Leonhard euler et la musique

Myriam Fischer

Résumé : Leonhard Euler, célèbre pour son travail dans le domaine des mathématiques pures, a également effectué de nombreuses recherches dans le domaine de la musique. C'est en 1739, lors de son séjour à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg qu'Euler écrivit son premier ouvrage traitant de la musique, "Tentamen novae musicae". Plus tard, dans les "Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie", publiées en 1768, Euler y expose en particulier son point de vue sur la musique qu'il avait déjà établie en 1739. Il désire expliquer la véritable origine des sons employés dans la musique et montrer que les principes de l'Harmonie se réduisent à des nombres. Euler propose une échelle musicale en utilisant uniquement les nombres 2, 3 et 5. De plus, il s'interroge sur les raisons fondamentales de tout ce qui peut amener une sensation agréable dans le mélange et la superposition des tons. Considérer une théorie de la musique entraîne inévitablement la question de la réalisation concrète à savoir l'accord des instruments.

Introduction

Bien que rangée aujourd'hui parmi les disciplines "littéraires", il fut un temps où la musique était considérée comme une science mathématique : arithmétique, astronomie, géométrie et musique constituaient le "quadrivium", carrefour des quatres voies de la connaissance. L'illustre Leonhard Euler, célèbre pour ses découvertes dans le domaine des mathématiques pures, a également effectué de nombreuses recherches dans le domaine des sciences appliquées, en particulier la musique. Il est certain que pour lui la musique faisait partie des mathématiques.

Après une brève biographie d'Euler, nous exposerons une partie de sa théorie musicale. Celle-ci nous amènera alors à nous intéresser de plus près à la réalisation concrète à savoir la question de l'accord des instruments. Puis, dans un quatrième chapitre, nous exposerons son point de vue sur les particularités de la musique dite "moderne" à l'époque.

1. Leonhard Euler : sa vie, son oeuvre.

1.1. Sa jeunesse à Bâle (1707-1727)

Leonhard Euler naquit à Bâle le 15 avril 1707. Il reçut sa première instruction de son père, Paul Euler, qui lui enseigna les mathématiques dès qu'il fut en âge de les comprendre, non pas qu'il eut voulu faire de son fils un mathématicien, loin de là, il le destinait à la théologie.

Le 29 octobre 1723, suivant le désir de son père, Euler s'inscrivit à la faculté de théologie de l'Université de Bâle. Parallèlement, il suivait les cours de Jean Bernoulli.

On persuada rapidement Paul Euler que son fils était né pour prendre dignement la succession du Grand Bernoulli dans les sciences mathématiques et non pour mener une vie contemplative d'un pasteur de campagne. Leonhard Euler pouvait donc continuer à consulter Jean Bernoulli. Il remporta un 2ème prix au concours de l'Académie des sciences de Paris en 1727 alors qu'il n'avait que 20 ans. Ce prix est le commencement d'une longue série de concours où Euler fut quatorze fois lauréat !

1.2. Premier séjour à Saint-Petersbourg (1727-1741)

Vers la même époque, le tsar Pierre 1^{er} voulut avoir dans sa ville de Saint-Petersbourg une Académie des Sciences comparable à celle de Paris. Daniel et Nicolas Bernoulli y furent appelés et

Fig. 1 – Portrait d'Euler

promirent à leur ami Euler de lui procurer une place convenable à l'Académie russe. Ainsi, le 5 avril 1727, Euler partit de Bâle pour Saint-Petersbourg où il fut nommé adjoint de la classe de mathématiques de l'Académie impériale des sciences.

Le 27 décembre 1733, Euler épousa Catherine Gsell de Sainte Gall. De cette union, Euler eut treize enfants dont huit moururent en bas âge. En 1733, Daniel Bernoulli quitta Saint-Petersbourg, départ qui éprouva vivement Euler.

La musique constituait également un centre d'intérêt pour Euler. Quand il se mettait au piano, son esprit géométrique ne l'abandonnait pas. En savourant les sensations agréables de l'harmonie, il en approfondissait la cause : la perception de quelque chose de parfait fait naître un sentiment de plaisir. Or, l'ordre étant une des perfections qui causent à l'âme des sensations agréables, le plaisir que nous éprouvons à écouter une belle musique consiste dans la perception des rapports que les sons tiennent entre eux, particulièrement lorsque ces rapports sont exprimés par des nombres entiers (rapports dans la fréquence des vibrations aériennes). Le fruit de ces méditations dans ses moments de repos donna lieu au "Tentamen novae musicae" c'est à dire "Essai d'une nouvelle théorie de la musique". Sa rédaction fut terminée en 1731, du temps où son ami Daniel Bernoulli travaillait encore à ses cotés, mais cet ouvrage ne parut qu'en 1739. Il est rempli d'idées neuves et contient un grand nombre d'indications dont les compositeurs et les fabricants d'instruments pouvaient tirer profit, non sans quelques critiques comme celles de Nicolas Fuss qui dit en 1783 : "Cet ouvrage n'eut pas un grand succès apparemment pour la seule raison qu'il renferme trop de mathématiques pour le musicien et trop de musique pour le mathématicien". Cet ouvrage fut enrichi par la parution en 1764 de deux articles intitulés "Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique moderne" [2] et "Du véritable caractère de la musique moderne" [3].

1.3. Euler à Berlin (1741-1766)

En 1741, le roi de Prusse, Frédéric II proposa à Euler de venir à Berlin afin de donner des leçons de mathématiques et de physique aux Princes de Wurtemberg. Le 25 juillet 1741, Euler arriva à Berlin avec sa famille. En 1744, fut établie "l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse", divisée en quatres classes : Physique ou philosophie expérimentale, mathématique, philosophie spéculative et Belles-Lettres. Euler devint directeur de la classe de mathématique et occupa ce poste durant tout le reste de son séjour à Berlin.

L'activité scientifique d'Euler fut prospère les années suivantes. On peut mentionner par exemple la “Théorie du mouvement des planètes et des comètes”, des ouvrages traitant des principes de l'artillerie... De plus, le roi prescrivit des travaux destinés à être publiés dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse.

La renommée d'Euler, sa science encyclopédique, ses dons mathématiques extraordinaires lui valurent à Berlin une estime unanime. Parmi les princes de la Maison royale, le Margrave règnant au Brandebourg-Schwedt l'estimait particulièrement et le pria d'instruire ses deux filles. Plus tard, il continua à donner des leçons par écrit et c'est ainsi qu'il fut ammené à rédiger les lettres adressées à la future princesse d'Anhalt-Dessau. Les “Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique et de Philosophie” [1] furent publiées en 1768 par l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg. Cet ouvrage eut un succès retentissant : il est en effet à la portée de toute personne cultivée. Il nous interresse ici car Euler y traite en particulier des consonnances, des dissonances, des douze tons du clavecin...

En 1756, Maupertuis, président de l'Académie, quitta Berlin pour des raisons de santé. Pendant cette absence, Euler le remplaça jusqu'à son départ de Berlin en 1766.

Néanmoins, de nombreuses tensions avaient lieu entre Euler et le roi de Prusse. Celui-ci n'était pas satisfait de la façon dont Euler dirigeait les finances de l'Académie. De plus, le roi ne reconnaissait pas toute la valeur d'Euler et lui reprochait fréquemment le fait qu'il ne s'intéressait pas assez à la poésie, domaine de prédilection du roi philosophe.

Ainsi, de nombreux différends amenèrent Euler à quitter Berlin et à retourner à Saint-Petersbourg où on lui offrait la direction de l'Académie des Sciences.

1.4. Deuxième séjour à Saint-Petersbourg (1766-1783)

A peine installé à Saint-Petersbourg, Euler fut atteint d'une cataracte à l'oeil gauche (il avait déjà perdu l'oeil droit en 1735, suite à trois jours de calculs acharnés) ce qui lui fit perdre la vue définitivement. Mais la prodigieuse mémoire et sa volonté peu commune lui permirent de continuer son activité : ses fils et ses élèves écrivaient sous sa dictée le texte de ses mémoires.

En 1771, un terrible incendie éclata à Saint-Petersbourg et les flammes gagnèrent la maison d'Euler. Un Bâlois nommé Pierre Grimm se précipita à travers les flammes, chargea Euler sur ses épaules et le sauva au péril de sa propre vie.

Malgré sa cécité, l'activité scientifique d'Euler fut abondante. Voici ce que raconte un de ses arrière petit-fils, Paul-Henri Fuss : “Pour faire de tête les calculs les plus compliqués, il lui fallait moins de temps qu'à un autre la touche à la main ; et encore ne se trompait-il que rarement”. Sa facilité pour calculer de tête était portée à un degré qu'on croyait à peine. Tourmenté d'insomnie, il calcula une nuit les six premières puissances de tous les nombres entiers inférieurs à 100 et il récitait quelques jours après le tableau numérique entier !

Leonhard Euler mourut le 18 septembre 1783 pendant qu'il s'entretenait à table avec un certain M.Lexell venu expressément le voir pour discuter de la “nouvelle planète”, à savoir Uranus, découverte en 1781.

2. “Lettres à une princesse d'Allemagne” : construction mathématique des 12 tons

Les “Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de la physique et de philosophie” ([1]) furent publiées en 1768 par l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg. Lors de cette correspondance, Euler consacre plusieurs lettres à la musique dont voici les titres :

– Des consonnances et des dissonances.
– De l'unisson et des octaves.
– Des autres consonnances.
– Des 12 tons du clavecin.
– Sur les agréments d'une belle musique.
– Sur les merveilles de la voie humaine.

Euler y expose en particulier sa théorie de la musique qu'il avait déjà établie en 1739 dans "Tentamen novae musicae". Il désire expliquer la véritable origine des sons employés dans la musique et montrer que les "principes de l'Harmonie se réduisent à des nombres". Euler écrira dans une des lettres que "ce n'est pas la Théorie qui a conduit les musiciens à la connaissance de tous les tons : ils en sont plutôt redevables à une force cachée de la véritable Harmonie, qui a opéré si efficacement sur leurs oreilles, qu'elles ont été forcées de recevoir les tons qui sont actuellement en usage".

2.1. Notions élémentaires : le son, l'accord, l'octave

Lorsque un son est produit, notre oreille perçoit une suite de "coups" ou vibrations. Le nombre de vibrations produit en une seconde est appelé *fréquence*. La différence principale entre un son aigu et un son grave réside dans la fréquence de ces derniers. Autrement dit, plus un son est aigu, plus sa fréquence est élevée. On appelle *accord* un mélange de plusieurs sons.

On considère d'abord la situation où l'on produit deux sons. Si ces sons ont même fréquence, on dit qu'on a un *unisson* : c'est l'accord le plus simple en musique !

Néanmoins, lorsque ces deux sons possèdent des fréquences différentes, f_1 et f_2 respectivement, la situation la plus simple après celle de l'unisson est celle où $f_1 = 2f_2$. De plus, l'expérience confirme que ceci est agréable à l'oreille.

Ainsi, Euler définit les notions suivantes :
– Quand l'oreille découvre aisément un rapport qui règne entre deux sons, leur accord est nommé *consonance*.
– Quand ce rapport est très difficile à découvrir ou même impossible, l'accord est nommé *dissonance*.
– La consonance où le son aigu achève précisément deux fois plus de vibrations que le son grave est appelée *octave*.

Personne n'ignore par exemple que la voix humaine est faite de telle manière que les hommes chantent une octave plus grave que les femmes. En réalité, l'octave est la consonance que toute oreille humaine est capable de distinguer et, en chantant, toute personne peut aisément passer d'un son à une octave plus aigue ou plus grave. Ainsi, l'octave est vraiment caractérisée par le rapport de 1 à 2 qui règne dans les sons. Euler affirme même : "Plus une proportion est simple ou exprimée par des petits nombres, plus elle se présente distinctement à l'entendement et y excite un sentiment de plaisir...la proportion de 1 à 2 est sans doute la plus simple, et c'est celle qui fournit l'accord d'une octave."

On utilisera la notation d'Euler, qui note par la même lettre les sons qui diffèrent d'une octave. Plus précisément, on écrit C, c, $\bar{c}$, $\bar{\bar{c}}$... les octaves successives. Autrement dit, si la fréquence du son C est 1, celle de c sera 2, celle de $\bar{c}$ sera 4 ...

2.2. D'autres consonances : la quinte et la quarte

En considérant uniquement le chiffre 2, on construit l'octave, la double octave, la triple octave puisque ces consonances renferment des proportions de 1 à 2, 1 à $2*2$, 1 à $2*2*2$...Ces sons, trop simples, ne permettent pas de produire de véritable musique, ce qui nous amène à introduire le chiffre 3.

On considère la situation où un son a une fréquence trois fois plus élevée qu'un autre, autrement dit, il y a une proportion de 1 à 3 qui règne entre deux sons. Si la fréquence du son F est 1, celle de f sera 2 et celle de $\bar{f}$ sera 4. Le son cherché, dont la fréquence est 3, sera donc plus aigu que le son f, mais plus grave que le son $\bar{f}$. On note ce son $\bar{c}$ et on appelle *quinte* un intervalle entre deux sons dont les proportions sont de 2 à 3.

En ne considérant que les chiffres 2 et 3, on obtient le tableau suivant :

F	f	$\bar{c}$	$\bar{f}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{f}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$
1	2	3	4	6	8	12

La quinte est la consonance la plus simple après l'octave. Ceci est dû, non seulement à la simplicité du rapport qui existe entre les fréquences, mais également à la facilité que possède tout musicien à accorder une quinte.

On définit alors un intervalle nommé *quarte* qui consiste en un rapport de 3 à 4 entre les fréquences des deux sons. Les intervalles de $\bar{c}$ à $\bar{f}$, de $\bar{\bar{c}}$ à $\bar{\bar{f}}$ par exemple sont des quartes. Grâce au chiffre 3, on a donc pu définir la quinte et la quarte.

On considère à présent le chiffre $3*3$, c'est à dire 9. Il y a un rapport de 2 à 3 entre 9 et la fréquence du son $\bar{\bar{c}}$. Ainsi, le son cherché, à savoir le son de fréquence égale à 9, est la quinte de $\bar{\bar{c}}$, c'est à dire $\bar{\bar{g}}$. Afin de pouvoir définir les fréquences des octaves inférieures des sons $\bar{c}$, $\bar{f}$ et $\bar{g}$ avec des valeurs entières, on est amené à donner la valeur 9 à la fréquence du son G. Les proportions entre les différents sons demeurant identiques, on obtient le tableau suivant :

C	F	G	c	f	g	$\bar{c}$	$\bar{f}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{f}$	$\bar{\bar{g}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$
6	8	9	12	16	18	24	32	36	48	64	72	96

2.3. Une autre espèce d'accord : les dissonances

A partir du tableau précédent, on considère l'intervalle de F à G. On a un rapport de 8 à 9 entre les fréquences et on appelle cet intervalle *seconde* ou *ton majeur*.

D'autre part, l'intervalle de G à f, qui renferme une proportion de 9 à 16 est nommé *septième*. Comme ces proportions sont exprimées avec des nombres relativement grands, ces deux intervalles ne sont plus considérés comme des consonances : on les appelle *dissonances*.

A présent, on considère le nombre $3*3*3$, c'est-à-dire 27. On a $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$. Par conséquent, le son de fréquence égale à 27 est la quinte de g qui est donc le ton $\bar{d}$. Comme 27 est un nombre impair, on donne la valeur 27 à la fréquence de D. Grâce aux différents rapports entre les fréquences des sons que l'on a établi précédemment, on construit le tableau suivant :

C	D	F	G	c	d	f	g	$\bar{c}$	$\bar{d}$	$\bar{f}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{d}$	$\bar{f}$	$\bar{\bar{g}}$	$\bar{\bar{\bar{c}}}$
24	27	32	36	48	54	64	72	96	108	128	144	192	216	256	288	384

A partir de là, on définit la *tierce mineure* qui consiste en un intervalle où le rapport entre les fréquences des sons est de 27 à 32 et lorsque celui-ci est de 16 à 27, on nomme cet intervalle une *sixte majeure*. L'intervalle D à F est donc une tierce mineure alors que l'intervalle de F à d est une sixte majeure. Il est évident que ces intervalles sont également des dissonances.

2.4. Les 12 tons de la musique

On introduit à présent le chiffre 5 et on cherche le son qui aura cinq fois plus de vibrations en une seconde que le son F. En se référant au tableau précédent, on constate que le son cherché (de fréquence égale à 160) se situe entre $\bar{g}$ et $\bar{\bar{c}}$. Le son cherché est le ton $\bar{a}$. On définit alors la *tierce majeure*, intervalle dont le rapport entre les fréquences est de 4 à 5. L'intervalle de $\bar{f}$ à $\bar{a}$ est une tierce majeure et on constate en outre que cette consonance est très agréable à l'oreille.

Par ailleurs, $\bar{a}$ et $\bar{\bar{c}}$ forment un intervalle dont les proportions sont de 5 à 6. Cette consonance est également appelée *tierce mineure*, les rapports de $\frac{27}{32}$ et $\frac{5}{6}$ étant très proches.

On considère alors les tierces majeures de G, c et d ce qui nous donne les sons $\bar{\bar{h}}$, $\bar{\bar{e}}$ et $\bar{\bar{f}}s$. Afin de transporter ces sons dans la première octave, on est ammené à donner la valeur 135 à la fréquence de Fs. Les rapports entre les fréquences étant identiques à ceux du tableau de la partie précédente, on obtient :

C	D	E	F	Fs	G	A	H	c
96	108	120	128	135	144	160	180	192

On remarque donc que les tons de la gamme diatonique ne résultent que des nombres 2, 3, 3^2, 3^3 et 5. On est amené à définir le *ton mineur* qui consiste en un intervalle où le rapport est de 9 à 10. L'intervalle D-E par exemple est un ton mineur.

Enfin, en itérant le procédé précédent, on trouve les tierces majeures des quatres nouveaux tons A, E, H et Fs. Si la fréquence de C est 96, on aura alors pour les fréquences 200, 150, 225 et 168.75 pour les sons cs, Gs, ds et B respectivement. La fréquence de C est donc $96 * 4 = 384$. Le tableau ci-après fournit tous les tons de la première octave, exprimés par des nombres entiers, tous multiples de 2, 3 ou 5.

C	$2^7 * 3$	384
Cs	$2^4 * 5^2$	400
D	$2^4 * 3^3$	432
Ds	$2 * 3^3 * 5$	450
E	$2^5 * 3 * 5$	480
F	2^9	512
Fs	$2^2 * 3^3 * 5$	540
G	$2^6 * 3^2$	576
Gs	$2^3 * 3 * 5^2$	600
A	$2^7 * 5$	640
B	$3^3 * 5^2$	675
H	$2^4 * 3^2 * 5$	720
c	$2^8 * 3$	768

TAB. 1 – Nombres correspondant à chaque ton

On constate donc que la différence entre chaque ton n'est pas identique. On appelle *demi-ton majeur* un intervalle dont les rapports sont de 15 à 16 et *demi-ton mineur* un intervalle dont les proportions sont de 24 à 25. Ainsi, les douze tons communément utilisés sont simplement tirés des nombre 2, 3 et 5 ! Euler expose cette construction avec une clarté impressionnante et les différentes lettres dans lesquelles ceci est rédigé ont toutes été écrites le 3 mai 1760 !

2.5. Qu'est ce qu'une belle musique ?

Euler se pose la question suivante “Pourquoi une belle musique excite en nous un sentiment de plaisir ?” Cette interrogation est certes sans réponse puisque une pièce peut être appréciée par telle personne alors que cette même musique déplait à telle autre. Euler propose cependant une explication qui se base sur sa théorie de la musique. Selon lui, “le plaisir que l'on sent en entendant une belle musique consiste dans la perception de l'ordre qui y règne...lorsqu'on comprend les rapports ou les proportions que les vibrations de tous les tons tiennent entre eux. Ce jugement étant plus ou moins fin, il est clair pourquoi la même harmonie est perçue par l'un, et point du tout par l'autre, surtout quand les proportions entre les tons sont exprimées par des nombres un peu grands”. En outre, la mesure, c'est-à-dire la durée de chaque ton est également un élément significateur d'ordre.

Par conséquent, une compréhension des rapports entre les vibrations des différents tons ainsi qu'une appréciation des durées conduiraient seuls à l'appréciation d'une musique ? Ceci est absurde et Euler avoue en effet : “il faut quelque chose de plus que personne n'a encore développé”. Il écrit la phrase merveilleuse : “Le plaisir vient de ce qu'on devine des vues et des sentiments du compositeur, dont l'exécution, en tant qu'on la juge heureuse, remplit l'esprit d'une agréable satisfaction.”

A cette époque, bon nombre de musiciens improvisaient plus qu'ils n'interprétaient les oeuvres de compositeurs. Néanmoins, Euler, très avangardiste pour son temps, avait déjà compris ce que recherche un musicien-interprète : il est sans cesse en quête d'authenticité, il cherche à exécuter les oeuvres de la manière la plus proche de celle désirée par le compositeur. Il parviendra ainsi à traduire les sentiments et les émotions de celui-ci afin de les faire partager à ses auditeurs.

Déjà en 1731, dans une lettre à Jean Bernoulli écrite en allemand ([5]), Euler qui n'avait alors que 24 ans expose sa théorie de la musique. Lors de cette correspondance, Euler résume de manière très concise tout ce qu'il rédigera en 1760 à la princesse d'Anhalt-Dessau, à savoir la caractérisation d'un accord pour permettre une belle harmonie ainsi que les raisons fondamentales de tout ce qui peut amener une sensation agréable dans le mélange et la superposition des tons. Par ailleurs, ce dernier fait allusion à son étude dans “Tentamen novae theoricae musicae” des conditions nécessaires pour avoir une sonorité agréable quand il s'agit de plusieurs accords qui se suivent. Euler va jusqu'à établir une formule permettant le calcul d'une quantité nommée “degré de complaisance”. Selon lui, ce nombre indique le degré de plaisir que procure une pièce !

Dans sa réponse, Jean Bernoulli félicite Euler pour sa nouvelle théorie musicale : il se réjouit en particulier du fait que les mathématiques sont capables d'expliquer toutes les sciences. Cependant, il a un avis très réservé au sujet des agréments d'une belle musique. A partir du moment où l'on définit une notion universelle, il faut établir ce qu'on entend par “agréable à l'oreille”. Il admet par exemple que les règles établies par Euler au sujet de la valeur d'une pièce sont valables pour un maître de la musique qui prête plus d'attention aux enchainements qu'à l'effet produit. Celui-ci va se divertir s'il voit la partition écrite et qu'il remarque en l'examinant dans le détail qu'elle a été composée selon les règles. Peut-être plus réaliste, Jean Bernoulli sait que la plupart des pièces de musique sont exécutées devant des auditeurs n'ayant pas l'oreille formée et ces derniers apprécieront une musique si elle correspond à un type de sonorité à laquelle les oreilles sont habituées.

2.6. Les mystères de la voix humaine

Dans une dernière lettre écrite le 16 juin 1761, Euler entretient sa destinataire au sujet de la diversité des sons et des articulations qui peuvent être produits par la voix humaine. Cette particularité est telle que “quelques oiseaux qui apprennent à imiter la voix humaine, ne sont jamais capables de prononcer distinctement les différentes voyelles et ce n'est qu'une imitation très imparfaite.”

Euler signale au passage que certaines orgues possèdent un jeu nommé “voix humaine”. Celle-ci est un jeu d'anche[1], à corps court et cylindrique dont l'extrémité est fermée aux deux tiers. Comme

[1] le son est produit par le battement d'une languette de laiton sur une anche et amplifié par un résonnateur

son nom l'indique, ce jeu est censé imiter la voix humaine. La voix humaine est toujours utilisée avec le tremblant ce qui lui donne un certain lyrisme.

Dans l'orgue classique français, ce jeu se trouve au Grand Orgue. Dans le *Dialogue sur la voix humaine* de la Messe des couvents (1690) de François Couperin par exemple, celle-ci est tantôt en taille, tantôt en dessus, ceci pour imiter le chant d'un ténor et d'une soprano.

Néanmoins, dans l'orgue romantique, elle se trouve au récit et l'utilisation de la boite expressive [2] procure alors des sonorités absolument saisissantes ! Ceci a inspiré le grand facteur d'orgue parisien Aristide Cavaillé-Coll et certains compositeurs du XIX^{eme} siècle. Dans le deuxième choral de César Franck (1822-1890) par exemple ou dans les *Scènes pastorales et orages* de Louis Lefébure-Wely (1817-1869), la voix humaine imite un choeur de jeunes filles ! Une situation tout à fait particulière a lieu à l'orgue Callinet de Masevaux où la voix humaine est au quatrième clavier. Les tuyaux de l'écho se trouvant dans le bas de l'instrument (quasiment sous la tribune), l'utilisation de la boite expressive procure alors une sonorité merveilleuse ! Cet effet magique à l'orgue de Masevaux est connu mondialement.

3. Au sujet des tempéraments

Pour comprendre ce qu'est un tempérament, il convient d'établir une série de constats. Grâce à certaines expériences simples, on peut établir empiriquement que la justesse en musique n'existe pas. Cette curieuse réalité sera expliquée dans ce chapitre ainsi que les solutions envisagées pour accorder un instrument à sons fixés tel l'orgue ou le clavecin.

3.1. Les mathématiques des commas

Effectuons l'expérience suivante : A partir du do$_3$ du clavier, parcourir les douzes quintes pures ascendantes. Etant donné que la longueur du clavier et la nature de la quinte ne permettent pas de cumuler autant de quintes de façon consécutive, on procède en alternant quintes et quartes ce qui permet de rester à l'intérieur de la même octave. Arrivé en bout de course, placer le si$^\sharp$, quinte pure de mi$^\sharp$, sur la touche do$_4^\sharp$ et accorder do$_4$ à l'octave du do$_3$ de départ. Résultat : en jouant les touches do$_4^\sharp$ et do$_4$, on se rend compte que le si$^\sharp$ sonne plus haut que le do. En effet, on a si$^\sharp$= $\frac{3}{2}^{12} = 129.746$...et do$_8$= $2^7 = 129$ On voit donc que le si$^\sharp$ est légèrement trop haut par rapport au do et cette différence, quoique faible est nettement perceptible par l'oreille. On définit alors l'intervalle nommé *comma pythagoricien* comme étant la différence entre le si$^\sharp$ des "quintes" et le do.

A partir du do$_3$ du clavier, accorder les intervalles suivants en prenant soin de placer le dernier mi$_2$ des quintes pures sur la touche fa$_2$. En jouant les touches mi$_2$ et fa$_2$, on s'apperçoit que le mi des quintes pures sonne plus haut que le mi de la tierce pure do-mi. En effet, on a mi$_3$=$\frac{3}{2}^4 = 5.0625$ et le nombre correspondant au mi des "tierces pures" est 5. On définit alors le *comma syntonique*, intervalle défini comme étant la différence entre le mi des "quintes" et le mi.

Ainsi, douze quintes consécutives et acoustiquement pures ne peuvent donner l'octave et font apparaître le comma pythagoricien alors que quatre quintes consécutives et acoustiquement pures ne peuvent donner la tierce majeure et font apparaître le comma syntonique. Ce constat oblige à effectuer un choix pour l'accord des instruments à sons fixés, en particulier le clavier.

Le *tempérament* est comme son nom l'indique, un compromis visant par des moyens empiriques à constituer une échelle musicale susceptible de s'accomoder à toutes les combinaisons de sons qu'on voudrait lui faire supporter. La solution adoptée par les musiciens est de répartir l'un ou l'autre de ces commas sur plusieurs intervalles afin d'en amortir l'impact. Selon les régions ou les époques, ils ont préféré privilégier certains intervalles au détriment d'autres, le problème essentiel revenant à effectuer un choix concrèt de système d'accords pour une littérature donnée.

[2]Ensemble de volets mobiles en bois qui ferme les tuyaux du récit. Ces volets, commandés par une pédale d'expression, s'ouvrent et se ferment pour permettre un effet ***pp*** → ***ff***

3.2. Exemples classiques

Mode de représentation

La représentation la plus commode du cycle des douze quintes d'un système d'accords est le cercle. Nous représentons ici la quinte pure par un "0" et la quinte altérée par un nombre précédé de "+" ou "-" indiquant la proportion de comma dont la quinte est altérée par rapport à sa valeur pure.

Le système pythagoricien

Durant tout le moyen-âge jusqu'à la fin du XV^{eme} siècle, c'était le système pythagoricien qui était utilisé. La pureté de la quinte est la caractéritique des musiques médiévales.

Le tempérament mésotonique

L'évolution du statut de la tierce dans la musique va amener l'accord des instruments du système pythagoricien au tempérament mésotonique. Le mésotonique aura une longue carrière devant lui puisqu'on le trouve encore dans des campagnes reculées en Italie au XIX^{eme} siècle. Il a été couramment utilisé en France jusqu'à la révolution alors qu'en Allemagne, il a été abandonné dès la fin du XVII^{eme} siècle. L'orgue Garnier de l'église Saint Paul à Strasbourg, accordé au tempérament mésotonique, possède un levier horizontal permettant à l'organiste de choisir entre ré dièse et mi bémol, et un autre levier entre sol dièse et la bémol. Par cette spécificité, il fait sonner à merveille la musique des XVI^{eme} et XVII^{eme} siècles.

Les tempéraments de transition

Les données historiques démontrent que l'évolution vers des systèmes moins limités du point de vue tonal a commencé très tôt en Allemagne tels en témoignent les tempéraments et le répertoire. En fait, les musiciens ont le souci d'accéder facilement aux tonalités éloignées.

Le tempérament égal

L'adoption du tempérament égal est en étroite relation avec la Révolution Française et la création du système métrique. Ainsi, au XIX^{eme} siècle, le tempérament égal s'est installé plus ou moins rapidement selon les régions dans toute l'Europe.

Voici un schéma sommaire résumant l'évolution de l'accord :

système pythagoricien→	← mésotonique →	tempéraments ← de transition →	← tempérament égal

Dans l'évolution de la manière d'accorder, comme dans tout autre domaine, les changements d'une époque à l'autre ne se sont évidemment pas produits de façon radicale. Il y a toujours des périodes de transition chevauchant les passages d'une tendance à l'autre, pendant lesquelles on reconnaît au travers des modifications et des changements apportés aux systèmes précédents la tendance et la structure des systèmes à venir. Euler, en particulier, a vécu dans cette période de transition où les musiciens préconisaient de plus en plus le tempérament égal. En effet, Euler bien conscient du problème écrit : "Plusieurs musiciens les [demi-tons] font égaux, quoique cela soit contraire aux principes de l'Harmonie : car de cette façon, aucune quinte ni aucune tierce n'est juste...Cependant, ils avouent eux-mêmes que la même pièce étant jouée du ton *C* ou d'un demi-ton plus haut *Cs*, change considérablement de nature, d'où il est clair, que tous les demi-tons ne sont effectivement pas égaux."

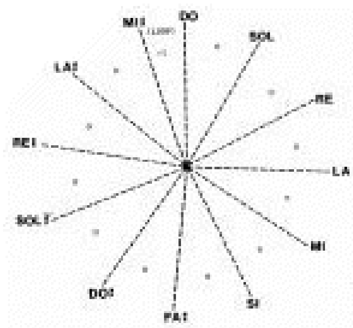

Fig. 2 – tempérament pythagoricien

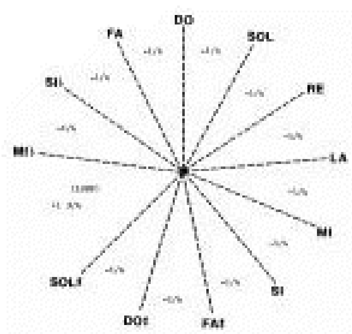

Fig. 3 – Tempérament mésotonique

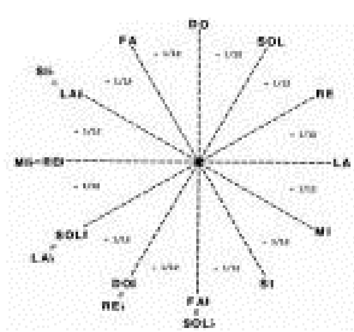

Fig. 4 – Tempérament égal

4. La musique moderne : ses caractéristiques, ses particularités

L'article "Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique" [2] vit le jour en 1764. Euler y expose de manière assez retenue voire imprécise une idée à propos de l'emploi des accords appelés aujourd'hui "septième de dominante". Ce type d'accords a vu le jour à la Renaissance, période charnière entre la musique modale et tonale. En réalité, ce type d'accords a simplement été établi par les musiciens de manière empirique ; seul le jugement de l'oreille a permis de le valider. Cependant, en 1764, Euler écrit un deuxième article intitulé "Du véritable caractère de la musique moderne" [3] où il expliquera réellement à l'aide de sa théorie de la musique pourquoi cet accord n'est absolument pas en contradiction avec les principes de l'Harmonie.

4.1. La sensibilité auditive

En réalité, l'oreille humaine est loin d'être parfaite : elle ne perçoit les proportions que renferment les sons que de manière approximative. Ainsi, sur un instrument accordé au tempérament égal, aucune quinte n'est pure mais l'oreille en est à peine affectée. En effet, la quinte y est exprimée par la proportion de 1 à $2^{\frac{7}{12}}$ et ceci est très proche de $\frac{2}{3}$.

Reprenons la Table 1 page 14. Le tempérament correspondant à ces proportions entre les tons est appelé *tempérament harmonique*. L'intervalle de B à f contient la proportion $\frac{675}{1024}$ et pourtant l'oreille la distingue à peine d'une véritable quinte. Ainsi, les proportions perçues par les sens sont souvent différentes des proportions réellement contenues dans les sons. Euler dit : "l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour une proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible'". Ceci est vrai sauf pour les octaves qui sont toujours pures.

En entendant l'accord de septième sur le ton G, une oreille traditionnelle essayera donc de substituer un rapport plus simple. Les nombres correspondant à G, H et d seront conservés car ils renferment un accord parfait. Cependant, Euler pense que les oreilles "substitueront à la place du dernier 64 celui de 63, afin que les rapports de nos quatre sons soient exprimés par les nombres 4, 5, 6, 7". De plus, à l'écoute, même une oreille très fine ne perçoit aucune différence entre ces deux accords. Ainsi, l'oreille substitue au son f un son un peu plus grave et la différence entre ces deux sons est un intervalle dont les proportions sont de 63 à 64. Pour résumer, Euler écrit : "l'oreille ne juge pas si sévèrement les sons qu'elle entend ; mais, pourvu qu'ils ne s'écartent point trop sensiblement des justes proportions, elle substitue quasi sans y penser les véritables proportions pour en retirer les sensations agréables".

Dans "Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique", Euler est très prudent et exprime seulement de manière retenue ses idées au sujet de l'emploi de l'accord de septième. Il fait brièvement référence aux travaux de d'Alembert.[3] Celui-ci pense que l'emploi de ces accords est bien fondé pour la raison suivante : l'accord de septième est uniquement utilisé lorsqu'il est sur le 5ème degré d'une tonalité majeure ou mineure et cette dissonance permet simplement de bien marquer la tonalité. Dans l'exemple précédent, l'accord de septième sur G est seulement employé dans une pièce dont la tonalité est C (majeur ou mineur) et ceci "fixe l'attention des auditeurs à ce ton, afin qu'ils ne s'imaginent pas que la composition ait passé au ton G". d'Alembert avait donc déjà compris que cet accord est simplement une signature tonale. Mais, Euler réfute cette explication, trop empirique à son gout : il souhaite découvrir la vraie raison du paradoxe énoncé précédemment.

Ce n'est qu'à la fin de son article, après avoir longuement argumenté à propos de la perception approximative des rapports pour une oreille humaine traditionnelle, qu'Euler suggère l'introduction du nombre 7. Il écrit alors "le grand Leibnitz a remarqué que dans la musique on n'a pas encore appris à compter au-delà de 5, mais si ma conjecture a lieu, on peut dire que dans la composition, on compte dejà jusqu'à 7...c'est un nouveau genre de musique ...c'est une perfection dans la

[3]D'ALEMBERT, *Eléments de musique théorique et pratique suivant les principes de M.Rameau*, Paris, 1752

composition”. Il développera réellement cette théorie dans l’article “Du véritable caractère de la musique moderne”.

4.2. Construction des 12 tons de la musique moderne

Etudions à présent les intervalles caractéristiques de la musique moderne. Nous avons vu que ceux-ci résultaient du nombre 7. L’intervalle qui servira de base à tous les autres est celui qui renferme un rapport de 4 à 7. Supposons que le ton C réponde au nombre 4 et on cherche alors le ton renfermant le nombre 7. On a :

$$\tfrac{3}{5} < \tfrac{4}{7} < \tfrac{9}{16}.$$

Le son cherché se trouve donc entre A et B : on le note B^* puisqu’il se rapproche plus de B que de A. Ainsi, c’est la simplicité des nombres 4, 5, 6, 7, 8 caractérisant l’accord C, E, G, B^*, c qui explique sa sonorité agréable. Euler écrit de plus : “Le nouveau son B^* qu’on ajoute à l’accord parfait lui procure une grâce toute particulière, à laquelle il faut attribuer les avantages de la musique moderne”. Bien entendu, en pratique, on peut employer cet accord dans sa position fondamentale ou considérer un des ses trois renversements.

renversements	suites de nombres
position fondamentale	4 : 5 : 6 : 7
1^{er} renversement	5 : 6 : 7 : 8
2^{eme} renversement	6 : 7 : 8 : 10
3^{eme} renversement	7 : 8 : 10 : 12

On reprend le tableau 1. On note y le nombre d’un ton principal. Par définition du ton marqué d’une étoile dont le nombre est noté x, on a la relation suivante :

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{7}.$$

Ainsi pour chaque ton principal, on peut donc construire le son marqué d’une étoile dont le rapport avec le ton principal est de 4 à 7. On obtient de cette manière douze autres tons, appelés *tons étrangers* qui sont employés dans la musique moderne. Le calcul est résumé dans le tableau suivant qui fournit tous les tons principaux et étrangers de la première octave, exprimés par des nombres entiers. (pour n’avoir que des nombres entiers, on a tout multiplié par 4) :

tons principaux		tons étrangers	
C	1536	B^*	2688
Cs	1600	H^*	2800
D	1728	C^*	3024
Ds	1800	Cs^*	3150
E	1920	D^*	3360
F	2048	Ds^*	3584
Fs	2160	E^*	3780
G	2304	F^*	4032
Gs	2400	Fs^*	4200
A	2560	G^*	4480
B	2700	Gs^*	4725
H	2880	A^*	5040

Ce sont réellement ces accords qui caractérisent la musique moderne. Euler écrit : “Il n'y a aucun doute que tous ces accords produiraient un meilleur effet, si l'on pouvait exprimer exactement sur les instruments les sons étrangers qui y entrent, la musique pourrait aussi de ce coté être portée à un plus haut degré de perfection, si l'on pouvait doubler le nombre des tons sur les clavecins.” Cependant, pour les instruments à sons fixes tels le clavecin ou l'orgue, le musicien est dans l'obligation d'employer le ton ordinaire qui se rapproche le plus du son marqué ici d'une étoile. De plus, cet accord sera encore d'une certaine beauté à cause de la perception approximative des rapports pour une oreille humaine traditionelle.

En ce qui concerne le ton à utiliser à la place du ton étoilé, Euler manque un peu de clarté. Dans la pratique, pour le son B^* par exemple, plus proche de B que de A, les musiciens emploient alors le ton B.

Conclusion

La musique se distingue du bruit par un certain ordre qui règne dans le phénomène sonore. Ceci résume à merveille toute la théorie musicale de Leonhard Euler. Malgré des propos parfois imprécis car novateurs pour l'époque, ce savant mathématicien a pu aider les artistes musiciens à comprendre ce qu'ils font. En réalité, depuis la Renaissance, on suit facilement des évolutions parallèles entre arts et sciences. Ceux-ci cheminent ainsi de concert, les uns devançant parfois les autres, certes, mais sur une voie commune.

Bibliographie

[1] Leonhard EULER (1761), Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de la physique et de la philosophie,dans *Œuvres complètes*, Ser. Tertia, volumes XI et XII .

[2] Leonhard EULER (1764), Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique, dans *Œuvres complètes*, Ser. Tertia, volume I.

[3] Leonhard EULER (1764), Du véritable caractère de la musique moderne, dans *Œuvres complètes*, Ser. Tertia, volume I.

[4] Gustave DU PASQUIER (1927), Leonhard Euler et ses amis, Librairie scientifique HERMANN, Paris.

[5] (1988), Leonhard Euler Briefwechsel, volumes II et V, *Birkhaeuser.*

[6] Hugues GENEVOIS, Yann ORLAREY (1997), Musique et mathématiques, *Aléas, Lyon.*

[7] Pierre Yves ASSELIN (1985), Musique et Tempéraments, théorie et pratique de l'accord à l'ancienne, *Costallat, Paris.*

[8] Dominique DEVIE, Le Tempérament musical, Philosophie, histoire, théorie et pratique, *Société de musicologie du Languedoc, Béziers.*

Myriam Fischer
Professeur agrégée de mathématiques
fischer_myriam@yahoo.fr