

CONSONANCE MUSICALE ET COMPLEXITÉ MATHÉMATIQUE

ATHANASE PAPADOPOULOS

Résumé : La consonance musicale est un sujet passionnant et vaste, et son étude fait intervenir des domaines aussi variés que les mathématiques, la physique, la physiologie, l'esthétique, la psychologie, la numérologie, et il y en a certainement d'autres. J'aborderai ce sujet dans cet article sous des points de vue différents, en mentionnant des idées formulées par Euclide, Ptolémée, Descartes, Huygens, Galilée, Kepler, Mersenne, Sauveur, Rousseau, d'Alembert, Euler et Birkhoff. Je dégagerai ensuite certaines théories sur la consonance qui font intervenir des notions qui relèvent du domaine de la complexité mathématique.

Introduction

Pourquoi est-ce que certains intervalles musicaux (tels qu'une octave ou une quinte) sont consonants et d'autres pas ? Par exemple, pourquoi est-ce que la double quinte et la double quarte ne sont pas consonants, alors que la double octave l'est ?

De telles questions, ainsi que d'autres du même genre, font partie de la liste de problèmes ouverts d'Aristote ([4], Livre XIX Problèmes 35, 36, 41, etc.).

Kepler, dans son *Harmonie du monde*, se pose les mêmes questions, en utilisant d'autres mots : "Pourquoi certaines proportions définissent-elles des intervalles suaves et consonants ; pourquoi les autres proportions définissent-elles des intervalles dissonants, abhorrés par les oreilles, inusités ?" ([17] p. 85).

On peut enfin mentionner Galilée qui, dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, décrit la question de la consonance comme un "problème merveilleux" ([13] p. 80), et où à travers l'un des protagonistes, il déclare : "Le vieux problème des deux cordes tendues à l'unisson, et où l'une en résonnant fait vibrer et résonner l'autre, est toujours pour moi sans solution, comme ne sont pas très clairs les différents aspects des consonances, et d'autres détails" ([13] p. 80) et, un peu plus loin : "Ayant longuement réfléchi sur les consonances, je n'ai jamais su dire pourquoi celle-ci me plaît plus que celle-là, ni pourquoi certaines non seulement ne me charment pas, mais m'irritent au plus haut point l'oreille". ([13] p. 78).

Des tentatives de réponses à ces questions s'étalant sur une période de 25 siècles ont été faites par des esprits brillants tels qu'Euclide, Ptolémée, Descartes, Huygens, Galilée, Kepler, Mersenne, d'Alembert et Euler (pour ne mentionner que des mathématiciens). Certaines des réponses qui ont été données à ces questions peuvent paraître aujourd'hui convaincantes et d'autres moins, mais l'intérêt d'une question ne réside-t-il pas dans les théories dont elle a suscité la naissance et dans les outils qui ont été développés pour la résoudre ?

Dans les paragraphes qui suivent, je vais présenter certaines conceptions de la consonance, en m'appuyant sur des textes choisis dans les oeuvres d'auteurs ayant vécu à des époques différentes entre la période de l'Antiquité grecque et le XX^e siècle, et qui, pour la plupart,

étaient mathématiciens, en tentant de dégager certains points de vue qui font intervenir des notions qui relèvent de la théorie de la complexité mathématique. Il est toujours bon de voir comment les mathématiques peuvent être utiles en musique.

Même si mon sujet ici est la consonance, je n’ai pas tenté dans cet article de donner des listes de consonances à telle ou telle période; de telles listes auraient chargé inutilement le texte. Je n’ai pas non plus suivi un ordre historique, et je n’ai pas pu éviter certaines répétitions. Enfin, je vais surtout parler de consonance d’intervalles (accords de deux sons), mais plusieurs des considérations peuvent s’appliquer aux accords de trois sons et plus.

1. Qu’est-ce que la consonance ?

Étymologiquement, la consonance est le résultat de plusieurs sons joués simultanément. Les Grecs avaient pour cela les mots “armonia”, qui veut dire “joindre ensemble”, et “symphonia”, qui est plus proche du latin *consonantia* (et qui, bien sûr, a été fabriqué d’après le grec). Parmi les diverses significations qui ont été données à ce mot, il y en a une que je trouve particulièrement éclairante, et qui est proche du sens étymologique. Elle est utilisée par Platon dans le *Timée* 80b ([18] p. 211), par Euclide dans sa *Section du Canon* (cf. [11] p. 193) et par Aristote à divers endroits. Elle consiste à dire que deux sons sont consonants s’ils peuvent se combiner pour ne former qu’un son unique. Plus généralement, Aristote, dans son traité *De la sensation et des objets sensibles* 447b10 et 448a9 ([5] p. 97 et 99), dit qu’il n’est pas possible de percevoir simultanément et avec le même sens deux objets, à moins que ces deux objets ne soient combinés en un seul, et il donne comme exemples les consonances d’octave et de quinte, qui d’après lui sont perçues comme un son unique. Notons au passage que l’on comprend mieux, avec cette définition, pourquoi le mot *dissonance*, dans lequel on trouve la racine *di* (deux), est parfois utilisé comme une négation de la consonance : un accord de deux sons est dissonant si, quand ces notes sont émises simultanément, il en résulte non pas un mélange qui donne l’impression d’un son unique, mais deux sons distincts.¹ Il existe une explication rationnelle de ce phénomène de deux sons qui se combinent en un seul; elle utilise la décomposition du son en fondamental et harmoniques, et je vais en parler au §2 ci-dessous.

Mais il y a d’autres points de vue sur la consonance, et l’une des raisons qui rendent ce sujet intéressant est précisément le fait qu’il est à l’intersection de plusieurs domaines de la science. Je vais faire maintenant une liste d’approches différentes de la consonance, avec quelques commentaires, dont certains seront développées dans les paragraphes qui suivent.

1. — *Approche mathématique* : La consonance a été considérée par l’école pythagoricienne comme une certaine propriété arithmétique des valeurs numériques associées aux intervalles musicaux, et en ce sens, son étude faisait partie des mathématiques (théories des proportions, des moyennes, etc.). Il est vrai que peu après les Pythagoriciens des VI^e et V^e siècles av. J. C. (et en tous les cas depuis Aristote) des facteurs extérieurs à la théorie des nombres (en particulier, des facteurs acoustico-physiques, sensoriels et psychologiques) sont intervenus dans l’étude de la consonance. Mais le point de vue arithmétique est resté prédominant entre la période de la Grèce antique et le Moyen-âge, c’est-à-dire pendant toute la période où la musique était considérée comme une des sciences du *quadrivium* mathématique. Cette situation perdura dans certaines universités européennes, jusqu’au

¹Pour Rameau, la dissonance est tout simplement le contraire de la consonance : “tout ce qui n’est pas consonance, est dissonance (*Nouveau système de musique théorique*, [21] Volume II p. 5). Ceci n’est pas vrai pour d’autres auteurs, cf. l’Appendice à la fin de cet article.

xvii^e siècle. On peut à ce propos citer Kepler qui, dans le texte mentionné ci-dessus, écrit : “On alla pendant deux fois mille ans dans cette opinion que les causes de la consonance étaient à rechercher à partir des propriétés des proportions elles-mêmes” ([17] p. 85).

2. — *Approche physique et acoustique* : Comme on l’a déjà mentionné, la consonance est reliée à la décomposition d’un son en fondamental et harmoniques, et je développerai ce point de vue au §2 ci-dessous. On verra aussi comment, toujours depuis l’Antiquité, la consonance a été liée à l’observation d’un phénomène appelé “résonance” ou “vibration sympathique” de certaines cordes dans des instruments de musique, c’est-à-dire à l’observation des cordes qui, quand on en excite d’autres qui émettent un son plus grave et différant d’une octave, ou d’une quinte, etc., se mettent aussi à vibrer sans qu’on les ait touchées. Aristote parle déjà de ce phénomène dans son Problème 24, Chapitre XIX ([4] p. 106). Descartes mentionne le même phénomène dans son *Abrégé de musique* ([9] p. 64) : “Si l’une des cordes d’un luth est touchée, celles qui sont plus aigues d’une octave ou d’une quinte tremblent et résonnent spontanément”. On citera ci-dessous d’autres auteurs sur ce sujet. Enfin, on verra comment Galilée a placé l’étude de la consonance dans un cadre physique plus général, celui des phénomènes périodiques. Dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles* (1638), Galilée, en discutant du phénomène de résonance sympathique observe que, plus généralement, “en se propageant dans l’air, l’ondulation meut et fait vibrer non seulement les cordes, mais n’importe quel corps apte à trembler et à vibrer avec la même période”. Il mentionne des expériences faites avec un fragment de soie attaché à l’instrument, ainsi qu’avec un verre aux parois minces et polies que l’on a posé à proximité ([13] p. 80-81). L’intérêt de se placer dans ce cadre général n’est pas purement théorique, mais il permet de raisonner par analogie et de faire des conjectures. Ainsi, Galilée dit que “comme il est impossible de compter les vibrations d’une corde en raison de leur grande fréquence, on aurait continué à ignorer s’il est vrai que, dans un accord d’octave, la corde la plus aiguë présente dans le même temps un nombre de vibrations double de la corde la plus grave, si précisément les ondes renouvelables à volonté que l’on obtient en faisant résonner et vibrer un verre, ne nous avaient pas directement montré comment à l’instant même où le ton monte d’une octave pour l’oreille, on voit surgir d’autres ondes plus petites qui, avec une infinie netteté, partagent en deux chacune des ondes précédentes”.

3. — *Approche par les théories physiologiques et sensorielles* : Comme tout ce qui concerne le son, la consonance est liée à la morphologie de l’oreille, à la structure du système auditif et nerveux de l’homme, à la façon dont notre cerveau reçoit les informations sonores à partir de notre organe auditif, etc. Dans ses *Principes généraux d’acoustique*, Diderot écrit ([10] p. 87) : “L’air agit sur le tympan et lui communique des pulsations que le tympan transmet aux nerfs auditifs. C’est ainsi que se produit la sensation que nous appelons son”. La question est de savoir pourquoi est-ce que certaines excitations du tympan sont reçues avec plus de plaisir que d’autres. Galilée, dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, comme d’autres scientifiques du xvii^e siècle, a associé ce plaisir au caractère régulier de ces excitations. On parlera de cela au §5 ci-dessous.

Dans le même cadre physiologique, on peut étudier des phénomènes de “correction” par l’oreille, avant la transmission de la consonance à notre cerveau, et comme illustration, on peut citer Euler qui, dans son article *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* ([12] Sér. III Vol. I p. 511), écrit : “Il faut bien distinguer les proportions que nos oreilles aperçoivent actuellement de celles que les sons exprimés en nombres renferment. Rien n’arrive plus souvent dans la musique que ce que l’oreille sent

une proportion bien différente de celle qui subsiste effectivement par les sons”. Euler présente comme argument l'exemple du tempérament égal, dont les intervalles peuvent être perçus comme étant exacts. Ce phénomène de correction peut aussi être considéré comme une conséquence du manque de précision dans les informations captées par notre oreille, et dans le même article, un peu plus loin (p. 513), Euler écrit : “Si les hommes avaient le jugement de leur oreille si exact qu'ils puissent distinguer les plus petites aberrations, c'en serait fait de toute la musique”.

Enfin, toujours à propos des théories sensorielles, on peut rappeler qu'Aristote, dans le chapitre 3 de son traité *De la sensation et des sensibles*, établit une analogie entre les sons et les couleurs, dans laquelle les consonances (à travers les proportions qui leur sont associées) correspondent à des mélanges de couleurs qui sont plus purs que d'autres (cf. [5] p. 73 et suivantes). Dans le même ordre d'idées, le mathématicien Jérôme Cardan (1501-1576), dans son *Livre des proportions* et dans son *Livre sur la variété des choses* établit des correspondances entre les consonances, les saveurs et les odeurs.²

4.— *Approches esthétiques* : La consonance a été souvent reliée à une sensation de plaisir ou de plénitude. Dans ce contexte, son étude fait partie des théories esthétiques, et en premier lieu celles que l'on peut désigner par “esthétique des proportions”. Aristide Quintilien traite de ce sujet dans le Livre III de son traité *La musique* [3], considéré comme l'encyclopédie musicale de l'Antiquité grecque. Les grands architectes et théoriciens de l'art de la Renaissance tels que L. B. Alberti (1404-1472), dont Michel-Ange s'est inspiré, ont considéré que la valeur esthétique d'un édifice dépend des proportions qui régissent sa structure, et que les plus belles proportions sont celles qui définissent les consonances musicales.³ On peut aussi citer Diderot qui, dans ses *Principes généraux d'Acoustique* (cf. [10] p. 84), inclut l'étude du plaisir causé par les sons dans un cadre plus général : “Le plaisir musical consiste dans la perception des rapports des sons [...] Cette origine n'est pas particulière au plaisir musical. Le plaisir, en général, consiste dans la perception des rapports. Ce principe a lieu en poésie, en peinture, en architecture, en morale, dans tous les arts et dans toutes les sciences. Une belle machine, un beau tableau, un beau portique ne nous plaisent que par les rapports que nous y remarquons [...] La perception des rapports est l'unique fondement de notre admiration et de nos plaisirs [...] Le plaisir doit varier avec les rapports et les rapports les plus simples se saisissent avec plus de facilité que les autres”. Descartes, par contre, fait une distinction entre les rapports simples et ceux qui causent du plaisir. Dans sa lettre à Marin Mersenne de Janvier 1730 (cf. [8] Vol. I p. 108), il discute de la classification des consonances en termes de simplicité des rapports numériques associés, puis il écrit “Tout ce calcul sert seulement pour montrer quelles consonances sont les plus simples, ou si vous voulez, les plus douces ou parfaites, mais non pas pour cela les plus agréables [...] Pour déterminer ce qui est plus agréable, il faut supposer la capacité de l'auditeur, laquelle change comme le goût, selon les personnes”. De la même manière, Leonhard Euler place la question de la consonance dans un contexte d'esthétique des proportions qui est plus large que celui de la musique, mais il considère,

²Par exemple : douce = octave, grasse = quinte, salée = quinte, etc.

³Par exemple, Alberti, dans son *Art d'édifier*, Livre IX Chapitre V ([1] p. 443), écrit : “Les nombres qui ont le pouvoir de rendre l'harmonie des sons agréable à nos oreilles sont exactement les mêmes que ceux qui comblent nos yeux et notre esprit d'un plaisir merveilleux”. Un peu plus loin dans le même traité, (p. 444), il écrit, à propos des rapports définissant les consonances musicales : “Les architectes utilisent tous ces nombres de la façon la plus appropriée [...] en faisant correspondre la hauteur (des édifices publics) selon les lois de l'harmonie musicale”. On peut d'ailleurs trouver des théories analogues chez Aristote, dans son *Traité de l'âme* 426a27 à 426b8, [6] p. 117-158.

contrairement à Descartes, que plus les rapports sont simples plus le plaisir qui leur est associé est grand. Dans sa *Lettre à une Princesse d'Allemagne* datée du 3 Mai 1760 ([12] (Sér. III Vol. XI p. 15), il écrit : “Plus une proportion est simple ou exprimée par des petits nombres, plus elle se présente distinctement à l’entendement, et y excite un sentiment de plaisir. Les architectes observent aussi très soigneusement cette maxime, en employant partout dans les bâtiments des proportions aussi simples que les autres circonstances le permettent. Dans les portes et fenêtres, ils font ordinairement la hauteur deux fois plus grande que la largeur, et partout ils tâchent d’employer des proportions exprimables en des petits nombres, puisque cela plaît à l’entendement. Il en est donc de même dans la musique, où les accords ne plaisent qu’en tant que l’esprit y découvre la proportion qui règne entre les sons, et cette proportion s’aperçoit d’autant plus aisément, qu’elle est exprimée par de petits nombres”.

Plus proche de nous, le mathématicien G. D. Birkhoff a tenté de bâtir une théorie mathématique de l’esthétique qui inclut des domaines variés tels que la musique, le dessin géométrique, et la poésie et même la morale, et qui s’applique en particulier à la consonance. Le fil conducteur de cette théorie est un paramètre quantitatif qu’il appelle “mesure esthétique”. On parlera de cela dans la dernière partie de cet article.

5. — *Autres théories* : On peut aussi étudier la consonance à travers les théories cognitives, l’ethnomusicologie, la biologie, la neurochimie, la psychologie et le rôle de l’inconscient, les approches numérologiques (nées chez les Pythagoriciens), les approches métaphysiques (on pense à l’approche allégorique de Platon qui, dans le *Timée* ([18] Tome X p. 41 et suivantes), décrit la création de l’âme du monde et celle de l’âme humaine à partir de proportions associées aux consonances musicales, ce qui expliquerait pourquoi l’âme recherche ces proportions. Aristide Quintilien en parle dans son traité *La musique* [3]. Cette approche a été reprise aussi par Kepler ([17] p. 86 et suivantes), et il y en a certainement d’autres encore.

2. Consonance et harmoniques : les théories de Rameau

Dans ce paragraphe, je rappelle brièvement ce que sont les harmoniques d’un son, et je décris ensuite deux points de vue sur la classification des consonances utilisant les harmoniques.

On sait qu’une note musicale est le résultat d’une vibration périodique, par exemple, une variation locale périodique de la pression de l’air (ou de l’espace ambiant), et que la hauteur de cette note est déterminée par la fréquence de la vibration. Par exemple, on convient aujourd’hui qu’un mouvement de 440 cycles par minute est celle du premier *la* qui se trouve à droite du milieu d’un clavier de piano. On a observé, depuis l’antiquité, qu’une note produite par un instrument de musique, par une voix humaine ou encore par la nature (sifflement continu du vent, etc.) est presque toujours accompagnée d’une suite d’autres notes, dont les fréquences dépendent de celle de la note initiale, suivant la règle suivante : si f est la fréquence de la première note (qui est celle que l’on entend principalement, et qui est appelée *fréquence fondamentale*), alors les fréquences des notes qui l’accompagnent sont des multiples entiers $2f, 3f, 4f, \dots$, et on les appelle les *fréquences harmoniques*. Remarquer que ces harmoniques sont compatibles avec le son initial en ce sens que leur période est un diviseur entier de celle de ce son ; elles vibrent donc avec la même période que celle du son initial. La vibration initiale est en fait une somme de

vibrations de fréquences $f, 2f, 3f, \dots$. Les amplitudes des sons harmoniques dépendent de l'instrument ou de la voix qui émet le son ; c'est cette suite d'amplitudes qui caractérise le timbre de l'instrument ou de la voix en question. Même si l'existence des harmoniques a été observée depuis l'antiquité, leur explication n'a été obtenue que grâce aux expériences acoustiques et aux travaux de plusieurs mathématiciens du XVIII^e siècle, sur les équations différentielles régissant la production et la propagation du son et sur les séries de Fourier.⁴

Quelle relation y a-t-il entre les harmoniques et la consonance ? Je vais commencer par exposer le point de vue adopté dans l'article CONSONANCE de l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert [14]. On sait que c'est Diderot lui-même qui a écrit cet article. C'est un point de vue très simple (et même simpliste), mais il est représentatif des théories en vogue au XVIII^e siècle, grâce en particulier aux écrits théoriques de Jean-Philippe Rameau (1683-1764), qui considèrent que toute la musique devrait pouvoir être expliquée par ce qu'on a appelé communément la "résonance naturelle des corps sonores", c'est-à-dire, par le phénomène des harmoniques. De ce point de vue, le plaisir que l'on a à écouter les consonances provient de l'habitude qu'a notre oreille à écouter les harmoniques. En particulier, la classification des intervalles en fonction de leur degré de consonance devrait s'appuyer sur la décomposition du son en fondamental et harmoniques. Diderot écrit dans cet article qu'une oreille (même médiocre) peut entendre facilement les cinq premiers harmoniques d'un son, c'est-à-dire les intervalles dont les valeurs numériques sont $1/2$, $2/3$, $3/4$, $4/5$ et $5/6$.⁵ Pour un son donné, ce sont les intervalles qui séparent le son fondamental de ses harmoniques successifs, c'est-à-dire les intervalles d'octave, quinte, quarte, tierce majeure et tierce mineure. Dans la suite infinie des harmoniques, ce sont les premiers intervalles qu'une oreille bien attentive peut entendre. Ces intervalles constituent aussi, d'après Diderot, les consonances. Les intervalles suivants, dont les valeurs sont $6/7$ (tierce diminuée) et $7/8$ (qui n'a pas de nom déterminé), se trouvent entre la consonance et la dissonance, et l'intervalle de ton, de valeur $8/9$, fait sur l'oreille, toujours d'après Diderot, "une impression qui lui déplaît sensiblement". Diderot écrit : "Plus le rapport des deux tons approche du rapport d'égalité, plus la dissonance devient sensible. Elle commence à se faire sentir dans l'accord de $8/9$, et de là elle continue à devenir de plus en plus désagréable. Celle de $8/9$ l'est moins que celle de $9/10$, celle-ci est encore plus supportable que l'accord de $15/16$ [...] L'intervalle $99/100$ et plus encore celui de $999/1000$ produit une discordance insupportable ; mais qui se résout dans la plus agréable des consonances aussitôt qu'on parvient à l'unisson [...] Les limites qui séparent les consonances des dissonances tombent sur les intervalles $6/7$ et $7/8$, car l'accord de $8/9$ fait une dissonance bien marquée et celui de $5/6$ est une consonance gracieuse".

C'est une première classification des consonances, grossière il est vrai, mais somme toute assez logique puisqu'elle correspond à l'ordre naturel sur les nombres entiers, et de plus, elle rapporte le degré de consonance à un phénomène naturel : l'oreille s'habitue aux intervalles qu'elle entend le plus souvent.

Il y a une façon de relier la consonance aux harmoniques qui est plus complexe mais que je trouve intéressante et plus convaincante, et qui est plus dans le style des écrits de Rameau. Je vais la présenter maintenant.

⁴Il est bon de rappeler que le développement de nombre de ces théories importantes a été motivé par des questions provenant de la musique.

⁵Dans ce texte de Diderot, contrairement à la tradition des textes de l'Antiquité grecque, les intervalles sont représentés par des fractions dont la valeur est plus petite que 1 (c'est-à-dire que l'on prend le rapport de la fréquence de la note grave sur celle de l'aiguë).

Rameau, comme on l'a déjà dit, a développé la théorie selon laquelle la consonance dérive du phénomène des harmoniques. Dans sa *Génération harmonique* ([21] Vol. III p. 39), il écrit : “L'harmonie d'un corps sonore donne toutes les consonances”, et dans son *Nouveau système de musique théorique*, le chapitre intitulé *Faits d'expérience qui servent à ce système* (cf. [21] Vol. II p. 27) commence par ces mots : “Une seule corde fait résonner toutes les consonances”, ce qui veut dire encore que les consonances découlent des harmoniques.

Pour expliquer le point de vue de Rameau, considérons une note donnée de fréquence f_1 suivie de ses harmoniques, c'est-à-dire suite

$$f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \dots,$$

et considérons la suite analogue associée à la note qui est une octave plus haut que la précédente, c'est-à-dire de la suite

$$2f_1, 4f_1, 6f_1, 8f_1, \dots$$

La seconde suite est une sous-suite de la première. Par conséquent, quand on écoute les deux sons simultanément, il est théoriquement possible d'avoir la sensation d'un son unique, de fréquence fondamentale f_1 , mais avec un timbre différent de celui du premier son, puisque les amplitudes des fréquences harmoniques du premier son ont été modifiées par l'addition de celles du second son. Ainsi, une octave (de même, une octave multiple) est assimilable à un unisson. D'ailleurs, dans des écrits comme la *Génération harmonique* ([21] Vol. III), Rameau, en citant la suite des harmoniques, écrit 1, 1/3, 1/5, etc., c'est-à-dire qu'il omet les octaves et les octaves multiples, parce qu'il les considère comme l'unisson.⁶ Prenons un second exemple.

Si au lieu d'un intervalle d'octave on considère un intervalle de quinte, on doit prendre les suites

$$f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \dots$$

et

$$\frac{3}{2}f_1, 2 \times \frac{3}{2}f_1, 3 \times \frac{3}{2}f_1, 4 \times \frac{3}{2}f_1, \dots$$

Cette fois-ci, la seconde suite n'est pas une sous-suite de la première, mais les deux suites sont des sous-suites de la suite d'harmoniques d'une troisième note, de fréquence $f'_1 = f_1/2$. On peut alors considérer que c'est cette note “virtuelle”, ayant cette nouvelle fréquence, que l'on entend. On peut d'ailleurs rendre cette note réelle quand on écrit de la musique orchestrale. En ajoutant la note de fréquence $f_1/2$ à l'accord $(f_1, 3f_1/2)$, on obtient un accord de trois notes $(f_1/2, f_1, 3f_1/2)$, dont la note ajoutée, qui est la plus grave des trois, est une sorte de base pour cet accord.

On voit comment on peut généraliser ces considérations, et c'est par des raisonnements de ce type, appliqués à des accords de trois notes et plus, que Rameau a développé sa

⁶Remarquons que pour un intervalle de deux sons, ce sont toujours les harmoniques du son aigu qui renforcent celles du son grave. On peut penser ici au problème No. 13 Livre XIX d'Aristote : “Pourquoi est-ce que dans la consonance d'octave, la note aiguë existe dans la note grave, mais pas *vice versa*?” De même Descartes, dans son *Abrégé de musique* ([9] p. 64) : “De deux termes qu'on suppose être en consonance, le plus grave est de beaucoup le plus puissant et contient l'autre en quelque façon. (Rappelons que le phénomène des harmoniques n'était pas encore expliqué du temps de Descartes.) Rameau dit la même chose dans son *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* : “Dans chaque son, tous les aigus sont contenus dans le grave, mais pas réciproquement ([21] Vol. I p. 33). (Cette fois-ci, ce phénomène pouvait être expliqué par les harmoniques.)

théorie de la “basse fondamentale” qui s’appuie entièrement sur la décomposition du son en fondamental et harmoniques. C’est ainsi, je crois, qu’il faut comprendre Rameau quand il écrit dans son *Traité de l’harmonie réduite à ses principes naturels* ([21] Vol. I p. 35) : “L’harmonie des consonances ne peut être parfaite si ce premier son ne règne au-dessous d’eux, comme étant la *base et le fondement*”. (Les italiques sont de Rameau.)⁷ On peut interpréter de la même manière certains raisonnements d’Euler qui consistent à prendre le plus petit commun multiple d’une suite de nombres entiers représentant des (rapports de) fréquences d’un accord ; c’est ce plus petit commun multiple qui permet de trouver la base de l’accord.⁸ Il y a cependant un problème, c’est que si les rapports numériques représentant les intervalles dont on est parti ne sont pas très petits (comme les rapports $1/2$ et $3/2$ dans les exemples considérés ci-dessus), la fréquence de la note grave que l’on trouve par ce raisonnement est trop basse, et la note ayant cette fréquence se trouve vite en dehors du registre de l’instrument de musique donné, ou même en dehors du champ audible. Cette limite pourrait certainement définir une sorte de frontière entre consonance et dissonance.

3. Deux résumés sur la consonance : Théon de Smyrne et Jean-Jacques Rousseau

Les auteurs qui ont traité de la consonance l’ont généralement abordée à partir de plusieurs points de vue à la fois. A titre d’exemple, je vais présenter deux textes sur la consonance qui sont comparables, malgré le fait qu’ils aient été écrits à des époques très éloignées. Le

⁷La théorie de la basse fondamentale de Rameau, telle qu’elle est développée dans son *Traité de l’harmonie réduite à ses principes naturels* (1722) ou dans son *Nouveau système de musique théorique* (écrit en 1726, et dont le principal objectif est précisément d’expliquer comment les consonances et le principe de la basse fondamentale dérivent de la théorie des harmoniques), est plus évoluée que celle qui est suggérée dans cet exemple. Elle s’applique à des accords de deux sons et plus, mais aussi à des mélodies (pas seulement des accords), pour lesquels il faut *sous-entendre* des accords. (Le terme sous-entendre, d’après Rameau, veut justement dire que “les sons auxquels on l’applique peuvent être entendus dans des accords où ils ne se trouvent point ; et même, à l’égard du son fondamental, il faut s’imaginer qu’il devrait être pour lors entendu au-dessous des autres sons, lorsqu’on dit qu’il est sous-entendu, etc.” (cf. [21] Tome I p. 27). En fait, le principal usage de la basse fondamentale en musique est de mettre en valeur la tonalité instantanée dans laquelle on se trouve. Je crois qu’une étude purement arithmétique de cette notion reste à développer. Rameau n’ayant pas la formation nécessaire, son exposé, qu’il voulait “mathématique”, est noyé dans des définitions parfois inutiles (les différents types de suites, les nombres premiers, etc.) et sa présentation ne met pas en valeur les idées mathématiques qu’il y a derrière ses théories, qui permettent cette application universelle de la théorie de la décomposition du son en fondamental et harmoniques à tout les domaines de la musique (solfège, composition, accompagnement, etc.). Le mathématicien d’Alembert, qui était censé écrire, à la demande de l’Académie des Sciences, une présentation des théories de Rameau, était plus intéressé en étudiant les écrits de Rameau, par la musique qu’on y trouve plutôt que par les théories mathématiques, et dans ses *Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau* (1752) [2], il a tenté de réduire au minimum le formalisme mathématique qui, il est vrai, n’y était pas indispensable. Il semble même que d’Alembert se soit donné pour tâche de vider complètement l’œuvre de Rameau de son contenu mathématique. Mais les mathématiciens ont des goûts et des objectifs différents, et on pourrait très bien reprendre les théories de Rameau d’un point de vue purement mathématique. Notons d’un autre côté que les traités musicaux de Rameau contiennent moins de mathématiques que n’importe quel texte sur la musique de la période de l’Antiquité grecque.

⁸Dans son article *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* [12] (Sér. III Vol. I p. 509), Euler “exprime en nombre” les accords de plusieurs sons. Par exemple : G, H, d, f (j’utilise ici, comme Euler, la notation allemande pour le nom des notes) s’exprime comme 36, 45, 54, 64. Le plus petit commun multiple est $2^6 \times 3^5 \times 5$, qu’Euler appelle l’“exposant de cet accord”, et “par lequel, dit-il, on doit juger de la facilité dont l’oreille peut comprendre cet accord”. L’accord H, d, f, g qui s’exprime en nombres par 45, 54, 64, 72, a le même exposant.

premier se trouve dans un traité de Théon de Smyrne (II^e siècle ap. J. C.), et le second est de J. J. Rousseau, tiré de son *Dictionnaire de Musique*. Les deux textes sont intéressants parce que les auteurs y résument plusieurs opinions de leurs contemporains.

Théon de Smyrne, dans son *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* ([23] p. 85), écrit que les Pythagoriciens faisaient une distinction entre les intervalles musicaux (accords de deux sons) qui donnent lieu à du bruit et ceux qui émettent de vrais sons, et que cette différence dépend du rapport des vitesses de mouvements qui produisent ces sons (c'est-à-dire, de ce que l'on appelle, depuis le XVIII^e siècle, le rapport des fréquences de ces sons, et que dans l'Antiquité on pouvait assimiler à des rapports de longueurs de cordes, des longueurs de flûtes, etc.). Théon précise que si ces vitesses sont sans rapport entre elles, les intervalles sont dissonants, et que dans ce cas “le mot son ne leur convient pas, on les appelle plus justement bruit”. On doit regarder comme vrais sons, dit-il, les intervalles dont le rapport des vitesses est “de nombre à nombre”, c'est-à-dire un rapport de nombres entiers. “Parmi ces intervalles, il y en a, dit-il qui sont seulement *concordants* (*ἡρμουςμενοι*), et d'autres qui sont consonants. Les sons consonants sont ceux dont les rapports numériques sont les multiples et les superpartiels les plus connus”. On a donc ici une définition assez précise de la consonance, qui est basée sur une propriété mathématique, même si Théon ne rappelle pas ici quels sont les “rapports multiples et les superpartiels les plus connus”. Il caractérise ensuite les sons consonants par la propriété physique suivante : “Quand un son est produit par une des cordes d'un instrument, les autres cordes résonnent par l'effet d'une certaine affinité, d'une sorte de sympathie”. Enfin, Théon donne une troisième caractérisation de la consonance, qui contient en même temps l'idée de son unique et celle de plaisir produit : “Deux sons sont consonants quand étant produits en même temps, il en résulte un son mixte qui a une douceur et un charme tout particuliers”, et il donne l'exemple des intervalles de quarte, de quinte et d'octave. D'autres consonances dit-il, ont été trouvées ultérieurement, elles sont obtenues en ajoutant entre elles les consonances précédentes, comme les intervalles de onzième (octave + quarte), douzième (octave + quinte), double octave, double octave et quarte et ainsi de suite, “tant, dit-il, que le son peut être produit et est perceptible à l'oreille”.

De même, dans son *Dictionnaire de Musique* (publié à Genève en 1768), à l'article CONSONNANCE⁹ (voir [22] p. 724), Rousseau résume certaines opinions de ses prédécesseurs directs et de ses contemporains sur la question. Il définit la consonance comme un “intervalle formé par deux sons, dont l'accord plaît à l'oreille”. Il distingue les consonances simples, qui, pour lui, sont la tierce et la quarte, et les composées, dont il donne comme exemples la quinte (composée de deux tierces), et la sixte (composée d'une tierce et d'une quarte).¹⁰ Il parle ensuite du caractère physique de la consonance, qu'il associe, comme Théon l'avait fait 16 siècles avant lui, au frémissement des cordes. “Si, dit-il, deux cordes forment entre elles un intervalle d'octave, ou de douzième, ou de dix-septième majeure, et si l'on fait sonner la plus grave, l'autre frémit ou résonne”. Notons que les intervalles qu'il mentionne ici font partie des harmoniques d'un son donné. Les intervalles de sixtes majeures et mineures, de tierce mineure, de quinte, de tierce majeure et de quarte sont d'après lui des consonances

⁹On écrivait “consonnance” et non pas “consonance”.

¹⁰Le fait de partir d'un certain nombre de consonances simples et de considérer toutes les autres comme obtenues à partir de celles-là par certaines opérations est l'amorce d'une notion de “complexité” dont on va parler plus loin. Mais cette théorie n'est pas basée sur la complexité des valeurs numériques des intervalles. Par exemple, ici, la quinte ($3/2$) est considérée comme étant décomposée en une somme d'intervalles plus simples, la tierce majeure ($5/4$) et la tierce mineure ($6/5$), ce qui veut dire que $3/2$ est considéré comme le produit des deux éléments “plus simples” $5/4$ et $6/5$.

parce que ce sont des combinaisons et des renversements des consonances considérées précédemment. “Elles se trouvent, dit-il, entre les diverses cordes qui frémissent au même son”. Rousseau appelle cette combinatoire la “génération de consonances”, le mot *génération* ayant déjà été utilisé dans un sens similaire par Rameau (cf. la *Génération harmonique*) [21] Vol. III). Rousseau passe en revue ensuite plusieurs théories physiques qui tentent d’expliquer le plaisir produit par les consonances, mais il considère que “toutes ces explications sont conjecturales et que l’on leur trouve peu de solidité quand on les examine de près”. Parmi les théories qu’il rejette, il y a celle de Descartes, qui, d’après Rousseau, explique le plaisir causé par les consonances par la simplicité des rapports que font entre eux les sons qui les produisent,¹¹ “plaisir, dit-il, qui diminue à mesure que ces rapports deviennent plus composés, et quand l’esprit ne les saisit plus, ce sont de véritables dissonances”. Rousseau écrit : “Quoique cette hypothèse s’étende même à d’autres phénomènes dans les beaux-arts, il n’est pas possible de s’en contenter”. Par exemple, cette théorie, dit-il, n’est pas capable d’expliquer pourquoi la dissonance qui résulte du rapport 90/89 n’est pas plus choquante que celle qui résulte du rapport 13/12. La seule théorie scientifique qui lui paraît satisfaisante est celle de Pierre Estève,¹² qui explique les consonances par les harmoniques. “Les harmoniques qui accompagnent un son, dit Rousseau, font sa douceur. Toutes les fois que ces harmoniques sont renforcées et mieux développées, les sons sont plus mélodieux, et l’oreille y est plus sensible [...] et les consonances ont cette propriété que les harmoniques de chacun des deux sons concourant avec les harmoniques de l’autre, ces harmoniques se soutiennent mutuellement, deviennent plus sensibles, durent plus longtemps, et rendent ainsi plus agréable l’accord des sons qui les donnent”. Ainsi, dans la théorie d’Estève, “plus entre deux sons il y a d’harmoniques concourant, plus l’accord en sera agréable”. Notons aussi que dans l’article BATTEMENT du même *Dictionnaire*, Rousseau mentionne l’explication du phénomène de consonance par les battements, émise par le mathématicien Joseph Sauveur,¹³ mais il la déclare non soutenable.¹⁴ Finalement, à travers la référence aux harmoniques, Rousseau, de même que son contemporain Rameau, fait référence à la nature comme source des consonances : “La nature qui a doué les objets de chaque sens de qualités propres à le flatter, a voulu qu’un son quelconque fût toujours accompagné d’autres sons agréables, comme elle a voulu qu’un rayon de lumière fût toujours formé des plus belles couleurs”.

4.Complexité I : Les Pythagoriciens

Ptolémée (II^e siècle ap. J. C.) dans son *Harmonique* (voir [20] p. 287) et Porphyre (III^e

¹¹On citera plus loin certains textes de Descartes dans lesquels il dissocie le plaisir de la simplicité des rapports numériques.

¹²Né en 1720, mathématicien puis physiologiste et théoricien de l’art.

¹³J. Sauveur (1653-1716) est considéré comme le premier à avoir pu expliquer le phénomène des battements et calculer des fréquences absolues (grâce à l’écoute des battements). Il a donné une explication des harmoniques indépendante de celle de J. Wallis (qui l’avait fait avant lui), en introduisant des mots tels que *noeuds* et *ventres* des cordes vibrantes. De plus, Sauveur a introduit une généralisation de la notion d’harmoniques (des harmoniques d’harmoniques). Il est aussi l’inventeur du mot *acoustique*, en tant qu’étude générale du son (et non pas seulement du son “agréable”). Ses premiers travaux importants sont contenus dans son mémoire *Principes d’acoustique et de musique, ou système général des intervalles et des sons*, Mémoire de l’Acad. Royale des Sciences, Paris 1701, p. 297-347.

¹⁴On peut rappeler ici que la théorie qui est considérée comme la plus complète, et qui est à la base des théories modernes de la consonance, est celle de Hermann von Helmholtz (1821-1894), et qu’elle fait intervenir en même temps les harmoniques et les battements.

siècle. ap. JC), dans son *Commentaire sur les Harmoniques de Ptolémée*,¹⁵ (cf. [19] p. 529) rapportent que les Pythagoriciens établissaient une classification des intervalles suivant les rapports numériques qui les représentent, “afin de mettre en évidence ceux qui étaient les mieux consonants”. Porphyre nous dit que, plus précisément, ces Pythagoriciens associaient à chaque consonance (représentée, rappelle-t-il, par un rapport *multiple*, c’est-à-dire de la forme $n/1$, ou bien *superpartiel*, c’est-à-dire de la forme $(n+1)/n$, où n est un entier positif), une quantité appelée *nombre de non-semblable*, et que plus l’accord est harmonieux, plus ce nombre est petit. Les indications de Porphyre sur ce nombre de non-semblable ne permettent pas de le connaître en général, mais il nous dit que pour les trois premières consonances, l’octave (de rapport $2/1$), la quinte (de rapport $3/2$) et la quarte (de rapport $4/3$), ce nombre est respectivement 1, 3 et 5. Ainsi, ce nombre de non-semblable, pour le cas particulier des trois consonances en question, est obtenu en ajoutant le numérateur au dénominateur et en ôtant 2 au résultat, cf. [19] p. 529.

Ce qui semble clair ici est que plus les deux entiers de la fraction réduite qui représente l’intervalle musical sont petits, plus le degré de consonance de cet intervalle est considéré comme grand. C’est l’idée de simplicité des rapports, que l’on a déjà mentionnée en citant Descartes, et qui apparaît aussi dans une formule d’Euler que nous allons voir au §7.

5. Complexité II : La théorie de la coïncidence des coups (Galilée, Descartes, Huygens et Euler)

Dans ses *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, Galilée s’interroge sur la consonance musicale, au cours d’une digression sur la vibration des cordes. Il inclut cette étude dans un discours plus large concernant le pendule ([13] p. 80-88), et on peut dire tout de suite que le fait d’étudier la vibration sonore en même temps que le pendule contient déjà une approche nouvelle et intéressante du sujet musical, parce qu’on le place dans le cadre de phénomènes vibratoires plus généraux.¹⁶

Galilée émet dans ce texte une théorie de la consonance qui a été reprise par plusieurs physiciens du XVII^e siècle, que l’on appelle parfois “théorie des coups”. Cette théorie mesure la consonance en termes du degré de la coïncidence de certaines vibrations, et elle peut être considérée d’un point de vue formel comme une ébauche rudimentaire de la théorie de la consonance par le degré de la coïncidence des harmoniques dont on a parlé ci-dessus. Galilée écrit ([13] p. 84) : “Les ondes, en se propageant dans l’air, viennent frapper le tympan de l’oreille en le faisant vibrer aux mêmes intervalles de temps. Ce point étant établi, peut-être pourrions-nous déterminer pour quelle raison précise certains couples de sons, même dans des tons différents, sont reçus avec un grand plaisir par notre *sensorium*, et d’autres avec un plaisir moindre, tandis que d’autres enfin nous frappent très désagréablement ; ce

¹⁵ On peut rappeler ici que la première traduction complète en latin de l’*Harmonique* de Ptolémée, ainsi que celle des *Commentaires sur l’Harmonique* de Ptolémée par Porphyre, sont l’oeuvre d’un mathématicien, John Wallis (1616-1703). Ces deux traductions constituent, au même titre que des traductions de l’*Harmonique* du musicologue byzantin Manuel Bryennius, accompagnés d’appendices écrits par Wallis sur la musique, ainsi que des traductions de certaines oeuvres d’Archimède, d’Eudoxe, de Pappus et d’Aristarque de Samos, le volume III des oeuvres complètes de Wallis (éditées en trois volumes à Oxford, 1693-1699).

¹⁶ On peut noter à ce propos que l’idée de comparer la propagation du son à celle des ondes créées à la surface de l’eau par une pierre que l’on jette dans un étang remonte à l’antiquité. Boèce (480-524) qui l’a certainement trouvée chez les Pythagoriciens, en parle dans son *Institution musicale*. Mais l’idée de combiner l’étude des cordes vibrantes avec celle du pendule semble apparaître pour la première fois dans les écrits de Galilée.

qui revient encore à fournir la raison des consonances plus ou moins parfaites et des dissonances. Le désagrément de ces dernières, à mon avis, provient des vibrations discordantes de deux notes différentes frappant le tympan hors de toute proportion rationnelle, et l'effet de la dissonance sera particulièrement pénible quand les fréquences des vibrations seront incommensurables [...] Formant consonance, et reçues avec plaisir, seront au contraire les couples de notes qui viennent heurter le tympan avec une certaine régularité [...] Ainsi, la première et la plus agréable consonance sera celle de l'octave, puisqu'à chaque stimulation du tympan due à la corde la plus grave correspondent deux stimulations provoquées par la corde la plus aiguë : à l'occasion d'une vibration sur deux de la corde la plus aiguë les effets viendront donc se conjuguer, en sorte que la moitié des stimulations au total battront l'oreille ensemble." Galilée considère ensuite les exemples de l'unisson, de la quinte, de la quarte et de la seconde. Par exemple, dans ce dernier, de rapport $9/8$, "une pulsation seulement sur neuf de la corde la plus aiguë atteint l'oreille en même temps qu'une pulsation de la corde la plus grave". Par rapport aux intervalles qu'il cite, il dit que "tous les autres sont discordants, affectent désagréablement le tympan, et sont donc jugées dissonants par l'oreille".

Galilée conclut ce discours par la description d'une expérience analogue à celle de la coïncidence des vibrations sonores, mais réalisée avec des pendules, "pour montrer, dit-il, la façon dont l'oeil, pas moins que l'oreille, peut encore prendre plaisir aux mêmes jeux". L'expérience consiste à suspendre plusieurs boules de plomb identiques à des fils de longueurs différentes, faisant entre elles les mêmes proportions que celles des consonances. (Plus précisément, il prend trois fils de longueurs respectivement seize, neuf et quatre unités.) En écartant ces fils de la verticale et en les lâchant au même instant, il observe les pendules se rejoindre du même côté à des moments précis et réguliers, de la même façon que les rencontres régulières des vibrations sonores prévues par la théorie des coups.

Parmi les auteurs qui ont repris l'explication de la consonance par la coïncidence des coups, il y a Descartes, Christian Huygens et Euler, et je vais dire quelques mots sur chacun d'eux.

Descartes est probablement, parmi les auteurs mentionnés dans les écrits de Rameau, celui qui est cité avec le plus de respect. Il traite de la consonance dans son *Compendium musicae* (Abrégé de musique, écrit en 1618), qui est son premier écrit (Descartes avait 22 ans), et qui n'a été édité qu'en 1650 (l'année de sa mort). C'est un livre sur la théorie de la musique (intervalles, gammes, modes, etc.) mais contenant aussi, dans la tradition des autres traités musicaux de la Grèce antique, des considérations philosophiques, sensorielles et psychologiques, sur la réception des objets musicaux. Descartes traite aussi de la consonance dans sa correspondance avec Marin Mersenne et Constantin Huygens, et dans d'autres écrits, comme son *Traité de l'homme* (1664). Il écrit : "sans l'oreille il est impossible de juger de la bonté d'aucune consonance, et lorsque nous jugeons par raison, cette raison doit toujours supposer la capacité de l'oreille" (Lettre à Mersenne, 18 décembre 1629, [8] Vol. I p. 88). Plus loin dans cette même lettre (p. 100 et suivantes), Descartes explique les consonances par la simplicité des valeurs numériques qui sont associées aux longueurs des cordes vibrantes, "ce qui fait que les sons se mêlent mieux et font une douce harmonie".¹⁷ Mais comme on l'a déjà noté plus haut, Descartes fait une distinction entre

¹⁷Dans cette même lettre, on trouve cette remarque intéressante de Descartes : "Pour la musique des anciens, je crois qu'elle a eu quelque chose de plus puissant que la nôtre, non pas parce qu'ils étaient plus savants, mais parce qu'ils l'étaient moins : d'où vient que ceux qui avaient un grand naturel pour la musique, n'étant pas assujettis dans les règles de notre diatonique, faisaient plus par la seule force de l'imagination que ne peuvent faire ceux qui ont corrompu cette force par la connaissance de la théorie. De

les choses qui sont perçues le plus facilement et celles qui sont reçues de la façon la plus agréable. Dans un passage tiré de son *Abrégé de musique*, passage qu'il recopie aussi pour Mersemme dans sa lettre du 18 Mars 1730 ([9] Vol. I p.58), il écrit : "Parmi les objets des sens, celui-ci n'est pas le plus agréable à l'âme qui est le plus facilement perçu par le sens, ni celui qui l'est le plus difficilement ; mais c'est celui qui n'est pas si facile à percevoir que le désir naturel qui porte les sens vers les objets ne soit pas entièrement comblé, ni également si difficile qu'il fatigue les sens".

Ce qui nous intéresse plus particulièrement ici est le fait que Descartes ait adopté un point de vue assimilable à celui de la théorie des coups de Galilée. Dans sa lettre à Mersemme datée d'Octobre 1631, il lui décrit ce phénomène avec un dessin à l'appui, que l'on a reproduit dans la figure 1 ci-dessous.

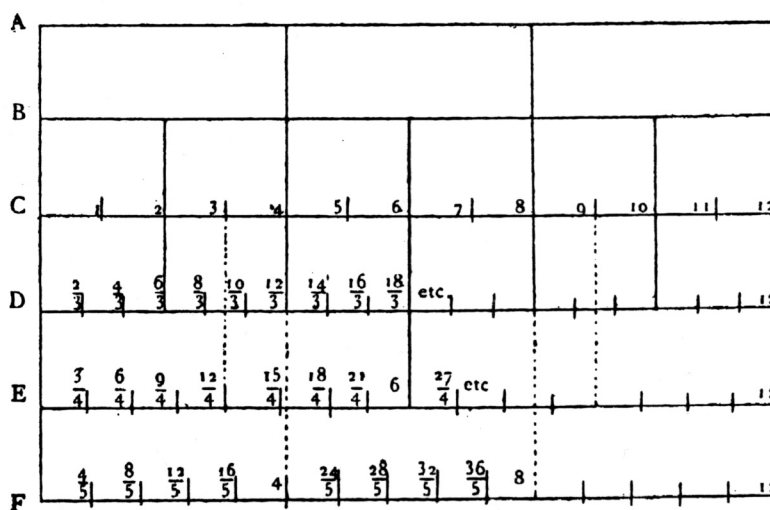


FIG. 1 – Descartes illustre par ce dessin, tiré d'une lettre à Marin Mersemme ([8] Vol. I p. 225), la théorie de la consonance par celle de la coïncidence des coups. La ligne A représente les vibrations d'une note qui est une octave plus bas que la note de la ligne B, la ligne C représente une note qui est une octave plus haut que la note de la ligne B, la ligne D représente une note qui est une quinte au-dessus de C, la ligne E fait une quarte au-dessus de C et la ligne F une tierce au-dessus de C.

Christiaan Huygens (le fils de Constantin, mentionné ci-dessus et avec qui Descartes était en correspondance) parle de la consonance dans son *Traité de la consonance*, et il en donne une explication qui est proche de celle de Galilée : "On trouve que des consonances les unes sont plus agréables que les autres, et que ce sont celles qui plaisent le plus dont les battements se rencontrent le plus fréquemment ensemble, excepté pourtant l'unisson dont tous les battements se rencontrent et qui pour cela ne fait autre effet qu'un son tout seul ; et encore l'octave et ses répliques parce qu'elle ressemble à l'unisson". Il donne comme exemple la douzième (octave + quinte), "dont la proportion est de 3 à 1, de sorte, dit-il qu'à chaque battement de l'air du son grave, l'aigu en fait trois, ce qui fait que la douzième est plus agréable que la quinte, car dans la quinte, les trois battements du ton aigu ne se

plus, les oreilles des auditeurs n'étant pas accoutumées à une musique si réglée, comme les nôtres, étaient beaucoup plus aisées à surprendre" ([8] Vol. I, p. 101).

rencontrent que avec les deux battements du ton grave”. (cf. [15] Tome XX p. 34)

Pour terminer ce paragraphe, on peut rappeler qu’Euler utilise des raisonnements proches de ceux de la théorie des coups, quand il explique la consonance à la princesse d’Allemagne avec laquelle il était en correspondance, même s’il avait déjà élaboré, trente ans plus tôt, une théorie mathématique de ce sujet qui est plus évoluée et que l’on présentera au §7 ci-dessous. Il lui écrit : “En entendant un son simple en musique, notre oreille est frappée d’une suite de coups également éloignés entre eux, dont le nombre produit en un certain temps cause la différence qui règne entre les sons graves et les sons aigus” et il représente cela par une suite de points également espacés sur une ligne droite. Il considère ensuite un accord de deux sons que l’on entend simultanément. “On apercevra un mélange de deux suites de coups [...] Un tel mélange peut être représenté aux yeux par deux suites de points rangés sur deux lignes ab et cd ”. Il en dessine deux exemples, d’abord celui où les rapports des fréquences est de $12/11$ et ensuite l’exemple où le rapport est de $3/2$ (voir figure 2). A propos du premier exemple, il dit que “les yeux, en regardant la figure, n’y découvrent presque point l’ordre, et il en est de même pour les oreilles. [...] Mais dans le second cas, ci-dessous, on découvre du premier coup d’œil que la ligne d’en haut contient deux fois plus de points que celle d’en bas. C’est sans doute le cas le plus simple après l’unisson, où l’on peut aisément découvrir l’ordre dans les deux suites de points [...] Maintenant, quand l’oreille découvre aisément un rapport qui règne entre deux sons, leur accord est nommé une *consonance*, et quand le rapport est très difficile à découvrir ou même impossible, l’accord est nommé *dissonance*. (lettre du 29 Avril 1760, [12] Sér. III Vol. XI p. 13). De même : “la proportion de 1 à 3 nous présente deux sons, dont l’un rend trois fois plus de vibrations que l’autre en même temps, etc.” (lettre du 3 Mai 1760, [12] Sér. III Vol. XI p. 17).

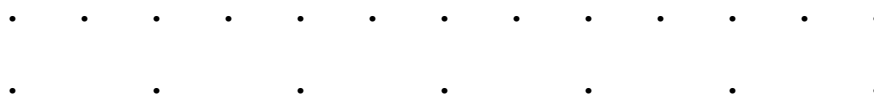


FIG. 2 – Euler illustre par ce dessin, contenu dans une de ses lettres à la Princesse d’Allemagne ([12] Sér. III Vol. XI p. 13) la théorie de la consonance expliquée par la coïncidence des coups.

6. Complexité III : Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) occupe une place particulière dans l’histoire de la consonance. Avec lui, l’accent est mis sur la géométrie et non plus sur l’arithmétique. Le premier chapitre du Livre III de son *Harmonie du monde*, écrit en 1619, est intitulé “Des causes des consonances”. Ce n’est pas un chapitre indépendant du reste de l’ouvrage, et pour le comprendre il faut le relier aux précédents chapitres, qui sont purement mathématiques. Dans le Livre I du traité, Kepler fait une étude approfondie de la constructibilité des polygones réguliers par la règle et le compas, propriété qu’il appelle “scibilité”. Dans le Livre III, il compare la scibilité des polygones réguliers à la consonance des intervalles musicaux, en faisant des raisonnements que l’on va décrire maintenant. On va considérer les polygones réguliers dans l’ordre, suivant leur nombre de côtés. Considérons d’abord le diamètre d’un cercle, que l’on regarde comme un polygone dégénéré (ayant deux côtés). Ce polygone est bien sûr constructible par la règle et le compas, et il divise son cercle

circonscrit en deux parties égales. Le rapport du périmètre du cercle à la longueur de chaque arc de cercle ainsi découpée est égal à $2/1$, qui est le rapport numérique associé à l'intervalle d'octave. Considérons maintenant le triangle équilatéral. Il découpe son cercle circonscrit en trois arcs de même longueur. Le rapport entre le périmètre du cercle et la longueur d'un arc découpé est de $3/1$, qui est la valeur numérique de l'intervalle de deuxième, et on trouve également dans cette division du cercle par le triangle équilatéral le rapport $3/2$ (quinte), qui est le rapport du périmètre du cercle à celui de la réunion de deux arcs découpés. Pour le carré, on trouve les rapports $4/1$ (quinzième, ou double octave), $4/2=2/1$ (octave) et $4/3$ (quarte). Pour le pentagone, on trouve $5/1$ (dix-septième), $5/2$ (dixième majeure), $5/3$ (sixième majeure), $5/4$ (dite) et ainsi de suite. Par contre, un rapport tel que $7/6$, qui n'est pas une consonance, se retrouve dans le découpage du cercle par l'heptagone régulier, qui n'est pas constructible par la règle et le compas. Jusqu'à maintenant, il faut considérer cela comme une simple analogie. Il faut pousser plus loin le raisonnement de Kepler pour trouver une relation plus profonde entre les polygones réguliers et la consonance, et on va décrire cela à présent.

Dans son étude sur la constructibilité des polygones réguliers à l'aide de la règle et du compas (chapitre I de l'*Harmonie du monde*), Kepler introduit une notion de *degré de scibilité*. C'est une mesure du degré de complexité de la construction. En réalité, on peut définir cette complexité de plusieurs manières, qui ne donnent pas toutes les mêmes résultats, mais des résultats qui sont équivalents en un certain sens précis. (C'est une équivalence modulo des modifications sur des sous-suites de longueur uniformément bornée, quand on dresse une liste des polygones suivant leur degré de scibilité). Par exemple, on peut définir le degré de scibilité comme le nombre minimal d'étapes nécessaires pour construire un polygone à l'aide de la règle et du compas (c'est-à-dire le nombre de fois où l'on doit lever la main), en partant de son cercle circonscrit. On peut aussi considérer le nombre minimal d'étapes nécessaires pour faire la construction en partant du cercle inscrit. On peut d'autre part définir une complexité à partir de la formule donnant la longueur d'un côté du polygone à partir du diamètre du cercle circonscrit (ou, de nouveau, de celui du cercle inscrit). La complexité de la formule est dans ce cas le degré (comme nombre algébrique) de cette longueur exprimée en fonction du diamètre du cercle. On peut aussi s'intéresser à la complexité de la formule donnant l'aire du polygone au lieu de son côté. Kepler mentionne plusieurs de ces points de vue. Le parallèle entre la consonance d'un intervalle musical et la construction d'un polygone par la règle et le compas permet maintenant de transporter dans le domaine musical les diverses notions de "degré de scibilité" pour les polygones.

Il faut mentionner ici que l'on peut trouver dans certains textes de l'antiquité grecque une référence à la relation entre les constructions à l'aide de la règle et du compas et la mesure des intervalles musicaux. Par exemple, dans sa *Vie de Pythagore*, Jamblique (III^e siècle ap. J. C.), décrivant le moment précis où Pythagore eut l'idée de la correspondance entre les intervalles musicaux et les nombres, écrit : "Alors qu'il (Pythagore) était plongé dans la réflexion et dans le calcul, cherchant à découvrir quelque instrument qui apporterait à l'ouïe un secours solide et infaillible, comme dans le cas de la vue qui a le secours du compas, de la règle ou du dipotre ..." ([16] p. 66). Je pense que la mention de la règle et du compas n'est pas une coïncidence, et j'ai une explication personnelle pour cette relation. Je crois que les figures géométriques qui sont constructibles à la règle et au compas sont exactement celles dont on peut vérifier à l'oeil nu si elles sont correctement dessinées ou non (disons, par une personne ayant un organe visuel moyennement constitué). Cela vient

du fait que l'on peut mentalement dessiner des cercles et des lignes droites, et comparer avec ce que l'on voit. C'est la raison pour laquelle l'oeil humain est sensible à certaines proportions (raison double, triple, section dorée, etc.), qui sont toutes constructibles à la règle et au compas, par un petit nombre d'étapes. Un autre exemple : Nous sommes sensibles aux symétries, qui sont aussi vérifiables à la règle et au compas. Venons-en maintenant aux intervalles consonants. Je dis que les intervalles musicaux considérés comme les plus consonants (l'unisson, l'octave, la deuxième, la quinte et la quarte) sont exactement ceux dont notre oreille peut reconnaître la justesse de façon presque parfaite. C'est l'une des raisons pour lesquelles les instruments à cordes tels que le violon sont accordés de telle manière que les cordes adjacentes forment des intervalles de quintes (dans le cas de la guitare, des quarts et une tierce majeure). Un violoniste, lorsqu'il doit accorder son instrument, commence par accorder une note (en général la note *la* de la seconde corde à vide), et ensuite il accorde les autres cordes en écoutant des quintes. Un claveciniste, lorsqu'il accorde son instrument, commence par accorder une note (en général, un *la* aussi) à l'aide d'un diapason. Ensuite, il accorde les autres cordes par un algorithme qui fait intervenir l'écoute d'unissons, d'octaves, de quintes et de quarts, et seulement de tels intervalles, ceci précisément parce que ce sont ceux à la justesse desquels son oreille est sensible. (Il doit par ailleurs *affaiblir* certaines quintes et *renforcer* certaines autres, suivant le tempérament qu'il utilise, mais ceci est une autre histoire.)¹⁸ A propos de la justesse de cette écoute, on peut citer Euler, qui, dans son article *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* ([12] Sér. III Vol. I p. 512) écrit : "L'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour une proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi-imperceptible. Or, plus une proportion est simple, plus notre sentiment est aussi sensible et distingue de plus petites aberrations; c'est la raison pourquoi on ne saurait supporter presque aucune aberration dans les octaves et on prétend que toutes les octaves soient exactes et qu'elles ne s'écartent point du tout de la raison double". Un peu plus loin, sur le même sujet, Euler écrit (p. 513) "Quand la proportion actuelle entre les sons qu'on entend est assez simple, comme de $2/3$ ou $3/4$ ou $4/5$ etc., la proportion aperçue est aussi la même pour toutes les oreilles. Mais quand la proportion actuelle est fort compliquée, de sorte pourtant qu'elle approche beaucoup d'une proportion simple, alors l'oreille apercevra cette proportion simple, sans remarquer la petite aberration de l'actuelle".

7. Complexité IV : Euler

Leonhard Euler (1707-1783) a commencé très jeune à travailler sur une théorie mathéma-

¹⁸En fait, il est logique de considérer, comme Euler le fait, que dans la classification des consonances, après l'octave, la deuxième (octave + quinte) précède la quinte, et que l'oreille est plus sensible aux deuxièmes qu'aux quintes. Comme le dit Euler, le rapport $3/1$ est plus simple que le rapport $3/2$, ce qui fait que l'intervalle $3/1$ "est plus sensible à l'oreille que l'intervalle $3/2$ ". (cf. la *Lettre à une princesse d'Allemagne*, 3 Mai 1760 ([12] Sér. III Vol. XI p. 17). Mais l'explication par les harmoniques est plus convaincante. On entend naturellement la deuxième et non pas la quinte comme seconde harmonique. Dans cette même lettre, Euler écrit : "Les musiciens donnent à la quinte le second rang parmi les consonances, et l'oreille en est si agréablement affectée qu'il est fort aisé d'accorder une quinte. Ainsi, sur les violons, les quatre cordes montent par des quintes, et chaque musicien les met aisément d'accord par l'oreille seule. Cependant une quinte ne s'accorde pas si aisément qu'une octave, mais la quinte au-dessus de l'octave est plus sensible qu'une simple quinte, et l'on sait aussi par expérience, qu'ayant fixé le son *C*, il est plus aisé d'y accorder la quinte supérieure *g* que la simple *G*". Descartes, dans sa lettre de Janvier 1630 à Mersenne (cf. [8] Vol. I p. 108) écrit la même chose "la deuxième est plus simple que la quinte", mais il précise : "Je dis plus simple, non pas plus agréable".

tique des fondements de la musique. En 1727, à l'âge de 20 ans, il présente à l'Université de Bâle un mémoire en Acoustique, intitulé *De sono* ([12] Sér. III Vol. I pp. 181-196). En 1731, il termine d'écrire un essai de 230 pages sur la musique, intitulé *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principijs dilucide expositae* (Essai d'une nouvelle théorie musicale, exposée avec clarté selon les principes de l'harmonie les plus sûrs) [12] Sér. III Vol. I pp. 197-428. Cet essai est publié en 1739 à St. Petersbourg, et il attend encore, pour le lecteur moderne (comme d'ailleurs plusieurs autres textes musico-mathématiques du même genre), une traduction et un commentaire faits par de vrais mathématiciens. Dans une lettre à Daniel Bernoulli datée du 25 Mai 1731 ([12] Sér. IV A Vol. II p. 146), Euler écrit que ce mémoire a pour but d'étudier la musique comme une partie des mathématiques, en utilisant des déductions logiques à partir de principes premiers et infaillibles". C'est presque mot à mot ce que dit Rameau dans l'Introduction de son *Traité de l'Harmonie réduite à ses principes naturels* ([21] Vol. I). A part ce Traité, Euler a écrit près de 30 articles ou mémoires sur la musique (théorie, acoustique, propagation du son, etc.), sans compter ses *Lettres à la Princesse d'Allemagne* et sa correspondance avec Daniel Bernoulli.

Nous allons nous intéresser ici à une fonction définie dans son *Tentamen*, qui est associée aux intervalles musicaux. Elle mesure quelque chose qu'Euler appelle "suavitatis gradus" (degré de suavité) et que l'on pourrait aussi traduire, dans ce contexte, par "degré de consonance" (en ajoutant un sens de plus aux divers sens du mot consonance).¹⁹ Euler commence par considérer les intervalles multiples (on rappelle que ce sont ceux dont la valeur numérique est de la forme $n/1$). Sa fonction associe à un tel intervalle de valeur numérique $n/1$, un entier noté $f(n/1)$. Encore une fois, le degré de consonance d'un intervalle de la forme $n/1$ sera grand quand le nombre $f(n/1)$ que la fonction lui attribue est petit. Pour comprendre la formule pour f , on commence par regarder sa valeur sur les premiers termes de la suite. Cette valeur tient compte du fait que plus le nombre d'opérations nécessaires pour obtenir l'intervalle musical considéré à partir des consonances d'octave, de quinte et de quarte est petit, plus le degré de consonance de cet intervalle est élevé, et donc, plus la valeur que la fonction lui associe est petite. Il est évident que cela a un sens pour les petites valeurs de n seulement, vu que pour n grand, le son n'est plus dans la limite des sons audibles. Revenons à la définition de la fonction f . Pour commencer, on considère l'unisson (que l'on peut en un sens considérer comme l'intervalle le plus consonant), de valeur numérique $1/1$; Euler lui associe le degré 1 ($f(1/1) = 1$). A l'intervalle d'octave, et que l'on peut considérer comme la première consonance après l'unisson, et dont la valeur est $2/1$, Euler associe le nombre 2 ($f(2/1) = 2$). La valeur suivante à considérer est $3/1$. C'est celle de l'intervalle de deuxième, et on peut l'obtenir en juxtaposant deux intervalles consonants, l'octave et la quinte (on a $\frac{3}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2}$). Euler lui associe le nombre 3 ($f(3/1) = 3$), parce qu'on a besoin dans ce cas de 2 consonances de base, et d'une opération. La double octave (de valeur $4/1$) est un intervalle qui n'est pas plus compliqué à obtenir que l'intervalle de deuxième : il suffit de juxtaposer deux intervalles d'octave (on a $\frac{4}{1} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{1}$). La valeur $f(4/1)$ sera donc aussi égale à 3. Plus généralement, à un intervalle de valeur $2^n/1$, Euler associe la valeur $f(2^n/1) = n + 1$. En raisonnant par analogie, il définit la valeurs $f(n/1)$ pour n entier quelconque > 1 de la manière suivante. Si n est un nombre premier, alors $f(n/1) = n$. Si n est de la forme p^k avec p premier et k entier, alors $f(n/1) = k(p - 1) + 1$.

¹⁹Le terme "suavité", appliqué à un intervalle musical, est déjà utilisé par Kepler, dans son *Harmonie du monde*, Livre III, Chapitre 1, Axiome II, cf. [17] p. 95.

Plus généralement si n est de la forme $p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$, où $p_1, \dots, p_r$ sont des nombres premiers et $k_1, \dots, k_r$ des entiers positifs, on prend $f(n/1) = k_1(p_1 - 1) \dots k_r(p_r - 1) + 1$. On voit facilement que si l'on pose $g(n) = f(n/1) - 1$, on a la formule $g(mn) = g(m) + g(n)$ pour tout m et n . Cet aspect logarithmique de la fonction g reflète l'origine musicale qui a motivé la définition, c'est-à-dire le fait que la valeur numérique de la somme (juxtaposition) de deux intervalles musicaux est le produit des valeurs numériques de ces intervalles.

Au-delà des applications musicales (qui, rappelons-le encore, n'ont un sens que pour les petites valeurs de n), on se retrouve avec une fonction f qui décrit, en un sens précis de ce terme, la "complexité" d'un nombre entier, en fonction de sa décomposition en nombres premiers. Il n'y a aucun mal à considérer qu'indépendamment de ces applications musicales, cette formule, comme d'autres proposées par Euler, possède un intérêt purement mathématique, et en tant que mathématiciens, on peut se réjouir du fait que la musique fournit un prétexte à des définitions abstraites et purement mathématiques, comme celles de fonctions aux propriétés intéressantes et esthétiquement satisfaisantes pour des esprits orientés vers l'abstraction.

Comme on l'a mentionné ci-dessus, Euler considère ensuite des accords de deux sons quelconques, c'est-à-dire des intervalles qui ne sont pas nécessairement multiples, et, plus généralement, des accords de plus de deux sons. La définition de la complexité consiste alors à prendre le plus petit multiple commun m des entiers représentant l'intervalle ou l'accord, et à se ramener ensuite au cas précédent en prenant $f(m/1)$. La justification de la formule générale fait intervenir la décomposition du son en fondamental et harmoniques et une telle discussion dépasserait le cadre de cet exposé.

Notons que Christiaan Huygens introduit dans son *Traité de la consonance* une notion de *degré de consonance*, qui lui aussi mesure une certaine complexité, et qui s'apparente à celui d'Euler et à celui de Rameau, qui est basé sur la décomposition du son en fondamental et harmoniques. Ici, les intervalles les plus consonants sont ceux dont les valeurs numériques (représentés par des fractions irréductibles) sont de la forme p/q , avec p et q entiers ($p > q$) et où q est de la forme 2^n . Ceci est relié à la décomposition d'un son en fondamental et harmoniques, puisque les nombres de la forme $p/2^n$ sont les valeurs numériques des intervalles de la suite des fréquences harmoniques $f, 2f, 3f, \dots$ à l'addition d'une octave près (on rappelle que cette dernière opération correspond à la division par une puissance de 2). Parmi les intervalles de valeur $p/2^n$, plus n est petit, plus le degré de consonance est élevé. D'après cette théorie, l'intervalle le plus consonant est l'octave mais, par exemple, la tierce majeure (de rapport $5/4$) est plus consonante que la quinte (de rapport $4/3$).

8. Esthétique mathématique : la théorie de Birkhoff

Dans sa communication au Congrès International des Mathématiciens de Bologne (1928) et dans une série d'articles qui ont suivi (voir [7] Vol. 3), G. D. Birkhoff a élaboré une théorie esthétique quantitative, applicable à des champs aussi divers que la poésie, les polygones, les réseaux dans le plan, les formes des vases, le rythme, l'harmonie, la mélodie et la morale. Cette théorie est dans la pure tradition platonicienne, où le beau se mesure en termes de symétrie, d'équilibre et de proportions. Elle fait intervenir une notion de *complexité*, qui est mesurée par une quantité que Birkhoff note C , et une notion d'*ordre*, qui est mesurée par une quantité qu'il note O et qui tient compte des symétries de l'objet que l'on perçoit, de facteurs qu'il appelle "externes", c'est-à-dire indépendants du milieu

ambiant, ainsi que des facteurs psychologiques. La *mesure esthétique* est alors le rapport

$$M = O/C.$$

Dans le cas particulier de la classe d'objets constituée par les accords de deux sons, la complexité C est considérée comme constante, et on a donc $M = O$. Si on se restreint à la sous-classe d'accords dont l'étendue ne dépasse pas une octave, le fait de prendre l'accord complémentaire (par rapport à l'octave)²⁰ est considéré comme une symétrie, et par conséquent un accord et son complémentaire ont même mesure esthétique. Ainsi, l'unisson et l'octave ont même mesure esthétique, de même qu'une seconde mineure et une septième majeure. Birkhoff décrit la mesure esthétique M , dans le cas des accords de deux notes, comme un "degré de consonance". La classification qu'il obtient (pour les accords d'amplitude ne dépassant pas une octave), par valeurs décroissante de M , est la suivante :

1. tierces majeure et mineure,
2. quinte diminuée et quarte augmentée,
3. sixtes majeure et mineure,
4. quarte, quinte, unisson et octave,
5. seconde majeure et septième mineure,
6. seconde mineure et septième majeure.

Ce tableau considère les intervalles en dehors de tout contexte particulier. Mais comme Birkhoff le dit, on peut développer des théories plus fines en introduisant des paramètres, et la classification en fonction du degré de consonance peut en être modifiée. Par exemple, on peut tenir compte du fait que l'oreille qui écoute l'accord donné est habituée ou non à la gamme diatonique occidentale. On peut aussi supposer que les intervalles ne sont pas pris tout seuls, mais en référence à une tonalité ambiante. Ainsi, certains accords consonants, quand ils sont joués dans une tonalité qui leur est étrangère, peuvent devenir dissonants.²¹

Appendice : Sur la dissonance

Dans cet article, j'ai parlé surtout de consonance, mais j'aurais pu aussi bien parler de dissonance, sujet sur lequel il y a une littérature abondante. De même qu'il y a une théorie de la complexité pour les consonances, il y en a pour les dissonances. Diderot écrit dans l'article CONSONANCE de l'*Encyclopédie* [14] : "La propriété principale de toutes

²⁰ce que Descartes appelle l'*ombre*, dans son *Abrégé de musique*. Par exemple, la quarte est l'ombre de la quinte. Rameau a utilisé aussi cette terminologie.

²¹On peut à ce propos mentionner Descartes qui, dans une lettre à Mersenne (Octobre 1631 ([8] Vol. I p. 223), écrit : "Touchant la douceur des consonances, il y a deux choses à distinguer : à savoir, ce qui les rend plus simples et accordantes, et ce qui les rend plus agréables à l'oreille. Pour ce qui rend les consonances plus agréables, cela dépend des lieux où elles sont employées, et il se trouve des lieux où même les fausses quintes et autres dissonances sont plus agréables que les consonances, de sorte qu'on ne saurait déterminer absolument qu'une consonance soit plus agréable que l'autre. On peut bien dire toutefois que, pour l'ordinaire, les tierces et les sixtes majeures sont plus agréables que les quartes, que dans les chants gais les tierces et sixtes majeures sont plus agréables que les mineures, et le contraire dans les tristes [...] Mais on peut dire absolument quelles consonances sont les plus simples et plus accordantes ; car cela ne dépend que de ce que leurs sons s'unissent davantage l'un avec l'autre, et qu'elles s'approchent plus de la nature de l'union". On peut aussi mentionner Huygens, qui écrit dans une note à sa *Théorie de la consonance*, cf. [15] p. 35 : "Il faut distinguer entre la beauté des consonances étant entendues seules ou accompagnées d'autres ou suivies ou précédées d'autres, on peut faire entendre la sixte en tel lieu ou après tel autre accord qu'elle ne paraîtra nullement consonante".

les consonances c'est de satisfaire l'oreille et de produire des repos. Les dissonances au contraire inquiètent l'ouïe, et font dévier des tons qui ramènent au repos". Même si, comme on l'a déjà vu, pour Rameau, "tout ce qui n'est pas *consonance*, est *dissonance*", d'autres auteurs n'ont pas considéré la dissonance comme le contraire de la consonance. On peut se nouveau citer Euler qui, dans son article *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* ([12] Sér. III Vol. I p. 508), écrit : "Les dissonances ne diffèrent des consonances que parce que celles-ci sont renfermées en des proportions plus simples, qui se présentent plus aisément à l'entendement, pendant que les dissonances renferment des proportions plus compliquées et partant plus difficiles à comprendre. Ce n'est donc que par degré que les dissonances diffèrent des consonances ; et il faut que les unes et les autres soient perceptibles à l'esprit. Plusieurs sons qui n'auraient aucun rapport perceptible entre eux feraient un bruit confus absolument intolérable dans la musique. De là il est certain que les dissonances que j'ai en vue contiennent des proportions perceptibles, sans quoi on ne les saurait admettre dans la musique". Il convient de noter d'ailleurs que la dissonance occupe en théorie de la musique une place prépondérante par rapport à la consonance. Ainsi, les traités de composition de la musique classique occidentale (Zarlino, Jean des Murs, Rameau, etc.) contiennent généralement des règles de dissonance (préparation des dissonances, résolution des dissonances, etc.) plutôt que des règles de consonance. La raison est facile à comprendre, c'est que, comme Rousseau l'écrit, dans son *Dictionnaire de Musique*, "Si les dissonances sont employées dans l'harmonie, elles ne le sont qu'avec des précautions dont les consonances, toujours agréables par elles-mêmes, n'ont pas également besoin". Et plus loin, à l'article DISSONANCE, sur l'utilité de celle-là : "choquez l'oreille pour la flatter ensuite plus agréablement" ([22] p. 772). On peut parler de va-et-vient entre consonance et dissonance, et sur ce sujet, on peut de nouveau citer Diderot qui, dans ses *Principes généraux d'acoustique* ([10] p. 84), écrit : "On est quelquefois forcé d'user de rapports composés, tantôt pour faire valoir les rapports simples, tantôt pour éviter la monotonie, tantôt pour ajouter à l'expression, et c'est de là que naît en musique l'emploi que nous faisons de la dissonance ; emploi plus ou moins fréquent, mais presque toujours nécessaire : mais la dissonance, selon les musiciens, veut ordinairement être pratiquée et sauvée ; ce qui, bien entendu, ne signifie rien autre chose que, si l'on a de bonnes raisons d'abandonner les rapports simples pour en présenter à l'oreille de composés, il faut revenir sur-le-champ à l'emploi des premiers". Les dissonances peuvent procurer autant de plaisir que les consonances, et on peut aussi citer, à propos de cet équilibre entre consonance et dissonance, le passage suivant du *Traité de l'homme* (1664) de Descartes ([8] Vol. XI p. 151) : "Ce ne sont pas absolument les choses les plus douces qui sont les plus agréables aux sens, mais celles qui les chatouillent d'une façon mieux tempérée : ainsi que le sel et le vinaigre sont souvent plus agréables à la langue que l'eau douce. Et c'est ce qui fait que la musique reçoit les tierces et les sixtes, et même quelquefois les dissonances, aussi bien que les unissons, les octaves et les quintes".

Terminons cette parenthèse sur la dissonance par une citation du mathématicien et philosophe Jésuite L. B. Castel, dans un recensement du *Traité de l'Harmonie réduite à ses principes naturels* de Rameau : "Il est vrai qu'une harmonie toute composée d'accords consonnants serait insipide par trop de douceur ; on a donc recours aux dissonances..." et un peu plus loin : "C'est la dissonance, qui dégrade heureusement la musique d'une perfection si defectueuse, les ombres dans la peinture réchauffent les couleurs, les dissonances font de la musique le même effet à l'égard des consonances. C'est par leur moyen que le génie prend son essor hors de la modulation, et se fraye de nouvelles routes, ..." (Journal de Trévoux (1722), cf. [21] Vol. I, p. XLI).

Références

- [1] L. B. ALBERTI, De l'art d'édifier (De re aedificatoria), traduction, préface et notes par Pierre Caye et Françoise Choay, Seuil, 2004.
- [2] J. LE ROND D'ALEMBERT, Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau, 1752 (édition remaniée 1779), Collection Les Introuvables, Editions d'Aujourd'hui, Plan-de-la-Tour, 1984.
- [3] ARISTIDE QUINTILIEN, *La musique*, Traduction F. Duysinx, Bibliothèque de la Faculté de philosophie et lettres de l'université de Liège No. 276, éd. Librairie Droz, Genève, 1999.
- [4] ARISTOTE, Problèmes (en deux Tomes), texte établi et traduit par P. Louis, Paris, les Belles Lettres, 1993.
- [5] ARISTOTE, Petits traités d'histoire naturelle (Parva naturalia), traduction et présentation par P. M. Morel, GF Flammarion, Paris 2000.
- [6] ARISTOTE, de l'Âme, traduction et notes J. Tricot, Librairie J. Vrin, Paris, réédition 1992.
- [7] G. D. BIRKHOFF, Collected Mathematical Papers, Volume III (The four color problem, Miscellaneous papers), American Mathematical Society, 1950, reprinted by Dover, N. Y. 1968.
- [8] R. DESCARTES, Oeuvres, publiées par Ch. Adam et P. Tannery, Nouvelle édition, Librairie J. Vrin, Paris, 1996.
- [9] R. DESCARTES, Abrégé de musique (Compendium musicae), traduction, présentation et notes par F. de Buzon, Presses Universitaires de France, Paris, 1987.
- [10] D. DIDEROT, Oeuvres complètes, Vol. IX (Mathématiques, physiologie, etc.), Garnier Frères, Paris, 1875.
- [11] EUCLIDE, La Section du canon, traduction anglaise dans Greek musical writings, Vol. II, p. 190-208, edited by Andrew Barker, Cambridge University press, 1989.
- [12] L. EULER, Opera Omnia (Oeuvres complètes), publiées par l'Académie des Sciences Suisse, ed. Teubner, Leipzig & Berlin, (près de 80 volumes déjà publiés), 1911 etc.
- [13] GALILÉE (Galileo Galilei) Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles, traduction Maurice Clavelin, Librairie Armand Colin, Paris, 1970.
- [14] ENCYCLOPÉDIE, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une Société de gens de lettres, Mis en ordre et publié par M. Diderot, et, quant à la partie mathématique, par M. d'Alembert, Paris, Briasson, 1751-1780.
- [15] CHRISTIAAN HUYGENS, Oeuvres Complètes, publiées par la Société Hollandaise des Sciences, Tome XX (Musique et mathématiques, musique, mathématiques de 1666 à 1695), La Haye, ed. Martinus Nijhoff, 1940.
- [16] JAMBLIQUE, Vie de Pythagore, Introduction, traduction et notes par L. Brisson et Ph. Segonds, Paris, les Belles Lettres, 1996.
- [17] J. KEPLER, L'Harmonie du monde, traduction Jean Peyroux, Librairie A. Blanchard, Paris, 1977.
- [18] PLATON, dans Oeuvres Complètes, traduction et Notes A. Rivaud, éd. Belles Lettres, Paris 1963.

- [19] LES PRÉSOCRATIQUES, édition établie par J. P. Dumont, textes traduits par J.P. Dumont, D. Delattre et J.L. Poirier, Bibliothèque de la Pleiade, éd. Gallimard 1988.
- [20] PTOLÉMÉE (Claudius Ptolemaeus), Harmonique, traduction anglaise dans Greek musical writings, Vol. II, p. 271-371, edited by Andrew Barker, Cambridge University Press, 1989.
- [21] J. PH. RAMEAU, Complete Theoretical Writings (6 volumes), ed. Erwin J. Jacobi, American Institute of Musicology, 1967-1972.
- [22] J. J. ROUSSEAU, Oeuvres Complètes, Tome V (Écrits sur la musique, la langue et le théâtre), Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, Paris 1995.
- [23] THÉON DE SMYRNE, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon, éd. bilingue (grec-français) établie par J. Dupuis, Paris 1892, reproduite par les Editions Culture et Civilisation, 115 Av. Gabriel Lebon, Bruxelles 1966.

Athanasé PAPADOPOULOS
Institut de Recherche Mathématiques Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7 rue René Descartes
F 67084 Strasbourg Cedex France
`papadopoulos@math.u-strasbg.fr`