éléments de matière et de leurs structures impliquées

La *transposition* de la matière est censée s'opérer par l'interaction de l'enseignant avec l'élève ainsi que dans le travail individuel ou collectif des élèves selon les instructions plus ou moins ouvertes fournies par l'enseignant, basées sur les relations identifiées par celui-ci entre l'élément et la pratique. Quand tout se passe bien, les élèves s'appliquent à comprendre les explications et à faire le travail approfondi suggéré par l'enseignant – on a 'appris la matière', on va passer l'examen pour ce qui la concerne, et on passe ailleurs.

Cela n'est pas une caricature ; bien sûr, les activités proposées aux élèves peuvent viser une compréhension profonde, et pas seulement l'acquisition de quelques techniques pour répondre à des questions standardisées de manière à satisfaire le professeur. Ces activités, quand elles sont bien conçues, peuvent amener les participants à s'engager avec ferveur dans la découverte de principes essentiels. L'attention aux relations multiples d'une matière avec d'autres, déjà travaillées ou à découvrir plus tard, est certainement aussi d'une grande importance pour la conception globale comme locale de l'enseignement. Mais la question reste incontournable : est-ce qu'on peut, même en supposant que tout cela est bien en place, dire que l'on a appris une matière, ou est-ce que l'on n'a pas plutôt simplement vécu des discours et des situations provoquant une réflexion plus ou moins autonome ? Le produit de l'activité peut-il vraiment être décrit par la matière mathématique ? Quand on 'passe ailleurs', est-ce que ce que l'on apporte de l'activité vécue se réduit à des éléments de matière acquis ?

Pour la première question, il est clair que l'on peut, tout au moins, avoir 'appris la matière' plus ou moins bien, avec plus ou moins de solidité par rapport aux situations où l'on peut en faire un usage correct, et avec plus ou moins de stabilité

par rapport au temps ou pour soutenir de nouvelles acquisitions. Une partie de ces aspects des résultats de l'apprentissage peut effectivement être décrite par rapport à des principes, méthodes, résultats *etc.* visés par l'enseignement, et qui ne seront qu'une partie de ceux qui sont disponibles. Certains des choix de ces éléments peuvent effectivement être cruciaux pour les activités envisagées plus tard, selon la structure mathématique des contenus, et il faut donc sans doute veiller à ces relations clairement liées à la matière. Mais reste la pertinence des situations vécues, la solidité des acquisitions de l'élève par rapport au temps et aux situations différentes. Les enseignants expérimentés et avisés savent bien que l'on n'a jamais appris une matière dans un sens définitif. Aucune situation n'est capable d'épuiser la richesse d'une matière. En se référant aux seules caractéristiques de la matière, on ne peut donc pas indiquer les résultats de l'enseignement de façon à la fois vérifiable dans le temps et par rapport aux individus et aux situations.

2.2. Compétences mathématiques spécifiques

Nous appellerons *compétence mathématique spécifique* le potentiel d'action d'un individu lié à un élément de matière et à une classe de situations ; ici, une 'classe de situations' est spécifiée de façon descriptive et non par énumération exhaustive. Ce n'est pas une définition très précise ; mais pour nos propos, elle suffira. Mieux vaut dire ce que nous voulons faire d'une telle 'compétence' :

- la *décrire* dans des termes qui sont accessibles aux personnes concernées, en particulier les enseignants et les élèves,
- dans un sens qualitatif et partiel, *constater sa présence chez un individu* (ou chez un groupe d'individus).

Par exemple, nous pouvons décrire une compétence, spécifique à l'élément « différentiation », comme de pouvoir utiliser la fonction dérivée dans les problèmes d'optimisation, ou encore de pouvoir justifier cet usage. Bref, nous parlons du 'pouvoir faire' de l'individu où le 'faire' consiste à utiliser ses connaissances de la matière par rapport à une classe de situations susceptibles de les mobiliser. Nous pouvons constater sa présence chez un individu dans la mesure où il réussit effectivement à agir de façon convenable dans ces situations. Notons, toutefois, que la compétence spécifique ne se réduit ni à la maîtrise d'une technique associée, ni à des formes de comportement, ni à une connaissance théorique ; elle réside dans le *potentiel de l'individu* de faire usage, dans les situations visées, de tous les éléments de sa connaissance par rapport à l'élément de matière.

Avant de nous perdre dans les abstractions, retournons tout de suite au problème de décrire les objectifs : qu'est-ce que cela apporte de compléter la description des éléments de matière par une spécification des compétences spécifiques à viser ? Le pas n'est pas spectaculaire, dans le sens où nous rendons simplement explicite ce

qui peut sensiblement à la fois constituer de vrais objectifs d'apprentissage (ce qui n'est pas vrai pour les éléments de savoir), et en même temps être effectivement décrit (ce qui n'est pas vrai pour les connaissances individuelles associées). Dans un sens pratique, pourtant, ce pas peut pourtant être déjà important, au moins dans les contextes d'enseignement où, sinon, les descriptions des objectifs se réfèrent aux seuls éléments de matière. Nous en présenterons un cas plus détaillé plus tard ; mais voici quelques effets principaux de cet élargissement des descriptions :

- tout d'abord, celui qui est censé apprendre fait partie de la description, au moins dans un sens idéal, car on s'occupe explicitement de ce qu'il devra, dans une certaine mesure, devenir capable de *faire* ; l'attention se déplace donc, en partie, du domaine de l'institution (savoirs à transmettre par l'enseignant) au domaine de l'élève et de ses actions,
- ce déplacement d'attention se transpose aussi à l'enseignement, qui – de façon officielle ou institutionnalisée – se conçoit pour faciliter et assister le développement de pratiques plutôt que de les « transmettre »,
- la matière n'est plus considérée uniquement dans son objectivité abstraite mais aussi comme base d'une classe limitée d'actions ; on est forcé d'explicitier des priorités réalistes par rapport à l'infinité potentielle de situations qui, normalement, sont liées à un élément de matière – ce qui peut considérablement nuancer la conception de la matière, surtout chez l'enseignant,
- il devient possible de considérer l'évaluation des objectifs au-delà de l'implicite des pratiques habituelles.

La plupart de ces effets ne sont pas des 'déductions théoriques' ; ils visent à systématiser les observations de pratique. Tous sont d'ailleurs observés dans Grønbaek et al. (2004).

Concrètement, ce qui est proposé ici est donc de compléter la description d'objectifs, formulée initialement dans les termes d'éléments de matière, par des *objectifs de compétences spécifiques* (abrégé dans la suite OCS) pour chacun des éléments. La description des OCS sera sans doute un peu abstraite, malgré ses références à des classes de situations ; il est donc nécessaire d'en donner des *exemples illustratifs* (comme des exercices ou des tâches, des problématiques concrètes, ...) tout en précisant qu'ils sont, justement, des exemples.

Ces propositions ne sont pas, je le crois, très surprenantes ; mais selon la façon de les implémenter et selon le contexte, les effets peuvent l'être. Il faut donc les contrôler. Par exemple, un effet qui sera rarement recherché est un effet *behavioriste* où les OCS dégénèrent simplement en des prescriptions pour l'entraînement de certains schèmes d'action ; pour l'éviter, il faut veiller à ne pas

trop restreindre les classes d'action, par exemple à un inventaire de types d'exercices. Un autre effet non désirable sera l'*atomisation* de l'apprentissage, qui pourrait résulter d'un défaut d'attention aux relations et à la coordination des OCS. Le souci d'éviter ces effets (et plus généralement, les effets *réducteurs* ou dégénérés) est une des raisons des considérations de la prochaine section.

2.3. Compétences mathématiques générales

Nous en venons maintenant au point le plus difficile et, sans doute, le plus sujet à controverse de l'article. Posons-le sous forme de question : peut-on parler de compétences mathématiques générales, qui (pour leur définition) sont *indépendantes d'une matière mathématique concrète* ? La réponse naïve est oui, on en parle effectivement (comme nous l'allons voir). La question plus subtile, alors, est : à quelles fins et avec quelles conséquences peut-on envisager d'utiliser de telles notions de compétence dans la description des objectifs de l'enseignement mathématique ?

Avant de présenter et discuter une réponse remarquable à ces questions, développée par M. Niss et autres, indiquons que l'idée de 'compétence mathématique générale', par rapport aux compétences spécifiques discutées dans la section précédente, peut être vue comme une *abstraction* de ces dernières *faite à travers les éléments de matière* (Winslōw, 2001). Une métaphore mathématique de cette position est donnée en fig. 2 (Winslōw, 2004) : il y a *d'abord* des compétences spécifiques, représentées dans la figure comme les points (ou des régions) dans un plan. Celles-ci peuvent se voir comme situées dans un espace bidimensionnel, engendré par *les éléments de matière* et par des formes abstraites de 'potentiels d'action' – ce que nous appellerons les *compétences générales* – définies par la similitudes des formes d'action associées aux compétences spécifiques.

Compétences mathématiques
générales

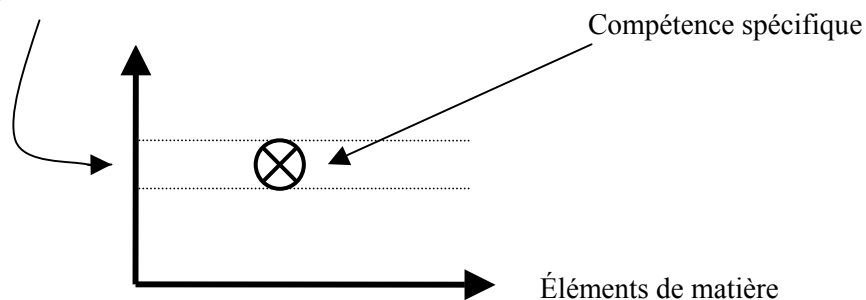


Figure 2 : *Compétences spécifiques par rapport aux compétences générales et matière* (Winslow, 2001, 2004).

De ce point de vue, les compétences générales sont considérées comme une notion *dérivée* de la notion de compétence spécifique. Elles ne sont donc pas premières. Notons aussi que le plan théorique en mathématiques vise normalement tout un ensemble d'éléments de matière et présuppose donc, pour l'apprentissage, une classe de compétences spécifiques intégrées.

2.3.1. *Le modèle Niss*

La notion de compétence (générale) est en revanche première dans un cadre théorique récent, issu de certaines traditions de la didactique scandinave. Elaboré il y a déjà quelques années (cf. Niss, 1999), il est au cœur d'un projet (dit le « projet KOM ») initié et financé par le Ministère de l'Éducation du Danemark (Niss et al., 2002), dont le but est ainsi formulé par le directeur du projet, Mogens Niss :

The fundamental idea of the project is to base the description of mathematics curricula primarily on the notion of a « mathematical competency », rather than on syllabi in the traditional sense of lists of topics, concepts and results. This allows for an overarching conceptual framework which captures the perspectives of mathematics teaching and learning at whatever educational level (Niss, 2003).

Une *compétence mathématique*, pour Niss, est une composante de *l'expertise mathématique* : la puissance d'agir avec intelligence et d'une façon convenable dans des situations comportant une certaine forme de défi mathématique (Niss et al., 2002, 43). A priori cette notion n'est donc qu'un potentiel d'action lié à une certaine forme de défi, voire de tâche. Mais un élément central du cadre consiste dans l'identification de *huit compétences mathématiques*, qui seront majeures, clairement reconnaissables et distinctes (sans être forcément indépendantes ou disjointes). En voici les descriptions sommaires (tirée de Niss et al., 2002 ; cf. aussi Niss, 2003, pour une explication plus détaillée en anglais) :

1. maîtriser les formes caractéristiques de poser et résoudre des questions mathématiques (formes de *pensée* mathématique),
2. pouvoir reconnaître, formuler et résoudre des *problèmes* mathématiques,
3. pouvoir comprendre, évaluer et construire des *modèles* mathématiques (pour les phénomènes non mathématiques),
4. pouvoir suivre, analyser, évaluer et construire des *raisonnements* mathématiques,
5. pouvoir manier diverses *représentations* de phénomènes mathématiques,
6. pouvoir manier les *formalismes* mathématiques,
7. pouvoir *communiquer* par et sur les mathématiques,

8. pouvoir utiliser les *outils* appropriés pour l'activité mathématique.

Selon l'auteur, le choix de ces huit compétences est pragmatique et n'exclut pas, théoriquement, les alternatives : *It just so happens that the present set seems to be able to capture the essential aspects of mathematical mastery reasonably well* (Niss, 2003). Dans le projet KOM, cette affirmation est illustrée par des exemples tirés d'un nombre de contextes d'enseignement mathématique au Danemark, de l'école primaire à l'université. Il faut d'ailleurs ajouter que chacune des compétences est censée être évaluée, chez l'individu, selon trois dimensions : la mesure dans laquelle la personne maîtrise ses aspects caractéristiques, le rayon du domaine de contextes et de situations où il peut les appliquer, le niveau technique de ces applications maîtrisées.

Le projet KOM est à la base de nombreuses initiatives actuellement en réalisation dans le cadre de révisions de programmes au Danemark. Le modèle des huit compétences a été également fondateur pour le cadre théorique à la base de la partie *mathematical literacy* du programme PISA (OCDE, 1999). Le directeur du groupe international d'experts pour cette partie était, d'ailleurs, Mogens Niss.

Étant donné l'influence de ce « modèle Niss », au moins dans la Scandinavie et dans certaines parties de la scène internationale, il faut au moins se poser trois questions :

1. Quelles sont les fondations théoriques et empiriques de ce modèle ? En particulier, quelles sont ses relations (explicites ou implicites) aux théories classiques de la didactique ?
2. Quelles sont ses conséquences – visées, plausibles ?
3. Quelle place accorde-t-il à la matière, au sujet, par exemple par rapport à notre discussion sur les compétences spécifiques ?

Nous ne pouvons, naturellement, donner ici une réponse satisfaisante à ces questions ; en effet, ne serait-ce que pour clarifier leur importance, l'exposé sommaire que nous venons de donner du modèle et de ses applications est très insuffisant. Osons quand même, avant de procéder à une analyse critique depuis notre point de vue, signaler quelques pistes de réflexion.

Il y a, en Scandinavie, une tradition assez longue de considérer l'éducation mathématique dans une perspective politique de *démocratisation* (voir par exemple Melin-Olsen, 1988, pour une référence capitale). Une justification majeure en serait de développer les capacités d'orientation et de participation du citoyen, dans une société de plus en plus influencée par les « applications de modèles mathématiques », que ce soit dans la technologie, dans les formes de description ou de conception de la réalité, *etc.* (Niss, 1994). Pour partie, cette tradition est proche d'une pédagogie optimiste d'émancipation, où la propagation de compétences mathématiques est vue comme une voie (parmi d'autres) pour libérer l'individu de

la manipulation, de l'incompréhension de son environnement, et ainsi de suite. Elle est liée aussi à une vision plus négative de la technologie, vue comme un outil potentiel d'asservissement, et donc à une pédagogie critique (voir par exemple Valero et al., 2002). C'est ainsi une tradition qui refuse de voir l'enseignement mathématique comme un terrain politiquement neutre ; en particulier, elle se veut un défi pour une didactique qui se voit, de façon neutre, au service de la diffusion de savoirs scientifiques.

Pour certains, comme Niss, c'est aussi une tradition qui est fortement liée à l'expérience de nouvelles formes d'enseignement au niveau universitaire, centrées autour de la « pédagogie de projets » pratiquée, depuis le début des années 70, au Centre Universitaire de Roskilde (Niss, 2001). Ces formes se veulent des alternatives aux pratiques de l'université « classique » avec ses cours magistraux, son organisation du cursus selon les domaines mathématiques, *etc.* Il est clair que l'opposition savoirs-compétences est à la base de ces formes : on veut que l'acquisition des connaissances se fasse au fur et à mesure que l'étudiant en éprouve le besoin, selon les exigences d'une problématique qui, par préférence, se situe dans un contexte « réel » (d'où le grand intérêt des modèles pour ces mathématiciens). Naturellement, dans la pratique, il y a plus de nuances ; de nos jours, on donne aussi des cours plus classiques à Roskilde, et les projets plus autonomes font partie de l'expérience des étudiants dans toutes nos universités (et l'ont toujours fait, au moins vers la fin des études). La base idéologique du milieu de Roskilde s'est également adoucie considérablement ; en effet, il a noué depuis quelque temps de fortes relations avec les entreprises privées qui sont, d'ailleurs, assez preneuses de ses diplômés. Le fait que sa production de chercheurs en mathématiques pures est pratiquement nulle choque sans doute peu.

Il y a donc, derrière le modèle Niss, une expérience intéressante et unique d'une conception alternative des études supérieures en mathématiques. Elle n'est pas sans consonances avec le développement récent des programmes de l'école unique du Danemark (couvrant neuf ans de scolarité pour les élèves âgés de 7 à 15 ans), où les applications pratiques de la discipline sont très favorisées au dépens de ses éléments plus théoriques (notamment les démonstrations qui sont presque totalement absentes jusqu'au lycée). Parmi les tendances observées dans les évaluations internationales de compétences mathématiques chez les élèves de moins de 15 ans, on voit donc d'un côté une certaine faiblesse, chez les élèves danois, pour ce qui concerne les aspects formels et théoriques, des résultats un peu meilleurs pour les tâches appliquées, et des attitudes relativement positives et confiantes vis-à-vis la discipline (Weng et al., 2004). On peut supposer que l'application du modèle Niss à un programme d'enseignement des mathématiques devrait renforcer de telles tendances.

Un contrepoids à de tels effets – qui ne sont pas sans éveiller les critiques – est pourtant contenu dans la formulation finale du projet KOM (Niss et al., 2002), qui envisage une structure ‘matricielle’ pour la description d’objectifs de l’enseignement, effectivement assez proche de la fig. 2. Un objectif devra, dans cette structure, se situer par rapport à une des 8 compétences générales ainsi que par rapport à une catégorie (parmi une dizaine) assez large de matières. La progression du programme sera alors considérée aussi par rapport aux grands thèmes de la discipline, même si un motif central et explicite du projet KOM a été de leur ôter le rôle principal dans les programmes.

2.3.2. *Évaluation critique du modèle Niss*

En dépit des expériences que nous venons d’évoquer, le modèle Niss n’est pas sans rappeler le projet des Bourbakistes. Bien sûr, le projet KOM est complètement opposé à ces dérives didactiques qui voulaient que l’organisation du cursus découle, de façon aussi fidèle que possible, d’une analyse de la structure des savoirs scientifiques. Mais le dessein de partir de bases primaires et universelles – cette fois-ci liées à des idées sur l’exercice de la discipline plutôt que sur sa structure interne – est similaire. Ce qui est décrit par les huit compétences est une expertise idéalisée – voulue indépendante des savoirs, des individus et des contextes. Même si on reconnaît qu’elles ne peuvent se passer, dans la pratique, de savoirs quelconques, le point-clé est que ces huit compétences seraient essentielles dans l’expertise par rapport à n’importe quel savoir mathématique. On veut donc, pour ainsi dire, rendre compte de *la connaissance qui peut être exercée* dans des termes objectifs et universels. Il y a, derrière cette volonté, la reconnaissance (déjà soulignée dans les premières sections de cet article) que ni les savoirs ni les connaissances ne peuvent en soi être détectés et évalués, et donc être réellement des objectifs de l’enseignement. Or il est bien évident que cela est aussi le cas pour une compétence générale du genre proposé. Comme nous l’avons vu, on n’a même pas tenté d’avancer des arguments théoriques justifiant le système des huit compétences générales. Il apparaît plutôt comme un système axiomatique de modélisation, évalué par ses usages et ses effets dans la pratique. Nous avons abordé brièvement, dans la section précédente, des conséquences possibles de telles expériences, quoique beaucoup dépendent évidemment des conditions de mise en oeuvre (tout comme dans l’histoire des ‘maths modernes’). Passons quand même à quelques remarques critiques d’un point de vue théorique.

Tout d’abord, le fait de partir, à la manière des Bourbakistes, des structures générales, qui ne sont que des traits communs et substantiels d’éléments plus particuliers, risque d’inverser le rôle du didactique dans le concept de compétence et de l’éloigner de ce qui lui est naturellement premier : les pratiques à mettre en place chez l’élève. La théorie précède, pour ainsi dire, son contenu, au risque de le cacher ou de le banaliser.

Ensuite, les huit compétences ne nous semblent pas très bien définies. Bien sûr, la description de chacune – et encore plus les exemples qui sont fournis dans (Niss et al., 2002) – évoquent des aspects réels et centraux de l'expertise mathématique, quoique presque uniquement dans des termes phénoménologiques. Le problème majeur c'est qu'aucune parmi ces huit catégories ne soit concevable isolément des autres, et que la reconnaissance de chacune, dans les actions de l'apprenti, demande une interprétation pour laquelle aucun outil n'est fourni. On a beau évoquer le spectre du behaviorisme pour se décharger de la dernière critique, l'absence d'outils ne les rend pas moins impraticables pour la vie scolaire. Encore plus grave, me semble-t-il, est le fait que certaines des compétences sont fondamentales pour toutes les autres (même en supposant qu'elles soient clairement définies, ce qui est sans doute un but difficile à atteindre pour un système voulu aussi général) : par exemple, la maîtrise des systèmes de représentation sémiotique, évoqué dans la compétence numéro 5 et étudiée sérieusement, par exemple, dans (Duval, 1995), est indispensable pour n'importe quelle activité liée aux mathématiques, tandis que la maîtrise des processus de modélisation semble beaucoup plus particulière à certaines activités. En mettant tout sur le même plan, on offre en effet une image déconstruite d'une vision qui devrait justement servir à faire voir – et à développer – la cohérence et la totalité de l'expertise mathématique. Nous y revenons dans la section suivante.

Un point plus subtil se situe dans les rapports voulus entre les compétences générales et la matière enseignée. Comme nous l'avons déjà dit, ils dépendent, pour le projet KOM, de la mise en pratique du modèle dans des contextes où certains éléments de matière seraient plus ou moins pertinents (quoique, selon les recommandations du projet, ces éléments ne soient pas prescrits en détail). On admettrait sans doute aussi que les compétences acquises dans un contexte donné (y compris des éléments de matière) soient de quelque façon imprégnées par le contexte, en se gardant bien sûr des positions extrêmes de la théorie de « l'apprentissage situé » (*situated learning* ; voir Anderson, 1997 pour une revue critique). Or en donnant la priorité – le sens – dans l'apprentissage aux compétences générales, comment règle-t-on les raisons diverses pour qu'une matière plutôt qu'une autre soit enseignée ? Ne pourrait-on s'imaginer que les compétences seraient mieux acquises (et cela pour chacune des trois dimensions !) dans des domaines très restreintes de matière (par exemple, la théorie des nombres entiers, ou la seule géométrie euclidienne) ? En effet, le terme 'mathématique' employé pour qualifier et décrire les compétences, est en soi redoutable ; les compétences, par exemple, de raisonnement, ont-elles un sens indépendamment d'un cercle de problèmes et de méthodes liés à un contexte de matière, au-delà des pures structures logiques ? Quelle est la relation entre la capacité à résoudre des problèmes de géométrie et des problèmes d'analyse, au-delà des simples généralités de l'heuristique ?

Bref, en réduisant le rôle des contextes de matière à des terrains nécessaires mais plus ou moins arbitraires pour développer et exercer les compétences générales, on risque de considérer comme des faits accidentels nombre de résultats et de préoccupations de la didactique qui visent les problèmes spécifiques de ces contextes. De plus, tout comme l'approche des Bourbakistes, on se situe par là dans une position *ahistorique* par rapport aux mathématiques (ici, il semble juste de mettre le mot au pluriel !) –les développements historiques de la discipline ne sont guère concevables comme une progression collective sur des compétences générales. Pourtant, toute nouvelle technologie de représentation est liée de façon intrinsèque à des éléments de matière. Même d'un point de vue strictement didactique, il faut se méfier des objectifs d'apprentissage dans lesquels les obstacles notionnels spécifiques sont secondaires. Si ces obstacles ne sont que des accidents sans importance intrinsèque pour les objectifs primaires, une solution tentante serait d'éviter les terrains difficiles. Ce faisant, on arriverait à une conception réductrice de l'apprentissage des mathématiques. Bien sûr, ce n'est pas une conséquence fatale, dans la pratique, des programmes conçus selon ce modèle ; mais il me semble néanmoins que c'est une possibilité qui n'est pas que théorique.

2.4. Les niveaux de description des compétences

Revenons maintenant aux principes que nous envisageons pour la conception de programmes de l'enseignement mathématique. Il faut distinguer au moins les trois niveaux suivants par rapport aux contextes d'enseignement :

- le niveau d'un *programme dans sa totalité*, où les contextes globaux de matière ainsi que les catégories de compétences générales sont les plus importants,
- le niveau d'une *unité d'enseignement* (un cursus par ex. d'une durée de quelques mois), qui est normalement située dans un seul contexte global de matière et où la description principale se fait dans les termes d'objectifs de compétences spécifiques (OCS), tout en veillant à leur cohérence relationnelle ainsi qu'en identifiant leurs relations aux compétences générales du programme,
- le niveau d'une *entité d'enseignement minimale* centrée, typiquement, autour d'un petit nombre de compétences spécifiques, liées entre elles au point d'être inséparables.

La description de ces niveaux ne peut pas se faire strictement dans l'ordre donné, d'autant, comme nous l'avons déjà noté, que les compétences générales visées dérivent des compétences spécifiques du programme. Sans doute le dernier niveau est le plus proche des considérations principales de la didactique : les situations d'enseignement et d'apprentissage en temps réel. Dans beaucoup de contextes, ce

niveau ne figure pas du tout dans les programmes ; dans ce cas, il faut y penser quand même en concevant la description des OCS pour l'encadrement des modules.

Les programmes sont, surtout, des outils de *communication* destinés aux enseignants, aux institutions, aux sujets enseignés (même si ceux-ci sont souvent oubliés !), à ceux qui produisent les matériaux scolaires, aux responsables extérieurs... et ceux-ci seront différemment intéressés par les niveaux que nous venons d'énumérer. L'avantage de se focaliser sur les objectifs *réellement réalisables* par l'enseignement, et ensuite *évaluables* – c'est-à-dire l'accroissement des compétences spécifiques des sujets enseignés – dépend évidemment de l'efficacité de cette communication aux agents concernés. Par exemple, un élève (au moins dès le secondaire) devrait comprendre, au niveau d'une entité d'enseignement, la déclaration des OCS et ses relations avec les activités dans lesquelles il s'engage à ce niveau. Les compétences générales devraient aider à élucider et à expliquer les grands objectifs du programme aux personnes extérieures, même celles qui ne sont pas des experts de la mathématique ou de son enseignement. Il est naturellement très important que tous les niveaux, y compris le deuxième, soient entièrement accessibles et acceptables pour les enseignants.

Ces considérations imposent des conditions importantes à ceux qui ont à rédiger de tels programmes. D'un côté, il faut que la description soit basée sur une analyse didactique de la structure locale comme globale de l'apprentissage, y compris les niveaux épistémologiques et cognitifs; d'autre part, il faut que la communication du programme tienne compte des agents concernés, c'est-à-dire qu'il faut de plus une considération phénoménologique (cf. Duval, 2002) et discursive les concernant.

2.5. Par rapport à l'approche anthropologique

Avant de clore cette section largement théorique, je voudrais signaler quelques parentés qui me sont apparues au cours de la rédaction entre la structure conceptuelle proposée et certaines notions clés de l'approche anthropologique (sans doute plus familières à la plupart des lecteurs qu'à l'auteur). Quelques-unes sont signalées dans la figure 3.

Notions utilisées ici	Notions « parentes » de l'approche anthropologique
Classe de situations	Type de tâche
Méthode	Technique
Élément de matière	Organisation mathématique
Compétence spécifique	Liée aux praxéologies, surtout les blocs pratico-techniques (qui sont, pourtant, dépersonnalisées) ; intégration amenant le plan technologico/théorique (cf. sec. 2.3)
Niveaux de contextes d'enseignement	Hierarchie de niveaux de détermination didactique (Chevallard, 2002, §3)

Figure 3 : quelques similitudes conceptuelles

Je ne vois pas clairement comment situer les compétences (spécifiques ou générales) par rapport à l'approche anthropologique. Une compétence est, dans le sens le plus général et classique, un potentiel chez un individu pour un type d'action (ou de *performance*, cf. Chomsky, 1965), bref un *pouvoir-faire* individuel. Une *praxéologie* dans le sens de Chevallard (1999) se compose de *savoir* (au « sens restreint », théorie et technologie) et de *savoir-faire* (technique lié à une type de tâche) ; c'est une entité *culturelle*. Au cœur des deux notions, il y a donc un *type d'action* (dans un sens large) et les deux visent à articuler les conditions pour l'accomplissement des actions en question. Il y a pourtant, me semble-t-il, au moins deux types de différences majeures dans leur usage : la place accordée aux *agents* (les individus qui agissent) et la qualité épistémologique des conditions envisagées. Pour le dernier point, les composantes de la praxéologie apparaissent explicites à volonté et sont situées dans une hiérarchie simple de quatre niveaux verticaux liant l'action concrète au savoir le plus abstrait. Les compétences, pourtant, sont généralement vues comme fondées sur des systèmes « complexes » de capacités cognitives, dont on décrit surtout l'émergence ; pour le reste, seuls des traits partiels sont explicites (il se peut que l'individu « compétent » ne sache pas du tout rendre compte du « savoir » dont il fait usage, l'exemple classique étant l'usage de « règles » grammaticales dans la langue maternelle). Dans l'approche anthropologique, ce sont plutôt les *agents* qui sont considérés d'un point de vue systémique, au point de disparaître entièrement, selon *l'axiome qu'une personne n'est en fait rien d'autre que l'émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels* (Chevallard, 1992, 91). La complexité d'un tel système reste pourtant abordable, car là encore on se trouve en présence de hiérarchies verticales reliant, par exemple, le niveau d'un sujet mathématique (et donc les types de tâches) avec la société. L'usage courant de la notion de compétence est partagé entre l'usage classique lié à l'individu (comme l'« *ideal speaker* » de Chomsky, 1965) et un usage tourné vers les systèmes sociaux (on parle alors, par exemple, du développement de compétence d'une organisation). Il me semble pourtant qu'il n'y

a là, normalement, que la reconnaissance banale que les compétences individuelles « interagissent » (par les individus, bien sûr) dans un milieu social, et que la somme de ces interactions ne se réduit pas à leurs composants.

3. Un exemple de l'enseignement supérieur des mathématiques

Rappelons les tendances esquissées au début de la section 2, qui sont pour une partie issues des milieux universitaires, mais qui les concernent aussi dans un sens plus large, important pour comprendre le contexte du projet que nous allons décrire. Il est banal de constater que la situation des universités dépend, plus que jamais, des changements qui s'opèrent dans la société, et que ces changements ont des traits de plus en plus communs à travers les pays industrialisés. Les services attendus de l'université ne se limitent plus à fournir des formations et des produits de recherche plus ou moins déterminés par les traditions des disciplines ou des professions. D'une part, l'expertise universitaire se communique de plus en plus par d'autres voies que les textes académiques (destinés principalement aux collègues experts), elle passe surtout par la fonction des universitaires comme conseillers dans une variété de contextes, et par l'usage grandissant d'avis d'experts dans les médias à propos de questions d'actualité et d'intérêt public. D'autre part les formations sont de nos jours l'objet d'évaluation et de réformes toujours plus fréquentes, fondées sur des attentes et des analyses d'origine souvent extérieure au milieu universitaire, susceptibles de définir la formation. La notion de compétence est centrale dans la communication entre la société et l'université sur ces matières ; au Danemark, les universités sont depuis quelques années soumises à la contrainte (qu'elles ont généralement acceptée) de décrire leurs formations et leur développement du personnel en termes de compétences visées. En particulier, les *programmes* des formations universitaires (ainsi qu'aux niveaux antérieurs) sont actuellement en réécriture sous cette contrainte fixée (avec d'autres) par arrêtés ministériels. Ce n'est donc pas un choix libre, et l'option d'adopter une attitude défensive ou offensée ne me semble ni juste (pour les raisons déjà discutées), ni sage (pour des raisons pragmatiques évidentes). Au contraire les milieux universitaires devraient profiter des conditions pour clarifier leurs priorités.

Cela affecte aussi le rôle de la didactique par rapport à un enseignement universitaire qui doit faire face à ces demandes, et d'autres, de professionnalisation. Par conséquence, toutes les universités danoises ont établi un ou plusieurs centres ou instituts pour la recherche et le développement didactique. Le centre situé à la faculté des sciences de l'Université de Copenhague est parmi les plus récents. Il publie, outre des textes de recherche habituels, une série de fichiers pratiques, intitulé *Didaktips*, dont le premier (Grønbæk et al., 2003) est un « guide de description de compétences », destiné aux enseignants comme aux auteurs des nouveaux programmes qui sont en rédaction à la faculté depuis 2003. Les principes

énoncés dans ce texte se mettent progressivement en œuvre à travers la faculté ; il est basé en partie sur le projet que je vais brièvement esquisser dans cette section (pour plus de détail des analyses et des résultats, voir Grønæk et al., 2004).

3.1. Contexte du projet

Il s'agit d'un projet de développement, réalisé pendant l'automne 2002 et continué pendant l'automne 2003, d'un cours d'analyse situé dans la deuxième année du programme de mathématiques pures à l'Université de Copenhague. La description officielle du programme en vigueur jusqu'en 2003 était la suivante.

Analyse mathématique : espaces métriques, continuité ; espace de Hilbert ; analyse de Fourier ; équations différentielles partielles.

A ceci s'ajoutaient les cadres prescrits pour l'examen, consistant en deux parties : une épreuve écrite suivie d'une épreuve orale (quelques semaines après). Une seule note est donnée pour l'ensemble de l'examen.

Bien sûr, la « tradition » ainsi que certains faits en disent plus. Le cours est suivi par environ 200 étudiants chaque année (redoublants compris). Une raison pour s'y intéresser est le taux d'échec relativement élevé du cours : en 2001, environ 50% des inscrits au cours ont passé l'examen final. Le cours est réputé difficile et beaucoup d'étudiants le remettent à la troisième année d'étude. Le cours est pourtant une condition d'accès pour plusieurs cours plus avancés du programme « bachelor » (licence).

L'enseignement se fait, comme dans tous les cours du niveau élémentaire, sur 15 semaines et sous deux formes : les *cours magistraux* (2 fois 2 heures par semaines), et des *séances d'exercice* (1 fois 3 heures par semaine). Seul le cours magistral est dispensé par le professeur responsable du cours, les séances d'exercices étant généralement conduites par des étudiants plus avancés dans leurs études (les « instructeurs »).

3.2. L'ingénierie

Nous avons identifié et analysé un complexe de facteurs qui, avec plus ou moins d'évidence, semble contribuer au dysfonctionnement de ce cours, dont voici des traits principaux :

Tout d'abord, *la matière enseignée* est réellement « difficile » pour le public visé, dans le sens qu'elle représente un saut à plusieurs niveaux : celui d'abstraction (antérieurement les étudiants ont étudié l'analyse 'concrète' des fonctions et des espaces vectoriels à dimension finie), celui de niveau technique (surtout en matière de raisonnement), celui d'indépendance et de niveau théorique du travail requis par

l'étudiant. Ces « sauts » sont peut-être inévitables en général si on veut faire de l'analyse moderne.

Les étudiants, en général, ont du mal à se former une compréhension autre que locale de la matière, et ont souvent recours à des stratégies peu pertinentes (comme la mémorisation des preuves en guise de préparation à l'examen oral). Ils n'arrivent pas non plus, pour la plupart, à percevoir un sens plus global de la matière et des méthodes pour la traiter, ni à les maîtriser de manière à pouvoir en faire usage au-delà des tâches simples et connues.

Une partie des dysfonctionnements peuvent être localisés dans l'enseignement même : le cours magistral tend à vouloir « couvrir » la matière abstraite (tous les théorèmes et preuves sont passés en revue sur le tableau, dans une forme très proche du texte qu'il faut lire) ; les séances d'exercices se limitent souvent à des présentations, par l'instructeur, de solutions que les étudiants n'ont même pas tenté de faire par eux-mêmes. Il y a donc une passivité tolérée et renforcée chez les étudiants par des contrats didactiques dégénérés.

Finalement, les étudiants ont tendance à se focaliser sur la maîtrise purement formelle de procédures et de techniques liées aux formes de représentation, de façon à ne pas voir les relations entre les représentations d'un même objet sous des formes différentes (cf. Duval, 1995, 67). Par conséquent ils sont souvent incapables par exemple de suivre même les pas simples d'un raisonnement (au-delà de calculs), et encore plus de les produire.

L'identification et l'analyse de ces difficultés nous ont amenés à introduire plusieurs changements dans la réalisation du cours, en partant d'une description nouvelle de ses *objectifs* (consistante avec la liste de thèmes mathématiques mentionnées plus haut, mais – dans le sens de la fig. 2 – « orthogonale » à ces thèmes) : une explication des compétences *générales* visées, dérivée d'une description des OCS par rapport à une énumération beaucoup plus fine des éléments de matière. Chaque OCS est de plus illustré par des exemples d'exercices où la compétence spécifique peut se manifester de façon « typique ».

Ensuite, comme l'évaluation doit correspondre aux objectifs, et comme l'évaluation est toujours déterminante pour une grande partie des comportements dans l'enseignement même, nous avons annoncé des changements de *contenu* (mais non de forme) pour l'examen : l'épreuve écrite serait liée de façon très visible aux OCS, dans le sens où les questions posées viseraient clairement un seul OCS (ou, moins souvent, deux ou trois). Par contre, l'épreuve orale, au lieu de viser essentiellement la capacité de l'étudiant à reproduire une partie du texte (comme un théorème majeur et sa démonstration), est consacrée à la présentation de *projets thématiques* élaborés, par des groupes d'étudiants, dans le courant du cours. Ces projets, de nature théorique mais avec des questions de difficulté variée (y compris

par le degré d'ouverture), visent à la *coordination* de compétences spécifiques autour d'un thème d'analyse voisin (et dépendant) de la théorie présentée dans le texte des manuels, mais non traité explicitement au moins pour les problématiques posées. La consigne pour chaque projet était accompagnée d'une explication de sa pertinence pour certains OCS ainsi que de ses buts par rapport aux compétences générales du cours. Nous ne pouvons, ici, entrer dans tous les détails de cette formule d'évaluation, mais le point à retenir est qu'elle remplace, pour l'évaluation de la maîtrise de la théorie, la présentation de raisonnements fournis dans un manuel par des raisonnements élaborés par les étudiants eux-mêmes.

L'enseignement, également, a été réorienté de plusieurs façons en direction des objectifs précisés, pour faciliter le travail des étudiants en vue de les atteindre et, par conséquent, réussir à l'examen. Le cours magistral a été focalisé sur ce que doivent faire les étudiants, en montrant l'exemple d'une lecture détaillée d'un extrait de manuel, en explicitant les grandes lignes du développement théorique et en fournissant des liens entre la théorie, les exercices et les projets thématiques à travailler par les étudiants. Les consignes pour les séances d'exercices ont été complétées par une indication des OCS correspondants aux exercices posés, quoique dans des termes très concrets, pour faire face à une question souvent oubliée sinon : à quel sens – quel apport visé – correspond l'étude de ce problème ? On a indiqué aux instructeurs de focaliser l'attention des étudiants sur l'objectif des tâches individuelles, et de discuter plutôt les points difficiles des tâches que de fournir une présentation linéaire de leurs solutions.

Prenons un exemple pour illustrer ce point. Une tâche tirée du manuel propose trois fonctions, comme $f(a, b) = |a - b|/(1 + |a - b|)$, et il faut prouver qu'elles définissent des distances sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Pour ce faire, il faut considérer pour chaque fonction les axiomes qui caractérisent une distance. Dans l'expérience du travail fait lors de séances, la complexité de certains des calculs requis a tendance à dissimuler le principe cherché au point de faire disparaître, pour l'étudiant, le sens de l'exercice (essentiellement, la vérification des conditions axiomatiques comme moyen de reconnaître les distances). Bien expliciter et focaliser l'attention en classe sur l'OCS correspondant et appliquer le principe en question semble bien plus efficace que de multiplier les exemples ou les détails présentés.

En outre, une partie du temps des séances a été consacrée au travail sur les projets thématiques dans des groupes formés par les étudiants et sous la guidance de l'instructeur. Ainsi, dans ce contexte aussi, l'organisation de l'enseignement a été déterminée par un souci de promouvoir et de faciliter le travail autonome des étudiants, plutôt que de nourrir l'illusion (particulièrement inappropriée dans un cours universitaire !) que l'enseignement vise à le rendre facile voire même superflu.

3.3. Résultats et perspectives

Le projet s'est étendu sur deux années consécutives (automne 2002 à automne 2003), avec des modifications surtout pour la forme et le contenu des projets thématiques pour la deuxième année. Voici des résultats principaux (tirés de Grønbæk et al., 2004) :

- Les étudiants ont beaucoup apprécié la formule des projets thématiques pour l'examen, la trouvant plus juste et satisfaisante ; en même temps, surtout la première année, ils ont trouvé la charge de travail très (souvent trop) lourde. Il apparaît que ce sont les étudiants plutôt forts qui sont les plus enthousiastes pour cette forme.
- Contrairement aux craintes de certains, il n'y a pas eu de problèmes de 'travaux de copie' dans le contexte des projets ; au contraire, une grande variété d'approches et de niveaux d'ambition s'est montrée dans les prestations écrites comme orales offertes par les étudiants à l'examen.
- Les instructeurs n'ont pas toujours suivi (ou compris) la nature des consignes pour les sessions d'exercices ; ils ont alors, surtout en première année, préservé certains des traits problématiques décrits précédemment.
- L'examen de la première année s'est déroulé à la satisfaction des examinateurs externes (certains ont même été très enthousiastes de la nouvelle formule, y voyant une solution à des problèmes classiques chez nous). Les résultats ont été meilleurs pour la moyenne des notes obtenues tandis que le taux d'étudiants présents n'a pas significativement changé. (Pour la deuxième année les résultats sont nettement meilleurs sur ce dernier point, avec un niveau de notes restant amélioré.)
- Il y a une très forte augmentation du contact entre les enseignants et les étudiants : davantage de questions posées, davantage d'usage des offres de consultation, notamment en relation avec les projets thématiques.

La description du cours a été utilisée activement seulement par une partie des étudiants. Il paraît décisif pour son rôle dans le cours qu'elle soit activement communiquée dans ses contextes spécifiques, par exemple en précisant le but d'une activité proposée. Certains (étudiants comme instructeurs) ont du mal à utiliser la description en soi, et il paraît vraisemblable que celle-ci *dans sa totalité* ait un rôle principal comme instrument d'ingénierie. Il faut donc bien faire attention aux modalités de sa communication, plus locale, aux étudiants et même aux instructeurs impliqués.

Une conclusion plus globale, peut être attendue mais à souligner tout de même, est que la description en soi ne fait pas de miracles ; il faut qu'elle soit introduite grâce à des formes de travail et d'évaluation adaptées. Aussi, la focalisation sur les

objectifs de compétences – et donc sur le travail autonome de l'étudiant – doit se faire avec un souci de poser des buts réalistes et raisonnables du point de vue de l'étudiant (ce souci reste implicite et donc à la merci de l'intuition quand les objectifs sont formulés par rapport au seul contenu à « couvrir »).

Pour l'enseignement supérieur des mathématiques, c'est peut-être surtout le rapport des étudiants avec les parties les plus théoriques de la matière qui est transformé par notre approche. Il faut souligner que le travail visant à développer les compétences spécifiques s'est fait initialement dans des contextes assez fermés, et ensuite dans des contextes plus libres (pour intégrer les compétences spécifiques, et pour développer l'autonomie du sujet dans ses rapports avec la matière). Notons aussi que le contenu officiel du cours, ainsi que la plupart de ses formes, n'ont pas changé. La plupart des modifications ont simplement contribué à améliorer qualitativement le travail des étudiants dans un cadre ordinaire. Cela résulte en partie de la focalisation de l'attention des professeurs sur des objectifs globaux du cours (comme, potentiellement, du programme) par rapport à ce travail – notamment ceux qui concernent l'expression mathématique des étudiants, et leur choix autonome de méthodes et de niveaux – qui sont habituellement moins explicites voire totalement ignorés. Le manque de familiarité des étudiants comme de certains des instructeurs avec le discours d'accompagnement serait susceptible d'être réduit par une généralisation de cette approche à tout le programme et à toutes ses pratiques. Après tout, il s'agit de renforcer chez toutes les personnes impliquées la compréhension des rationalités de l'apprentissage et du travail requis de l'étudiant.

Bibliographie

- ANDERSON John R., 1996, Situated Learning and Education. *Educational Researcher* **25** (4), 5-11.
- BROUSSEAU G., 1986, Fondations et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7** (2), 33-115.
- CHEVALLARD Y., 1992, Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12** (1), 73-112.
- CHEVALLARD Y., 1999, L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19** (2), 221-266.
- CHEVALLARD Y., 2002, Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In: Dorier, J. L. et al. (éds), *Actes de la 11^e école de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHOMSKY N., 1965, *Aspects of the theory of syntax*. Cambridge: MIT Press.
- DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern : Peter Lang.
- DUVAL R., 2002, Quel ou quels point(s) de vue pour analyser la connaissance scientifique dans une perspective d'enseignement et d'apprentissage? (Manuscrit)
- GRØNBÆK N. & WINSLOW C., 2003, *Kompetencebeskrivelser i universitetets virkelighed. Didaktips* **1**, Centre de Didactique des Sciences, Université de Copenhague.
- GRØNBÆK N. & WINSLOW C., 2004, Developing and assessing specific competencies in a first course on analysis. Manuscrit en lecture.
- MELIN-OLSEN S., 1988, *The politics of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- NISS M., 1994, Mathematics in society. In R. Biehler et al., *Didactics of Mathematics as a scientific discipline*, 367-378. Dordrecht: Kluwer.
- NISS M., 1999, Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. *Uddannelse* **9**, 21-29.
- NISS M., 2001, University mathematics based on problem-oriented student projects : 25 years of experience with the Roskilde Model. In: D. Holton (éd) *Teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI study*, 153-165. Dordrecht: Kluwer.

NISS M & JENSEN T., 2002, (éds) *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Copenhagen : Undervisningsministeriet.

NISS M., 2003, Mathematical competences and the learning of mathematics: the Danish KOM-project.

Trouvé le 31 décembre 2003 à l'adresse

http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf

OCDE, 1999, *Measuring student knowledge and skills – a new framework for assessment*. Paris: OCDE, Programme for International Student Assessment (PISA).

RYCHEN D. & SALGANIK L., 2003, (éds) *Key Competencies for a Successful Life and a Well-Functioning Society*. Hogrefe & Huber.

VALERO P. & SKOVSMOSE O., 2002, (éds) *Mathematics education and society. Proceedings of the third international Mathematics and Society conference*. Copenhagen: The Danish U. of Education.

WENG P. et WINSLØW C., 2004, The Nordic countries in international comparisons. In B. Dahl Sørensen et al. (eds.), *Mathematics education – the Nordic way*, pp. 95-98. Trondheim: NTNU.

WINSLØW C., 2001, Two dimensions in the conception of mathematics in tertiary education. *Proceedings of third Nordic Conf. on Math. Education*, Kristiansstad, Suède, 2001.

WINSLØW C., 2004, Hvad skal vi med matematikdidaktikken ? In K. Schnack (éd.), *Didaktik på kryds og tværs*, 325-344. Copenhagen: Presses Univ. Danoises de l'Éducation.

CARL WINSLØW

Centre de Didactique des Sciences
Université de Copenhague, Danemark

MARÍA TRIGUEROS et ASUMAN OKTAÇ

LA THÉORIE APOS ET L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE*

Abstract. APOS Theory and the Teaching of Linear Algebra

In this article we present the APOS (Action - Process - Object - Schema) theoretical framework and we explain its use in the case of a research project involving mental constructions that linear algebra students make while learning this subject. To illustrate the use of the theory we have chosen the concept of vector spaces, as it is one of the fundamental concepts of linear algebra and since in the approach that we describe, it constitutes the beginning of an introductory course.

Keywords. APOS theory, linear algebra, vector spaces.

Résumé. Cet article a pour but de présenter le cadre théorique APOS (Action – Processus – Objet – Schème) et d'expliquer son usage dans le cas d'un projet de recherche concernant les constructions mentales chez les étudiants en algèbre linéaire. Pour cela, nous avons choisi le thème des espaces vectoriels, car c'est un des concepts de base de ce domaine mathématique et, de plus, dans l'approche que nous décrirons, il constitue le début de l'enseignement dans un cours introductif.

Mots clés. Théorie APOS, algèbre linéaire, espaces vectoriels.

1. Antécédents

L'enseignement de l'algèbre linéaire, et surtout les difficultés des étudiants lors de l'apprentissage des concepts abstraits de ce domaine mathématique, ont reçu l'attention de plusieurs chercheurs. De nombreux travaux de recherche concernant les différents aspects de son enseignement et son apprentissage ont été publiés.

Sierpinska et ses collaborateurs se centrent sur les modes des pensées synthétique et analytique, comme ceux des pensées théorique et pratique et nous expliquent comment les objets d'algèbre linéaire tels les systèmes d'équations linéaires, changent de sens suivant le mode qu'on utilise pour résoudre des problèmes. Les différentes interprétations qui sont requises pour le même objet constituent une source de difficultés pour les débutants qui ont peu l'expérience des transitions qu'il faut faire pour comprendre ces différents aspects. (Sierpinska, 2000 ; Sierpinska, Nnadozie et Oktaç, 2002).

Les chercheurs français (Dorier, Robert, Robinet, Rogalski) nous parlent de l'obstacle du formalisme. Cet obstacle se manifeste chez des étudiants qui

* Ce projet a été partiellement subventionné par le projet CONACYT 2002-C01-41726.

manipulent des nombres, des vecteurs, des équations, des coordonnées, *etc.* en se submergeant "sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux". Ces auteurs concluent que "pour une majorité d'étudiants, l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter". D'autre part, ils nous préviennent de la difficulté de trouver des situations au niveau des étudiants où les concepts d'algèbre linéaire joueraient le rôle d'outil pour résoudre des problèmes. Ce fait est lié avec la nature généralisatrice et unificatrice de ce domaine, et ces auteurs suggèrent d'autres approches comme celle du 'levier-meta' pour introduire et développer les concepts plus abstraits d'algèbre linéaire. (Dorier, et al., 1997).

Les préoccupations (sur l'enseignement de l'algèbre linéaire) d'un groupe de chercheurs, mathématiciens et professeurs universitaires aux États Unis, ont donné lieu à une publication qui apporte des connaissances sur les études concernant les problèmes didactiques et présente des suggestions d'enseignement (Carlson, et. al., 1997).

Une autre approche qui est en train d'être utilisée dans la recherche cognitive en algèbre linéaire est le cadre théorique APOS développé par Ed Dubinsky et le groupe RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) (Asiala, et. al., 1996). Dans cette approche l'intérêt se porte sur les constructions mentales que les étudiants peuvent faire pour apprendre des concepts mathématiques. Le chercheur travaille d'abord sur la description de ces constructions. Il élabore ensuite des activités pédagogiques susceptible de permettre leur mise en place chez les étudiants et de faciliter leur emploi. Dans cette approche, une manière de s'assurer que les étudiants fassent les constructions indiquées résulte du recours à l'ordinateur ; plus spécifiquement, les étudiants "construisent des implémentations des concepts mathématiques en écrivant des programmes". (Dubinsky, 1997).

Selon Dubinsky, l'enseignement de l'algèbre linéaire ne doit pas éviter le formalisme de celle-ci. A son avis, les approches où on essaie de construire les concepts abstraits à partir de concrétisation et à travers des applications ne sont pas efficaces. Tout au contraire, il faut d'abord construire la structure générale ; les objets concrets suivront comme des exemples particuliers. "L'abstraction est l'essence des mathématiques" dit Dubinsky et selon lui s'éloigner de l'abstraction dans l'enseignement de l'algèbre linéaire n'est ni nécessaire ni désirable. C'est ainsi que dans le manuel d'algèbre linéaire qui a été écrit en utilisant le cadre APOS on introduit d'abord les espaces vectoriels.

Dans l'approche que le groupe RUMEC utilise, il y a une relation très étroite entre la recherche et l'enseignement. Dans chaque projet, le cycle Recherche – Enseignement -Recherche se répète jusqu'à l'obtention de résultats satisfaisants, tant du point de vue de l'enseignement que de la recherche. En concordance avec

cette idée, plusieurs manuels ont été écrits qui se basent sur le cadre théorique APOS et sur des résultats de recherches antérieurs. En échange, les étudiants qui suivent des cours différents en utilisant ces manuels aident à l'obtention de données qui à leur tour servent de feed-back au travail de recherche.

Le groupe RUMEC a entrepris un projet d'enseignement et de recherche sur l'algèbre linéaire. Nous présentons ici les caractéristiques les plus importantes du projet et du manuel qui a été écrit comme son élément central. Le projet a été développé en prenant comme cadre théorique la théorie APOS ; c'est pourquoi nous commençons par présenter cette théorie avant de décrire le projet.

2. La théorie APOS

La théorie APOS prend comme cadre de référence épistémologique la théorie de Piaget. À partir des idées piagétienes sur la façon de passer d'un état de connaissances à un autre, la théorie APOS s'intéresse uniquement à la construction des concepts mathématiques, en particulier ceux qui correspondent aux mathématiques universitaires. Comme c'est le cas pour n'importe quel autre changement des idées d'un environnement à un autre, cette transposition de l'épistémologie à l'éducation implique des arrangements et de nouvelles définitions.

Dans la théorie APOS la construction de la connaissance mathématique passe par trois étapes principales : action, processus et objet. Le passage par ces trois étapes n'est pas nécessairement linéaire. Un individu peut rester longtemps à des étapes intermédiaires, voire être à une étape pour certains aspects d'un concept et à une autre pour d'autres aspects du concept. Ce qui est vraiment linéaire c'est que la forme de travail qu'un individu montre en face de diverses situations problématiques est différente quand il répond d'une manière qui peut être caractérisée dans la théorie comme un processus ou au contraire comme un objet ou une action. Il est clair de plus que le type de réponses de l'individu dépend beaucoup de la demande cognitive du problème posé.

Le mécanisme principal dans la construction de la connaissance mathématique dans cette théorie est l'abstraction réfléchissante. Ce mécanisme est activé à travers les actions physiques ou mentales que l'individu réalise sur l'objet de connaissance, par le moyen de la réflexion du sujet lui-même sur ses actions. De même que dans la théorie de Piaget, l'interaction entre le sujet et l'objet de connaissance est considérée comme dialectique.

Un aspect important du modèle APOS comme instrument de recherche mais aussi comme instrument d'enseignement, se trouve dans le fait que pour travailler avec le modèle, il est nécessaire d'interpréter les concepts à apprendre du point de vue

des mathématiques mêmes. Il est reconnu dans la théorie que la construction des concepts mathématiques doit suivre une logique qui est différente de celle qui est utilisée pour construire des concepts d'autres disciplines. La théorie inclut, au-dessus de la partie cognitive, un composant qui incorpore la partie sociale de l'apprentissage. Dans cette dernière partie, l'importance pour la construction des connaissances de la collaboration entre les étudiants et le professeur, ainsi que l'importance de l'utilisation d'autres moyens comme la technologie dans le processus d'apprentissage, est reconnue.

Dans la théorie APOS on commence par une analyse des concepts mathématiques à étudier. Dans cette analyse, connue comme décomposition génétique du concept, on met en relief les constructions qui peuvent être nécessaires à l'apprentissage. Originellement ce sont les chercheurs qui proposent, sur la base de leur expérience dans la salle de classe, une décomposition génétique du concept à étudier. Plus tard, à travers le processus de recherche, cette décomposition est raffinée pour qu'elle s'approche de l'activité observée chez les étudiants quand ils travaillent avec le concept. Il est important de dire qu'il n'est pas possible de parler de LA décomposition génétique d'un concept, car elle dépend de la formulation qui a été faite par les chercheurs. Il est possible que diverses décompositions génétiques coexistent pour un même concept, mais il est important que n'importe quelle décomposition génétique du concept soit un instrument qui décrive effectivement les observations des travaux des étudiants.

Une décomposition commence, comme on l'a déjà dit, par l'analyse des constructions du sujet quand il apprend un concept mathématique en termes de ce qui est observable. Ces constructions sont caractérisées par les noms : action, processus, objet et schème.

Action

Une action est une transformation des objets que l'individu perçoit comme quelque chose d'externe. Autrement dit : un individu qui a une compréhension d'une transformation limitée à une *conception-action* peut exécuter la transformation qu'en réagissant à des indications externes qui lui donnent des détails sur les pas à suivre. Puisque la *conception-action* est très limitée, les actions déterminent le début crucial de la compréhension d'un concept.

Un exemple d'une *conception-action* sur la notion de «classe latérale» (à gauche ou à droite) d'un groupe en algèbre abstrait est le suivant. Prenons le groupe modulaire Z_{20} (les entiers $\{0, \dots, 19\}$ avec l'opération d'addition modulo 20) et le sous-groupe $H = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ des multiples de 4. Il n'est pas très difficile pour les étudiants de travailler avec les classes latérales telles que $2 + H = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ car elles sont formées, soit par une liste explicite des éléments obtenus en additionnant 2 à chaque élément de H , soit en appliquant une

règle, par exemple, «on commence par 2 et on ajoute 4» ou bien en appliquant une condition explicite comme «le résidu de la division par 4 est 2». La compréhension d'une «classe latérale» comme l'ensemble des opérations qu'on considère vraiment effectives pour obtenir un certain ensemble est une *conception-action*. Dans le cas de S (le groupe de toutes les permutations de n objets), il faut quelque chose de plus pour travailler avec les classes latérales car il n'y a pas de formule simple.

Un exemple d'action de la condition de fermeture sur un ensemble donné de vecteurs consiste à prendre deux vecteurs de l'ensemble, faire l'addition et vérifier si le résultat est un élément de l'ensemble.

Processus

Quand on répète une action et réfléchit sur elle, l'action peut s'intérioriser comme un processus. Cela veut dire qu'il y a une construction interne qui se produit, qui exécute la même action, mais cette fois-ci, pas nécessairement dirigée par un stimulus externe. Un individu qui a une *conception-processus* d'une transformation peut réfléchir sur les pas de la transformation, les décrire ou même les inverser sans vraiment les effectuer.

En comparaison avec une action, l'individu perçoit le processus comme quelque chose d'interne, placé sous son contrôle, au lieu d'une réponse à des impulsions externes.

En algèbre abstraite, une compréhension des classes latérales intériorisée comme un processus inclut de penser à la formation d'un ensemble à travers l'opération d'un élément fixe, avec tous les éléments d'un sous-groupe particulier. De plus, il n'est pas nécessaire d'effectuer les opérations, mais seulement de penser qu'elles s'effectuent. Quand on a une *conception-processus*, on peut former des classes latérales dans des situations où il n'y a pas de formules. En algèbre linéaire un exemple de processus se rencontre quand un étudiant est capable d'exprimer les étapes nécessaires pour déterminer, sans besoin de vérification, que l'addition de deux éléments d'un ensemble de vecteurs donnés est ou n'est pas un élément de l'ensemble. On peut dire que le sujet a intériorisé les actions en processus. De la même façon, quand il est capable d'expliquer comment chaque axiome se vérifie (sans avoir besoin de calculer) pour qu'un ensemble donné soit un espace vectoriel, on dit qu'il est au niveau d'une *conception-processus*.

Les étudiants peuvent construire différents processus en faisant diverses chaînes d'action sur un objet, et ils peuvent aussi coordonner ces processus ou les généraliser pour obtenir un nouveau processus.

Objet

Quand un étudiant réfléchit sur les opérations appliquées sur un processus particulier, il se rend compte de la totalité du processus et perçoit le processus

comme une transformation globale et il peut aussi construire par lui-même cette transformation. On dit alors que l'étudiant a encapsulé le processus pour construire un objet cognitif. On dit donc que l'étudiant a une *conception-objet* d'un concept mathématique s'il est capable de travailler avec cette idée comme une entité mathématique. Ceci prend en compte la capacité de faire des actions sur l'objet et de raisonner sur les propriétés de cet objet. Les étudiants peuvent aussi renverser l'objet ou le désencapsuler pour travailler une nouvelle fois avec le processus si nécessaire pour la solution d'un problème.

Par exemple si x est un élément et H un sous-groupe du groupe G , et si un étudiant pense d'une manière générale à la classe latérale (à gauche) xH comme un processus dans lequel on fait opérer x sur chaque élément de H , ce processus peut être encapsulé en un objet xH . L'étudiant est alors capable de faire des opérations sur cet objet, aussi bien que désencapsuler cet objet pour utiliser ce processus lorsque nécessaire.

En algèbre linéaire, un étudiant qui est capable de démontrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs est un sous-espace d'un espace vectoriel est très vraisemblablement en train de manifester une *conception-objet* du concept "combinaison linéaire". Dans le cas du concept sous-espace, cet évidence peut inclure sa possibilité de déterminer si deux ensembles de vecteurs différents forment des sous-espaces équivalents.

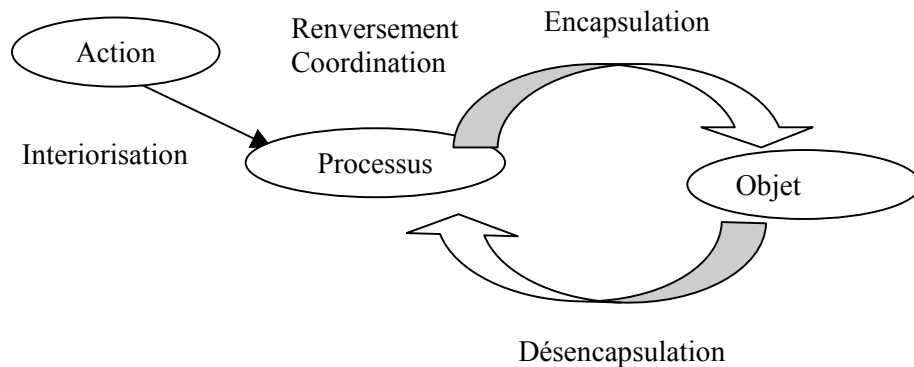


Figure 1

Schème

On appelle schème d'un thème mathématique ou d'un concept plus général, la collection d'actions, de processus, d'objets et d'autres schèmes qui ont des liens entre eux de telle façon qu'ils forment pour l'étudiant un cadre cohérent. L'individu peut être ou pas conscient du cadre qui rend les liens possibles. Pour

que l'individu démontre que cette collection est cohérente, il est nécessaire qu'il soit capable de reconnaître les différentes situations où elle est applicable, qu'il puisse décider entre les types de problèmes qui peuvent être résolus en utilisant cette collection et ceux où elle ne sert pas et qu'il puisse connaître les capacités de la collection.

Les étudiants peuvent considérer un schème comme un objet sur lequel l'on peut faire des actions. Quand les étudiants sont capables de considérer un schème comme un objet on dit qu'ils ont thématiqué le schème. On a donc deux façons de construire des objets, soit par l'encapsulation d'un processus, soit par la thématique d'un schème.

APOS comme instrument didactique

Comme on l'a déjà mentionné, une décomposition génétique est construite par les chercheurs comme une première approximation pour modéliser l'apprentissage du concept mathématique en question. Néanmoins, cette décomposition non seulement est utilisée dans la recherche, mais elle sert aussi comme instrument du projet d'enseignement. Le cycle ACE (**A**ctivités – **D**iscussion en **C**lasse – **E**xercices), comme nous le décrirons plus tard, se base sur les idées de cet instrument et tout est préparé pour que les étudiants puissent faire les constructions mentales prévues dans la décomposition génétique.

Visualisation en APOS

La représentation graphique et géométrique est considérée comme une partie intégrale de la construction des concepts. Le développement de la représentation demande aussi une intériorisation des actions, une encapsulation des processus et une construction des liens avec l'objet analytique. Quand on utilise la théorie APOS pour développer des activités et des matériels pour les étudiants, la représentation graphique est incluse soit dans la Discussion, soit dans les Activités. Quand on considère que cette représentation joue un rôle important dans la construction des concepts, une partie centrale lui est consacrée.

La théorie APOS se centre sur la visualisation des processus qui transforment les objets. Pendant que la visualisation des objets statiques est relativement facile à faire, la visualisation des processus dynamiques demande la construction mentale de ces processus sur des phénomènes statiques. (Dubinsky, 1997).

Le rôle du professeur

Dans cette approche, pendant que les étudiants travaillent les activités en petits groupes, le professeur joue le rôle de guide : il aide les étudiants, il pose des questions. Il décide par avance des activités à utiliser en classe et de celles qui feront partie du devoir. Dans la partie de la discussion, il aide à l'institutionnalisation des savoirs.

3. Un manuel d'introduction à l'algèbre linéaire

Comme partie d'un projet de recherche du groupe RUMEC, quelques membres du groupe ont écrit un manuel d'Algèbre Linéaire (Weller, et al., 2002) qui a été préparé en utilisant le cadre théorique APOS et qui est organisé autour du cycle ACE qui contient les trois éléments que nous avons déjà signalé :

- 1) Des **Activités** qui utilisent ISETL (Interactive Set Language), favorisant une forme d'apprentissage collaboratif au sein de petits groupes, de trois ou quatre individus. Cette partie a lieu dans un laboratoire avec des ordinateurs. ISETL est un langage mathématique de programmation qui a une syntaxe assez proche de la syntaxe mathématique. Il est utilisé comme un outil pour aider à la construction des concepts mathématiques. Il permet à l'usager de définir des ensembles et des opérations, et de valider des conjectures à leur sujet, en utilisant des quantificateurs. D'un point de vue didactique, la programmation aide au passage des actions au processus. Quand l'étudiant commence à apprendre un concept, il fait par lui-même les actions. Quand le programme est déjà écrit, on considère que son travail est de type processus ; le programme peut alors faire les actions pour lui.

Par exemple, le code :

```
sm:= func(s,x);
      return [(s*x(i)) mod 3: i in [1,2,3]];
end;
```

définit la multiplication d'un vecteur dans $(\mathbb{Z}_3)^3$ par un scalaire, pendant que le code:

```
is_assoc:= func(S, op);
      return forall a,b,c in S | a .op (b .op c) = (a .op b) .op c;
end;
```

détermine si l'ensemble S est associatif par rapport à l'opération op.

Selon Dubinsky, les caractéristiques d'ISETL qui sont essentielles pour son usage dans l'enseignement sont les suivantes :

- a) La syntaxe est proche du système mathématique d'écriture.
- b) Certaines propriétés mathématiques sont soutenues par ses propriétés usuelles. Cela inclut les ensembles finis et les séquences finies avec des éléments de n'importe quel type de données (y compris eux-mêmes), les connecteurs et les quantificateurs logiques, les fonctions comme des procédures et comme des ensembles de paires ordonnées, les relations comme des ensembles de paires ordonnées.

- c) Tous les types de données sont des objets de la première classe dans le sens qu'ils peuvent apparaître dans n'importe quelle expression quand cela a un sens mathématique. En particulier, les ensembles et les séquences peuvent contenir des éléments de différents types et les procédures peuvent être des entrées et des sorties des procédures. (Dubinsky, 1995).
- 2) Une partie de **Discussion en Classe** où on invite l'étudiant à réfléchir sur ce qu'il a fait dans le laboratoire et où les concepts mathématiques sont présentés et explicitement nommés. Le professeur guide cette discussion et dans le cas où il y a des étudiants qui n'ont pas découvert les relations en question, il les aide à faire les constructions nécessaires.
- 3) Des **Exercices** traditionnels que l'étudiant doit résoudre par écrit.

Les activités du manuel ont été préparées en prenant la décomposition génétique comme guide. On a essayé là de prendre en compte les constructions considérées comme devant être faites par les étudiants pour arriver à une *conception-objet* du concept et pour établir des liens entre des différents concepts.

La section de discussion élabore les différents concepts. Il n'y a pas beaucoup d'exemples à suivre comme dans d'autres livres parce que nous voulons que les étudiants réfléchissent sur leurs propres idées et sur ce qu'ils ont fait dans le laboratoire ; c'est pour cette même raison que nous avons introduit beaucoup de questions dans ce point. Les questions peuvent être prises aussi comme point de départ pour la discussion en classe quand les étudiants ont fini les activités.

Une différence avec d'autres manuels d'algèbre linéaire est le travail sur des corps finis. Ceci a été choisi pour deux raisons fondamentales. La première est d'ordre pratique et elle est liée à l'usage du software. Les étudiants doivent écrire des programmes courts pour vérifier si certaines propriétés sont satisfaites ou non, ceci étant possible seulement si on travaille avec un nombre fini d'objets. La seconde raison est d'ordre pédagogique. Quand les étudiants travaillent avec des corps finis, ils doivent inévitablement travailler avec des espaces vectoriels finis et ils ont l'opportunité de réfléchir sur certaines choses, comme par exemple la signification de l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs spécifiques. Il est important de noter, pourtant, que les étudiants sont aussi conduits à réfléchir sur des espaces vectoriels sur les réels. Dans la discussion en classe, et aussi dans les exercices, ils peuvent trouver beaucoup d'opportunités pour travailler avec des espaces vectoriels sur les nombres réels et sur d'autres ensembles infinis.

Par exemple, dans l'Activité 1 de la section sur l'indépendance linéaire du chapitre «Linearity and Span», le propos est centré sur la possibilité des étudiants de construire une *conception-action*. Pour cela, il leur est demandé de calculer une

combinaison linéaire et des pistes spécifiques leur sont données pour les aider. Dans l'activité 2 on a l'intention de faire réfléchir les étudiants sur ses actions, il leur est demandé de construire une fonction qui acceptera deux entrées : une séquence de vecteurs et une séquence de scalaires et qui retourne la combinaison linéaire résultante. L'activité est préparée pour aider les étudiants à intérioriser le concept de combinaison linéaire.

La fonction que les étudiants construisent est un programme pour l'ordinateur. S'ils l'écrivent correctement ils seront capables de l'appliquer à différentes séquences de scalaires et vecteurs pour obtenir les combinaisons linéaires correspondantes. Dans les activités 5 et 6 les étudiants écrivent encore une fois une fonction booléenne par le biais d'un programme pour l'ordinateur. Celui-ci prend un vecteur et un ensemble de vecteurs et retourne vrai ou faux selon qu'il est possible ou pas d'écrire le vecteur comme une combinaison linéaire unique des vecteurs de l'ensemble. Cette activité concerne le développement de la capacité à renverser le processus de formation d'une combinaison linéaire. Quand les étudiants écrivent le programme `func All_LC`, ils doivent faire un effort pour concevoir l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs donnés. Ceci est important quand on veut qu'ils construisent une *conception-objet* du concept combinaison linéaire.

Dans une perspective plus globale, le manuel a été organisé d'une façon différente de celle d'autres manuels scolaires du Mexique et des Etats Unis. Le premier chapitre est dédié à l'introduction du logiciel pour l'ordinateur qui doit être utilisé dans la classe. Cette introduction est faite en termes de questions et activités liées aux concepts de l'algèbre linéaire qui seront plus tard reconsidérés dans d'autres chapitres du manuel.

La majorité des cours d'algèbre linéaire commence avec les systèmes d'équations. Ce cours commence avec le traitement des espaces vectoriels. Nous considérons que le thème principal du cours est précisément celui d'espace vectoriel et c'est pour cela que nous avons choisi d'y introduire les étudiants immédiatement et de faire noter dès le premier moment son importance et, chose peut être plus importante encore, de donner les bases aux étudiants pour appliquer les idées de vecteur et d'espace vectoriel dans toutes les situations qui seront présentées dans le cours.

Les systèmes d'équations sont présentés dans le chapitre suivant. On remarque que les systèmes constituent un outil important pour répondre à des questions et des problèmes liés à l'étude des espaces vectoriels. Les matrices sont introduites comme un outil au début, et plus tard, au chapitre 6, elles seront étudiées encore une fois comme un exemple d'espaces vectoriels, leurs propriétés seront considérées avec plus de profondeur, et elles seront considérées aussi comme représentant des transformations linéaires. On a choisi de laisser l'étude des

matrices pour plus tard pour signaler leur importance dans l'étude des transformations linéaires.

Après les systèmes on envisage les problèmes de linéarité et de génération. Ce chapitre finit avec l'introduction du concept de base. Le chapitre numéro cinq introduit des transformations linéaires : les étudiants sont amenés à considérer que les ensembles de transformations linéaires peuvent être conçus comme des espaces vectoriels. Le chapitre final du manuel considère les changements de base, les valeurs propres et vecteurs propres, et leurs applications.

Tout au long du manuel les étudiants sont invités à considérer différents exemples d'espaces vectoriels qui ne sont pas des ensembles formés de n -uplets. Il est aussi important de mentionner que la possibilité de travailler avec différents ensembles et diverses opérations aide à la construction des objets, et en particulier à l'acceptation par les étudiants comme espaces vectoriels, d'ensembles autres que les n -uplets.

4. Décomposition génétique du concept d'espace vectoriel

Pour construire le concept d'espace vectoriel, un sujet doit faire des actions sur les éléments d'un ensemble V en utilisant la définition d'une opération binaire. Le sujet doit alors partir de ses schèmes d'ensemble et d'opération binaire. L'étudiant fait ces actions pour vérifier si chacun des dix axiomes qui définissent un espace vectoriel se vérifie.

Vérifier si les axiomes sont satisfaits implique une coordination des actions ou processus pour vérifier chaque propriété avec le processus spécifique de l'axiome particulier qui s'applique sur l'ensemble V et avec l'opération binaire définie sur V , ou sur des ensembles V et K avec une fonction définie sur eux. Ce processus doit être coordonné avec le processus de «satisfaire un axiome».

Les dix processus individuels sont coordonnés en un seul processus de vérification de tous les axiomes, c'est-à-dire que la construction du schème d'espace vectoriel implique la coordination de quatre schèmes : axiome, opération binaire, fonction et ensemble. La cohérence de ce schème peut être attestée par la capacité du sujet à vérifier si un couple particulier $\{K, V\}$ où K est un corps et V un ensemble, avec une opération binaire définie sur V , satisfait les axiomes d'espace vectoriel, ou bien si le sujet est capable de déterminer si un espace vectoriel particulier peut être utilisé dans une situation problématique spécifique.

Lors du processus de la construction du schème d'espace vectoriel, le sujet travaille sur une collection d'espaces vectoriels particuliers. Chaque cas spécifique aide le sujet à se rendre compte des différentes propriétés que la structure possède, ce qui correspond à l'intériorisation des actions de vérification en processus. Ensuite le

sujet peut encapsuler ces processus en un objet et se rendre compte de l'existence d'une structure générale. Le sujet peut alors s'apercevoir des propriétés invariantes des espaces particuliers pour construire un nouvel objet qu'on peut appeler espace vectoriel. La cohérence du schème d'espace vectoriel peut être mise en évidence par la possibilité du sujet, mis en présence d'un exemple qui ne lui est pas familier, de mobiliser les propriétés générales des espaces vectoriels pour déterminer si cet exemple est un espace vectoriel ou pas. Une autre manifestation peut être la construction d'un sous-espace pour un espace vectoriel donné.

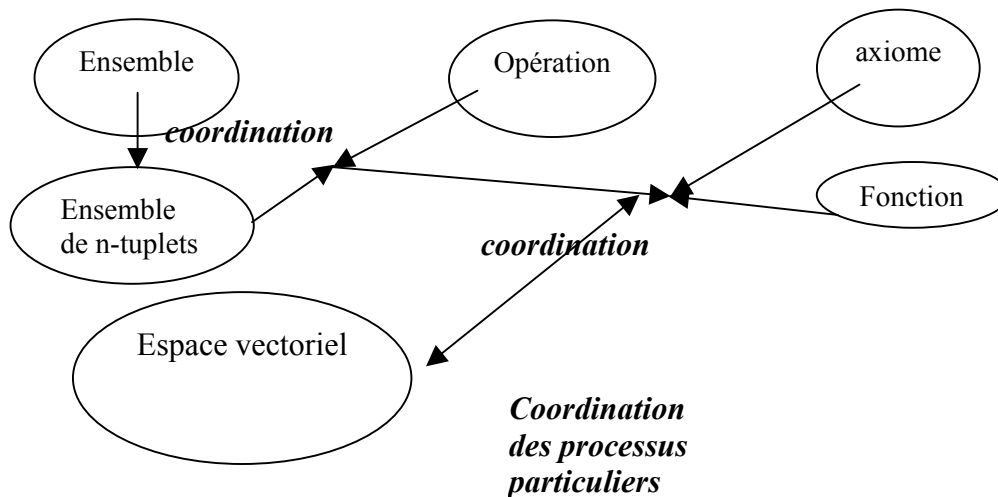


Figure 2

5. Description des activités du chapitre sur les espaces vectoriels

Dans cette section nous présentons les Activités des deux premières sections du deuxième chapitre du manuel sur les espaces vectoriels. Au début du chapitre on commence avec une très brève introduction sur ce qu'on va introduire, en faisant référence au concept général de vecteur qui est familier aux élèves, à savoir le concept de vecteur utilisé dans la géométrie affine et dans la physique. On parle là de l'intention du chapitre d'élargir le concept et le faire plus abstrait. Ensuite, en utilisant le cadre théorique APOS, nous exposerons l'analyse de ces activités, qui a donné lieu à leur forme actuelle. Dans les cas où il y a plusieurs parties d'une activité qui se répètent en changeant des ensembles ou des opérations, nous donnons seulement deux exemples pour des considérations de place.

5.1. Vecteurs

1. (a) Définissez l'ensemble $K = \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en ISETL.
- (b) Ecrivez une func ISETL `add_scal` qui accepte deux éléments de K et

retourne leur somme mod 5.

(c) Ecrivez une func ISETL `mult_scal` qui accepte deux éléments de K et retourne leur produit mod 5.

Dans cette activité on demande de faire des Actions sur les éléments de Z_5 et une opération binaire dans le but d'aider l'étudiant à intérioriser les actions en processus.

2. (a) Définissez $V = (Z_5)^2$, c'est à dire l'ensemble de tous les 2-uplets avec des composants qui viennent de Z_5 en ISETL. Combien d'éléments y-a-t-il dans V ?
- (b) Ecrivez une func ISETL `vec_add` qui accepte deux éléments $[v1, v2]$ et $[w1, w2]$ de V et retourne l'2-uplet $[(v1 + w1) \bmod 5, (v2 + w2) \bmod 5]$.
- (c) Ecrivez une func ISETL `scal_mult` qui accepte un élément k de Z_5 et un 2-uplet $[v1, v2]$ de V , et retourne le 2-uplet $[(kv1) \bmod 5, (kv2) \bmod 5]$.

Dans cette activité on demande de faire des Actions sur les éléments de $(Z_5)^2$. Elle a l'intention d'aider l'étudiant à intérioriser les actions en processus.

3. Définissez les 2-uplets $v = [2, 3]$, $w = [1, 1]$ et $u = [0, 3]$ en ISETL. Utilisez vos funcs définies dans les activités 1 et 2 pour déterminer dans chaque rubrique si les 2-uplets sont les mêmes.
- (a) $v + w$ et $w + v$.
- (b) $(u + v) + w$ et $u + (v + w)$.
- (c) $v + v$ et $2v$.
- (d) $-1v$ et $-v$.
- (e) $v + -1v$ et $v - v$
- (f) $2(3u)$ et $(2*3)u$
- (g) $2(v + w)$ et $2v + 2w$

Dans cette activité on demande de faire des Actions pour guider l'intériorisation des propriétés des opérations binaires sur des ensembles des vecteurs.

4. Comment le code suivant diffère-t-il de la func `vec_add` que vous avez écrit dans l'activité 2? Quelle supposition fait ce code concernant v et w ?

```
va:=|v, w -> [(v(i) + w(i)) mod 5: i in [1..#v]];
```

Utilisez `va` pour additionner les n-uplets suivantes dans $(Z_5)^n$. Pouvez-vous additionner ces n-uplets en utilisant `vec_add`?

- (a) $[2, 2, 1] + [3, 0, 4]$
- (b) $[0, 1, 0, 1] + [1, 2, 3, 4]$
- (c) $[1, 2] + [2, 1]$

Cette activité a pour but d'aider à interioriser les actions avec les opérations binaires à travers l'explication et l'utilisation d'un programme.

5. (a) Ecrivez une *func* ISETL *sm* qui accepte un élément k de Z_5 et un n -uplet v , et retourne le n -uplet kv dont chaque composante de v ait été multipliée (mod 5), par k .
- (b) Essayez votre *func* pour $k = 3$ et $v = [2, 4]$.
- (c) Essayez votre *func* pour $k = 0$ et $v = [1, 3, 3]$.

L'écriture du programme dans cette activité implique la possibilité d'exprimer les actions faites dans les activités antérieures. Son but est d'aider à interioriser le Processus d'utilisation d'une opération binaire sur un ensemble donné.

6. (a) Ecrivez une *func* ISETL *is_closed_va* qui accepte un ensemble V de n -uplets et une opération va (addition de vecteurs). Votre *func* doit vérifier si la somme de n'importe quelle paire de deux n -uplets dans V est aussi dans V .
- (b) Vérifiez votre *func* sur $V = (Z_5)^2$, avec va défini comme dans l'activité 4.
- (c) Vérifiez votre *func* sur $V = (Z_3)^3$. Modifiez va de manière adéquate, en utilisant l'arithmétique mod 3.

Le but de la première partie de l'activité est d'aider l'étudiant à interioriser les actions nécessaires pour vérifier que l'addition de deux n -uplets est un n -uplet. L'écriture du programme demande la généralisation, ce qui est un processus. Les parties suivantes ont pour but de donner à l'étudiant l'opportunité de vérifier que la généralisation, telle qu'il l'a programmée, est adéquate. À travers l'activité, l'étudiant commence aussi à interioriser les actions de vérification des propriétés des opérations sur des n -uplets.

7. (a) Ecrivez une *func* ISETL *is_commutative* qui accepte un ensemble V de vecteurs (n -uplets) et une opération va et qui détermine si l'opération va est commutative sur V ou pas.
- (b) Vérifiez votre *func* sur $V = (Z_5)^2$ et va .
- (c) Vérifiez votre *func* sur $V = (Z_3)^3$ et une va convenablement modifiée.

Dans cette activité, on a d'un côté l'Action de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel dans un cas concret et de l'autre le Processus dans la construction d'un programme.

8. (a) Ecrivez une *func* ISETL *is_associative_va* qui accepte un ensemble V de vecteurs (n -uplets) et une opération va et qui détermine si va est associative sur V ou pas.
- (b) Vérifiez votre *func* sur $V = (Z_5)^2$ et va .

- (c) Vérifiez votre func sur $V = (Z_2)^2$ et une va convenablement modifiée.

Cette activité a le même but que l'activité antérieure.

9. Expliquez le code suivant en ISETL. Quelles sont les entrées de cette func? Que-retourne cette func?
- ```
has_zervec:= func (V, va);
 VZERO:= choose z in V | forall v in V | (v .va z) = v;
 Return VZERO;
End;
```

En exprimant les pas du processus en cours au moyen de la description du programme présenté dans l'activité, l'étudiant peut intérioriser les actions nécessaires à la construction du vecteur zéro et son rôle dans l'addition des vecteurs.

10. (a) Utilisez la func `has_zervec` pour écrire une nouvelle func `has_vinverses` qui accepte un ensemble  $V$  de  $n$ -uplets et une opération  $va$  et qui détermine si pour tous les  $x$  dans  $V$  il existe un  $y$  dans  $V$  qui a la propriété que  $va(x, y) =$  le résultat de `has_zervec(V, va)`.  
 (b) Vérifiez votre func sur  $V = (Z_5)^2$  et  $va$ .  
 (c) Vérifiez votre func sur  $V = (Z_3)^3$  et une  $va$  convenablement modifiée.

Cette activité aide à intérioriser les actions, dans le Processus de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel dans un cas concret, au moyen de l'explication et de la construction d'un programme.

11. Expliquez le code suivant en ISETL :
- ```
is_closed_sm:= func(K, V, sm);
  return forall k in K, v in V | (k .sm v) in V;
end;
```

Cette activité demande le Processus de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel au moyen de l'explication d'un programme.

12. Ecrivez une func ISETL `is_associative_sm` qui accepte un ensemble K de scalaires, un ensemble V de vecteurs, et deux opérations, sm (multiplication scalaire) et ms (multiplication de scalaires). Votre func doit déterminer si pour tous les k, j dans K et tous les v dans V , $k(jv) = (kj)v$. Notez que la partie de droite de cette équation utilise «multiplication de scalaires» ainsi que la «multiplication scalaire». Quelle est la différence? Vérifiez votre func sur $V = (Z_2)^2$.

Cette activité demande le Processus de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel dans un cas concret au moyen de l'explication et de la construction d'un programme.

13. Que fait la func ISETL qui suit? Quelles sont les entrées ? Les sorties ?
- ```

has_distributive1 := func(K, V, sm, va);
 return forall k in K, v, w in V | (k .sm (v .va w)) = (k .sm v) .va (k .sm
 w);
end;
```

Cette activité a le même but que l'activité antérieure.

14. Ecrivez une func ISETL `has_distributive_2` qui accepte un ensemble K de scalaires, un ensemble V de n-uplets, et trois opérations, va, addition de vecteurs, sm, multiplication scalaire, et as (addition de scalaires). L'action de votre func est de déterminer si l'expression suivante se vérifie pour tous les k, j dans K, v dans V :  $(k + j)v = kv + jv$ .

Cette activité demande le Processus de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel dans un cas concret, au moyen de l'explication et de la construction d'un programme.

15. Ecrivez une func ISETL `has_identityscalar` qui accepte un ensemble K de scalaires, un ensemble V de vecteurs (n-uplets), et une opération sm, multiplication scalaire. L'action de votre func est de déterminer s'il existe un élément k dans K tel que pour tous les v dans V,  $sm(v, k) = v$ .

Cette activité a le même but que l'activité antérieure.

## 5.2. Introduction aux Espaces Vectoriels

1. La liste suivante est une liste de quelques **funcs** avec lesquelles vous avez travaillé dans la section antérieure.

```

is_closed_va
is_commutative
is_associative_va
has_zerverc
has_vinverses
is_closed_sm
is_associative_sm
has_distributive1
has_distributive2
has_identityscalar
```

Écrivez une description sur ce que chaque **func** fait, incluant le type d'objets acceptés, ce qui leur est fait, et le type d'objets retournés.

L'étudiant doit faire des Processus de généralisation des propriétés qui se vérifient en général par les éléments d'un ensemble et avec une opération binaire, au moyen de l'explication de ce que font les programmes qui ont été construits. La réflexion inclut l'explication de la nature des éléments avec lesquels on peut utiliser les programmes.

2. (a) Construisez en ISETL un ensemble  $K = Z_3$  de scalaires, un ensemble  $V = (Z_3)^3$  de vecteurs, et quatre opérations,  $va$  (addition vectorielle) qui est l'addition mod 3 d'éléments dans  $V$ ,  $sm$  (multiplication scalaire), qui est la multiplication mod 3 d'éléments dans  $V$  par les éléments du  $K$ ,  $as$  (addition de scalaires), qui est l'addition mod 3, et  $ms$  (multiplication de scalaires), qui est multiplication mod 3.

Par exemple, vous pourriez écrire et mettre en mémoire un code tel que:

```
K:= {0..2}; V:={[x,y,z] | x,y,z in K};
va:= |v,u -> [(v(i)+u(i)) mod 3: i in [1..3]];
sm:= |k,v -> [(k*v(i)) mod 3: i in [1..3]];
as:= |k,j -> (k+j) mod 3; ms:= |k,j -> (k*j) mod 3;
```

- (b) Appliquez toutes les **funcs** de l'Activité 1 à ce système,  $[K, V, va, sm, as, ms]$ . Créez une table avec les **funcs** comme titres de colonnes et ce système comme première rangée, et utilisez cette table pour déterminer quelles propriétés ce système vérifie.

Dans les activités 2 et 3, l'application répétée des processus intériorisés guide l'étudiant vers l'encapsulation dans un objet qui a une structure. Les activités demandent à l'étudiant de faire les actions de classification et comparaison nécessaires pour coordonner les schèmes : ensemble (en particulier l'étudiant utilise l'ensemble de n-uplets, et celui de scalaires) et opérations [sur des ensembles finis].

Le résultat de cette comparaison est une classification qui aide l'étudiant à commencer à intérioriser la structure d'espace vectoriel.

3. Répétez l'Activité 2 pour chacun des systèmes suivants. Ajoutez une nouvelle rangée à votre table pour chaque système.
  - (a)  $K = Z_5$ ,  $V = (Z_5)^2$ ,  $va$  est l'addition mod 5 des éléments dans  $V$ ,  $sm$  est la multiplication mod 5 des éléments du  $V$  par les éléments du  $K$ ,  $as$  et  $ms$  sont l'addition et la multiplication mod 5 respectivement.

- (b)  $K = \mathbb{Z}_3$ ,  $V = \{ \langle x, x, x \rangle : x \in K \}$ ,  $va$  est l'addition mod 3 des éléments dans  $V$ ,  $sm$  est la multiplication mod 3 des éléments du  $V$  par les éléments du  $K$ ,  $as$  et  $ms$  sont l'addition et la multiplication mod 3 respectivement.

Ici on demande l'emploi du processus de vérification dans une variété de cas concrets, en utilisant des programmes déjà construits. De l'autre côté, la répétition des actions aide à l'intériorisation.

4. Lesquels des systèmes des activités 2 et 3 vérifient toutes les dix propriétés de l'Activité 1? Pouvez-vous conjecturer des conditions sur  $K = \mathbb{Z}_p$ ,  $(\mathbb{Z}_q)^n$  et sur les quatre opérations, de telle sorte qu'un tel système vérifie toutes les dix propriétés?

La première partie de l'activité a pour but de focaliser l'attention sur ces ensembles qui possèdent la structure considérée auparavant. Ensuite, on veut susciter une réflexion sur cet objet telle que le processus employé lors des activités antérieures soit encapsulé en un objet qu'on peut appeler espace vectoriel particulier.

5. Voici une liste supplémentaire de systèmes  $[K, V, va, sm, as, ms]$ . Lesquels des ces systèmes vérifient toutes les propriétés de l'Activité 1? Note : La plupart des systèmes suivants peuvent être construits et exécutés seulement dans VISETL (Virtuel ISETL). Cela veut dire que tout votre travail doit être fait à la main et par la pensée.
- (a)  $K = \{-1, 1\}$ ,  $V = (K)^3$ ,  $va$  = addition ordinaire par des composantes,  $sm$  est la multiplication ordinaire par des composantes,  $as$ ,  $ms$  sont l'addition et la multiplication ordinaires respectivement.
- (b)  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $va$  = addition ordinaire par des composantes,  $sm$  est la multiplication ordinaire par des composantes,  $as$ ,  $ms$  sont l'addition et la multiplication ordinaires respectivement.

Cette activité a le même objectif que celui de l'activité antérieure, mais cette fois-ci les ensembles sur lesquels on travaille sont des ensembles infinis et il est alors nécessaire de généraliser le processus avant de l'encapsuler.

6. Ecrivez une *func is\_vector\_space* qui accepte un ensemble  $K$  de scalaires, un ensemble  $V$  de vecteurs, et quatre opérations  $va$ ,  $sm$ ,  $as$ , et  $ms$  définies sur  $V$  et  $K$ , et qui teste si toutes les propriétés données dans l'Activité 1 se vérifient. Votre *func* doit retourner *true* si le système vérifie toutes les dix propriétés, et *false* s'il ne vérifie pas une ou plusieurs des propriétés. Mettez à l'épreuve votre *func* en utilisant quelques-uns des systèmes définis dans l'Activité 1.

L'objectif de cette activité est l'encapsulation de l'objet espace vectoriel général. Pour réussir à faire cette encapsulation, il est nécessaire de désencapsuler les objets

espaces vectoriels particuliers, de coordonner tous ces processus et les encapsuler en un objet plus général. A ce moment-là on désigne cet objet comme espace vectoriel.

## 6. Conclusion

La théorie APOS a été utilisée par un certain nombre de chercheurs provenant de nombreux pays pour étudier la façon dont les étudiants construisent divers concepts mathématiques. Peut être que les travaux les plus connus sont ceux qui se réfèrent au concept de fonction, mais la théorie a été appliquée avec succès aux concepts de l'Analyse, de l'Algèbre Abstraite, des Équations Différentielles et la Logique Mathématique. La théorie n'a pas été utilisée uniquement comme cadre théorique pour faire de la recherche, elle a été aussi appliquée à la préparation de matériels d'enseignement et de manuels universitaires.

L'utilisation de ces matériels a été l'objet de projets de recherche qui ont montré qu'effectivement les étudiants qui les utilisent réussissent à faire les constructions prévues par la théorie, et par conséquent à apprendre les concepts avec plus de profondeur que les étudiants qui suivent d'autres méthodes.

Le cycle de recherche et enseignement prévu par la théorie APOS a commencé à être appliqué dans le cas du manuel sur l'Algèbre Linéaire. Les étudiants de cinq cours dans des diverses universités de divers pays : États-Unis, Mexique, Israël et Porto Rico ont utilisé le manuel et la méthodologie proposés par la théorie APOS. On a fait des entretiens avec quelques étudiants ayant suivi ces cours. On a posé des questions spécifiques sur les concepts introduits par le manuel et on est en train d'analyser et comparer leurs réponses, pour déterminer si le manuel a prouvé son efficacité pour les guider vers les constructions des concepts en question. Avec les résultats de cette analyse, on va examiner les changements qui sont nécessaires afin d'obtenir meilleurs résultats et pour identifier les concepts où le manuel peut être considéré comme un appui efficace pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

## Sites web d'intérêt

Ed Dubinsky : <http://trident.mcs.kent.edu/~edd/>

RUMEC : <http://www.cs.gsu.edu/~rumec/>

ISETL : <http://www.ilstu.edu/~jfcottr/isetl/>

Manuel et projet sur Algèbre Linéaire :

<http://www.ilstu.edu/~jfcottr/linear-alg/>

## Bibliographie

ASIALA M., BROWN A., DE VRIES D., DUBINSKY E., MATHEWS D. et THOMAS K., 1996, A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, CBMS Issues in Mathematics Education, **6**, 1-32.

CARLSON D., JOHNSON C. R., LAY D. C., PORTER A. D., WATKINS A. E., WATKINS W. (eds.), 1997, Resources for Teaching Linear Algebra, MAA Notes, **42**.

DUBINSKY E., 1997, Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. Dans D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, et W. Watkins (eds), *Resources For Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, 42, 85-106.

DUBINSKY E., 1995, ISETL : A Programming Language for Learning Mathematics, Comm. in Pure and Appl. Math., **48**, 1027-1051.

DORIER J.-L., ROBERT A., ROBINET R. et ROGALSKI M., 1997, L'Algèbre Linéaire : L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. Dans J.-L. Dorier (ed.), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, 105-147.

SIERPINSKA A., 2000, On some aspects of students thinking in linear algebra. Dans J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers., 209-246.

SIERPINSKA A., NNADOZIE A. et OKTAÇ A., 2002, A Study of Relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra. Concordia University : Montreal, disponible sur :

<http://alcor.concordia.ca/~sierp/downloadpapers.html>

WELLER K., MONTGOMERY A., CLARK J., COTTRILL J., TRIGUEROS M., ARNON I., DUBINSKY E., 2002, Learning Linear Algebra with ISETL, disponible sur : <http://www.ilstu.edu/~jfcottr/linear-alg/>

*Nous voudrions remercier François PLUVINAGE de l'aide apportée pour la rédaction finale de cet article.*

MARÍA TRIGUEROS  
ITAM, Mexique

ASUMAN OKTAÇ  
Cinvestav-IPN, Mexique et UQAM, Canada

## UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DEL OBJETO FUNCIÓN

### **Abstract. Experimenting an Object-Oriented Teaching of Function**

Previous investigation has reported that students, instructed about the theorem of maximum and minimum reached by a continuous function on a closed interval, most generally adopt an algorithmic conduct applying it to a differentiable function: They start from an algebraic expression and obtain its critical values, even if those lie outside of the interval to be considered. Our hypothesis was this conduct, alike to different manifestations mentioned by other searchers, should result from a lack of meaning in the concept of function itself. Therefore, we have designed an experiment, intending to expand the meaning of the concept of function. We chose, as an *action project*, the modelling of an easy-to-understand physical situation, an inflatable sphere in a recipient containing some liquid, which allowed introducing a function in a not merely algebraic form, but in a way more similar to the historical approach that implies to study interconnected variables. We decided to implement three successive stages in our experiment: descriptive, quantitative, and generalizer. The purpose was to favour the use of various semiotic registers in order to express functions and their properties. After the two-week experiment, the assessment clearly demonstrates students' enhancement in the knowledge of functions. Most (17 out of 21) succeeded in partially or totally solving a problem reported in previous studies as mishandled.

**Key words.** Calculus, function, function concept, extreme values, variables, modelling, action project, semiotic registers, teaching experiment.

**Resumen.** Investigaciones previas han reportado que los estudiantes, instruidos sobre el teorema de máximos y mínimos alcanzados por una función continua en un intervalo cerrado, generalmente lo aplican a una función diferenciable adoptando una conducta algorítmica: Ellos, a partir de la expresión algebraica, obtienen sus valores críticos, incluyendo aquéllos que quedan fuera del intervalo considerado. Nuestra hipótesis, al igual que reportes de otros investigadores, es que esta conducta es el resultado de una falta de significados en el concepto de función. Por consiguiente, hemos diseñado un experimento, con la intención de extender el significado del concepto de función. Elegimos, como proyecto de acción, la modelación de una situación física sencilla de entender, un globo esférico inflable en un recipiente que contiene cierta cantidad de líquido, lo cual nos permitió introducir a una función, no como una mera fórmula algebraica, sino en un acercamiento semejante al histórico que implica el estudio de variables interconectadas. Decidimos implementar tres fases sucesivas en nuestro experimento: descriptiva, cuantitativa, y generalizante. El propósito fue favorecer el empleo de varios registros de representación semiótica para trabajar funciones y sus propiedades. Después de un experimento de dos semanas la evaluación demuestra una clara mejoría en la comprensión de funciones. La mayoría (17 de 21) obtienen un éxito total o parcial al resolver un problema que en reportes previos ha mostrado ser difícil de resolver.

**Palabras clave.** Cálculo, función, concepto de función, valores extremos, variable, modelación, proyecto de acción, registro semiótico, experimento de enseñanza.

## Présentation analytique d' « Une expérience d'enseignement de l'objet fonction »

### 1. Bases de l'étude

Un résultat élémentaire important en analyse est le théorème des extrema atteints : Une fonction réelle de variable réelle, continue sur un intervalle fermé borné, y atteint un maximum et un minimum. Ce résultat de nature topologique est fréquemment à mettre en œuvre à propos de fonctions non seulement continues, mais dérivables. Pour une fonction dérivable, les points critiques, correspondants à des zéros de sa dérivée, jouent un rôle essentiel dans la recherche des extrema. Cette recherche s'engage alors le plus souvent sur un terrain algébrique, à partir des formules de dérivation des fonctions élémentaires. Or on sait que, dans un contexte de ce genre en l'absence de formation spécifique, la structure la plus riche tend à prendre le pas sur la plus pauvre pour les traitements à effectuer. C'est par exemple le cas dans des situations de géométrie plane, où la structure euclidienne est plus riche que la structure simplement vectorielle ou affine. Ici, il s'agit d'espaces de fonctions de classe plus ou moins élevée : La classe la plus élevée tend à prendre le dessus.

S'ajoutent à ce phénomène deux tendances qui ont fréquemment été pointées dans des études de didactique. La première est la réduction algorithmique : une propension à rabattre un apprentissage mathématique sur la bonne exécution de quelques algorithmes standardisés est non seulement le fait d'une certaine proportion d'apprenants, mais même d'enseignants qui y voient la possibilité d'aboutir « au moins » à des résultats tangibles et contrôlables. La seconde est la répulsion répandue à travailler avec des inégalités : celles-ci ont non seulement un côté négatif, présent dans leur désignation même, mais un aspect incomplet (une inégalité ne dit pas « tout », contrairement à une égalité). Or des inégalités sont présentes dans la recherche précédemment décrite, à la fois à propos de valeurs prises, ce qui à soi seul ne serait pas une réelle difficulté (déterminer la plus grande de deux ou plusieurs valeurs relève de la comparaison, sous-cas simple du traitement d'inégalités), mais surtout à propos du domaine de définition de la fonction à l'étude, entre deux valeurs frontières. Et dans le contexte algébrique le plus souvent rencontré (celui des fonctions obtenues à partir des fonctions élémentaires par des opérations algébriques), un domaine de définition n'est qu'un sous-produit de la formule exprimant une fonction. Par exemple, une formule telle

que  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  détermine une fonction dont le domaine de définition est l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$ , échappant donc au champ de notre étude.

Ainsi, tant que les fonctions se présentent essentiellement sous la forme d'expressions algébriques, la mise en œuvre du théorème sur les extrema se heurte

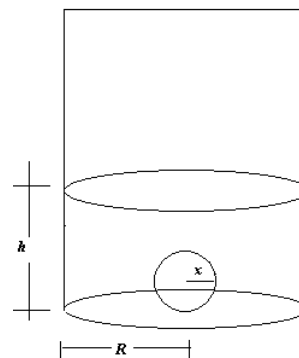
à résistances, voire des obstacles. C'est ce qu'avait constaté, à l'occasion des recherches engagées au Mexique pour sa thèse de doctorat, Salvador Guzman. Un article récemment paru, co-signé par lui-même et Armando Cuevas, précisait la nature et le niveau (important) des difficultés rencontrées. Des travaux entrepris par ailleurs sur la notion même de fonction, notamment au sein du groupe qui développe le cadre APOS proposé par Ed Dubinsky, nous avaient conduits à envisager que c'est bien le concept général de fonction qui risque ici d'être en jeu, révélé par l'exploitation d'un théorème particulier. S'agissant d'acquisition conceptuelle, il nous paraissait tout naturel de songer aux registres d'expression.

## 2. Description de l'expérience réalisée

La question didactique qui se trouve posée au terme de l'examen précédent est celle de savoir s'il se présente encore une importante difficulté d'acquisition, lorsque l'enseignement s'appuie sur des situations conduisant les étudiants à mobiliser les différents registres susceptibles d'exprimer une fonction. Pour l'étude de cette question, la contrainte qui s'impose à une expérimentation didactique est plus forte qu'il ne pourrait y paraître, car il convient que la présentation d'une fonction à étudier ne privilégie pas au départ une forme d'expression particulière. Sinon le risque, surtout à partir d'une présentation par une formule, de buter sur les difficultés signalées serait considérable. C'est pourquoi une situation isomorphe à celles rencontrées aux sources des études de variations, à l'instar de la fameuse étude de Kepler à propos de la capacité des barriques, méritait d'être envisagée. Une situation rencontrée dans un groupe informatique de l'IREM de Strasbourg a semblé réunir les caractéristiques souhaitées. Elle peut notamment se prêter à une simulation interactive avec un logiciel de géométrie plane dynamique (nous avons fait utiliser Cabri par les étudiants) et s'intégrer à un scénario didactique élaboré pour conduire à l'utilisation visée du théorème des extrema atteints.

La situation tridimensionnelle retenue est la suivante. On considère un récipient cylindrique de rayon donné  $R$ , dont la hauteur sera supposée suffisante pour les besoins de l'expérience à réaliser. Celle-ci consiste à fixer au fond du récipient un ballon sphérique gonflable et à verser dans le récipient une certaine quantité de liquide. Lorsque le ballon est complètement dégonflé, le liquide atteint dans le récipient une hauteur initiale  $h_0$ . On gonfle alors le ballon, ce qui conduit le niveau  $h$  du liquide à s'élever. On s'intéresse à la possibilité que, pour une ou plusieurs valeurs de son rayon  $x$ , le ballon soit tout juste immergé.

Le problème fait intervenir plusieurs variables en interaction :  $h_0$ ,  $h$  et  $x$ . Les conditions conduisent assez naturellement à conférer à  $h_0$  le rôle de paramètre, que l'on fixe avant de suivre les évolutions continues concomitantes de  $h$  et  $x$ . La variable  $x$  est évidemment astreinte à ne pas dépasser la valeur  $R$ . Pour  $h_0$  assez petit, le ballon gonflé émerge assez vite du liquide, pour rester alors partiellement émergé jusqu'à la fin ( $x = R$ ). Pour  $h_0$  assez grand au contraire, le ballon reste constamment immergé. Jusqu'ici, rien d'étonnant. Mais l'observation réserve une surprise : pour certaines valeurs intermédiaires du paramètre  $h_0$ , il y a deux valeurs différentes de  $x$  pour lesquelles le liquide affleure tout juste le sommet du ballon.



Le scénario didactique retenu a comporté trois phases : une *phase descriptive*, une *phase quantitative* et une *phase généralisante*. Dans les deux premières phases, c'est le problème du ballon dans le cylindre qui est mis à l'étude, dans la troisième ce sont de nouvelles questions. Les divers registres de représentation d'une fonction (algébrique, graphique, tabulaire) ont été utilisés. Un questionnaire initial de positionnement et un questionnaire diagnostique final ont complété le dispositif, prévu pour une durée d'une quinzaine de jours, à raison de deux à trois séances de travail hebdomadaires. Un tel cadrage semblait raisonnable, eu égard à l'objectif visé. Chacune des phases a conduit à un travail sur ordinateur donnant lieu à un questionnement écrit, pour lequel une feuille avait été préparée et était distribuée aux étudiants. Des objectifs précisément définis à chaque séance orientaient ainsi le travail sur ordinateur.

### 3. Résultats observés

L'expérimentation a été conduite avec deux petits groupes d'étudiants d'une unité de formation interdisciplinaire à l'informatique et aux sciences sociales et administratives, se situant à un niveau post-baccalauréat qui peut être comparé à celui des BTS français. L'un des groupes était constitué de onze étudiants de la filière informatique, l'autre de dix étudiants de la filière ingénierie.

Le questionnaire initial a fait nettement apparaître que, pour tous les étudiants de l'expérimentation, l'idée de fonction n'est au départ présente qu'à travers des substitutions de valeurs. Par exemple, aucun étudiant ne forme l'expression d'une variable en fonction d'une autre à partir d'une équation implicite, dans le cas pourtant assez simple qui était proposé :  $xy^2 + 4xy - x^2 = 0$ . Dans la phase descriptive, cette difficulté à conférer un sens global et complet à une variable se

repère à l'absence de réponse à la question sur l'interprétation que l'on peut proposer pour  $h - 2x$  (une réponse possible est la *profondeur* du ballon, en précisant le sens qu'il convient de donner à son signe, à l'instar des profondeurs d'écueils données par les cartes marines de l'Atlantique). En contraste, la phase quantitative, avec il est vrai l'assistance d'un logiciel, a conduit à une réussite générale. Dans la phase généralisante, les questions posées sur les domaines de définition de certaines fonctions ont toutes été également bien réussies par le groupe de la filière informatique, alors que la troisième de ces questions, un peu plus complexe que les deux premières, a suscité davantage de difficultés pour la filière ingénierie.

Les résultats au questionnaire final mettent au premier chef en évidence une avancée spectaculaire par rapport aux observations relatées dans des publications antérieures : Sur les 21 étudiants concernés, 17 ont répondu que, pour le problème envisagé, ce n'est pas un point critique de la fonction obtenue qui détermine un maximum. De manière surprenante, ce sont des étudiants de la filière ingénierie qui, pour ce questionnaire final, ont fourni les réponses les plus complètes. Une moindre aisance à procéder à des traitements algorithmiques, repérée dans la phase généralisante, a-t-elle ici pour conséquence un plus grand besoin de développements, d'explicitations ? Sans qu'une réponse puisse être apportée, les petits effectifs en jeu ne l'autorisant pas, la question méritait d'être posée. Par ailleurs, parmi les commentaires des étudiants qui se sont spontanément exprimés par oral, il vaut la peine de relever celui sur la compréhension de ce à quoi peut servir le domaine d'une fonction. Modulons cependant : Les résultats du questionnaire final montrent qu'il serait excessif de prétendre que des progrès considérables dans l'acquisition de la notion de fonction ont été enregistrés. L'objectif d'apprentissage de cette courte période d'expérimentation était seulement un *théorème cible*. Mais il nous semble qu'il a pu être largement atteint, précisément en raison d'une certaine évolution dans l'appréhension de l'objet fonction.

### 1. Introducción: un fracaso típico

Recientemente, Moreno & Cuevas (2004), realizaron un estudio con profesores de cálculo, con estudiantes del primer año de ingeniería y con estudiantes de maestría provenientes de diversas escuelas de ingeniería y ciencias. El estudio consistió en proponerles resolver dos problemas de máximos y mínimos, utilizando el cálculo diferencial, con las siguientes características:

- a) ser un problema práctico que ejemplificara una situación real, y ser interesante o atractivo para la mayoría de los estudiantes;
- b) ser fácil de entender, aunque no necesariamente fácil de plantear y resolver;
- c) ser un problema con un nivel de dificultad similar al que poseen los problemas típicos de máximos y mínimos que presentan los textos de nivel medio superior, y por último que:
- d) las funciones que resultaran de cada problema deberían ser continuas y diferenciables en todo su dominio.

Adicionalmente, los problemas deberían cumplir con que:

1. La función que modelara el primer problema, poseyera un máximo que se localizara en un punto crítico y, consecuentemente, posible de calcular mediante el criterio de la segunda derivada.
2. El segundo problema, variante del primero, debería producir una función con un máximo que se ubicara en un extremo de su dominio de definición, en donde el criterio de la segunda derivada no operara.

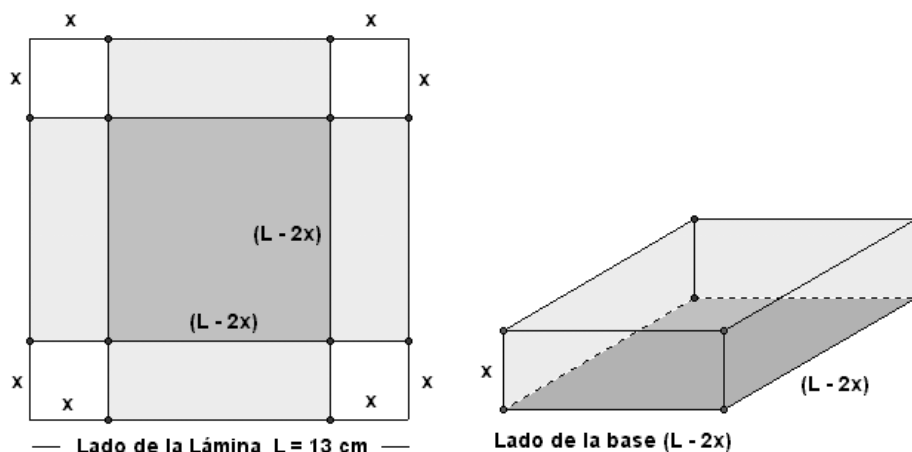
Los problemas elegidos fueron:

#### Problema 1

Determinar las dimensiones de los cuadrados de las esquinas que se deben de cortar, de una lámina cuadrada de 13 cm. de lado<sup>1</sup>, para construir una caja de base cuadrada sin tapa, que tenga volumen máximo (véase figura 1).

---

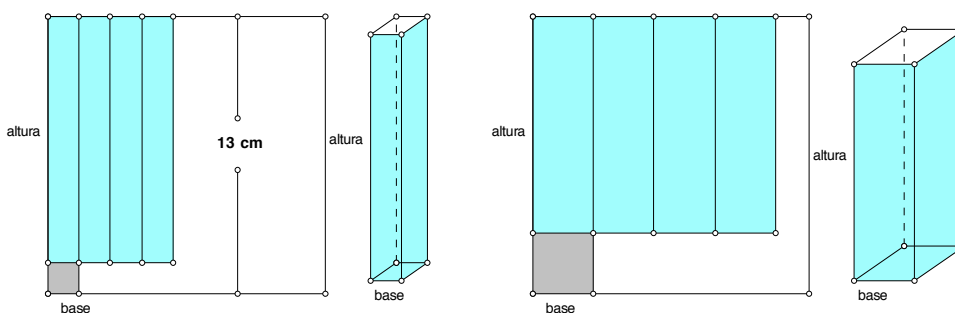
<sup>1</sup> La dimensión 13 cm. se eligió de manera que el punto crítico se localizara en un valor no entero y por ende no fácil de calcular mediante una tabulación.



**Figura 1 :** Caja que se construye con la lámina de la izquierda

### Problema 2

Determinar el volumen máximo que se puede obtener al construir una caja de base cuadrada sin tapa, con una lámina cuadrada de 13 cm. de lado, donde la base esté formada por una esquina de la lámina (véase figura 2).



**Figura 2 :** Construcción de una caja mediante las láminas de la izquierda

Al resolver el problema 1, resulta una función volumen de la forma  $V(x) = (13 - 2x)^2 x$ ; con dominio  $0 \leq x \leq 13/2$ , cuyo valor crítico resulta ser  $x = \frac{13}{6}$ . Esto da lugar a un volumen máximo  $V_{\text{máx}} = 162.74\text{ cm}^3$ , que se alcanza

cuando la longitud que se recorta es de  $x = \frac{13}{6}\text{ cm}$ .

<sup>2</sup> En el modelo se pueden admitir los valores extremos 0 y 13/2, que corresponden a casos límites: "cajas" de volumen 0.

Mientras que al resolver el problema 2, resulta la función  $V(x) = x^2(13 - x)$ , en la que el dominio está determinado por el intervalo  $(0 \leq x \leq 13/4)$ . En esta función el máximo se localiza en  $x = \frac{13}{4}$  cm, extremo del dominio de definición, y da lugar a

$$\text{un volumen máximo de: } V\left(\frac{13}{4}\right) = \left(\frac{13}{4}\right)^2 \left(13 - \frac{13}{4}\right) = 102.98 \text{ cm}^3$$

Los autores mencionan que el estudio se diseñó de manera que los problemas se resolvieran en forma gradual y, mediante cuestionarios cuidadosamente diseñados, se dio seguimiento al trabajo de los estudiantes.

### Resultados reportados

Los resultados que aportó el citado estudio, son los siguientes:

En general toda la población elegida resolvió bien el problema 1; es decir, el ejercicio donde el máximo se encuentra mediante el criterio de la segunda derivada. No ocurrió lo mismo en relación al problema 2 ya que, de todos los profesores del departamento de matemáticas pertenecientes a la academia de Cálculo Diferencial de una escuela superior, sólo dos resolvieron bien este problema cuyo máximo se encuentra en un extremo del dominio. Además, Moreno & Cuevas (ibidem), mencionan que el dominio pasó desapercibido para el 75% de los profesores de la muestra y que todos, sin excepción, aplicaron el criterio de la segunda derivada, obteniendo un valor para el volumen máximo, imposible de aplicar, sin lograr percibir su error.

Con respecto a los estudiantes de maestría, todos llegaron a la respuesta incorrecta  $x = 26/3$  al problema 2, a pesar de que a ellos se les proporcionó, en una hoja, el problema y el dominio de la función.

Finalmente, todos los estudiantes de ingeniería aplicaron el criterio de la segunda derivada para la obtención de los puntos críticos en ambos problemas y, desde el punto de vista operativo, no tuvieron errores. La interpretación de la solución al problema 2 fue casi similar a la registrada por los estudiantes de maestría. Esto es, sólo tres estudiantes se percatan que el valor crítico está fuera del dominio de la función, concluyendo erróneamente que el problema no tiene solución. Los demás estudiantes, como los de maestría, dan por buena la respuesta que obtienen para el punto crítico, sin percatarse de que es un resultado imposible de realizar.

Los autores del estudio anterior, concluyeron que una educación matemática llevada a cabo en forma operativa y rutinaria (en donde la comprensión de los conceptos queda de lado), conduce a sobreponer la operatividad al sentido común.

*Los resultados anteriores ponen de manifiesto una interpretación errónea de los conceptos de máximos y mínimos, al aplicar el criterio de la segunda derivada sin reflexionar en la solución obtenida y al no considerar como información relevante que el dominio de la función es cerrado, cuestión importante al definir los máximos y mínimos de una función continua, acotada y diferenciable en su dominio. En una encuesta, aparte del cuestionario, se les preguntó sobre cómo definían o entendían el máximo o mínimo de una función; la respuesta en general, salvo un 10%, fue que para definir un máximo o un mínimo se requería que la derivada fuera cero en esos puntos. Es decir que para la mayoría, tanto de profesores como de estudiantes, el máximo o mínimo de una función sólo se puede encontrar a través del criterio de la segunda derivada; de no ser posible el aplicar este criterio, entonces concluyen, erróneamente, que el problema no tiene solución o que la función no tiene máximo (Moreno & Cuevas 2004).*

¿Como introducir en el aprendizaje una visión más amplia del objeto función?

## **2. Antecedentes sobre la adquisición del concepto de función**

El concepto de función ha sido y es fundamental para el desarrollo de la matemática; además, con frecuencia modela innumerables fenómenos físicos, químicos, socioeconómicos, biológicos, por mencionar algunos. Sin embargo, y a pesar de ello, diversos investigadores reportan serias dificultades en los estudiantes para comprender este concepto, lo que conduce, con frecuencia, a falsas interpretaciones de conocimientos matemáticos que dependen de la comprensión del concepto de función (Selden, 1992; Dubinsky & Harel, 1992; Norman, 1992).

Usualmente el concepto de función se introduce mediante su definición formal, olvidando que se trata de un objeto matemático muy sofisticado. Su definición es consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una lenta evolución, aún en proceso (Rüting, 1984); requiere, a su vez, de subconceptos matemáticos que han mostrado ser complejos, como: relaciones de dependencia, variable, conjuntos, producto cartesiano, etc. En efecto, a pesar de que en el periodo comprendido entre 1450 y 1650, ocurrió una serie de desarrollos importantes para la fundamentación del concepto de función, éste no surgió, en forma explícita, hasta principios del siglo XVIII (Youschkevitch, 1976), por su parte Kleiner sostiene que a pesar de que la noción del concepto de función se remonta a 4000 años atrás; 3700 años *consistieron sólo de anticipaciones*; considera incluso, como ya se dijo arriba, que tal concepto continúa en evolución. (Kleiner, 1989).

Algunas de las dificultades que experimentan los estudiantes con el concepto de función se parecen a las ideas que tenían los matemáticos del siglo XVIII (Sierpinska, 1992; Markovits et al., 1986, 1988; Martínez, 1993). También se ha detectado que, por parte de los estudiantes, el reconocimiento de los subconceptos dominio y rango puede ser lo último que aparezca en el desarrollo del concepto de función. Estas dificultades corresponden a obstáculos cognitivos relacionados con el desarrollo histórico del concepto de función (Sierpinska, 1992; Ruiz, 1993). Por su parte Slavit (1997), divide las teorías acerca de la representación que los estudiantes tienen de función, en: *Ver la función como una acción*, en esta parte el estudiante considera la función como una regla de asociación, en donde sólo existen valores de entrada y, mediante un algoritmo definido por la función, se calculan los valores de salida. No existen patrones, invariantes, ni regularidades y produce un conocimiento no permanente. *Mirar la función como un objeto*, este punto de vista comprende a la función como una *correspondencia* y como una *covarianza*. La correspondencia es una concepción relacional, basada sobre relaciones de causa y efecto entre parejas de entrada-y-salida. Briedenbach et al (1992), ofrecen evidencia de que la instrucción que utiliza la programación en computadoras, promueve este tipo de relaciones; para ellos, un *proceso* de concepción de función es el completo entendimiento de una actividad transformacional ejecutada por una función, y que consiste de relaciones de causa-efecto entre variables dependientes e independientes.

Para Sfard (1989), concebir la función como un objeto, es la *reificación* de la acción percibida que permite, eventualmente, concebir a la función como un objeto matemático que posee o no, diferentes propiedades funcionales. Por otra parte, la covarianza es una manera de entender cómo cambian la variable independiente y la variable dependiente, cuando se realizan actividades en varios registros de representación semiótica; Schwarz & Dreyfus (1995), sugieren que los estudiantes identifican propiedades invariantes de las funciones en estudio. La última división que Slavit propone consiste en *orientar la visión de la función hacia sus propiedades*, afirmando que *una visión orientada hacia propiedades se relaciona con la conciencia gradual de propiedades específicas de crecimiento funcional de naturaleza local o global*<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> A property-oriented view of function deals with the gradual awareness of specific functional growth properties of a local or global nature...(Slavit, 1997, p. 266).

### 3. Preliminares a la experiencia

#### 3.1. Un cuestionario inicial y sus resultados

Una conjetura al problema detectado en el artículo mencionado (Moreno & Cuevas, 2004), proviene de suponer que la concepción que los estudiantes tienen de una función, es el de considerar a ésta como una mera asociación entre dos números, una regla de correspondencia y no como un objeto matemático que posee propiedades como lo son el dominio, rango, etc. por ello a pesar de que a los estudiantes se les dotó, en las hojas de actividades, el dominio de la función del segundo problema, esta información pasó desapercibida para ellos. Para comprobar esta conjetura, decidimos llevar a cabo una experiencia, con dos grupos de 11 y 10 estudiantes de dos carreras diferentes: cómputo e ingeniería de UPIICSA (Unidad Profesional Interdisciplinaria de Informática y Ciencias Sociales y Administrativas). Antes de la experiencia, aplicamos una prueba inicial, que consistía de contestar las preguntas de un cuestionario, diseñado con el objeto mostrarnos su imagen o representación del concepto de función. El cuestionario inicial, de una duración prevista de 50 minutos, sin uso de computadora, constaba de dos partes.

##### *Las tareas propuestas en el cuestionario inicial*

La primera parte consistía en el estudio de la función dada bajo la forma implícita:

$$xy^2 + 4xy - x^2 = 0.$$

Las dos primeras preguntas solicitaban resolver la ecuación considerada (en  $x$ , o en  $y$ ), en función de la otra variable la cual debería ser considerada como parámetro. La tercera pregunta consistía en trazar la gráfica.

La segunda parte presentaba un cuadrado de lado  $a = 6$  cm, con un punto  $M$  que se desplaza sobre sus lados (véase figura 3). Siendo  $OP$  un lado del cuadrado, se consideraba el área  $A_M$  (posiblemente nula) del triángulo  $OMP$ . Se denota con  $x$  la longitud de la parte del perímetro del cuadrado de  $O$  a  $M$ , o: recorrido necesario desde  $M$  para llegar a  $O$  al caminar sobre los lados del cuadrado. Se solicitaba decidir si  $A_M$  es o no una función de  $x$ , y después representar gráficamente la situación.

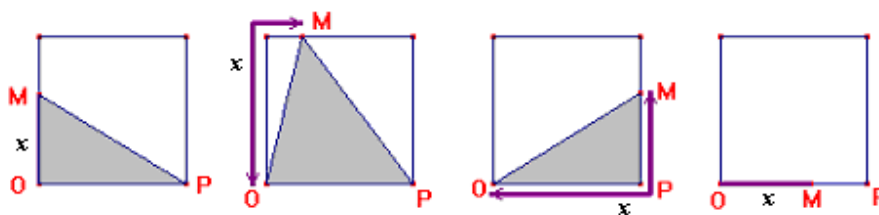


Figura 3

### ***Indicaciones sobre soluciones posibles***

La primera parte se puede resolver considerando que al factorizar  $x$ , la ecuación  $xy^2 + 4xy - x^2 = 0$  se puede escribir como  $x(y^2 + 4y - x) = 0$ , forma que en el plano  $(x, y)$  evidencia la reunión de una recta y una parábola.

Para resolver la segunda parte se considera que el cuadrado, al ser una curva cerrada, tiene dos puntos  $M$  diferentes que dan lugar a un mismo valor de  $x$ , excepto cuando  $M$  está en  $O$  (punto para el cual  $x = 0$ ) o en el punto opuesto (punto donde  $x = 2a$ ). Y las áreas correspondientes son diferentes. Por eso  $A_M$  no es una función de  $x$ . Al desplazar  $M$ , la gráfica que se obtiene en el plano  $(x, A_M)$  es un paralelogramo.

### ***Resultados observados***

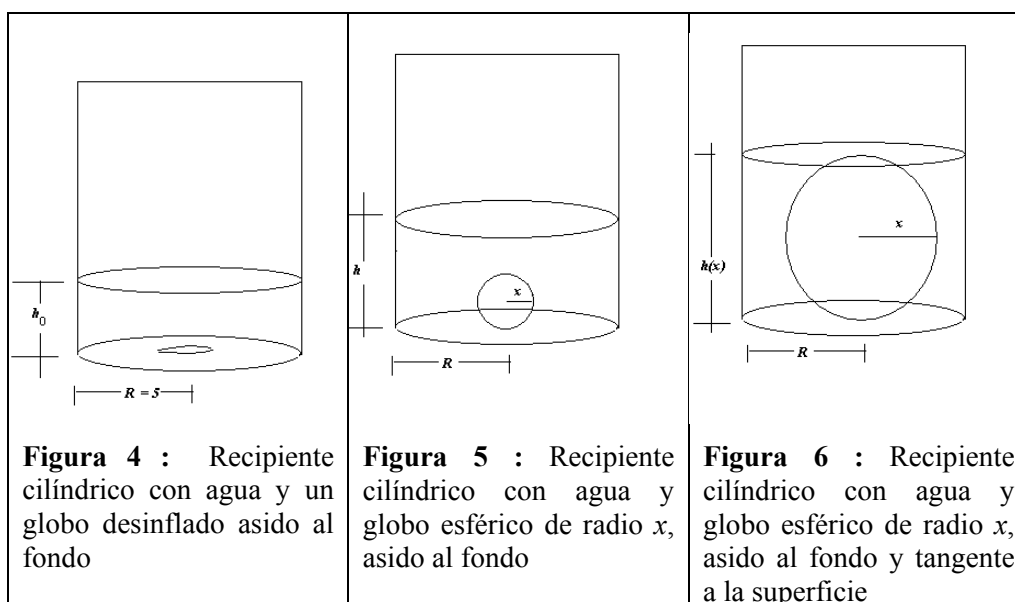
Los resultados (véanse las columnas CI en la tabla del Anexo 3: Hoja general de resultados), tanto en el grupo del área de cómputo como en el grupo del área de ingeniería resultan homogéneos, con respecto al manejo de funciones y de representaciones gráficas solicitadas en este cuestionario, ambos a un nivel de primer acercamiento de los conceptos involucrados. Para precisar lo anterior, podemos subrayar que, en las dos primeras preguntas de la primera parte, todos calcularon sólo con valores numéricos, a excepción de una estudiante que trató, sin éxito, de expresar una variable en función de la otra. Con respecto a la gráfica, todos se quedaron en representaciones parciales, correctas o incorrectas. En la segunda parte, todos respondieron, salvo una única ausencia de respuesta, que se presenta una función, con argumentos del tipo “el valor del área depende de  $x$ ”. Solo un estudiante realizó una gráfica con un segmento completo correcto, los demás se quedaron en tratamientos puntuales.

Eso significa que todos los estudiantes de los dos grupos pueden establecer una correspondencia entre valores y localizar un punto por coordenadas. Pero les falta un sentido más general; es decir, el “encapsulamiento” del concepto de función (Dubinsky & Harel, 1992), así como una visión global de gráficas que les permitiría por ejemplo asociar sistemáticamente una recta a una función lineal o afín, o una cónica a una forma cuadrática en dos variables. Entonces, estos resultados comprobaron que los estudiantes, de esta experiencia, tenían una concepción de función limitada a una regla de correspondencia.

### **3.2. Proyecto de acción: un globo dentro de un recipiente cilíndrico con agua**

Para favorecer un cambio conceptual, nos dimos a la tarea, conforme al modelo didáctico propuesto en Cuevas&Pluvinae (2003), de construir un proyecto de acción que incluyera la elaboración de un problema que, desde su planteamiento,

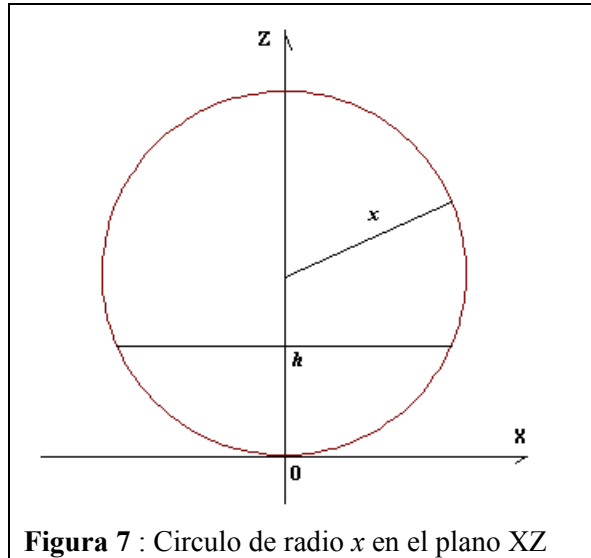
requiriera una formulación precisa del dominio y de esta manera, promover el interpretar el concepto de función como un objeto matemático. Así, surge el siguiente proyecto: Se propone estudiar la situación de un globo inflable, que está asido al fondo de un cilindro de radio  $R = 5$  cm. Cuando el globo está desinflado, es decir, cuando el globo tiene un radio nulo, se vacía agua en el cilindro, hasta que alcance una altura  $h_0$  (véase fig. 4). Ahora bien, el experimento se divide en dos partes: 1) observar lo que ocurre cuando se infla el globo (véase fig. 5), y 2) estudiar cuando el nivel alcanzado por el agua, que llamaremos  $h$ , sea igual al diámetro del globo; es decir, cuando el globo quede exactamente sumergido (véase fig. 6). Empezaremos por presentar el estudio matemático del tema, que en particular nos permitió elaborar un material destinado a los estudiantes. El lector más específicamente interesado en la experiencia puede pasar directamente a la lectura del § 4. Presentaremos en el § 4 la experimentación y por último los resultados obtenidos.



### ***Presentación matemática del problema***

En el plano  $(X, Z)$  la ecuación de un círculo de centro  $(0, x)$  y radio  $x$  (véase fig. 7) es :

$$X^2 + (Z - x)^2 - x^2 = 0.$$



Despejando  $X^2$  queda:

$$X^2 = 2xZ - Z^2$$

Con esta ecuación se puede calcular el volumen  $V_{sg}$  de una sección de esfera de radio  $x$ , entre el nivel 0 y la altura  $h$ :

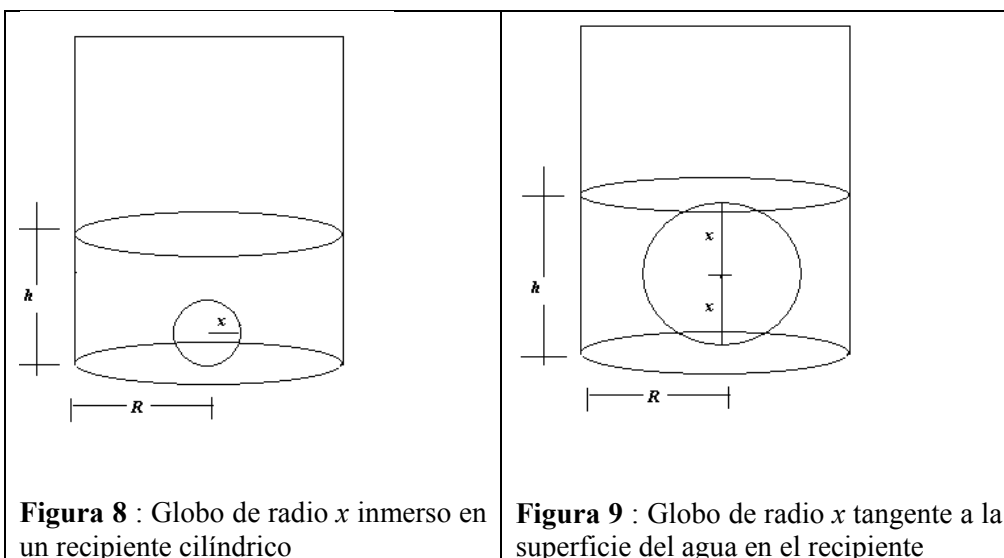
$$V_{sg} = \int_0^h \pi (2xZ - Z^2) dZ = \pi \left( h^2x - \frac{h^3}{3} \right)$$

De aquí se puede deducir que el volumen de una esfera de radio  $x$  estará dado por

$$V_e = \frac{4}{3} \pi x^3$$

Tomemos ahora un recipiente cilíndrico con una base circular de radio  $R$ . Si se deposita en él un líquido de altura  $h$  y se infla un globo asido al fondo, se tienen dos posibles casos.

**Primer caso:** Si la altura  $h$  del agua, es superior o igual al diámetro  $2x$  del globo esférico se tienen las dos situaciones dibujadas en las figuras 8 y 9.



Como se puede observar, en ambos casos, la esfera queda completamente sumergida, por lo que el volumen del líquido que incluye el globo, estará dado por el volumen del globo  $V_g = \frac{4}{3}\pi x^3$ , más el volumen del líquido que está dado por

$$V_a = \pi R^2 h_0.$$

Entonces, en este primer caso, tenemos que

$$\pi R^2 h = \pi R^2 h_0 + \frac{4}{3}\pi x^3$$

de donde

$$h = h_0 + \frac{4x^3}{3R^2}$$

Es decir que  $h$  queda en función de  $x$ .

$$h(x) = h_0 + \frac{4x^3}{3R^2}$$

Ahora bien, cuando el globo es tangente a la superficie del líquido se tiene que

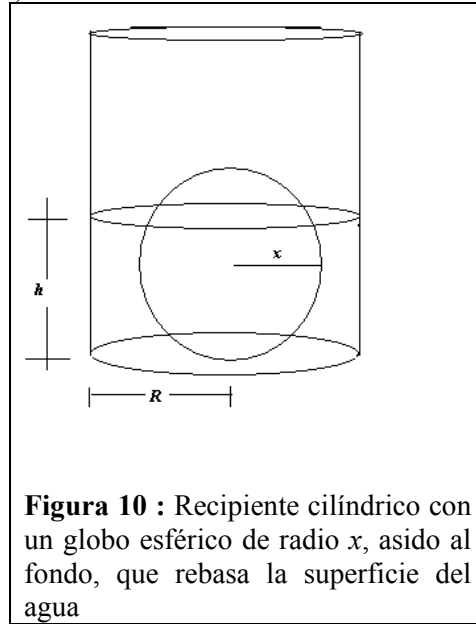
$$h = 2x$$

Por lo que para encontrar el valor de  $x$ , para cuando el globo es tangente a la superficie se tiene que resolver la ecuación

$$2x = h_0 + \frac{4x^3}{3R^2}$$

$$4x^3 - 6R^2x + h_0 = 0$$

**Segundo caso:** La altura  $h$ , del agua, es inferior al diámetro  $d = 2x$  del globo esférico (véase fig. 10)



**Figura 10 :** Recipiente cilíndrico con un globo esférico de radio  $x$ , asido al fondo, que rebasa la superficie del agua

Como en este caso sólo una parte de la esfera, de volumen  $V_{sg}$ , esta sumergida, el volumen a una altura  $h$  del agua se obtiene con la igualdad

$$\pi R^2 h = \pi R^2 h_0 + \pi \left( h^2 x - \frac{h^3}{3} \right)$$

Esto implica que  $h$  se encuentra resolviendo la ecuación

$$h^3 - 3xh^2 + 3R^2h - 3R^2h_0 = 0$$

Notemos que con esta ecuación se forma el polinomio

$$P(h) = h^3 - 3xh^2 + 3R^2h - 3R^2h_0$$

un polinomio en  $h$  formado por el primer miembro de la ecuación cuya derivada es

$$P'(h) = 3(h^2 - 2xh + R^2)$$

Ahora bien, se deduce que  $P'(h) = 3(h^2 - 2xh + R^2) > 0$  para cualquier valor de  $h$ . En efecto, en la ecuación  $P'(h) = 0$ , el discriminante resulta ser  $\Delta = 4(x^2 - R^2) < 0$ , dado que la esfera (globo) tiene un radio  $x$  menor que el radio  $R$  del cilindro. Esto significa que el signo del polinomio  $P'(h) = 0$  no cambia. Así,

al evaluar  $P'(h)$  en cualquier valor de  $h$ , se obtiene el signo; es decir, puesto que  $P'(0) = 3R^2 > 0$ . Con esto concluimos que  $P(h)$  es una función estrictamente creciente, lo que implica que  $P(h)$  tiene exactamente una raíz real. Consecuentemente esta raíz es la solución del problema.

#### ***Modelo geométrico en la computadora***

En nuestro modelo geométrico nos apoyaremos en el acercamiento clásico de la raíz; es decir, aproximarse por medio de una sucesión de valores al valor de la raíz. La justificación matemática se proporciona en el **Anexo1**.

### **4. Fases de la experimentación didáctica del proyecto**

Las secuencias de trabajo se desarrollaron en una sala equipada con computadoras. A los estudiantes se les entrega un programa diseñado en Cabri que simula el inflamiento del globo mediante una manipulación sencilla en la computadora. En este programa los alumnos pueden elegir la altura  $h_0$  de líquido en el cilindro sin globo (o con globo de radio nulo) y mover el radio  $x$  del globo, al ir inflando al mismo.

A continuación se describen las fases de observación y descripción, con la introducción de los diversos registros señalados por Bloch, 2003, que sirven para expresar funciones (véase lista de “*settings*” en Bloch).

#### **Fase 1: descriptiva**

Se pide a los estudiantes, que observen lo que ocurre para diversas elecciones de parámetros. Por ejemplo, pueden observar que con mucha agua el globo quedará completamente sumergido, para cualquier valor de radio. Por el contrario, con poca agua, una parte de la esfera que forma el globo, quedará fuera del agua, luego que el radio sobrepasa un pequeño valor. Pero hay situaciones más sorprendentes... Son tres las variables que se distinguen: el radio de la esfera, la altura del líquido, que son positivas, y la altura del punto más alto de la esfera arriba o debajo del nivel del líquido, variable que se expresa entonces por un número con un signo. Por tal situación, se requiere presentar una descripción cuidadosa de los aspectos cualitativos que se observan. El calificativo “descriptiva” no significa ausencia de demostración; por ejemplo, se puede pedir a los estudiantes que observen que el nivel alcanzado por el líquido sube cuando el radio de la esfera aumenta. Conforme la metodología expuesta por Cordier (1993), es necesario presentar una descripción cuidadosa de los aspectos cualitativos que se observan.

### Fase 2: cuantitativa

En la primera etapa, con las fórmulas de volumen del cilindro y de la esfera, se espera que los alumnos establezcan la ecuación que permite obtener los casos en los que  $h - 2x = 0$ . Posteriormente, se les proporcionará el software *CalcVisual* (Cuevas & Mejía, 2004), para facilitar la determinación de las raíces que solucionan el problema. Se espera que las limitaciones del radio  $x$  del globo, que está  $0 \leq x \leq R$ , en donde  $R$  es el radio del cilindro, se impongan a lo largo de esta búsqueda.

### Fase 3: generalizante

El artículo de Moreno & Cuevas (2004), muestra el carácter memorístico y rutinario en la aplicación de fórmulas para resolver problemas de máximos o mínimos y, evidentemente, constata el olvido frecuente de las limitaciones presentes en tales problemas. La situación mostrada aquí, condujo a tomar en cuenta un dominio que es distinto del dominio de validez de las funciones; el objetivo de aprendizaje es hacer, de tal situación, una generalización al problema de los extremos de una función considerada sobre un segmento (Anexo 2 – Unas hojas del estudiante

El teorema meta). En particular se pondrá el énfasis sobre el teorema de existencia para una función continua. También se expondrá la metodología de obtención de los extremos para una función derivable.

## 5. Resultados cualitativos y cuantitativos

Recordemos que para realizar la experiencia se eligieron dos grupos de 11 y 10 estudiantes de UPIICSA, de dos carreras diferentes: cómputo e ingeniería. Las secuencias de trabajo se desarrollaron en una sala equipada con computadoras. A continuación se presentan los resultados y se hace un breve análisis de lo obtenido en cada fase de la experiencia (para una visión completa, vease Anexo 3: Hoja general de resultados). Las hojas de preguntas, en la experimentación, a diferencia de los cuestionarios inicial y final, no constituían pruebas en sí mismas si no se acompañaban con las actividades que los estudiantes tenían que desempeñar con la computadora. Recordemos que la idea era en cada fase darles *metas* y *objetivos*, y permitir un control, posiblemente para una retroacción si hubiera sido necesaria.

En la **fase descriptiva**, se les presentaban cuatro preguntas relacionadas con los posibles casos que se pueden encontrar en el modelo del globo dentro de un recipiente cilíndrico. En la primera pregunta, el nivel inicial de agua en el recipiente estaba dado y se pedía observar la evolución de la situación del globo (sumergido, emergente, o caso límite entre ambas situaciones). La segunda

pregunta se refería al dominio de evolución del radio del globo (entre 0 y el radio del cilindro). La tercera solicitaba encontrar una designación verbal para la diferencia (con signo, positivo o negativo) entre la altura del agua en el recipiente y el diámetro del globo. Y la cuarta, y última, pedía determinar si las diversas elecciones del nivel inicial de agua (con el globo totalmente desinflado), pueden producir diversas evoluciones cuando se infla el globo. Recordemos que en un experimento, o en el funcionamiento de un modelo, una variable debe ser vista como una función.

El número de éxitos fue mayoritario únicamente en la segunda pregunta (el dominio de variaciones del radio del globo). Le sigue la primera, luego la cuarta y, en último lugar, donde no se tuvieron éxitos fue en la tercera pregunta. Estos resultados contrastan con los obtenidos en la fase cuantitativa. Una interpretación de las dificultades encontradas podría tener como base los siguientes cuatro niveles de pensamiento:

- La sustitución de valores es el nivel más elemental de manejo de una variable,
- observar una evolución es más difícil que determinar valores,
- considerar de manera global una variable representa un grado de dificultad más elevado que la determinación de valores,
- determinar un objeto conceptual tributario de dos variables simultáneas alcanza el máximo nivel de dificultad.

Los pocos éxitos encontrados en tres de las preguntas de la fase descriptiva no permiten estudiar relaciones entre las respuestas de un mismo individuo.

La decisión que tomamos, al final de la fase descriptiva, fue seguir con lo previsto; o sea, presentar a los estudiantes solamente elementos de respuesta relativos a los aspectos involucrados en la fase descriptiva. Así, les entregamos una hoja de estudio para el caso en el que la superficie del líquido es exactamente tangente al globo, hecho que conduce a determinar las raíces del polinomio  $\frac{4}{75}x^3 - 2x + h_0$  que pertenecen al intervalo  $[0, 5]$  (en el modelo, el radio del recipiente cilíndrico es de 5 cm.); además, este estudio introduce el cuestionario de la fase cuantitativa

La **fase cuantitativa**, consistía en resolver ecuaciones polinomiales en un intervalo con la ayuda del paquete de cálculo *CalcVisual* (Cuevas & Mejía, 2004), los estudiantes resultaron ser mucho más exitosos. Se propusieron tres ecuaciones de grado tres, que corresponden a los diversos valores numéricos de  $h_0$  para la ecuación general  $\frac{4}{75}x^3 - 2x + h_0$ . No se encontró ningún valor erróneo y casi todas las respuestas fueron completas (a excepción de dos).

Por su parte, la **fase generalizante** se componía de dos partes: La presentación de una hoja de resultados generales, referentes a los extremos alcanzados por una función sobre un segmento; y la otra parte, constituía un cuestionario sobre los dominios correspondientes a las funciones polinomiales obtenidas en dos problemas estudiados en el artículo de Moreno & Cuevas (2004): el problema 1 presentado en la Introducción y un problema 2 similar (véase Anexo 2 – Unas hojas del estudiante), y a la función que resulta de un problema relativo a una ventana tipo Normanda, que consiste de un rectángulo coronado por una semicircunferencia. En cada caso, el modelo se presentó acompañado por la expresión algebraica del polinomio que expresa la magnitud estudiada, con la gráfica completa del polinomio, y la pregunta planteada era: “Determinar únicamente el dominio de la función que modela el problema”. Además, se les pedía subrayar en la gráfica el intervalo del dominio.

En los resultados obtenidos en esta fase (columnas DO1 a DO3 en el Anexo 3: Hoja general de resultados), se nota cierta diferencia entre los dos grupos. Por ejemplo, se observa que en el grupo “computo”, hay más respuestas pero también más errores; mientras que en el grupo “ingeniería”, la tendencia hacia no responder en caso de dificultad predomina. Los resultados obtenidos por el grupo “computo” son similares en los tres casos; en tanto que, para el grupo “ingeniería” el problema de la ventana tipo normanda ocasionó más dificultades que los demás casos. En forma general, se puede expresar que los resultados alcanzados en esta fase no fueron muy satisfactorios, a pesar de los estudios anteriores, quizás por la presentación muy completa. En cada caso: un modelo, una fórmula y una gráfica.

### **Cuestionario final**

El cuestionario final presentaba el problema del volumen máximo de una caja sin tapa, que en observaciones anteriores había dado lugar a un fracaso fuertemente mayoritario de los profesores y estudiantes entrevistados (véase Introducción, Problema 2 en Moreno & Cuevas, 2004), a causa de la tendencia de aplicar el criterio de la segunda derivada sin tomar en cuenta el dominio de la función. Este cuestionario final constaba de nueve preguntas: dos para llegar a la fórmula del volumen; una referente al dominio de la función; dos de construcción de una tabla de valores; una para solicitar la gráfica y tres sobre los extremos del volumen. Así entonces, en términos de tener actividades en los diferentes registros de representación para las funciones, el cuestionario terminal lo consideramos muy completo.

Los resultados observados en la experiencia (columnas CF en Anexo 3: Hoja general de resultados) ponen en evidencia que el objetivo general esperado fue alcanzado por una fuerte mayoría de los estudiantes: precisamente, 17 de los 21, se dieron cuenta de que el polinomio tiene un punto crítico fuera del dominio de la

función y que, por consecuencia, no conduce al máximo deseado. Esto es un éxito convincente, pero no significa que estos estudiantes llegaron a una adquisición que se pudiera considerar completa. Muchos estudiantes no contestaron a una u otra de las ocho preguntas planteadas, o cometieron errores en algunas de las respuestas dadas. Las razones son diversas: A unos les molestó que un extremo del dominio de la función, que corresponde a una situación límite ("caja" de volumen nulo, véase nota 2 de pie de página) no tenga una realización concreta; la tabla de valores se puede relacionar con el polinomio sin las limitaciones de la función; también el manejo de números con aproximaciones puede generar problemas; después de rechazar un punto crítico para la obtención del máximo, muchos (13 estudiantes de los 17 que rechazaron el punto crítico) se sienten satisfechos y deciden no continuar con la búsqueda. Es lo que consideramos como éxito parcial en la tabla general de resultados (columna CF8). Si se considera un nivel de exigencia máxima, sólo dos estudiantes del grupo "ingeniería", obtuvieron un éxito completo en las nueve preguntas planteadas. En general, los estudiantes del grupo "ingeniería" tuvieron más éxitos que los del grupo "computación". Específicamente el caso del mínimo (nulo) casi no ocasionó dificultad a los primeros (un único error), mientras que causó una grave molestia a los segundos (un único éxito). ¿Podría ser esto la consecuencia de una inquietud mayor de los segundos en cuanto al significado concreto de un resultado calculado? En este caso, el fenómeno se podría interpretar como una contraparte de cierta destreza en el manejo de expresiones.

## **6. Conclusiones de la experimentación del "proyecto globo"**

Los resultados que observamos nos permiten asegurar que nuestra experiencia dio un resultado concluyente en cuanto al objetivo de promover una mayor comprensión del concepto de función. A nuestro juicio la experiencia fue limitada, sin embargo, dentro del marco de una investigación breve (dos semanas en nuestro caso), nos sugiere perseguir a la vez un objetivo utilitario de promover una mejor comprensión de los conceptos matemáticos y un objetivo más científico de comprensión de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje en juego. Y las observaciones ponen en evidencia que, sólo para adquirir los conocimientos y métodos relativos al teorema de los extremos alcanzados por una función continua sobre un intervalo, un camino consiste en efecto en profundizar el concepto mismo de función.

En este sentido, cada una de las diversas fases introducidas jugó un papel para el alcance del resultado final. La contribución de los diversos registros de expresión (geométrico, algebraico, tabular y gráfico) que permiten estudiar funciones, también fue decisiva. Recordemos el programa de trabajo que se encuentra en el libro de Dubinsky, Schwingendorf & Mathews:

*“La construcción de una función es frecuentemente llamada una representación de ella. Se puede representar una función en la computadora de varias maneras: como una expresión, como una función de computadora, como un conjunto de pares ordenados-tablas, o como una gráfica. Cada una de estas representaciones tiene sus puntos fuertes y débiles. Cual se debe seleccionar en una situación particular depende del problema.”*

Para cumplir con este programa, se deben proporcionar al estudiante las oportunidades para utilizar todos estos aspectos.

**Anexo 1**

Obtención de un valor aproximado de altura de agua  
cuando no hay inmersión completa del globo

La ecuación

$$\pi R^2 h = \pi R^2 h_0 + \pi \left( h^2 x - \frac{h^3}{3} \right) \quad (\text{I})$$

se puede describir en la siguiente forma:

$$h = - \left( \frac{1}{3R^2} \right) h^3 + \left( \frac{x}{R^2} \right) h^2 + h_0 \quad (\text{II})$$

Si designamos con  $k_1 = f(h)$  a el polinomio que se tiene en el segundo miembro de la ecuación, se tiene que

$$f(h) = - \left( \frac{1}{3R^2} \right) h^3 + \left( \frac{x}{R^2} \right) h^2 + h_0 \quad (\text{III})$$

en donde  $R > 0$  y  $x \geq 0$

Analizando este tipo de función se tiene que:

$$f(0) = h_0 > 0$$

su extensión o límites a infinito de  $f(h)$  son:

$$\lim_{h \rightarrow -\infty} f(h) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow \infty} f(h) = -\infty.$$

Además dado que su derivada resulta ser:

$$f'(h) = \frac{(2x - h)h}{R^2}$$

se derivan las siguientes propiedades

$$f'(0) = 0$$

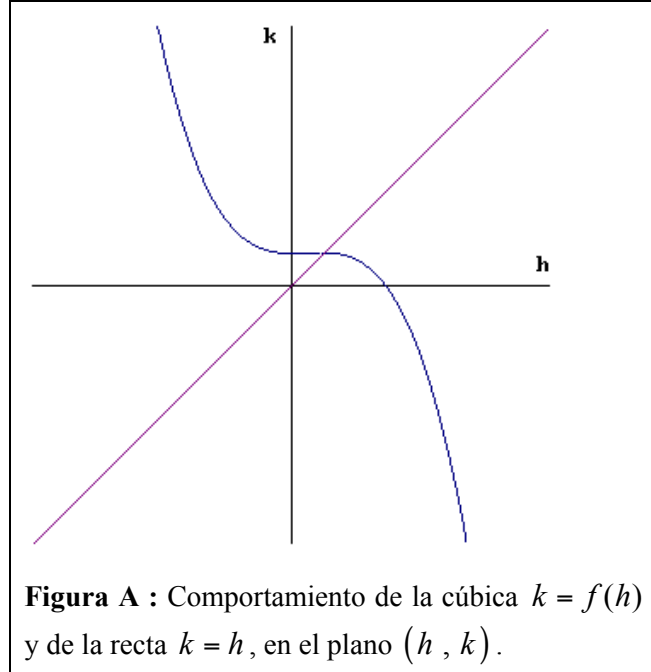
$$f'(h) > 0 \quad \text{si} \quad 0 < h < 2x$$

$$f'(2x) = 0$$

Por otra parte se puede definir a otra función  $k_2 = g(h) = h$

Por ello la ecuación II, resulta de igualar a  $k_2 = k_1$ .

Y por las propiedades geométricas deducidas resulta que la cúbica  $k_1 = f(h)$  corta a la recta  $k_2 = h$  en un único punto de abscisa entre 0 y  $2x$ , y en este punto con una derivada situada entre 0 y 1 (véase figura A).



Entonces podemos utilizar el algoritmo usual para aproximar este valor: Iniciamos con  $h = 0$  y calculamos sucesivamente  $f(0) = h_1$ ,  $f(h_1) = h_2$ , ...,  $f(h_{n-1}) = h_n$ . Sabemos que  $h_n$  tiende hacia el valor deseado cuando  $n$  tiende hacia el infinito. Unos ensayos muestran que ya con  $h_4$  se alcanza una precisión aceptable.

Queda nada más el problema de encontrar una función que nos permita escoger entre el valor de la altura  $a_0 = h_0 + \frac{4x^3}{3R^2}$ , que corresponde a la inmersión completa de la esfera, y el valor  $h_4$  obtenido. La función “*signo*”, que toma el valor 1 cuando su argumento es positivo y el valor (- 1) cuando su argumento es negativo, conviene para que la computadora haga esta selección:

$$h = \left[1 + \text{signo}(a_0 - 2x)\right] \left(\frac{a_0}{2}\right) + \left[1 - \text{signo}(a_0 - 2x)\right] \left(\frac{h_4}{2}\right)$$

## Anexo 2 – Unas hojas del estudiante

### El teorema meta

Aquí se presentan resultados generales sobre funciones reales cuyo dominio es un segmento cerrado (puntos extremos incluidos).

Se admitirá el *teorema de los valores extremos alcanzados*, cuyo enunciado es el siguiente.

**TEOREMA.** Sea  $f$  una función de variable real  $x$  cuyo dominio contiene un segmento  $[a, b]$ . Si  $f$  es **continua** sobre  $[a, b]$ , entonces  $f(x)$  alcanza sobre  $[a, b]$  un máximo y un mínimo.

Las conclusiones del teorema se escriben también:

Existe  $x_1, a \leq x_1 \leq b$ , tal que para todo  $x \in [a, b], f(x) \leq f(x_1)$ .

Existe  $x_2, a \leq x_2 \leq b$ , tal que para todo  $x \in [a, b], f(x_2) \leq f(x)$ .

La primera concierne el máximo, la segunda el mínimo.

**Ejemplo:** Se podrá verificar que la función definida sobre  $[-1, 2]$  por

$$f(x) = 2x^2 + 3x$$

alcanza un máximo en 2, con el valor  $f(2) = 14$ ,

un mínimo en  $-3/4$ , con el valor  $f(-3/4) = -9/8$ .

Se puede observar en este caso que uno de estos dos puntos es un extremo del segmento, mientras el otro es interior al segmento. Ambos casos se pueden presentar para el máximo como el mínimo, según la función considerada.

Hace falta cuidar en las hipótesis del teorema. Las conclusiones pueden ser falsas si una hipótesis no se cumple.

**Ejemplo de una función discontinua:** Consideremos  $f(x) = x - ENT(x)$  sobre  $[0, 2]$ , donde  $ENT(x)$  designa la parte entera de  $x$  (p. ej. la parte entera de 0.35 es 0, la parte entera de 1.732 es 1). Esta función tiene un máximo 1 que no se alcanza.

**Ejemplo de un intervalo no cerrado:** La función definida sobre  $]0, 1]$  por  $f(x) = 1/x$  no tiene máximo.

### Búsqueda de valores extremos en el caso de función derivable

**Método de búsqueda de extremos para una función derivable sobre un segmento  $[a, b]$ :** Una función  $f$  derivable es continua, entonces las hipótesis del teorema son verificadas por  $f$  sobre  $[a, b]$ . Si un valor extremo se alcanza en un punto  $x_0$  interior al segmento, este es un punto crítico y en particular  $f'(x_0) = 0$ . Pero un valor extremo puede alcanzarse en un punto extremo del segmento. Entonces es preciso:

- calcular  $f(a)$  y  $f(b)$ ,

- determinar las raíces de  $f'(x) = 0$  que están en el segmento  $[a, b]$ ,
- comparar con  $f(a)$  y  $f(b)$  los valores críticos correspondientes a estas raíces.

**Ejemplo:** En el caso ya encontrado de la función  $f$  definida sobre  $[-1, 2]$  por  $f(x) = 2x^2 + 3x$ , la derivada es  $f'(x) = 4x + 3$ . Esta derivada viene nula en  $x = -3/4$ . El valor  $-3/4$  pertenece al segmento  $[-1, 2]$ . Entonces tenemos que considerar en este caso los valores

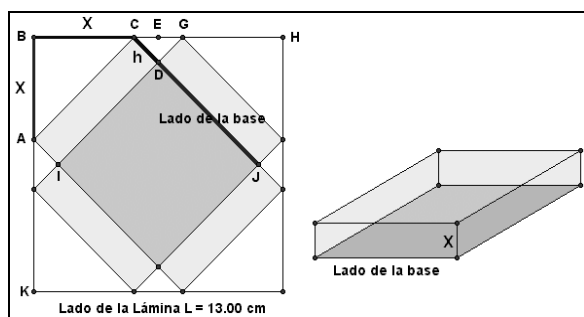
$$f(-1) = -1, f(-3/4) = -9/8 \text{ y } f(2) = 14.$$

Así el máximo de  $f(x)$  sobre  $[-1, 2]$  es 14 y el mínimo  $-9/8$ .

\*\*\*\*\*

### Una pregunta de dominio: problema 2 en la hoja del estudiante

Determinar el máximo volumen de una caja sin tapa de base cuadrada al trazar los lados y la base en líneas paralelas a las diagonales de una lámina cuadrada de 13 cm de lado

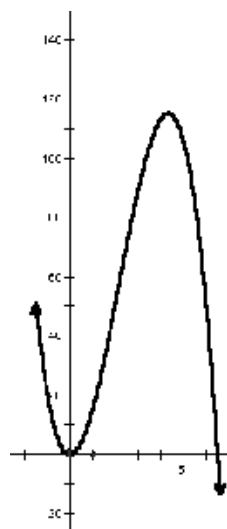


$$V(x) = 2x^2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (L - 2x) \right)$$

Dominio:

.....

Subraya en la gráfica el intervalo del dominio:





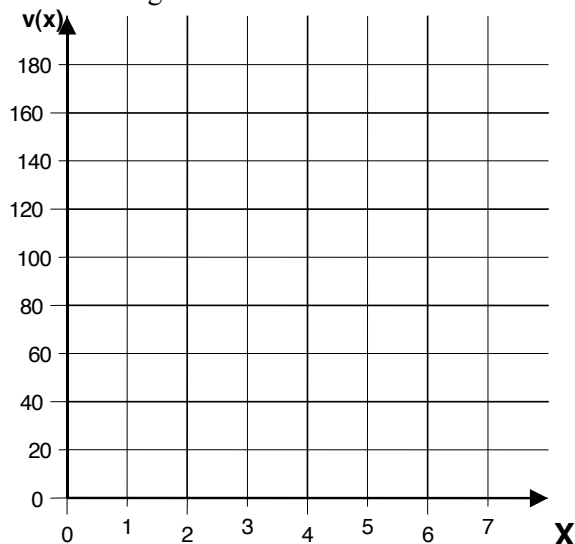
## 5. Interpretación de la tabla

Haciendo un análisis de la tabla, escribe el valor de:

$x = \underline{\hspace{2cm}}$  cm que da lugar al volumen máximo  $V_{\text{máx}} = \underline{\hspace{2cm}}$  cm<sup>3</sup>

$x = \underline{\hspace{2cm}}$  cm que da lugar al volumen mínimo  $V_{\text{mín}} = \underline{\hspace{2cm}}$  cm<sup>3</sup>

## 6. Con los valores de la tabla grafica la función



## 7. Interpretación de la gráfica

Haciendo un análisis de la gráfica, determina:

$x = \underline{\hspace{2cm}}$  cm que da lugar al volumen máximo  $V_{\text{máx}} = \underline{\hspace{2cm}}$  cm<sup>3</sup>

$x = \underline{\hspace{2cm}}$  cm que da lugar al volumen mínimo  $V_{\text{mín}} = \underline{\hspace{2cm}}$  cm<sup>3</sup>

## 8. Resuelve el problema planteado al inicio utilizando el Cálculo Diferencial.

## Anexo 3: Hoja general de resultados

| Estudiante     | Grupo      | CI1a | CI1b | CI1c | CI2a | CI2b | FD1 | FD2 | FD3 | FD4 | FC1a | FC1b | FC2a | FC2b | FC3A | FC3b | DO1 | DO2 | DO3 | CF1 | CF2 | CF3 | CF4 | CF5 | CF6 | CF7M | CF7m | CF8 |
|----------------|------------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|
| Mario          | Computo    | 1    | 2    | 2    | 2    | 1    |     |     |     |     | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9   | 9   | 9   | 9   | 9   | 0   | 2   | 9   | 9   | 9    | 9    | 9   |
| Oscar          | Computo    | 1    | 1    | 3    | 1    | 1    | 1   | 0   | 0   | 9   | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9   | 9   | 9   | 9   | 9   | 0   | 9   | 7   | 1   | 9    | 1    | 8   |
| Leonel         | Computo    | 2    | 3    | 2    | 3    | 7    | 8   | 8   | 8   | 9   | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9   | 1   | 1   | 1   | 9   | 9   | 0   | 9   | 7   | 9    | 0    | 8   |
| Carlos Eduardo | Computo    |      |      |      |      |      | 1   | 9   | 0   | 3   | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9   | 1   | 1   | 1   | 9   | 9   | 1   | 9   | 1   | 7    | 9    | 1   |
| Alvaro Daniel  | Computo    | 2    | 2    | 0    | 3    | 1    |     |     |     |     | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9   | 0   | 1   | 1   | 9   | 9   | 0   | 2   | 7   | 3    | 9    | 1   |
| Blideth        | Computo    | 1    | 0    | 1    | 3    | 3    | 2   | 9   | 0   | 3   |      |      |      |      |      |      | 3   | 9   | 1   | 1   | 9   | 9   | 1   | 2   | 7   | 7    | 0    | 8   |
| Jocson         | Computo    | 2    | 3    | 1    | 2    | 1    | 1   | 9   | 1   | 2   | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1   | 1   | 1   | 1   | 9   | 9   | 0   | 2   | 0   | 1    | 0    | 8   |
| Jorge Uriel    | Computo    |      |      |      |      |      | 1   | 9   | 1   | 2   |      |      |      |      |      |      | 1   | 1   | 1   | 1   | 9   | 9   | 0   | 2   | 0   | 1    | 0    | 8   |
| Margarita      | Computo    |      |      |      |      |      |     |     |     |     |      |      |      |      |      |      | 1   | 1   | 1   | 1   | 9   | 9   | 3   | 7   | 3   | 1    | 1    | 0   |
| Cecilia        | Computo    | 3    | 0    | 0    | 3    | 3    |     |     |     |     |      |      |      |      |      |      | 1   | 0   | 0   | 9   | 9   | 0   | 2   | 7   | 3   | 1    | 1    | 2   |
| Elisabeth      | Computo    | 2    | 3    | 2    | 2    | 2    |     |     |     |     | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1    | 1   | 1   | 1   | 1   | 9   | 9   | 7   | 2   | 7   | 1    | 1    | 2   |
| Juan Carlos G  | Ingeniería | 3    | 2    | 2    | 2    | 2    | 1   | 9   | 7   | 3   | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9   | 9   | 9   | 1   | 9   | 9   | 9   | 9   | 9   | 9    | 9    | 9   |
| Eric           | Ingeniería | 2    | 2    | 2    | 2    | 7    |     |     |     |     | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9   | 9   | 9   | 0   | 9   | 9   | 9   | 9   | 9   | 9    | 9    | 9   |
| Adan           | Ingeniería | 3    | 2    | 2    | 0    | 2    | 1   | 9   | 1   | 2   | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9    | 9   | 9   | 9   | 0   | 9   | 9   | 9   | 9   | 2   | 9    | 9    | 8   |
| Carolina       | Ingeniería | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    |     |     |     |     | 9    | 9    | 9    | 7    | 9    | 9    | 9   | 9   | 9   | 0   | 9   | 9   | 9   | 1   | 7   | 1    | 1    | 8   |
| Antonio        | Ingeniería | 2    | 1    | 2    | 3    | 1    | 1   | 9   | 1   | 3   |      |      |      |      |      |      | 9   | 9   | 2   | 2   | 7   | 2   | 2   | 7   | 3   | 2    | 9    | 9   |
| Joel Alejandro | Ingeniería |      |      |      |      |      | 9   | 9   | 7   | 2   |      |      |      |      |      |      | 9   | 9   | 1   | 2   | 7   | 3   | 1   | 2   | 7   | 3    | 1    | 9   |
| Daniela        | Ingeniería | 2    | 3    | 2    | 3    | 1    | 1   | 9   | 1   | 2   |      |      |      |      |      |      | 9   | 9   | 2   | 2   | 7   | 3   | 2   | 7   | 3   | 2    | 9    | 8   |
| Luis           | Ingeniería |      |      |      |      |      |     |     |     |     |      |      |      |      |      |      | 9   | 9   | 1   | 2   | 7   | 3   | 1   | 2   | 7   | 3    | 1    | 9   |
| Juan Carlos R  | Ingeniería |      |      |      |      |      | 9   | 9   | 2   | 3   |      |      |      |      |      |      | 9   | 9   | 2   | 2   | 7   | 3   | 2   | 7   | 3   | 2    | 9    | 8   |
| Blanca Estela  | Ingeniería |      |      |      |      |      |     |     |     |     | 9    | 9    | 9    | 7    | 9    | 9    | 1   | 9   | 0   | 9   | 9   | 9   | 1   | 7   | 3   | 1    | 9    | 2   |

Los niveles de gris en las celdas reflejan niveles de éxitos, de muy claro: ausencias de respuesta, o claro: fracasos, a oscuro o negro: éxitos parciales o completos.

Los números son códigos (9: éxito completo, 8 o 7: éxitos parciales, 3 o 2: errores típicos, 1: otros errores, 0: ausencia de respuesta).

### Bibliografía

BLOCH I., 2003, *Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?*, Educational Studies in Mathematics, 52, 3-28.

BRIEDENBACH D. E., DUBINSKY E., HAWKS J. & NICHOLS D., 1992, *Development of the process conception of function*, Educational Studies in Mathematics, 23, 247-285.

CUEVAS C. A. & PLUVINAGE F., 2003, *Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques*, Annales de didactique et de sciences cognitives, 8, Strasbourg, IREM.

CUEVAS C. A. & MEJÍA H. R., 2003, *Cálculo visual*, México, Oxford University Press, Libro de texto incluyendo un disco compacto con el software CalcVisual.

DUBINSKY E. & HAREL G., 1992, *The Nature of the Process Conception of Function*, En G. Harel y E. Dubinsky (eds.), *The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Mathematical Association of America, Notes Series, 25, 85-106.

DUBINSKY E., SCHWINGENDORF K. & M., DAVID M., 1995, *Calculus, Concepts & Computers*, Segunda Edición, McGraw-Hill.

KLEINER I., 1989, *Evolution of the Function Concept: A brief survey*, The college Mathematics Journal, 20(4), 282-300.

MARKOVITS Z., EYLON B. S. & BRUCKHEIMER M., 1986, *Functions Today and Yesterday*, For the Learning of Mathematics, 6(2), 18-24.

MARKOVITS Z., EYLON B. S., & BRUCKHEIMER M., 1988, *Difficulties students have with the function concept*, In A. F. Coxford and A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra. 1988 Yearbook*, 43-60, Reston, VA: NCTM.

MARTÍNEZ A. M., 1993, *Knowledge and Development of Functions in a Technology-Enhanced High School Precalculus Class: A Case Study*, PhD thesis, The Ohio State University, USA.

MORENO S. & CUEVAS C. A., 2004, *Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial*, Educación Matemática, 16-2.

NORMAN A., 1992, *Teacher's Mathematical Knowledge on the Concept of Function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Mathematical Association of America, Notes Series, 25, 215-232.

RUIZ H., 1993, *Concepciones de los Alumnos de Secundaria Sobre la Noción de Función: Análisis Epistemológico y Didáctico*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada, España.

RÜTING D., 1984, *Some definitions of the Concept of Function from J. Bernoulli to N. Bourbaki*, *The Mathematical Intelligencer*, 6 (4).

SCHWARZ B. & DREYFUS T., 1995, *New actions upon old objects: A new ontological perspective on function*, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 259-291.

SELDEN A., & SELDEN J., 1992, *Research perspectives on conceptions of function summary and overview. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Mathematical Association of America, Notes Series, Vol. 25, 1-21.

SIERPINSKA A., 1992, *On understanding the notion of function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Mathematical Association of America, Notes Series, Vol. 25, 23-58.

SFARD A., 1989, *Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited*, *Proceedings of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 151-158, Paris, France.

SLAVIT D., 1997, *An alternate route to the reification of function*, *Educational Studies in Mathematics*, 33, 259-281.

USISKIN Z., & SENK S. L., 1992, *The University of Chicago School Mathematics Project Material*, Glenview, IL: Scott, Foresman.

VILENKIN N. Ya., 1968, *Stories about sets*, Academic Press.

YOUSCHKEVITCH A. P., 1976, *The Concept of Function up to the Middle of the 19<sup>th</sup> Century*, *Arch. Hist. Ex. Sci*, 16, 37-85.

**C. ARMANDO CUEVAS VALLEJO**  
DME, CINVESTAV-IPN, México  
[ccuevas@mail.cinvestav.mx](mailto:ccuevas@mail.cinvestav.mx)

**SALVADOR MORENO GUZMAN**  
CCH, UNAM, México

**FRANÇOIS PLUVINAGE**  
IREM de Strasbourg, France  
[pluvin@math.u-strasbg.fr](mailto:pluvin@math.u-strasbg.fr)

**ALINE ROBERT**

**DE RECHERCHES SUR LES PRATIQUES AUX FORMATIONS  
D'ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES DU SECOND DEGRÉ :  
UN POINT DE VUE DIDACTIQUE**

**Abstract. From research works on teachers' practice to training secondary school mathematics teachers: a didactical approach**

In this text, we first discuss the legitimacy of our project and then we present some research works we have obtained on mathematics teachers' practices. We infer some propositions on teachers' training. They concern training's modes and methods, but they fit only teachers' training which have some direct relation with classroom's practices. We defend the idea that it is very difficult for a teacher to change his own practices: this comes from our research's results on practices' stability, based on complexity and individual coherence. Furthermore, all teachers as "workers" share some institutional and social constraints and the common answers they have developed are also very stable ones. That is why we insist on teachers' training's modes and methods. We present then a precise project called "scénario", based on classroom videotapes' analyses. The aim of the training is to give teachers tools to analyse these videos. We try to show how this project fits our proposals: long training, work on both contents and classroom's management, real and tied to professional interest activities with a collective dimension, allowing a real work on constraints and choices. To conclude, we evoke some research we think it would be useful to conceive, namely on evaluation of training's teachers.

**Key words.** Secondary mathematics teachers' training, teachers' practices, mathematics teachers trainers' training, "scenario", hypotheses on training's teachers.

**Résumé.** Dans cet article, après avoir justifié la légitimité du propos, nous présentons quelques résultats de recherches que nous avons obtenus sur les pratiques des enseignants de mathématiques. Nous en déduisons des propositions, encore partielles, sur la formation de ces pratiques : elles mettent en jeu les modalités des formations pour certains choix de contenus ; elles ne concernent que des formations pouvant avoir des retombées directes sur les pratiques de classe. Ce sont notamment la stabilité, la cohérence et la complexité des pratiques d'un enseignant donné, et la difficulté correspondante de modifier les pratiques ainsi que la prise en compte du métier de l'enseignant et de toutes les contraintes correspondantes, qui nous amènent à ces propositions. Nous présentons ensuite un exemple précis de « scénario de formation » à partir d'analyses de vidéo de séances de classe, qui a comme objectif de donner aux enseignants des outils d'analyses de ces séances. Nous nous attachons à montrer comment ce scénario s'inspire des propositions précédentes et les vérifie : formation longue, permettant un travail simultané sur les contenus enseignés et la gestion en classe, mettant en jeu les contraintes et amenant à une réflexion sur les alternatives, grâce à des activités collectives significatives pour les participants. Nous terminons en évoquant des recherches qui pourraient se développer sur ces formations,

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, vol 10, p. 209 - 249.

© 2005, IREM de STRASBOURG.

notamment pour concevoir des scénarios et tester les propositions présentées en évaluant les effets des formations.

Des annexes permettent de donner des précisions sur l'exemple de scénario.

**Mots clés.** Formations des enseignants de mathématiques du second degré, pratiques des enseignants de mathématiques du second degré, scénarios de formation, formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré, évaluation des formations, hypothèses sur les formations.

---

### **Introduction : une problématique de recherches sur la formation des enseignants de mathématiques du second degré est-elle recevable en didactique des mathématiques ?**

Il y a peu de recherches importantes de didactique des mathématiques sur la formation professionnelle effective (initiale ou continue<sup>1</sup>) des enseignants de mathématiques du second degré. Que ce soit en France ou à l'étranger, on trouve davantage des propositions de formation plus ou moins étayées en référence à des travaux divers, peu évaluées. Des formations sont par exemple mises en place depuis des années en France dans les Missions Académiques à la Formations des Personnels de l'Education Nationale (MAFPEN), les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM), les Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), avec des diversités très grandes (cf. Robert et Pouyane, 2004) et avec finalement peu de textes écrits et peu d'évaluations autres qu'à chaud<sup>2</sup>. A l'étranger on trouve soit des textes très généraux sur la formation des enseignants (Jaworski 2003, Peressini et al. 2004, Clarke et al., 2002) qui présentent des propositions globales basées sur des modèles souvent issus de recherches sur les pratiques, soit des récits d'expériences de formation non évaluées (Kazemi et al., 2004), pour ne citer que des travaux récents.

Il y a des raisons « théoriques » à la difficulté de passer de propositions ou même d'hypothèses générales à des formations précises à évaluer : d'une part les évaluations menées dans des recherches didactiques sont souvent liées à des ingénieries qui permettent des comparaisons entre des prévisions et des déroulements. Or à l'heure actuelle on ne peut pas encore parler d'ingénieries de formation, même si certains scénarios de formation commencent à apparaître. Et les hypothèses précises qu'on pourrait mettre à l'épreuve dans de tels scénarios ne sont pas encore dégagées très clairement, même si certaines pistes peuvent être

---

<sup>1</sup> Initiale en deuxième année d'IUFM, continue par l'intermédiaire des stages PAF par exemple. Il y a plus de recherches pour le premier degré (Houdement et Kuzniak, 1996, Masselot, 2000, Peltier, 2004, Vergnes, 2001).

<sup>2</sup> L'existence de la COPIRELEM (commission nationale) a notablement changé les choses pour le premier degré.

suivies. D'autre part évaluer des formations implique évaluer des pratiques enseignantes et donc évaluer des apprentissages d'élèves : il y a là une complexité et une imbrication de trois niveaux (formations, pratiques des enseignants en classe, apprentissage des élèves) qui rend le projet d'emblée très difficile. De plus il y a un grand risque de glissement normatif dans ce type d'entreprises, il faudrait pouvoir évaluer les formations sans mettre en cause les enseignants « en tant que personnes »... Est-ce possible ? Enfin il y a une grande différence entre formation continue et formation initiale, entre l'installation des pratiques et leur enrichissement ultérieur et des recherches assez différentes devront sans doute être mises en place.

En fait, il nous apparaît tout de même que des travaux de recherche didactique sur les pratiques des enseignants permettent à l'heure actuelle d'avancer des hypothèses sur ces formations, au moins sous forme de propositions, et de travailler à des scénarios de formation qui remplissent les conditions correspondantes. Concevoir un scénario de formation signifie à la fois préciser les choix de contenus de formation<sup>3</sup>, retenir quelques hypothèses de formation à tester, partager le projet avec les formateurs, mettre au point les expérimentations et prévoir des évaluations : étapes toutes très difficiles, particulièrement la dernière, comme nous venons de l'expliquer. Nous ne ferons qu'esquisser ce travail dans cet article, en présentant des propositions qui portent sur les modalités de certaines formations et en les illustrant par un exemple de scénario ; nous ne ferons que suggérer des pistes d'évaluation et nous ne discuterons pas les choix de contenus de la formation.

Des questions préalables se posent : ce type de questionnement (sur la formation des enseignants) est-il bien dans le champ des recherches en didactique des mathématiques ? Si oui, ces recherches, qu'on peut prévoir assez lourdes, sont-elles nécessaires ou représentent-elles un luxe, ou encore une rationalisation pour certains chercheurs (universitaires) engagés dans un tel travail, comme j'ai eu l'occasion de le voir dans une revue<sup>4</sup> ? Plusieurs types d'arguments nous semblent plaider pour une réponse positive aux deux premières questions.

On peut arguer du fait qu'il y a dans l'enseignement des mathématiques des difficultés didactiques<sup>5</sup> qui dépendent des pratiques des enseignants : par exemple l'intégration effective des techniques d'information et de communication (TICE) dans les classes, l'importance croissante des malentendus entre élèves et

---

<sup>3</sup> Ceci comprend notamment pour les chercheurs en didactique, un travail de définition des résultats de recherches à transposer (à transformer pour être transmis).

<sup>4</sup> Cf. Recherche et formation n° 38 (2001) La fabrication de l'enseignant professionnel, la raison du savoir.

<sup>5</sup> Liées aux relations enseignement apprentissage et pas seulement à des difficultés cognitives ou sociales.

enseignants notamment en REP (Réseau d'Education Prioritaire)<sup>6</sup>, l'illusion de la transparence de certaines formes de cours, magistraux ou même dialogués. Or, et c'est ce que nous allons présenter ci-dessous, les pratiques des enseignants sont rapidement stables, elles ont tendance à se reproduire ; dès leur installation elles portent en germe une certaine reproduction des modèles antérieurs que les futurs enseignants ont connus. Et ces pratiques des enseignants sont d'autant plus stables qu'elles sont complexes et cohérentes, pour un enseignant donné et qu'elles ont des bases sociales, réponses à des contraintes communes, pour une collectivité (ce que nous appellerons ci-dessous le genre). Certes ces pratiques sont diverses, à un certain niveau de détail<sup>7</sup> : mais les diversités individuelles ne correspondent pas nécessairement à des marges de manœuvre pour tous les enseignants, et n'engendrent pas toujours des alternatives réalistes.

Le problème d'une formation renouvelante, enrichissante est donc bel et bien posé à nos yeux de didacticien, intéressé par la compréhension des apprentissages des élèves. Or les formations par le terrain, solution très appréciée et de plus en plus exclusivement préconisée par l'institution, ne nous semblent pas suffisantes – ni pour modifier les pratiques en intégrant des instruments nouveaux, ni pour saisir des malentendus qui résistent bien souvent aux observations<sup>8</sup>, ni pour enrichir les conceptions et les pratiques de certains enseignants sur le rôle et l'organisation du travail des élèves. D'ailleurs les quelques recherches qui ont pu être menées, notamment dans le premier degré, sur les effets des formations<sup>9</sup> et notamment sur la diffusion des travaux de didactique chez les enseignants ont toutes montré une très grande déperdition. L'exemple précis de l'enseignement des décimaux, analysé dans le primaire et en sixième<sup>10</sup> (après son introduction dans cette classe) est très frappant à ce sujet : alors que plusieurs ingénieries très riches sont disponibles, elles sont peu utilisées par les enseignants. Des réflexions sur ce constat (Robert, 2003a) amènent à lister les difficultés que rencontre un enseignant pour adopter ce type de séquence en classe et à retrouver à la fois les contraintes qui pèsent sur chaque enseignant et la stabilité de ses pratiques : pour résumer, proposer une « bonne » séquence aux enseignants ne suffit pas à la leur faire adopter et il y a des raisons théoriques à cela, qui tiennent à la nature même des pratiques enseignantes.

---

<sup>6</sup> Cela conduit les élèves à effectuer des tâches en se limitant « à leur lettre », ce qui fait que l'enseignant ne se rend pas toujours compte que ces élèves ne rentrent pas dans l'apprentissage attendu. De nombreux travaux le montrent clairement : par exemple, pour citer des travaux récents Chesnais, 2004, Roditi, 2004.

<sup>7</sup> Beaucoup de travaux récents montrent à la fois les points communs et les diversités à l'intérieur de cette communauté de pratiques (cf. Hache, 2001, Roditi, 2003, Vandebrouck, 2002).

<sup>8</sup> Cf. Maurice, 2002.

<sup>9</sup> Cf. Masselot 2001, Vergnes, 2002 notamment.

<sup>10</sup> Cf. Bolon, 1996, Roditi, 2001.

D'où cette problématique que nous soumettons aux chercheurs : élaborer des scénarios de formation, qui articulent des éléments théoriques et des expériences en classe, et qui puissent être évalués par des recherches. Encore une fois, concevoir de tels scénarios implique à la fois un travail explicite de transposition de certaines recherches : tant sur les apprentissages des élèves que sur les pratiques et leur formation, un travail d'ingénierie longue, avec la mise au point des modalités de ces formations, une réflexion sur les formateurs et peut-être une certaine formation de ces derniers, des expérimentations et des évaluations mises au point soigneusement, ainsi que tout un travail réflexif à partir des premiers résultats... Il y a fort à parier d'ailleurs que des recherches de ce type aient des retombées directes sur les autres chantiers ouverts en didactique, en relation avec les liens enseignement-apprentissage, ce qui nous encourage à ne pas reporter ce type de travail.

Considérant donc que le problème est recevable, nous allons d'abord présenter certains résultats de nos recherches sur les pratiques des enseignants, puis revenir sur les formations en exposant certaines propositions qui traduisent des hypothèses qui seraient à tester dans des recherches ultérieures. Nous exposerons un exemple de scénario de formation compatible avec ces propositions. Nous terminerons en dégageant des perspectives précises de recherches.

Nous nous restreignons ici à nos travaux sur les pratiques car ce sont eux qui justifient l'ensemble de la démarche ci-dessous. D'autres pistes existent qui prennent comme départ la théorie des situations ou la théorie anthropologique du didactique (cf. Noirfalise R. Ed Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, *Actes de l'Université d'été de la Rochelle*, 1998).

## **1. Nos recherches sur les pratiques des enseignants de mathématiques du second degré**

A l'origine de ces travaux, notre questionnement de didacticien des mathématiques porte sur les relations entre l'enseignement d'un contenu donné et les apprentissages, dans une classe donnée. Cela nous amène non seulement à caractériser l'apprentissage mais aussi à caractériser l'enseignement et les pratiques de l'enseignant, notamment en classe.

### **1.1. Une posture mixte : la « double approche »**

Plusieurs articles nous ont permis d'exposer notre démarche en détail (Robert, 2001, Robert et Rogalski , 2002, 2004). Nous la reprenons ici dans ses grandes lignes.

Nous nous intéressons aux apprentissages des élèves dans le cadre scolaire par l'intermédiaire des activités que l'enseignant organise pour les élèves en classe et à

la maison. Pour cela, nous analysons les tâches prescrites, au sein d'un scénario complet, et les déroulements effectifs ou du moins proposés effectivement aux élèves. C'est ce qui permet de reconstituer en partie les activités des élèves que l'enseignant provoque (peut provoquer) en classe.

Nous utilisons le mot « tâche » pour désigner l'énoncé mathématique présenté aux élèves, avec les utilisations mathématiques qu'il peut induire. Nous réservons le mot « activité(s) » à ce que les élèves pensent, font, disent, et ne font pas<sup>11</sup>. Bien entendu, nous n'avons pas directement accès à l'activité intellectuelle des élèves, mais c'est elle qui nous intéresse et dont nous chercherons des traces, des observables. Nous appelons activité potentielle ce qui résulte de nos analyses croisées de la tâche et du déroulement : tous les élèves ne développeront pas cette activité mais ils pourraient le faire.

Nous joignons en annexes 1, 2 et 3 quelques éléments de nos grilles d'analyse des tâches mathématiques et des déroulements et un exemple d'analyse d'un extrait de séance.

C'est en utilisant des hypothèses inspirées des recherches en didactique que nous avons mis au point ces analyses : elles nous ont permis de choisir les variables qui peuvent avoir une influence sur les relations entre activités et apprentissages des élèves. Par exemple, nous cherchons systématiquement le niveau de mise en fonctionnement des notions<sup>12</sup> utilisées, et distinguons les applications immédiates, simples et isolées de celles qui demandent des adaptations des connaissances, parce que les activités induites diffèrent à nos yeux en terme d'apprentissage. De même, nous caractérisons les formes de travail des élèves (individuel, en petits groupes, en cours dialogué...) et les aides de l'enseignant<sup>13</sup> parce qu'elles induisent des conséquences différentes sur les apprentissages.

Mais, et c'est là qu'intervient la double approche, pour comprendre les déroulements, pour en cerner les variables, nous analysons les pratiques non seulement à partir de caractéristiques liées à ce qui est proposé aux élèves, mais aussi à partir de caractéristiques liées au fait qu'enseigner est un métier, une activité sociale, personnalisée, rémunérée, comportant de nombreuses contraintes, avec des habitudes (Robert, 2001). Cette prise en compte imbriquée de deux points de vue, celui des apprentissages par l'intermédiaire des activités provoquées et celui du métier par l'intermédiaire des contraintes et marges de manœuvre, est précisément ce que nous appelons la double approche<sup>14</sup>.

---

<sup>11</sup> Cela correspond aux définitions utilisées par les ergonomes qui se réfèrent à la théorie de l'activité de Leontiev (1984).

<sup>12</sup> Propriétés, théorèmes, définitions, formules, méthodes, raisonnements...

<sup>13</sup> Cf. annexe 2.

<sup>14</sup> Cf. Robert et Rogalski J., 2002.

Ce deuxième point de vue, issu de travaux ergonomiques, peut être facilement complété par des recherches sur les formations menées sur des professions autres que celle d'enseignants. Ainsi la conceptualisation de l'action (Vergnaud, 2002) ou la référence aux concepts pragmatiques (Pastré, 1999) peuvent s'inscrire dans nos réflexions.

## 1.2. Les hypothèses admises (pour un enseignant, pour les enseignants)

Plusieurs travaux<sup>15</sup> nous ont amenés à admettre, et cela légitime nos nouvelles analyses, qu'assez rapidement, pour un enseignant donné, les pratiques sont stables : des décisions analogues sont prises dans des situations analogues. Ceci autorise d'ailleurs des analyses limitées à quelques séances<sup>16</sup>. Pour les enseignants débutants cette hypothèse est évidemment à revoir, mais certaines caractéristiques sont déjà en germe dans leurs pratiques. Cette stabilité est renforcée par une grande cohérence individuelle des pratiques, basée sur une complexité certaine, que nous restituerons par une analyse en composantes devant être imbriquées. La cohérence des pratiques a été soulignée dans des travaux d'ergonomie comme le livre de Montmollin, cité en note<sup>17</sup>.

Ainsi les pratiques en classe des enseignants dépendent des individus (et de leurs représentations, issues de leurs expériences) mais aussi de contraintes incontournables

- liées à l'institution (programmes scolaires, horaires par exemple),
- liées au métier (habitudes, établissement, collectif des enseignants, travail dans une classe avec des élèves réels) : il y a des réponses optimales du milieu enseignant à un moment donné, qui ont du mal à changer même si les contraintes évoluent.

En particulier<sup>18</sup>, «tout» n'est pas possible à un niveau scolaire donné. Même si des choix semblent très propices aux apprentissages des élèves, il y a à la fois des contraintes, des tensions et des réponses du milieu enseignant très partagées,

---

<sup>15</sup> Les premiers travaux sur les pratiques cités en note 6 par exemple.

<sup>16</sup> Sauf dans certaines classes difficiles (cf. Peltier, 2004).

<sup>17</sup> *La compétence tend spontanément à la cohérence. Ce qui est évident et relativement banal est le fait que savoirs, savoir-faire, représentations,... ne sont pas simplement juxtaposés ... mais au contraire ordonnés selon des hiérarchies ou simplement des relations qui permettent de dégager des constances, des répétitions, des régularités rassurantes pour la raison et efficaces pour le diagnostic. Ce qui est moins évident dans la recherche de ce besoin de cohérence c'est qu'il paraît si impérieux qu'il amène l'opérateur à compléter lui-même sa compétence en s'inventant des savoirs ignorés dont il a besoin pour rationaliser les informations qu'il reçoit et les réponses qu'il y adapte* (de Montmollin, 1984, *L'intelligence de la tâche* Peter Lang, Berne).

<sup>18</sup> Nous en déduisons des inférences en formation.

quelquefois subreptices qui peuvent amener un enseignant à préférer d'autres choix (Robert, 2002). Nous reprenons de manière métaphorique l'idée de genre introduite par Y. Clot, qui traduit le fait que se créent dans une profession des réponses communes aux acteurs (ou à un grand groupe d'acteurs) qui se transmettent presque implicitement : « *L'activité [enseignante] résulte d'une double mémoire : personnelle et impersonnelle et générique. Le genre est un ensemble ouvert de règles, de conventions d'actions pour agir, non écrites, à la fois contraintes et ressources qui définissent dans un milieu donné l'usage des objets et l'échange entre les personnes. Le style permet à l'individu, dans l'action quotidienne, de mettre en œuvre des règles inscrites dans le genre, de le recréer mais aussi de les renouveler* » (Y. Clot, (1999) *La fonction psychologique du travail*, PUF, Paris).

A un moment donné ces réponses communes des acteurs en termes de pratiques peuvent être économiques, mais il se peut qu'elles perdurent alors même qu'un changement dans l'environnement pourrait amener à des modifications utiles.

Tout n'est pas possible pour un enseignant donné : sont en cause sa propre cohérence et la stabilité de ses pratiques. Il y a certainement nécessité **d'adaptation individuelle** mais c'est difficile à cause de cette complexité des pratiques qui renforce la stabilité.

### **1.3. Une méthodologie : à partir du déroulement en classe, l'analyse selon cinq composantes**

Nous analysons les pratiques en classe à partir de transcriptions et/ou de vidéo. Depuis quelques années nous utilisons des vidéos qui proviennent de prises de vue tournées par l'enseignant seul dans sa classe, sans autre « commande » que de centrer la caméra sur le tableau ; il a posé la caméra au fond de la salle face au tableau (éventuellement sur un trépied) et il l'oublie. Plusieurs vidéos ont été ainsi recueillies, les enseignants sollicités, qui sont des collègues expérimentés<sup>19</sup>, ont constaté ce phénomène de naturalisation de la caméra, dans de bonnes classes et avec des élèves standard. L'oubli est d'autant plus réel que les prises de vue ont lieu souvent (par exemple à partir de trois fois).

Pour résumer, nous retenons pour faire nos analyses cinq composantes qui, une fois recomposées, nous renseignent à la fois sur les activités des élèves et sur certains déterminants des activités des enseignants. Cette méthodologie est développée dans Robert et Rogalski J. (2002). Les reconstitutions nous permettent de replacer les pratiques analysées dans la gamme des possibles, de les interpréter, de réfléchir aux variables de la situation :

---

<sup>19</sup> Il y a d'autres conditions de prises de vue, notamment en master professionnel mais alors les vidéos ne sont pas utilisées de la même façon.

- composantes *cognitive* et *médiative* : elles permettent des descriptions du scénario mathématique (comprenant les descriptions des contenus abordés avec la gestion globale prévue) et des déroulements (comprenant les formes de travail effectives et tous les accompagnements, avec la nature des discours, la gestion du tableau, les aides, les échanges...). Les grilles des annexes 1 et 2 permettent de commencer ces descriptions.
- composantes *institutionnelle, sociale, personnelle* : elles permettent de préciser certains déterminants, y compris extérieurs à la classe mais indispensables pour comprendre les choix, comme les programmes concernés, les habitudes professionnelles de l'environnement, les conceptions de l'enseignant sur les mathématiques, leur enseignement, leur apprentissage et sur sa propre mission.

De la recombinaison de ces composantes, nous déduisons des logiques qui caractérisent les pratiques d'un enseignant donné.

Les recherches sur les pratiques des professeurs d'école ont repris cette méthodologie en l'enrichissant (cf. Peltier, 2004) : ils ont exploré les pratiques en ZEP-REP et notamment mis en évidence des contraintes qui jouent comme des contradictions entre logique de socialisation et logique d'apprentissage, entre logique de la réussite immédiate et logique d'apprentissage, entre le temps de la classe et celui de l'apprentissage, entre individuel, public et collectif, entre logique de projet et logique d'apprentissage.

#### **1.4. Quelques résultats pour le second degré**

Sans entrer dans les détails de ces différentes recherches, on peut esquisser leurs résultats.

Les premiers travaux ont permis de mettre au point des indicateurs qui illustrent des diversités dans les pratiques des enseignants.

Hache, 2002 a mis en évidence et illustré sur des séances de seconde (quatre enseignants, deux chapitres) la diversité des choix des enseignants sur des contenus analogues : il a ainsi dégagé ce qu'il appelle l'« univers mathématique » d'une séance : c'est la recombinaison, originale pour chaque professeur, de cinq indicateurs tenant à des choix de contenus (plus ou moins riches en termes d'activités élèves), à des choix de gestion (plus ou moins de travail autonome des élèves et de discussion entre eux), à des choix de discours de l'enseignant (selon l'ouverture ou la réduction par rapport à ce qui est en train) et à des choix sur la nature et les modalités des interventions des élèves. Il met en évidence un certain

nombre d'univers rencontrés dans les séances et illustre le fait qu'un enseignant donné ne provoque pas tous les univers mis en évidence.

Robert et Vandebrouck, 2003 ont montré des résultats analogues sur l'utilisation du tableau en classe : plusieurs modalités existent (lieu de savoir, d'écriture, brouillon public). Mais un enseignant donné ne les emprunte pas toutes. Une grande cohérence s'observe entre les utilisations du tableau et le reste de la gestion. Vandebrouck, 2002, a par ailleurs illustré la stabilité des pratiques en ce qui concerne le tableau à partir d'un enseignant filmé dans deux classes et dans plusieurs contextes différents (modules, demi-classe, classe entière).

Roditi, 2003 explicite, à propos de l'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième et à partir de 4 enseignants très différents, certains « principes » qui nous semblent bien traduire des décisions communes à beaucoup d'enseignants de lycée et collège et qui tiennent autant du métier que du projet strict d'apprentissage. Ainsi le principe de clôture du champ mathématique (ce qui est traité à un moment doit être une partie « auto-close » du champ conceptuel), le principe de la nécessité d'un succès d'étape (qui amène à une fragmentation de l'enseignement permettant des évaluations), le principe de respect de l'attente des élèves...

Enfin nous avons montré (Robert, 2003, 2004, Robert et Rogalski M. 2002) des régularités sur le démarrage des exercices<sup>20</sup> dans un certain nombre de séances. Tout se passe comme si, en caricaturant le trait, les contraintes de temps<sup>21</sup>, rendues encore plus lourdes par les restrictions d'horaires actuelles et l'hétérogénéité des élèves, amènent à privilégier en classe un travail exclusif sur les nouvelles connaissances en train d'être enseignées. Ce travail proposé aux élèves ne comporte pas beaucoup d'exploration<sup>22</sup> du champ des problèmes résolubles avec les outils du moment. On propose en effet, vu la nécessité d'avancer, des tâches relativement proches du cours, qui demandent des mises en fonctionnement standard, qu'il faut avoir vues. Cela revient à privilégier le sens « décontextualisé → contextualisé ». Du même coup, il y a peu d'entretien explicite des connaissances anciennes. Il y a rarement des occasions de réorganisation entre les connaissances anciennes et ce qui est nouveau. De plus, les élèves sont peu confrontés et pas très longtemps à de l'incertitude sur ce qu'il va falloir faire. Ce qui contribue aux questionnements des élèves sur ce qu'il faut utiliser et aux mises en relation, est minoré.

---

<sup>20</sup> Les travaux concernent plus les exercices que les cours – on a joint en annexe 1 un début de réflexion qui s'applique surtout aux analyses d'exercices.

<sup>21</sup> Elles sont toujours évoquées pour justifier ces faits.

<sup>22</sup> Nous y revenons ci-dessous.

Cela passe par ce qui est organisé en classe et par les interventions de l'enseignant avant et pendant les activités des élèves : on constate ainsi une orientation univoque de l'activité des élèves vers ce « nouveau » savoir visé, orientation notamment permise par une prise en main précise et rapide (voire immédiate) de ces activités, avec un guidage permanent et peu de temps de travail autonome, si ce n'est sur les derniers calculs, complètement balisés : ceci amène à majorer, de fait, leur rôle dans le travail en classe.

Les activités provoquées portent ainsi sur des tâches (devenues) isolées si ce n'est simples, qui portent sur le chapitre en cours, sans beaucoup d'adaptations des connaissances à utiliser<sup>23</sup> ; il n'y a pas souvent (besoin) de structuration des connaissances en acte du côté des élèves (ils n'ont pas besoin de le faire, c'est le professeur qui s'en charge). De même dans ces conditions, il n'y a pas besoin de dévolution des moyens de contrôles aux élèves.

On constate donc une certaine séquentialisation des activités des élèves sur une même notion en moments relativement indépendants : les élèves font fonctionner les outils les uns après les autres, indépendamment, ils n'ont besoin que des connaissances outils (empilées) correspondant au cours et soufflées par le découpage organisé par l'enseignant. C'est ainsi, que le chapitre « organisation des connaissances » est une des premières victimes de ce manque de temps, tout comme le développement de la dynamique entre cours et exercices, qui manque d'ampleur, par manque de temps et pour ne pas créer des situations ingérables au vu des différences entre les élèves.

On ne peut pas être sûr qu'il en résulte chez les élèves un morcellement des connaissances<sup>24</sup>, car des élèves apprennent ce qui ne leur est pas enseigné explicitement (et leur est donc dévolu, plus ou moins implicitement). Mais on peut se demander tout de même si la plainte réitérée de beaucoup d'observateurs du manque de « choses sûres » chez les élèves n'a pas aussi comme origine ce type de travail en classe, et ceci est renforcé par ce qu'on entend souvent les élèves déplorer : « C'est juste quand on commence à comprendre qu'on change de chapitre ».

Mais peut-on faire autrement ? N'y a-t-il pas là la traduction en actes des seuls compromis acceptables entre les diverses tensions qui traversent l'enseignement ?

---

<sup>23</sup> Nous avons étudié pour établir ces constats des séances de troisième ou de seconde, essentiellement en algèbre. Les énoncés proposés ne sont pas des exercices d'application immédiate, mais ils interviennent juste après un cours, ou juste avant et ne sont pas très éloignés du cours.

<sup>24</sup> C'est cependant un des constats les plus forts qu'on a fait sur les connaissances des étudiants de CAPES formés à l'Université.

### **1.5. Questions : alternatives, effets des pratiques...**

Diverses questions se posent : des questions de recherches, bien sûr, par exemple au niveau du choix des indicateurs retenus pour nos analyses, ou de leur échelle : jusqu'où aller dans le détail ? Quel type d'analyse utiliser pour étudier les discours en classe ?

Mais d'autres questionnements, déjà en partie cités, intéressent aussi le formateur : peut-on, doit-on changer ? Autrement dit y a-t-il des alternatives réelles pour un enseignant, un groupe d'enseignants ? Comment les mettre en évidence ? Comment les mettre en place ? Comment saisir les effets sur les élèves, notamment en terme de différenciation ?

Une question théorique, concerne la stabilité des pratiques, liée à leur cohérence et à la prise en compte du métier dans notre approche : qu'est-ce qui peut changer « quand même », à quel prix, grâce à quelles modalités ?

Par exemple la prise de conscience par les enseignants des alternatives, notamment lorsqu'il s'agit de leur propre cours est une vraie question à nos yeux de chercheur : on peut se demander si, alors même que la « bonne » variable est le couple {énoncé-déroulement}, il n'est pas nécessaire de faire un travail séparé sur chaque terme pour arriver à se dégager de la combinatoire choisie dans le cas particulier analysé, souvent supposée optimale et en tout cas très stable. On a insisté sur le fait que tout n'est pas possible, et encore moins pour un enseignant donné, dans une classe donnée. Cependant un des enjeux de nos formations est d'envisager tout de même des enrichissements : jusqu'à quel point un travail initialisé par une vidéo par exemple doit-il être poussé pour concerner chaque enseignant, compte tenu des contraintes, de la pression du métier et de la composante personnelle de ses pratiques ? Est-ce plus efficace de faire ce travail sur une vidéo de ses propres cours ou une autre ?

Il apparaît ici clairement une autre dimension de notre questionnement : c'est le lien qui devra s'établir entre les recherches et les formations. Il est difficilement envisageable de laisser les formateurs seuls face à toutes ces questions, mais sans eux l'accès des chercheurs aux formations reste superficiel...

## **2. Propositions sur les modalités des formations d'enseignants de mathématiques**

Former des pratiques serait, dans le cadre que nous venons de préciser, réussir à donner à chaque enseignant des moyens pour « optimiser » à son échelle les composantes cognitives et médiatives de ses pratiques, en tenant compte des contraintes, variables selon ses classes. « Donner des moyens » signifierait donner

des connaissances, des moyens d'apprécier leur portée et leurs limites, des moyens de les critiquer et de les adapter.

Cependant, les formations d'enseignants n'ont pas toutes des objectifs sur les pratiques en classe – ce que nous présentons ne concernent que celles qui peuvent avoir des retombées relativement directes sur ces pratiques. C'est une restriction importante.

Nous ne nous situons pas non plus dans la perspective de telle ou telle réforme de l'enseignement, nous avons comme objectif de préciser de futures hypothèses sur les formations qui pourraient être testées par des recherches ultérieures.

Cela prend la forme de propositions générales, encore partielles, qui portent essentiellement sur les modalités des formations. Ces propositions sont issues de nos recherches sur les pratiques, de la littérature professionnelle générale et de quelques expériences de formations continues d'enseignants ou de formateurs (Groupe de recherche formation de l'académie de Toulouse 2002, Desq et al. 2004, Roditi 2004a, 2004, Robert et Pouyanne, 2004). Ce sont souvent des formations continues longues, voire expérimentales.

Nous analyserons dans le paragraphe suivant un exemple de scénario dont nous faisons l'hypothèse que c'est un « bon candidat » à ce type de formation.

### **2.1. Tenir compte explicitement des modalités des formations<sup>25</sup> pour prendre en compte stabilité et cohérence des pratiques individuelles**

Deux alternatives sont en concurrence, qui pourraient concerner plus spécifiquement les formations continue pour la première et initiale pour la seconde ; nous ne prenons pas position ici, sauf à suggérer d'expliciter ce type de choix, qui ne sont pas exclusifs sur un temps long, et d'en évaluer des conséquences éventuelles :

*Commencer petit (afficher une formation sur un sujet limité, proche de la pratique quotidienne)*

Certains auteurs<sup>26</sup> défendent l'idée qu'il faut « commencer petit » et rester accroché à la pratique, rester dans un domaine suffisamment familier. Quitte à ce que des modifications plus importantes finissent par apparaître, ce qui ne manque pas d'arriver vu la complexité des pratiques ! C'est ici la stabilité qui est respectée

---

<sup>25</sup> Dans ce paragraphe nous abordons des exemples de choix globaux, préalables à l'organisation des formations mais qui ont nécessairement des conséquences sur leurs modalités. C'est la prise en compte de la réflexion sur les modalités des formations que nous voulons souligner, d'où le titre un peu « décalé ».

<sup>26</sup> Cautermann et al (1997).

d'abord. En tout état de cause, il semble en effet difficile de proposer des changements radicaux, en termes de « tout ou rien », à des enseignants non débutants qui ne sont pas confrontés à une crise grave.

L'hypothèse implicite qui est faite par les auteurs, qui se fondent sur des évaluations de formations effectives, est la suivante : la réflexion sur un aspect familier des pratiques ne peut pas ne pas déboucher sur une réflexion plus large et même une remise en cause plus globale le cas échéant. Tout l'enjeu tient à la réussite de l'entrée dans une véritable réflexion, entrée qui serait, elle, facilitée par la familiarité initiale.

Par exemple un simple travail sur le choix d'exercices à proposer sur un chapitre donné peut engager très rapidement dans une réflexion élargie à la gestion de la classe, à l'évaluation, aux manuels, aux programmes...

*Ou : Faire vivre une expérience cruciale*

Certains auteurs<sup>27</sup> se demandent si, en revanche au moment de l'installation des pratiques des enseignants débutants, faire vivre (montrer) des expériences différentes de ce qui est en germe chez les stagiaires ne pourrait pas jouer un rôle positif. Cela nécessite de leur fournir une séquence précise (leur montrer en vidéo ou en vrai par exemple) puis de leur demander de l'essayer dans leur classe. Dans certains cas par exemple, l'adoption du travail en petits groupes en classe devient envisageable après une expérience même un peu forcée, alors qu'avant cela apparaissait insurmontable, voire négatif.

*En tout cas, cette hypothèse de l'importance de la prise en compte explicite des modalités de la formation demande une réflexion et des décisions spécifiques et c'est ce que nous retenons. Cela implique le respect de plusieurs conditions :*

**Disposer d'un temps long :** la stabilité des pratiques, l'engagement professionnel des participants nous semblent rendre nécessaire des formations longues.

**Proposer des activités réelles et proches du quotidien (élaborer des situations significantes pour les participants) :** des activités réelles permettent aux participants à la fois de s'investir et d'apprendre quelque chose de nouveau, cela peut être renforcé par le fait de proposer des activités « proches » de leur expérience (amont de la formation) et de leurs besoins (aval de la formation).

---

<sup>27</sup> Notamment des formateurs de PLC2 ; certaines formations de PE2 sont de ce type.

## **2.2. Proposer des contenus de formation permettant d'aborder la complexité des pratiques et de prendre en compte les facteurs collectifs contraignants que les pratiques individuelles font intervenir (implicitement)**

Prendre en compte la complexité des pratiques peut amener à travailler explicitement en formation sur plusieurs composantes des pratiques à la fois, à ne pas laisser ce travail à la charge des participants tout seuls. Ceci entraîne des choix de contenus appropriés.

*Ne pas se limiter à faire travailler sur une seule composante des pratiques à la fois*

« Recomposer » le plus possible ce qui est travaillé en formation : nous émettons cette hypothèse pour tenir compte de la complexité des pratiques. Nous suggérons par exemple qu'il est illusoire de laisser aux formés, notamment débutants, tout le travail de recomposition entre le cognitif (travail sur les contenus et les prévisions de gestion), et le médiatif (travail sur la gestion de la classe pendant son déroulement). Nous proposons que ce travail d'imbrication entre les deux composantes, qui amène à préciser des logiques dans l'activité de l'enseignant, soit assuré en partie pendant la formation et pris en charge en partie par le formateur.

Cela peut mettre en jeu des questions du type : qu'est-ce qui est difficile à faire en classe, même si c'est important pour les apprentissages ? Qu'est-ce qui est variable selon les types de classes (par exemple) ? Se demander « qu'est-ce qui est essentiel dans un scénario proposé », « à quoi on peut renoncer » peut participer de ce type de travail, tout comme travailler sur les alternatives, qui mélangent contenus et gestion.

*Aborder les contraintes et les marges de manœuvre de l'enseignant en classe*

De même, nous suggérons qu'il y a lieu de tenir compte explicitement des contraintes et des marges de manœuvre du professeur en classe dans des formations : arriver à une connaissance critique des programmes et des documents d'accompagnement, pouvoir critiquer des manuels, se poser des questions comme « Qu'est-il « possible » de faire en classe dans tel établissement ? » nous semble participer de la formation. Ce serait aussi un moyen de réhabiliter des recherches didactiques jugées trop loin des réalités lorsqu'on les livre sans le travail de formation préalable nécessaire (transposition).

## **2.3. Tenir compte explicitement du fait qu'on a affaire à des adultes qualifiés en exercice, outiller l'expérience**

*Adapter les pratiques aux personnalités en présence*

Adapter différents types de pratiques pour respecter les cohérences individuelles : c'est une de nos hypothèses fortes pour tenir compte de la composante personnelle

des pratiques. Par exemple, supposons qu'un enseignant n'apprécie pas de se taire en classe, alors qu'il lui semble important que des moments d'autonomie soient aménagés pour ses élèves. Comment trouver une gestion qui remplisse cette condition tout en lui étant adaptée ? Il s'agit alors d'imaginer des montages, par exemple en l'occurrence couper la classe en deux en laissant l'enseignant ne s'occuper que de la moitié des élèves à la fois.

*Tenir compte explicitement de la spécificité du public*

Tenir compte du fait qu'on a affaire à des adultes, qualifiés, responsables, avec une charge de travail forte, est souvent évoqué pour justifier certaines modalités de formation particulières (discussion, mutualisation, coopération sur des problèmes professionnels réels). La présentation explicite des tensions qui ne peuvent manquer d'apparaître dans l'exercice du métier, entre autonomie des élèves et prise en main des élèves, entre socialisation et apprentissage, entre routine et renouvellement, etc. est aussi peut-être un moyen de tenir compte de cette caractéristique. Enfin, le formateur ne peut pas détenir un savoir qui n'existe pas ! En revanche, il peut travailler en coopérant sur un problème professionnel, il a à apprendre des participants mais il a des outils pour organiser le travail et trouver des pistes.

Un point particulier concerne les différences entre formation initiale et continue : des travaux menés en formation initiale de professeurs d'école indiquent l'intérêt d'apprentissages limités, très personnalisés, de certains gestes professionnels. Nous nous posons la question pour le second degré de l'identification de tels gestes, notamment en ZEP, et plus généralement de l'intérêt de faire vivre aux débutants des expériences cruciales, à partir de séquences très balisées qu'on leur propose.

De plus, la formation initiale amène les débutants à rencontrer plusieurs formateurs et la cohérence entre eux est une vraie question : est-elle nécessaire ou la diversité est-elle plus importante encore ?

*Tenir compte de la spécificité de la profession (genres) et travailler collectivement*

Enfin certains échecs relatifs de formations actuelles, en matière d'introduction généralisée des TICE par exemple, peuvent venir de la non prise en compte de l'importance du collectif d'enseignants. Il serait possible que certains changements, pour les enseignants comme dans d'autres professions<sup>28</sup>, ne puissent être adoptés individuellement qu'après une adoption collective (travail sur le genre).

Nous faisons l'hypothèse que les formations sont elles aussi facilitées par un travail collectif, qui sert pour élaborer quelque chose de nouveau à partir d'expériences diverses, pour reconstituer un collectif sans lequel le métier n'est pas reconnu. Tout

---

<sup>28</sup> Cf. Clot (1999).

se passe comme si dans ce domaine, d'une part les appropriations collectives pouvaient précéder les acquisitions individuelles, d'autre part elles en étaient même une condition socialement nécessaire.

En particulier les formations mettent en présence des formateurs et des enseignants et ce collectif là a aussi un rôle à jouer : les formateurs doivent en effet jouer un rôle d'interface avec les chercheurs, en transposant les recherches et en provoquant des recherches. Le collectif qui naît à l'occasion de la formation a vocation à se prolonger dans les deux directions.

*Avoir des mots pour le dire, partager un vocabulaire professionnel commun*

Avoir des « mots pour le dire » pour parler des activités des enseignants semble faciliter l'accès aux pratiques : par exemple on peut donner et spécifier par des noms des outils d'analyses a priori des activités que l'enseignant choisit pour ses élèves, énumérer et nommer certains de ses gestes élémentaires pendant les déroulements. Cela permettrait aussi bien de relire des pratiques stables avec des enseignants expérimentés que de participer à l'installation des pratiques des débutants. Cela contribue à l'aspect collectif de ce travail de formation. Cela contribue à outiller l'expérience des enseignants, pour reprendre les idées déjà citées en 1.1. de concepts pragmatiques ou de conceptualisation de l'action.

#### **2.4. Pour cela, élaborer un véritable scénario**

Nous nous inspirons du mot utilisé en didactique pour qualifier le résultat du travail de conception de séances en classe, pour un public précisé, une durée déterminée et une répartition dans l'année bien définie.

Prenant le point de vue de l'équipe chercheur-formateur à l'origine du travail, nous baptisons « scénario de formation » le projet complet d'une formation, incluant le contenu, les modalités des diverses séances et un certain nombre d'objectifs détaillés ; il y figure aussi les transpositions éventuelles de résultats de recherche qui sont proposées et des prévisions de modalités d'évaluations possibles.

Si les objectifs généraux et les contenus des stages sont souvent très explicites et font l'objet de discussions préalables et de présentations précises, les questions de modalités précises de la formation et de gestion des séances de formation sont souvent laissées davantage à la discrétion du formateur et à son inspiration : c'est ce que nous proposons de préciser au contraire à l'avance, dans une certaine mesure ! De plus, les documents utilisés par les formateurs pour concevoir leur stage restent souvent limités aux ressources institutionnelles (programmes et instructions) ou aux manuels et négligent de nombreuses ressources liées aux recherches, cela peut aussi constituer une différence avec notre projet.

Enfin, diverses interrogations nous semblent importantes, qui ne sont pas toujours envisagées : par exemple le lien entre le travail sur les contenus à enseigner et la gestion de la classe. On constate souvent, ne serait-ce qu'en lisant les titres, que les stages de formation privilégient une de ces composantes : tel stage est centré sur le contenu (statistiques), tel autre sur la gestion de l'hétérogénéité. Nous allons esquisser plus loin l'intérêt d'un travail simultané. Dans le même ordre d'idées, la question de l'alternance entre des séances de formation regroupées et d'autres sur le terrain nous semble de première importance : se pose alors la question de préparer le passage en classe et le retour et de l'exploiter. Se pose alors la question de trouver une modalité permettant ce travail simultané sur contenu/gestion et théorie/pratique.

### **3. Un exemple : un scénario de formation à l'analyse de pratiques en classe de mathématiques pour des enseignants ou des formateurs à partir de vidéo**

Nous allons décrire rapidement le scénario en précisant les contenus, les modalités, les objectifs, et en discutant la question des évaluations qui n'ont pas encore été l'objet de recherches. Nous montrerons aussi comment ce scénario répond aux propositions précédentes. Plusieurs variantes peuvent être élaborées, nous en avons choisi une version longue, en formation continue. Un exemple d'une version courte, en formation initiale est donné dans Roditi, 2004a.

#### **3.1. Le scénario**

Il s'agit d'une formation de plusieurs mois dont l'objectif est l'analyse des pratiques en classe ordinaire en relation avec les activités des élèves.

Il s'agit de faire acquérir aux enseignants des outils d'analyse pour comprendre, a posteriori, les activités mathématiques des élèves telles qu'elles ont été organisées par l'enseignant en classe, compte tenu de ses choix de contenus et de gestion. Comprendre en relation avec les apprentissages que ces activités pourraient contribuer à engendrer. Cela peut enrichir la gamme des alternatives auxquelles peut recourir un enseignant pour s'adapter à des classes très différentes (à plus long terme).

On étudie d'abord des vidéos ordinaires déjà filmées dans des classes pour mettre au point les diverses analyses de contenus, de déroulements et les contraintes (cf. annexes 1, 2 et 3). Puis on analyse un extrait de vidéo de chaque participant et on dégage systématiquement des problématiques et des alternatives. Nous appelons « problématiques » des types de problèmes liés aux pratiques de l'enseignant en classe, fréquemment rencontrés et pour lesquels il n'y a pas de « bonne » réponse a priori mais des choix. Ainsi, dans l'exemple qui est développé en annexe 3, nous citons plusieurs problématiques qui peuvent ou non apparaître : autour de l'algèbre

au collège et de la « rupture » troisième/seconde, autour des choix de gestion dans les classes faibles entre découpages des énoncés et risques de découragements...

Les évaluations éventuelles de cette formation devront donc porter sur les analyses de séances et leur exploitation.

Une brève description d'un exemple d'une analyse d'une vidéo de séance ordinaire est jointe en annexe 3.

Nous allons montrer dans les lignes qui suivent que ce scénario remplit plusieurs des conditions discutées ci-dessus. Nous terminerons en discutant des évaluations possibles et du choix de contenus.

### **3.2. Une condition nécessaire respectée : la durée**

Cette formation est longue<sup>29</sup>. Il est nécessaire en effet à nos yeux qu'une certaine rupture puisse s'établir, qui permette au participant de ne pas rapporter ce qu'il travaille seulement à ses propres pratiques et à son expérience mais aussi à de nouvelles connaissances plus larges, suffisamment appropriées pour être adaptées.

### **3.3. Un travail simultané sur les contenus mathématiques enseignés et les déroulements des séances**

Nous avons fait l'hypothèse qu'il est nécessaire de travailler souvent simultanément les contenus à enseigner et les déroulements : c'est un « mélange » que les analyses de vidéo amènent à réaliser tout naturellement. Cette hypothèse est une manière de respecter la complexité des pratiques et de ne pas laisser les enseignants opérer seuls les recompositions nécessaires entre un travail sur les contenus et un travail sur les choix de gestion, dont on a déjà signalé l'interdépendance importante.

Cela implique à la fois un travail sur le cognitif – sur les contenus mathématiques, les tâches et les activités des élèves, et sur le médiatif, donc sur les variables dans les choix de déroulement.

### **3.4. La mise en évidence progressive des contraintes et la réflexion sur les marges de manœuvre et les alternatives.**

Mais comme ce travail peut aussi amener à prendre en compte les contraintes institutionnelles et sociales qui pèsent sur les enseignants, dont des caractéristiques des élèves et du milieu enseignant. Dès qu'une vidéo est analysée, on est obligé d'évoquer le projet du professeur, et dans ce projet figurent toujours des contraintes. Les marges de manœuvre qui restent doivent être alors dégagées grâce

---

<sup>29</sup> Ne serait-ce que pour tous les participants puissent présenter leur vidéo !

à un deuxième travail de recomposition de toutes ces données. Le travail sur les alternatives, virtuelles, est un bon intermédiaire à nos yeux pour aborder la complexité de cette situation.

### **3.5. Des activités réelles proches de l'expérience et des besoins**

Les activités proposées aux participants doivent être des activités réelles, où ils peuvent s'investir et apprendre quelque chose de nouveau. Les analyses de vidéo remplissent au moins partiellement cette condition, dans la mesure où chaque classe est nouvelle et pose un autre problème.

Remarquons que cette organisation autour des vidéos des participants amène à entrer dans de nombreux sujets de manière un peu décousue, voire aléatoire. Cela ressemble à un puzzle d'autant plus que peu d'exposés magistraux sont prévus, et qu'ils ne structurent pas dans un ordre décidé a priori la formation. Cela n'est possible que si on dispose d'un temps assez long.

Dans le même registre, les activités proposées aux participants sont « proches » de leur expérience (en amont de la formation) et de leurs besoins (en aval de la formation) : les analyses de vidéo sont évidemment reliées à l'expérience quotidienne des participants. On pourrait parler d'expérience qui devient *outillée par la formation*, ce qui en change la nature.

### **3.6. L'importance du collectif**

A plusieurs reprises dans le travail à partir de chaque vidéo, cet aspect collectif des analyses est nécessairement présent : lors des discussions sur l'analyse qui est présentée, et qui interpelle facilement les participants, mais aussi lorsque sont évoquées des alternatives. Tout cela contribue à l'émergence d'un collectif lié par cette formation commune, disposant des mêmes mots pour dire les mêmes choses, et mutualisant de nouveaux problèmes avec le formateur.

### **3.7. Discussion et prospective : les évaluations, des recherches à venir, retour sur le choix des contenus de formation**

Le problème des évaluations est particulièrement délicat : évaluer de telles formations nécessite en effet de rentrer dans les classes, ou même d'aller voir du côté des élèves.

Des évaluations intermédiaires qui ont été faites à la fin d'une des expérimentations permettent de constater que les analyses de tâches et de déroulements peuvent être appropriées par les participants assez rapidement. Nous donnons en annexe 4, à titre d'exemple, 2 analyses de tâches réalisées par des participants à la formation sur la séance décrite en annexe 3, l'analyse était demandée en préalable au visionnement.

Nous allons présenter une proposition pour avancer sur ces questions d'évaluation (en débordant nécessairement du cadre de l'exemple de ce paragraphe puisque ce n'est encore qu'une proposition) : nous imaginons une évaluation par la participation à une petite recherche, qui pourrait être menée l'année suivante. Autrement dit, il s'agit davantage d'une suite de la formation, avec une évaluation « en actes » que d'une stricte évaluation au sens ordinaire. Mais ne serait-ce pas une solution raisonnable ?

Il s'agirait, sur un chapitre choisi et enseigné par plusieurs enseignants ayant subi la formation, de proposer le mode « évaluation – recherches » suivant. Tous les participants se regrouperaient ainsi sur quelques chapitres.

Sur un chapitre qu'ils enseignent on leur demanderait de mettre au point une description détaillée des activités proposées à leurs élèves (en classe et à la maison). Les analyses de tâches et d'activités se feraient "comme d'habitude", avec sans doute des mises au point à trouver – descriptions « raisonnées ».

Il s'agirait ensuite de mettre en relation ces activités, les énoncés du contrôle correspondant et les résultats des élèves. Un questionnaire permettrait de comprendre les objectifs et les difficultés explicites du prof (hétérogénéité par exemple).

Ce travail, à mener collectivement à partir de la phase de traitement des données, permet de réinvestir des outils acquis en formation en abordant un problème réel et nous semble un bon moyen d'évaluer ce type de formation, en engageant dans une collaboration effective les formés et les formateurs, même s'il peut évidemment y avoir des biais liés aux contenus spécifiques.

Il resterait à discuter le choix de contenus pour cette formation précise : pourquoi choisir de « faire acquérir aux enseignants des outils d'analyse pour comprendre, *a posteriori*, les activités mathématiques des élèves telles qu'elles ont été organisées par l'enseignant en classe » ? Nous considérons que ces activités sont partie prenante des apprentissages ultérieurs des élèves, même si c'est partiel ; leurs analyses peuvent révéler des procédures particulières des élèves, imprévues ou classiques, voire des malentendus ; elles permettent d'appréhender des relations entre ce qui se passe en classe, certaines conceptions plus générales de l'enseignant et sa manière de prendre en compte certaines contraintes. Enfin ce qui est en jeu du côté de l'enseignant est en partie rationnel. Ce sont des décisions que l'enseignant peut contrôler en partie et qui peuvent influencer les apprentissages des élèves qui peuvent être travaillées. Il y a là une cohérence avec l'ensemble de la démarche proposée qui ne prend pas en compte explicitement des facteurs liés au psychisme et à l'inconscient, dont on sait bien qu'ils sont aussi présents.

### **Conclusion : un bilan**

Notre problème initial était de concevoir des scénarios de formations d'enseignants de mathématiques du second degré à partir de résultats de recherches sur les pratiques, en se donnant des moyens pour aller jusqu'aux évaluations de ces formations. Nous avons résumé dans cet article des éléments qui permettent, nous semble-t-il, d'imaginer des scénarios s'appuyant sur nos propositions (issues de nos recherches précédentes). Expérimenter ces scénarios demande encore de pouvoir travailler avec des formateurs formés à la fois pour dispenser les formations et pour contribuer à les évaluer.

Nous allons préciser quelques éléments sur les formateurs dans ce qui suit, puis citer quelques exemples de scénarios envisagés dans des recherches à venir en esquissant des formes d'évaluation possible.

#### **1) Un préalable : former des formateurs ?**

Ce point est particulièrement délicat, dans la mesure où des générations de formateurs ont travaillé très bien jusqu'à présent sans autre formation qu'une auto-formation, individuelle ou collective<sup>30</sup>, quelquefois cependant difficile de leur propre aveu.

Notre propos n'est pas une mise en cause de ces pionniers mais un enrichissement éventuel de leurs ressources, grâce à une formation systématique et accélérée de certains formateurs qui s'intégreront dans les équipes déjà constituées.

Les formations de formateurs que nous avons commencé à expérimenter<sup>31</sup> sont conçues avec beaucoup d'hypothèses analogues à celles des enseignants, mais elles couvrent deux volets supplémentaires. Nous les décrivons brièvement dans ce qui suit.

##### ***a) Un premier volet, au cœur de la formation de formateurs : encore les analyses de séances de classe***

Nous avons comme premier objectif les analyses des pratiques en classe, en vrai ou par l'intermédiaire de vidéo, avec en ligne de mire les activités et les apprentissages des élèves.

Cela met en jeu, rappelons-le, plusieurs niveaux : les analyses de contenus mathématiques (énoncés, types de notions, programmes) et des difficultés connues des élèves, les analyses de déroulements, les contraintes qui pèsent sur les enseignants (sociales et autres).

---

<sup>30</sup> Au sein des IREM par exemple.

<sup>31</sup> D'abord dans un Diplôme d'Université délivré par l'Université Versailles St Quentin, puis dans un master professionnel adossé au master recherches de didactique des disciplines scientifiques de l'Université Paris 7.

Cela débouche sur un travail sur des alternatives, qui nous semble particulièrement important en formation de formateurs.

***b) Un deuxième volet spécifique : à propos des formations d'enseignants***

Nous essayons de travailler sur des connaissances sur les pratiques et les conséquences en formation d'enseignants : l'hypothèse de l'importance de prendre en compte les modalités d'une formation en même temps que son contenu est au centre du travail. Plusieurs types d'activités permettent cette formation de formateurs : des observations de formations d'enseignants, pour en saisir des diversités, des discussions avec des formateurs actuels, la présentation de diverses hypothèses, un travail collectif des participants à la formation de formateurs de conception d'un scénario de formation d'enseignants. Il est clair que ce travail n'est que commencé dans cette formation de formateurs.

***c) Un troisième volet spécifique, aller chercher des ressources et les critiquer... : les formateurs interface entre chercheurs et enseignants***

Le problème des ressources, très nombreuses mais très dispersées et très variables, nous semble important à aborder en formation de formateurs. Des exposés bibliographiques, des recherches et des résumés d'articles issus de la littérature professionnelle (y compris Internet) sont organisés pour sensibiliser aux difficultés de l'exercice : synthèses et critiques sont des exercices très difficiles, loin des pratiques quotidiennes des enseignants.

C'est en effet aux formateurs que nous pensons qu'est dévolue la transmission adaptée des travaux de recherches, ainsi que la remontée vers les chercheurs... Si une première transposition doit sans doute être faite par les chercheurs eux-mêmes, il nous semble probable qu'elle ne peut pas suffire à une adoption par le milieu enseignant (cf. Bolon, 1996, Robert, 1999, Roditi, 2003). Dans cette hypothèse les formateurs auraient à travailler pour adapter ces travaux sans en perdre l'esprit, avec la possibilité d'échanger avec les chercheurs pour signaler les problèmes, enrichissant ainsi les deux parties !

**2) Monter des scénarios, les évaluer**

Dans cette perspective, la conception de scénarios pourrait être en partie collective, entre formateurs et chercheurs.

Plusieurs idées sont déjà discutées, des scénarios d'accompagnements de néotitulaires en classes difficiles, des formation-action sur un établissement (résolution de problèmes professionnels comme l'étude- Roditi 2004, les contrôles, l'intégration des TICE, la coordination des conseillers pédagogiques...).

Certaines recherches ont pris comme dispositifs de base le travail autour des mémoires professionnels des PLC2.

Les évaluations restent très difficiles à imaginer, en tout état de cause la proposition d'une évaluation intégrée à un travail sur un problème réel faisant intervenir chercheur, formateur et participants nous semble à retenir.

### **Annexe 1 : Analyses de tâches mathématiques proposées aux élèves dans des énoncés d'exercices**

Toutes ces analyses sont **relatives** à un niveau scolaire donné, un programme donné, une classe donnée

Les énoncés proposés aux élèves portent sur des connaissances qui peuvent être **anciennes ou en cours d'acquisition**

La question posée peut être **fermée** (montrer que...) ou nécessiter des conjectures, plus ou moins larges

Ces connaissances peuvent être ou non **indiquées** (directement ou indirectement par leur place) : on parle alors de fonctionnement de type **mobilisable** ou **disponible**.

**Dans tous les cas**, que ce soit sur des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition, mobilisables ou disponibles, on distingue des **types d'adaptations**.

*Si le travail consiste à appliquer une propriété sans calcul supplémentaire ni reconnaissance (remplacer les données générales par des données particulières) : application simple et isolée ou immédiate (niveau de mise en fonctionnement technique).*

Sinon types d'adaptations :

A1. *Les reconnaissances des modalités d'application* des notions, théorèmes, méthodes, formules... : variables, notations, formules ou conditions d'applications de théorèmes.

A2. *L'introduction d'intermédiaires* – notations, points, expressions...

A3. *Les mélanges* de plusieurs cadres ou notions..., les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres (graphiques/fonctions, indiqués ou non) ou de registres (modes d'écriture), les mises en relation ou interprétations .

A4. *L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements* (utilisation répétée (in) dépendante d'un même théorème, raisonnement faisant intervenir le théorème). Les étapes peuvent être classiques (étude d'une fonction) ou à imaginer.

A5. *L'utilisation de questions précédentes* dans un problème.

Avec ou non changements de points de vue ou interprétation ou perte d'information...

A6. *L'existence de choix* – forcés (un seul convient finalement) ou non.

## **Annexe 2 : Analyses de déroulements de séances en relation avec les activités (éventuelles) provoquées chez les élèves**

1) On établit :

**La chronologie de la séance (dictée par la suite des activités des élèves)**

**2) Sur un épisode particulier correspondant à une tâche, on relève**

### ***Les formes de travail des élèves***

Elèves à leur place, en petits groupes, un au tableau...

Travail autonome individuel ou en petits groupes, questions-réponses (dialogue), écoute, recopiage, production écrite (notée ou non)

### ***Les interventions de l'enseignant***

Encouragements ou avertissements (non mathématiques)

Aides

Evaluations : corrections, validations, en s'appuyant ou non sur les élèves...

### **Pour décrire les aides, on indique :**

Moment : a priori, pendant, a posteriori, (par rapport à l'activité correspondante des élèves)

Formes : Q->E : question (ouvert), Echange, E->P : réponse, indications (fermé)

Nature : indications précises ou remarques générales (directe ou indirecte), méthodes mathématiques, découpage en sous-tâche, rappel de cours, bilans.

Sur quoi ça porte : contenus mathématiques précis ou plus généraux, formes (rédaction), travail.

**On reconstitue les activités des élèves sur cette tâche** à partir des indications précédentes :

On cherche notamment la manière dont elles se sont déroulées, en tenant compte **simultanément** de toutes les informations : guidées ou en autonomie, finalement il reste des initiatives ou seulement des applications précises, les activités sont réellement individuelles ou collectives (petit groupe ou classe), écrites ou orales, quel enjeu se dégage pour les élèves (contrôle par exemple).

On croise avec la nature des tâches précédemment étudiée, en comparant, toujours avec les outils de l'annexe 1, les analyses a priori, faites à partir des énoncés, et ce qui s'est passé :

Sur quelles connaissances les activités des élèves portent-elles effectivement – sont-elles menées avant ou après le cours correspondant, sont-elles anciennes, nouvelles, quels types de tâches sont réellement abordés ?

### **Annexe 3 : Un exemple d'analyse d'un extrait de séance à partir d'une vidéo tournée en classe**

En troisième, dans une très bonne classe, un enseignant propose à ses élèves en milieu d'année l'énoncé suivant, qui n'est donc pas relié à un chapitre précis :

**Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés.**

#### **1) Analyse a priori<sup>32</sup>**

Cet exercice est ouvert : aucune indication n'est donnée, et le mot « construire » correspond à une question qui n'est pas fermée. Il peut même y avoir une ambiguïté sur ce mot : entre programme de construction, construction à la règle et au compas, discussion de l'existence et /ou de l'unicité... On peut penser que c'est le contexte de la classe qui jouera pour que les élèves donnent un sens à ce mot.

Aucune étape n'est indiquée – aux élèves de mettre en place un découpage pour résoudre l'exercice.

Des intermédiaires doivent être introduits pour modéliser la situation : les longueurs des côtés donnés et inconnus (lettres utilisées comme nombres généralisés et inconnue).

Cette modélisation amène à écrire une équation, à condition que les formules des aires de triangles soient mobilisables : il y a un premier jeu de cadres entre le géométrique et l'algébrique, avec un petit travail algébrique pour « arranger » l'équation.

Mais la résolution de cette équation ne se fait pas dans le cadre numérique, la lettre inconnue ne prend pas le statut de variable mais de longueur de côté, à construire géométriquement.

Cette « résolution » fait ainsi appel au théorème de Pythagore – supposé donc disponible. Seulement la mise en fonctionnement du théorème de Pythagore demande une adaptation importante (cf. annexe 1), puisqu'il y a à la fois un changement de point de vue dans l'utilisation du théorème et un jeu de cadres, entre l'algébrique et le géométrique : on doit reconnaître et interpréter une propriété géométrique à partir de l'égalité algébrique (du type  $a^2 + b^2 = x^2$ ) alors que cette égalité est souvent, dans les exercices habituels, déduite au contraire de la situation géométrique. Le côté inconnu s'obtient ainsi comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés donnés initialement sont les côtés de l'angle droit, hypoténuse qu'on peut alors construire géométriquement.

---

<sup>32</sup> Il s'agit d'une analyse a priori « légère », qui ne se place pas au niveau de la recherche en didactique, nous ne mettons en œuvre que les outils précédents.

## 2) Déroulement

Nous décrivons la vidéo de la séance que l'enseignant a tournée lui-même en plaçant la caméra au fond de sa classe (sans observateur).

### Première phase : une recherche individuelle de pistes

L'enseignant propose l'exercice et laisse chercher les élèves environ 4 minutes en répondant tout haut aux questions posées par les élèves. Il s'agit de « chercher des pistes ».

Des élèves demandent si on a le droit de faire un dessin – « oui » répond l'enseignant - puis interrogent sur le sens du mot « donnés » : est-ce que ces deux triangles « donnés » sont les mêmes ? L'enseignant répond que ces deux triangles sont fixés au départ.

L'enseignant écrit l'énoncé au tableau et fait un dessin (deux triangles) pendant cette première phase de recherche des élèves, puis circule dans les rangs en silence, ou en relançant les élèves de manière neutre (« tu cherches... »).

Il reprend tout haut la proposition d'un élève : « on peut leur donner des noms »

### Deuxième phase : une mise en commun des pistes un petit peu complétées par l'enseignant

L'enseignant interrompt cette recherche et interroge les élèves collectivement pour recueillir des pistes de travail.

Il doit poser de nombreuses questions : comment traduire l'énoncé ? Quels sont les mots importants ?

Une élève passe au tableau, et indique un codage sur un des triangles dessinés auquel elle rajoute une hauteur : « a » pour le côté, «  $a\sqrt{3}/2$  » pour la hauteur.

Le mot équation est lancé et le professeur le reprend au vol : « quelle équation, qu'est-ce qui manque ? »

Des élèves reprennent : « faudrait qu'on connaisse l'aire », « on n'a pas de données numériques », « on peut mettre des lettres »...

Le professeur reprend et complète toutes ces idées en demandant « comment mettre x, où mettre x ? ». Mais il n'y a rien encore de précis, seulement des idées lancées par des mots.

### Troisième phase : une nouvelle recherche individuelle courte

Puis les élèves cherchent de nouveau et deux minutes après l'enseignant corrige en envoyant un élève au tableau.

#### Quatrième phase : correction avec un élève au tableau

A partir de ce moment là le professeur reprend la main : il découpe le travail de l'élève au tableau en petites sous-tâches, il ne laisse aucune initiative, allant jusqu'à dicter par moments ce qu'il faut écrire. L'élève n'a plus que les calculs à faire seul.

- Ainsi l'enseignant fait d'abord écrire ce qu'est  $x$  (le côté du triangle inconnu) – il dicte une phrase habituelle pour la classe ; puis il demande la formule de l'aire du triangle.
- La formule de l'aire du triangle est écrite pour les trois triangles.

L'enseignant ne s'arrête pas aux difficultés algébriques qui apparaissent au tableau, pour écrire l'aire du triangle (division d'une fraction par 2) les traitant comme des étourderies.

- L'enseignant fait écrire ensuite l'équation traduisant l'énoncé, là encore le calcul algébrique est dirigé étroitement, avec des questions à tout le monde pour arriver à simplifier par le facteur numérique  $\sqrt{3}/4$ . Finalement au bout de cinq minutes depuis le début de cette phase, l'élève au tableau arrive à l'équation :  $a^2 + b^2 = x^2$

Et la cloche indiquant la fin de la séance sonne !

Un élève reconnaît pourtant « C'est Pythagore », et l'enseignant donne à finir l'exercice à la maison. Deux jours après aucun élève n'a fini l'exercice, aucun élève n'arrive à la faire, l'indication « C'est Pythagore » s'est perdue même pour son auteur !...

### **3) Différences et précisions entre analyses a priori et déroulements : quelles activités pour les élèves ?**

Plusieurs différences ou précisions apparaissent entre les prévisions et la vidéo et assez vite plusieurs questions se posent pour mieux comprendre.

Non seulement le mot construire mais déjà le mot « donnés » sont ambigus pour les élèves et l'enseignant lève en partie ces ambiguïtés.

La mise en place des découpages nécessaires se fait en deux temps : les élèves ont à chercher seuls la démarche d'abord, sans le faire jusqu'au bout (voire pas du tout pour certains).

Après 6 minutes de recherches, ce qui ne peut permettre à aucun élève de troisième d'aller très loin, le professeur prend en main le découpage en imposant de petites étapes grâce à la correction par un élève au tableau.

Une des très (trop ?) grandes difficultés prévisibles de l'exercice est donc finalement supprimée.

Les intermédiaires ont été pressentis par quelques élèves, l'enseignant donne l'indication à tout le monde : ce n'est plus une initiative à prendre.

Enfin le jeu de cadres géométrique/algébrique est pris en main par l'enseignant qui indique toutes les étapes. De plus le travail algébrique n'est pas approfondi, les erreurs ne sont pas reprises mais seulement corrigées très rapidement.

Finalement les activités des élèves diffèrent selon leur investissement, notamment dans les quatre premières minutes. A minima, un élève commencera à travailler au moment de la correction, en recopiant le tableau, présenté comme un lieu de savoir (cf. Robert et Vandebrouck, 2003). D'autres pourront effectuer les calculs en même temps que l'élève au tableau, en résolvant ainsi seuls des petites tâches séparées, l'enseignant ayant pris en main la structuration et la démarche d'ensemble. Quelques élèves auront suivi cette démarche sur laquelle cependant l'enseignant n'a pas eu le temps de revenir.

Certaines différences correspondent ainsi à des difficultés imprévues des élèves, que l'enseignant repère au moment où les élèves parlent et qu'il retient et approfondit plus ou moins selon les cas.

D'autres correspondent à la gestion particulière de cet enseignant et à l'organisation des activités des élèves qu'il induit. Nous allons préciser encore ce dernier point dans le paragraphe suivant.

#### **4) Ce qu'en dit l'enseignant**

Pour en savoir plus nous avons interrogé cet enseignant sur cette vidéo (un exemple de questionnaire, avec notamment les réponses de cet enseignant, figure dans le document pour la formation n°1, Beziaud et al.).

Le problème du temps est évidemment apparu d'abord, d'autant plus que cette activité, improvisée, a été rajoutée par l'enseignant à un emploi de temps déjà très chargé.

Cependant ce professeur a indiqué que le déroulement de l'exercice, mis à part la fin (l'interruption par la cloche) est très habituel. Les quatre phases, le fait de permettre à tous les élèves, même faibles, de faire « quelque chose » assez rapidement, la correction impeccable au tableau avec un élève « secrétaire », sont autant de constantes que cet enseignant revendique.

Ces habitudes peuvent jouer pour faire apprendre les mathématiques aux élèves grâce à des répétitions à divers niveaux, pas nécessairement explicites : démarches, rigueur de l'écriture, formats des démonstrations<sup>33</sup>.

---

<sup>33</sup> Une autre vidéo révèle ainsi l'habitude de faire encadrer systématiquement les hypothèses et la conclusion avec deux couleurs différentes.

De ce fait, ce professeur envisage peu d'alternatives finalement à ce déroulement qui s'intègre dans des pratiques stables et cohérentes : il pense que ses choix optimisent ses marges de manœuvre réduites par les contraintes de tous ordres qui pèsent sur l'enseignement des mathématiques et prédéterminées par sa personnalité. La contrainte du temps est une des plus pesantes, renforcée par les réductions d'horaires et la volonté de finir les programmes, eux peu allégés. L'hétérogénéité des classes est aussi ressentie comme une contrainte puisqu'elle amène à ménager des activités différentes pour que chacun puisse travailler, et cela peut aller jusqu'à des contradictions.

### 5) Alternatives

Deux types d'alternatives se présentent, qui permettent d'utiliser ce qui précède : sur l'énoncé et sur la gestion.

Ce sont plutôt des énoncés plus découpés ou un travail sur les variables didactiques de l'énoncé qui sont envisageables ici.

Par exemple on peut n'introduire qu'une inconnue en donnant des valeurs numériques aux deux côtés donnés (*Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux de côté respectivement 3 et 4*).

On peut aussi supprimer des difficultés algébriques en travaillant sur des carrés (*Construire un carré d'aire égale à la somme des aires de deux carrés donnés*).

On peut expliciter la consigne « construire » : *On donne deux triangles équilatéraux de côtés  $a$  et  $b$ . Donner une construction géométrique du côté d'un triangle équilatéral dont l'aire est égale à la somme des aires des deux triangles donnés.*

On peut enfin introduire des étapes : Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés de côtés respectifs  $a$  et  $b$ . On pourra exprimer l'aire du triangle à construire en fonction de  $a$  et  $b$  et chercher une construction du côté de ce triangle.

Remarquons que dans tous ces énoncés l'utilisation du théorème de Pythagore reste de l'ordre du disponible !

Sur la gestion, nous envisageons une classe virtuelle.

Une première alternative correspond au *temps de recherche* laissé aux élèves : il apparaît que si on veut laisser chercher les élèves et les faire travailler sur l'utilisation du théorème de Pythagore il faut disposer de plus de temps. Rappelons que notre enseignant avait improvisé cet exercice supplémentaire...

Une autre alternative est de faire travailler les élèves *en petits groupes*, ce qui peut permettre à l'enseignant d'intervenir moins rapidement (au moins collectivement).

Un autre type d'alternative concerne les aides de l'enseignant et le découpage à introduire. On peut envisager de laisser plus d'initiatives aux élèves, si ceux-ci y sont habitués : une gestion ne s'improvise pas et demande des habitudes quelle qu'elle soit !

**6) Le schéma d'une séance de formation sur cet extrait de vidéo, exemples de « problématiques » accrochées à la vidéo**

On commence par donner le texte de l'exercice. Pendant un quart d'heure les participants font une analyse des tâches. On passe 15 à 20 minutes de vidéo et on établit une analyse du déroulement. Une discussion est organisée sur le projet de l'enseignant (différemment s'il est présent ou non) et les alternatives. Des problématiques sont développées (elles varient selon la discussion qui s'engage effectivement) : autour de l'algèbre au collège et de l'introduction progressive des variables, autour de la rupture troisième/seconde en ce qui concerne l'algèbre, autour de la gestion des classes faibles et des découpages des énoncés... Une caractéristique de ce type de discussion est le fait qu'on ne tranche pas : on expose des possibles et des questions, quelquefois avec plusieurs réponses différentes, en essayant de dégager les environnements en jeu.

#### **Annexe 4 : Exemples d'analyses faites individuellement par des enseignants en formation**

##### **Texte des questions :**

En troisième ou en seconde, un enseignant propose à ses élèves l'énoncé suivant :

**Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés.**

1) En vous plaçant au niveau troisième ou au niveau seconde (le préciser), analyser cette tâche.

2) Décrire un déroulement en classe possible en indiquant brièvement les activités attendues correspondantes des élèves.

Voici deux fiches, une en troisième et une en seconde :

##### **Niveau : troisième**

###### **Fiche 1**

C'est un problème très ouvert qui permet « d'organiser le nouveau dans l'ancien » et fait appel à des connaissances disponibles ou mobilisables. C'est un problème de géométrie qui nécessite des changements de cadre et qui fait travailler sur des expressions littérales (connaissance mise en place tout au long de la classe de 3<sup>ème</sup>) des racines carrées et des équations.

Je proposerai cet exercice après avoir traité les racines carrées et avoir remis en place sous forme d'exercices techniques au moins le travail sur les expressions littérales.

###### *Analyse des tâches*

► Des adaptations doivent être faites pour faire un schéma et nommer les longueurs des 3 triangles équilatéraux dont on parle, deux étant donnés, le dernier étant à construire.

► Calcul de l'aire de chaque triangle équilatéral. L'aire d'un triangle est une connaissance de 5<sup>ème</sup> réinvestie ici. Les élèves doivent réduire l'expression littérale obtenue.

Pour calculer l'aire d'un triangle équilatéral, deux cas de figures se présentent suivant la classe dans laquelle on propose l'exercice :

Soit le calcul de la hauteur d'un triangle équilatéral a déjà été vu lors d'exercices après le cours sur racines carrées et les élèves peuvent utiliser le résultat.

Soit le calcul n'a pas été fait et les élèves doivent utiliser le théorème de Pythagore (connaissance de 4<sup>ème</sup>) et simplifier l'expression littérale. (factorisation, équation du type  $x^2 = a$  où  $x$  est une longueur, racine carrée). Les équations du type  $x^2 = a$  sont vues en 4<sup>ème</sup> dans le cas particulier où  $x$  est une longueur avec le théorème de Pythagore (ce qui est le cas ici) et généralisées en 3<sup>ème</sup>.

Autre méthode : utiliser la valeur exacte de  $\sin. 60^\circ$  si la trigonométrie a été traitée.

► Adaptation pour transformer l'énoncé sous forme d'une égalité algébrique, factorisation de  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  puis simplification.

► Reconnaître le théorème de Pythagore à partir de l'égalité algébrique et repasser au registre géométrique pour effectuer la construction.

Les tâches proposées sont non isolées et non simples pour une classe de troisième. Cet exercice est très riche puisqu'il permet de travailler sur le calcul littéral dans un cadre géométrique et permet d'entretenir des connaissances anciennes. Cet exercice peut favoriser le passage du « contextualisé » au « décontextualisé » pour certains élèves pour le théorème de Pythagore notamment.

### *Déroulement en classe*

Cet exercice étant très riche, un travail en groupe de niveau hétérogène me paraît le plus adapté pour favoriser les échanges entre élèves et permettre aux élèves en difficulté de profiter d'une progression convenable. J'installerai les élèves par groupe de quatre.

Je prévois d'écrire l'énoncé au tableau, de faire lire l'énoncé à voix haute par un élève et de faire réfléchir les élèves sur : les données et ce que l'on veut faire. Ensuite, je proposerai à un élève de construire trois triangles équilatéraux distincts ( 2 en couleur pour les triangles donnés ) et mettrai en place, après un temps de réflexion des élèves les notations  $a$  et  $b$  pour désigner les longueurs des côtés des deux triangles donnés et  $c$  la longueur du triangle que l'on veut construire. Je laisserai ensuite les élèves travailler en groupe de façon entièrement autonome et j'interviendrai à la demande. Environ 10 minutes avant la fin, je prévois de faire une synthèse et de noter la relation  $c^2 = a^2 + b^2$ , puis d'expliquer la construction : construire un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent  $a$  et  $b$  puis construire le triangle équilatéral de côté  $c$  en montrant qu'il répond bien à la question .

L'aire de ce triangle est égale à la somme des aires des deux autres. En effet : si  $a^2 + b^2 = c^2$  alors on a bien la relation :  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$ . Tous les élèves doivent

avoir construit la figure sur leur cahier d'exercice (sur feuille blanche ) avant la fin de la séance, en utilisant le compas pour les reports de longueur.

## Niveau seconde

### Fiche 2

#### 1) Analyse de cette tâche :

##### Géographie de la séance :

En classe de seconde un des premiers modules que je donne aux élèves s'intitule : Des résultats à connaître absolument. L'objectif de ce module est de trouver des formules pour les situations suivantes : avec  $a$  un nombre strictement positif, exprimer en fonction de  $a$ , la mesure de la longueur d'une diagonale d'un carré de côté  $a$ , d'un cube d'arête  $a$ , d'une « hauteur » d'un triangle équilatéral de côté  $a$  et retrouver les lignes trigonométriques des angles dits remarquables de mesure  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ .

L'exercice proposé serait alors posé la semaine suivante en module donc en demi-classe.

Longueur estimée : environ 30 mn pour l'exercice même.

Notions visées : utilisées ici comme outil. Il y a : le calcul d'une aire d'un triangle, une utilisation du résultat trouvé lors du module précédent pour la « hauteur » d'un triangle équilatéral ou l'utilisation du théorème de Pythagore, une factorisation par  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , une utilisation de la réciproque de Pythagore.

Modes de raisonnement : applications non simples, non isolées.

Niveau de mise en fonctionnement : disponible (car module traité précédemment) ou mobilisable selon les élèves.

Il y a un changement de cadres : cadre géométrique et cadre numérique ou littéral.

L'univers de la séance est un univers de recherche sur une tâche riche.

#### 2) Un déroulement possible

Cet exercice est proposé en module (demi-classe). Le travail a lieu en groupes hétérogènes de 4 élèves (chaque groupe est constitué par affinités ou par ordre alphabétique à ce moment de l'année). C'est le premier travail en groupes de l'année et donc les règles de fonctionnement sont à bien préciser au début de la séance.

**Contrat pour cet exercice** : recherche individuelle et collective à l'intérieur du groupe.

**Production attendue** : une copie par groupe à rendre à la fin de la séance. L'exercice sera rédigé sur une feuille de copie quadrillée avec une construction très précise réalisée à la règle et au compas mais l'utilisation des quadrillages est possible, une justification écrite détaillée de la construction est attendue.

**Formes de travail des élèves** : pendant une dizaine de minutes recherche des élèves sans intervention du professeur donc travail autonome puis si besoin aides très ponctuelles du professeur dans les groupes.

**Aides du professeur** : aides directes et ponctuelles. Elles consistent à introduire des sous-tâches. Par exemple : donner un nom à la mesure des côtés des deux triangles, comment calculer l'aire d'un triangle, traduire l'énoncé par une égalité, penser à factoriser, ...

**Une remarque** : L'énoncé est difficile pour un élève de seconde. Les élèves seraient un peu plus à l'aise avec : Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux de côtés respectifs  $a$  et  $b$  ( $a$  et  $b$  étant des nombres strictement positifs).

**Bibliographie** (certains ouvrages ne sont pas cités dans le texte mais ont largement inspirés la réflexion)

ALTET M., 1994, *La formation professionnelle des enseignants*, PUF.

ALTET M., PAQUAY L., PERRENOUD P. (Eds), 2002, *Formateurs d'enseignants, quelle professionnalisation ?* De Boeck.

BAUTIER R.x, 1998, L'expérience scolaire des nouveaux lycéens, démocratisation ou massification, A. Colin.

BEN SALAH C., 2001, *Les connaissances mathématiques des nouveaux enseignants à l'épreuve du feu, une étude de cas*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

BEZIAUD P., DUMORTIER D., ROBERT A., VANDEBROUCK F., 2003, Un questionnaire sur l'utilisation du tableau noir en classe de mathématiques (collège et lycée) : portée, limites, perspectives en formations, *Document n°1 pour la formation des enseignants*, IREM-Université Paris 7.

BLANCHARD-LAVILLE C. et FABLET D., (ed.), 2000, *L'analyse des pratiques professionnelles*, L'Harmattan.

BOLON J., 1996, *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique ?* Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris.

BROUSSEAU G., 1998, *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage.

BUTLEN D., PELTIER M.L., PEZARD M., 2002, Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en REP : contradiction et cohérence, *Revue française de Pédagogie*, n°140, 41-52.

CAUTERMANN M.M., DEMAILLY L., SUFFYS S., BLIEZ-SULLEROT N., 1999, *La formation continue des enseignants est-elle utile ?* PUF.

CHESNAIS, 2004, Enseignement de la multiplication des décimaux par un professeur débutant dans une classe de sixième ZEP, *Cahier de Didirem* n°49, IREM-Université Paris 7.

CHEVALLARD Y., 1999, L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/2, 221-265.

CLARKE D. et HOLLINGSWORTH H., 2002, Elaborating a model of teacher professional growth, *Teachnig and teacher education*, 18, 947-967.

CLOT Y., 1999, *La fonction psychologique du travail*, Paris PUF.

COULANGE L., 2001, Evolution du passage arithmétique-algèbre dans les manuels et les programmes du 20ème siècle : contraintes et espaces de libertés pour le professeur, *Petit x*, n°57, 65-85.

- DEBLOIS L., SQUALLI H., 2002, L'implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres du primaire, *Educational Studies in Mathematics*, 50, 213-238.
- DESQ J., JOYEUX B., TERRÉE N., 2004, Un exemple de scénario de formation : impact des énoncés sur l'activité des élèves en S, *Document pour la formation des enseignants* n°4bis, IREM-Université Paris7.
- DOUADY R., 1987, Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2),5-32.
- DOUADY R., 1992, Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères-Irem* 6, 132-158.
- DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Bernes, Peter Lang.
- DUVAL R., 2002, Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres, in *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, IREM, Université Paris 7, 83-105.
- FÉLIX C., 2004, Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste, *Spirale* n°33, 89-100 (Lille).
- GROUPE DE RECHERCHE FORMATION DE L'ACADÉMIE DE TOULOUSE, 2002, Deux expériences réalisées en formation continue autour d'énoncés de problèmes de mathématiques en classe scientifique, *Cahier de Didirem* n°41, IREM-Université Paris 7.
- HACHE C., 2001, L'univers mathématiques proposé par le professeur en classe, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 21/1-2., 81- 98.
- HOUEMENT C. et KUZNIAK A., 1996, Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 16/3, 289-322.
- JAWORSKI B., 2003, Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships, *Educational Studies in Mathematics*, 54, 249-282.
- KAZEMI et AL., 2004, Teacher learning in mathematics: using student work to promote collective inquiry, *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, 203-235.
- LATTUATI M., ROBERT A., PENNINCKX J., 1999, *L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique*, Ellipses.
- LENFANT A., 2002, *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*, Thèse de doctorat de l'université de Paris 7.

- LEONTIEV A., 1984, *Activité, conscience, personnalité*, Editions du Progrès.
- MALGLAIVE B., 1990, *Enseigner à des adultes*, PUF.
- MARGOLINAS C., 1995, La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in Margolinas Eds. *Les débats en didactique des mathématiques*, 89-103, La Pensée sauvage, Grenoble.
- MASSELOT P., 2000, *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école – une étude de cas*, Thèse de doctorat de l'université Paris 7.
- MAURICE J.-J., ALLÈGRE E., 2002, 'Invariance temporelle des pratiques enseignantes : le temps donné aux élèves pour chercher', *Revue Française de Pédagogie* 138, 115-124.
- MERCIER A., LEMOYNE G., ROUCHIER A. (Eds), 2001, *Le génie didactique, usages et mésusages des théories de l'enseignement*, De Boeck.
- MONTMOLLIN (DE) M., 1984, *L'intelligence de la tâche*. Berne : Peter Lang.
- NOIRFALISE R. Ed, 1998, Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, *Actes de l'Université d'été de la Rochelle*, IREM de Clermont Ferrand.
- PAQUAY L., ALTET M., CHARLIER E., PERRENOUD P. (Eds), 2001, *Former des enseignants professionnels, quelles stratégies, quelles compétences ?* De Boeck.
- PARIÈS M., 2001, *Pratiques des enseignants de mathématiques : analyses des discours accompagnant la résolution d'exercices au collège*, Thèse de doctorat de l'université Paris 7.
- PARIÈS M., (à paraître), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves, *Recherches en didactique des mathématiques*.
- PASTRÉ P., (Ed), 1999, Apprendre des situations, Education permanente, 139.
- PELTIER-BARBIER M.L. (Ed.), 2004, *Dur d'enseigner en ZEP*, La pensée sauvage.
- PERESSINI D., BORKO H., ROMAGNANO L., KNUTH E. ET WILLIS C., 2004, A conceptual framework for learning to teach secondary mathematics : a situative perspective, *Educational Studies in Mathematics*, 56, 67-96.
- ROBERT A., 1998, Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 18 2, 139-190.

ROBERT A., 1999, Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe, *Didaskalia*, n°15, 123-157.

ROBERT A., 2001, Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 21/1-2, 57- 80.

ROBERT A., 2003a, De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques : le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée), *Didaskalia*. 22, 99-116.

ROBERT A., 2003, Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe. *Revue Petit x*, n° 62, 61-71.

ROBERT A., 2004, Une analyse de séance de mathématiques au collège à partir d'une vidéo filmée en classe. La question des alternatives dans les pratiques d'enseignants, perspectives en formation d'enseignants, *Petit x*, n°65, 52-79

ROBERT A. et HACHE C., 1997, Un essai d'analyse des pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait "fréquenter" les mathématiques à ses élèves pendant la classe ? *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 17-3, 103-150.

ROBERT A. et POUYANNE N., 2004, Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation, *Document pour la formation des enseignants* n°5, IREM- Université Paris 7.

ROBERT A. et ROGALSKI J., 2002, Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol2, n°4, 505-528.

ROBERT A. et ROGALSKI J., (2004, à paraître), A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class, *Educational studies in mathematics*, Vol 59.

ROBERT A. et ROGALSKI M., 2002, Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de la classe, *Revue Petit x*, n° 60.

ROBERT A. et ROGALSKI M., 2004, Problèmes et activités d'introduction, problèmes transversaux et problèmes de recherche au lycée, *Repères IREM* n°54, 77-103.

ROBERT A. et VANDEBROUCK F. avec la collaboration de P. BEZIAUD et D. DUMORTIER, 2001, Recherches sur l'utilisation du tableau par des enseignants de

mathématiques en seconde pendant des séances d'exercices, *Cahier de Didirem* n°36, IREM-Université Paris 7.

ROBERT A. et VANDEBROUCK F., 2003, Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 23/3, 389-424.

RODITI É., 2001, *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires ?* Thèse de doctorat d'Université, Didactique des Mathématiques, Paris 7.

RODITI E., 2003, Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 23/2, 183-216.

RODITI E., 2004a, Le théorème de l'angle inscrit au collège. Analyse d'une séance d'introduction et perspectives pour la formation, *Cahier de Didirem* n°45, IREM-Université Paris 7.

RODITI E., 2004, Former par la résolution de problèmes professionnels, *Cahier de Didirem* n°48, IREM-Université Paris 7.

ROGALSKI J., 2000, Y a-t-il un pilote dans la classe ? Apports des concepts et méthodes de la psychologie ergonomique pour l'analyse de l'activité de l'enseignant, In Assude T. et Grugeon B. *Actes du séminaire de didactique national*, 143-164, Paris : ARDM-IREM Paris 7.

ROGALSKI J., 2003, Y a-t-il un pilote dans la classe, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol 23 3, 343-388.

SOLAR C. (Ed.), 2001, *Le groupe en formation d'adultes*, De Boeck.

VANDEBROUCK F., 2002, Utilisation du tableau et gestion de la classe de mathématiques : à la recherche d'invariants dans les pratiques d'enseignants, *Cahier de Didirem* n°42, IREM-Université Paris 7.

VERGNAUD G., 2002, La conceptualisation, clef de voûte des rapports entre pratique et théorie, in Actes de la Desco de l'Université d'Automne, *Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants*.

VERGNES D., 2001, Les effets d'un stage de formation en géométrie, *Recherches en didactique des mathématiques*, 21/1-2, 99-122.

**ALINE ROBERT**

IUFM de Versailles-54 avenue des Etats-Unis-78000 Versailles  
[alr@ccr.jussieu.fr](mailto:alr@ccr.jussieu.fr)