Famille cordique, Relation de similarité, et Uniformité maximum

Xavier Hascher

Résumé : On définit, pour un accord générateur appartenant à la classe des accords parfaits majeurs ou mineurs, sa famille dans la classe inverse lorsqu'il existe une relation de proximité maximale entre les éléments des accords composant cette famille et ceux de l'accord générateur. On définit une famille restreinte de cet accord lorsque sa structure d'ordre est préservée dans les membres de sa famille. La définition de famille cordique pour les accords tonals est ensuite généralisée aux collections de classes de hauteurs de l'espace chromatique. Elle est comparée à la relation de similarité de la théorie musicale des ensembles d'Allen Forte, et à la définition d'uniformité maximum chez Lewin.

N.B. Le lecteur trouvera en fin d'article (p. 44–46) un lexique des termes musicaux employés.

Introduction

La théorie musicale et analytique contemporaine fait de plus en plus fréquemment appel à des formalisations mathématiques, à la suite des travaux pionniers de l'école américaine (Milton Babbitt, Allen Forte, David Lewin, Richard Morris, John Rahn) et ceux d'Anatol Vieru et Guerino Mazzola en Europe. Aujourd'hui, ces recherches sont devenues une ramification particulière au sein de la musicologie internationale, et des séances spécifiques leur sont consacrées lors des congrès d'analyse musicale, et même parfois dans des rencontres de mathématiques comme celles de l'American Mathematical Society (AMS).

Se développant à partir de la théorie de la musique sérielle, puis s'étendant à l'analyse de l'ensemble de la musique atonale pour fournir à celle-ci les outils qui lui faisaient défaut, les approches mathématiques se sont intéressées par la suite au répertoire modal et tonal. Elles ont permis d'établir des passerelles entre ces différents langages musicaux, alors que les cloisons qui séparaient certains d'entre eux semblaient hermétiques aux musiciens eux-mêmes.

Dans l'étude qui va suivre, on aborde la notion de famille d'un accord, puis d'une collection de classes de hauteurs, dans une classe cordique donnée. Rappelons qu'une classe de hauteurs (en abrégé c.h.) est l'ensemble de toutes les notes en équivalence d'octave, soit toutes les notes de même nom, mais pouvant appartenir à des registres différents. La notation numérique associe à chacune des douze c.h. dans le tempérament égal, rangées dans l'ordre chromatique, une valeur de 0 à 11 :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \textit{do} & \textit{do}\sharp & \textit{ré} & \textit{mi}\flat & \textit{mi} & \textit{fa} & \textit{fa}\sharp & \textit{sol} & \textit{la}\flat & \textit{la} & \textit{si}\flat & \textit{si} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}$$

Une classe cordique est une classe d'équivalence pour la transposition, ou pour la transposition et l'inversion, considérées comme des lois de composition internes sur l'ensemble des c.h. On réserve le nom d' « accord » aux seules collections de classes de hauteurs particulières au système tonal. Au sein de ce dernier, tous les accords majeurs, par exemple, sont bien équivalents par transposition et appartiennent à une même classe, que l'on désigne par $[K^+]$. L'intérêt d'une telle notion de famille cordique est d'ordre à la fois théorique, analytique, et pratique (c.-à-d. compositionnel).

Les mathématiques auxquelles il est fait appel ici relèvent essentiellement de la théorie des ensembles et de la théorie des groupes. Dans la mesure du possible, on a rappelé brièvement les définitions des éléments de théorie musicale employés lorsqu'ils ne sont pas d'usage courant.

1. La transformation de mode dans le système tonal

1.1. Soit T une tonalité quelconque, majeure ou mineure, et T-PAR sa tonalité parallèle (c.-à-d. la tonalité ayant la même tonique, mais de mode opposé). Ces deux tonalités sont parallèles l'une de l'autre, de sorte que la tonalité parallèle de T-PAR n'est autre que T. Pour chacune de ces tonalités, on considère l'ensemble des accords parfaits majeurs et mineurs diatoniques lui appartenant, en négligeant par conséquent l'altération de sensible pour la tonalité mineure. On exclut, de même, l'accord diminué (du degré VII en majeur et II en mineur).

Si l'on compare l'accord occupant un degré harmonique donné dans une de ces tonalités avec celui occupant le même degré dans la tonalité parallèle, on constate que ces deux accords sont de mode opposé (à l'exception de II en majeur et de VII en mineur qui n'ont pas de pendant puisqu'il s'agit de l'accord diminué). Néanmoins, la transformation à effectuer sur chaque accord de T pour obtenir l'accord du degré correspondant dans T-PAR est différente selon les cas. Elle dépend du degré harmonique auquel appartient cet accord. Il s'agit :

Pour les accords des degrés I, IV et V, de la transformation PAR, qui affecte la tierce de l'accord en modifiant le signe de celui-ci, laissant la fondamentale et la quinte intactes ;

Pour les accords des degrés III et VI, de la transformation DOPPL, qui affecte la fondamentale et la quinte de l'accord et laisse la tierce intacte ; l'accord est transformé en l'accord de signe opposé placé au demi-ton inférieur ou supérieur, et ayant la tierce pour note commune.

Ainsi, le premier degré de *do* majeur C^+ se transforme-t-il en premier degré de *do* mineur C^- par PAR. Mais le sixième degré de *do* majeur, A, se transforme par DOPPL en sixième degré de *do* mineur, à savoir $A\flat^+$. Dans un cas c'est bien la tierce qui glisse d'un demi-ton en descendant, dans l'autre ce sont la quinte et la fondamentale qui glissent parallèlement alors que la tierce de l'accord, la note *do*, reste immobile. Inversement, l'application de PAR à C^- et de DOPPL à $A\flat^+$ restitue C^+ et A^- respectivement. Les mêmes transformations s'appliquent aux accords des autres degrés (fig. 1.1).

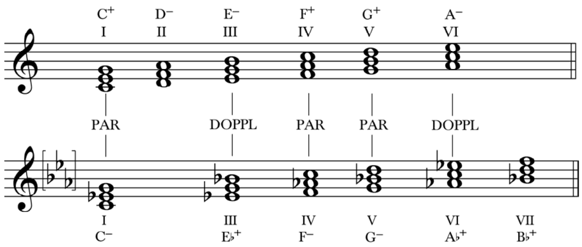

Fig. 1.1

1.2. Dans l'espace de la tonalité élargie, chromatique, il est possible d'appliquer PAR aux accords des degrés III et VI, aussi bien à partir du majeur que du mineur. Il devient également possible d'appliquer DOPPL aux degrés I, IV et V. Si bien que quelque soit le degré d'un accord, il est également susceptible d'être transformé par PAR ou DOPPL. On peut donc abandonner la référence au degré d'appartenance, et énoncer que chaque accord parfait K de cet espace, y compris le degré II en majeur et VII en mineur, est relié par glissement chromatique, soit de la tierce (gardant la quinte et la fondamentale inchangées), soit parallèlement de la quinte et de la fondamentale (gardant la tierce inchangée), avec deux accords parfaits de signe opposé. Ces deux accords réalisent une transformation de mode de K, tout en conservant leur fondamentale à proximité maximum de la fondamentale de celui-ci (c.-à-d. à une distance inférieure ou égale à un demi-ton). Ainsi, à partir de C^+, on obtient les accords C^- et $C\sharp^-$ (fig. 1.2.1) ; à partir de C^-, les accords C^+ et B^+ ($C\flat^+$) (fig. 1.2.2). Toutes les transpositions de ces figures donneront naturellement des résultats équivalents.

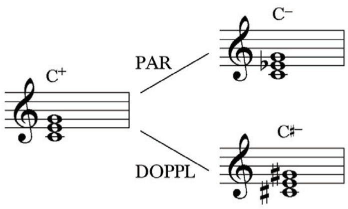

Fig. 1.2.1

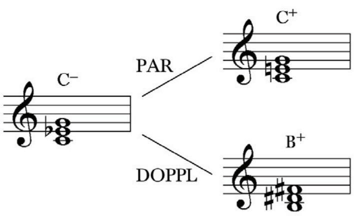

Fig. 1.2.2

2. Famille cordique et famille cordique restreinte d'un accord parfait (majeur ou mineur)

2.1. Cherchons à présent, pour tout accord parfait K majeur ou mineur, à établir quel est l'ensemble des accords reliés à lui par déplacement semitonal de une, deux, ou trois notes. Pour éliminer le cas trivial de la simple transposition, on pose la condition que l'accord résultant de la transformation doit être de signe opposé à *K*. À partir de l'accord majeur, les transformations qui permettront d'obtenir un accord appartenant à cet ensemble sont : PAR, DOPPL, PAR∘D, LT et POL. À partir de l'accord mineur, il s'agit de : PAR, DOPPL, PAR∘S, LT et POL.

Remarque. — D transforme un accord parfait *K* majeur ou mineur en dominante de l'accord résultant. S transforme *K* en sous-dominante de l'accord résultant. Comme D et S conservent le signe de *K*, elles doivent être composées avec PAR pour obtenir le changement de mode. LT (*Leittonwechsel*) échange la fondamentale d'un accord majeur contre la note située à son demi-ton inférieur, et la quinte d'un accord mineur contre la note placée à son demi-ton supérieur. POL transforme *K* en accord « polaire » de l'accord résultant, c'est-à-dire l'accord de signe opposé, sans note commune, dont chaque note est située à un demi-ton d'une note de l'autre accord. Nous ne revenons pas sur PAR (parallèle) et DOPPL (*Doppelterzwechsel*) qui ont été vues ci-dessus.

Comme précédemment, on recherche une modification minime, où l'accord résultant constitue une approximation aussi étroite que possible de *K*, au changement de sonorité près entraîné par l'échange de mode. Étant donné une conduite des voix où chaque note de l'accord résultant est relié à une note de *K* par l'intervalle le plus petit possible, ces deux notes sont à proximité maximum l'une de l'autre (leur distance est inférieure ou égale à un demi-ton). On verra plus loin que les accords résultants peuvent être classés en fonction du nombre de déplacements semitonals qu'ils impliquent, et donc de leur degré de différence avec *K* (« valeur d'écart », section 6.2).

À partir de C^+, on obtient l'ensemble des accords suivants : $\{C^-, E^-, F^-, A\flat^-, C\sharp^-\}$ (fig. 2.1.1). À partir de C^-, l'ensemble des accords suivants : $\{C^+, A\flat^+, G^+, E^+, B^+\}$ (fig. 2.1.2). Ici encore, toute transposition de chaque figure sera équivalente à celle-ci.

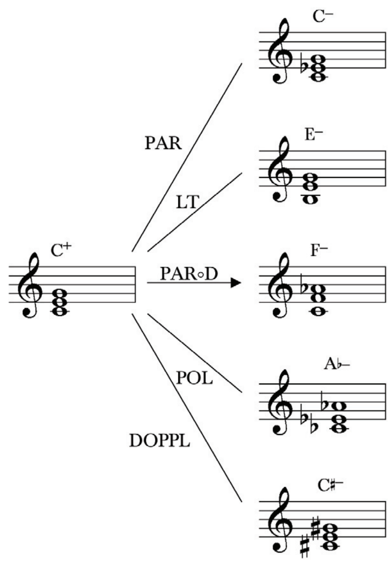

FIG. 2.1.1

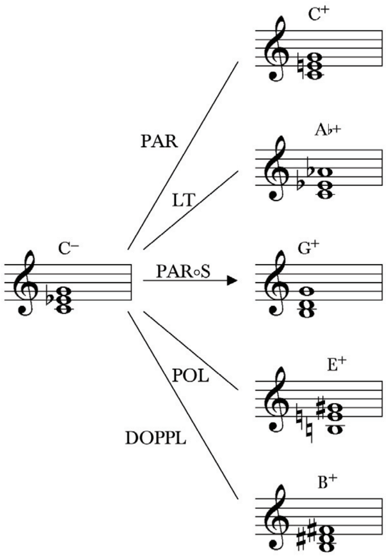

FIG. 2.1.2

2.2. Soit **K** l'ensemble des accords parfaits majeurs et mineurs. Soient I et $J \in$ **K**. Une famille cordique d'un accord générateur I est l'ensemble des J vérifiant la relation binaire $\mathcal{F}$ sur **K** définie par :

$I\mathcal{F}J \Leftrightarrow J$ est de signe opposé à I et chaque élément de J peut être ramené à une distance d'un demi-ton au maximum d'un élément de I. L'intervalle entre les éléments de I et de J appartient donc à la classe 0 ou 1.

On définit $\mathcal{F}(I)$:

$$\mathcal{F}(I) = \{J \in \mathbf{K} \mid I\mathcal{F}J\}. \tag{2.2.1}$$

Remarque. — Le codomaine de $\mathcal{F}$ est $\mathbf{K}^-$ lorsque I est majeur ; il est $\mathbf{K}^+$ lorsque I est mineur. En conséquence, la famille de I appartient à $\mathbf{K}^-$ lorsque I est majeur, à $\mathbf{K}^+$ lorsque I est mineur. $\mathcal{F}$ est symétrique ($J \in \mathcal{F}(I) \Leftrightarrow I \in \mathcal{F}(J)$), non réflexive ($I \notin \mathcal{F}(I)$), et non transitive.

2.3. Si l'on récrit numériquement les accords obtenus à partir des transformations semitonales définies ci-dessus (section 2.1), on obtient les résultats suivants, composant les familles cordiques respectives des accords générateurs :

• à partir de $\mathrm{C}^+ = (0,4,7)$,

$$(0,3,7),(11,4,7),(0,5,8),(11,3,8),(1,4,8)$$

dont l'ensemble forme $\mathcal{F}(\mathrm{C}^+)$;

• à partir de $\mathrm{C}^- = (0,3,7)$,

$$(0,4,7),(0,3,8),(11,2,7),(11,4,8),(11,3,7)$$

dont l'ensemble forme $\mathcal{F}(\mathrm{C}^-)$.

Les seuls accords de ces familles à respecter la structure d'ordre des accords parfaits, c'est-à-dire isomorphes à $(0,3,7)$ ou $(0,4,7)$, sont ici le premier et le dernier de chaque liste. Les autres accords sont permutés (ils ne sont pas musicalement en « position fondamentale ») et présentent par conséquent des types d'ordres différents. Comme l'ordre de l'accord mineur est inverse de l'accord majeur, et que les accords constituant la famille cordique d'un accord donné sont de signe opposé à celui-ci, on dit que parmi ces accords ceux dont l'ordre est anti-isomorphe à celui de l'accord générateur appartiennent à la *famille restreinte* de ce dernier. On définit la famille restreinte de $I \in \mathbf{K}$:

$$\hat{\mathcal{F}}(I) = \{J \in \mathbf{K} \mid I\mathcal{F}J \wedge (I;\preccurlyeq) \cong (J;\succcurlyeq)\}. \qquad 2.3.1$$

On limite ainsi la famille cordique d'un accord aux seuls accords dont la fondamentale est distante d'un demi-ton au maximum de celle de l'accord générateur, soit les accords définis en 1.2.

Si l'on suppose une conduite des voix par proximité maximum V_{pmax} entre I et J de signe opposé tels que $J \in \hat{\mathcal{F}}(I)$, alors il ne peut y avoir plus d'un demi-ton de distance entre la fondamentale, la tierce et la quinte de I et la fondamentale, la tierce et la quinte de J respectivement. En effet, si l'on considère V_{pmax}, on a soit

$$(p_J, t_J, q_J) = (p_I + 1, t_I, q_I + 1) \ \vee \ (p_J, t_J, q_J) = (p_I, t_I - 1, q_I),\ I \in \mathbf{K}^+,$$

soit

$$(p_J, t_J, q_J) = (p_I - 1, t_I, q_I - 1) \ \vee \ (p_J, t_J, q_J) = (p_I, t_I + 1, q_I),\ I \in \mathbf{K}^-$$

(voir fig. 2.3).

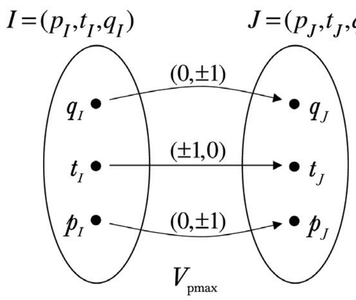

FIG. 2.3

3. Famille cordique d'un accord de cardinal > 3

3.1. On se propose d'étendre la notion de famille cordique à des accords de cardinal supérieur à 3, en restant comme précédemment dans l'espace de la tonalité élargie. Tout comme ci-dessus pour les accords majeurs et mineurs, inverses l'un de l'autre, on choisit de définir cette famille dans la classe des inverses de l'accord générateur.

Ainsi, si l'on prend pour accord générateur un accord de la classe $[K^{+}_{\flat 7}]$ (accord de septième « de dominante »), les accords de la famille cordique correspondante appartiendront normalement à la classe $[K^{0}_{\flat 7}]$ (accord de septième mineure et quinte diminuée). À partir de $\mathrm{C}^{+}_{\flat 7}$, on obtient donc la famille suivante :

$$\mathcal{F}(\mathrm{C}^{+}_{\flat 7}) = \left\{\mathrm{C}^{0}_{\flat 7}, \mathrm{C}\sharp^{0}_{\flat 7}, \mathrm{A}^{0}_{\flat 7}, \mathrm{A}\sharp^{0}_{\flat 7}, \mathrm{F}\sharp^{0}_{\flat 7}, \mathrm{G}^{0}_{\flat 7}, \mathrm{D}\sharp^{0}_{\flat 7}\right\}$$

(voir fig. 3.1).

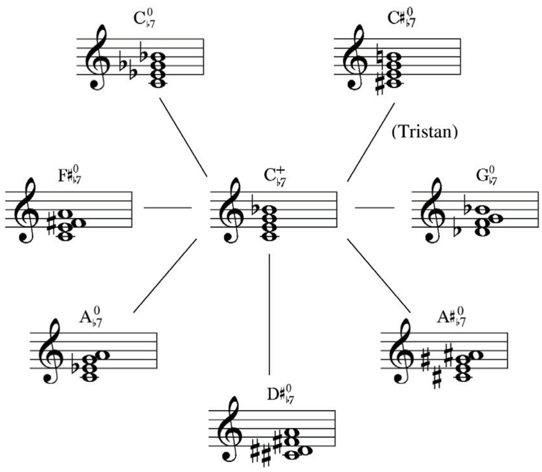

Fig. 3.1

Remarque. — La transformation $\mathrm{C}^{+}_{\flat 7} \mapsto \mathrm{C}\sharp^{0}_{\flat 7}$ constitue la récurrence, à la transposition près, de la succession de l' « accord de Tristan » (« motif du Désir »).

3.2. Afin de déterminer une famille restreinte, on a intérêt dans l'exemple précédent à renommer les accords $(0,3,7,9)$ et $(1,4,8,10)$ $\mathrm{C}^{-}_{(6)}$ et $\mathrm{C}\sharp^{-}_{(6)}$ respectivement, au lieu de $\mathrm{A}^{0}_{\flat 7}$ et $\mathrm{A}\sharp^{-}_{\flat 7}$. Ce faisant, on passe de la classe $[K^{0}_{\flat 7}]$ à la classe $[K^{-}_{(6)}]$ (accord parfait mineur et sixte ajoutée majeure). Or, les membres de ces deux classes sont identiques du point de vue de leurs éléments, mais diffèrent par leur structure d'ordre, qui est dépendante de celle de l'accord initial. En effet, soit l'on considère les accords de septième comme totalement (ou linéairement) ordonnés avec p (prime) plus petit élément et s (septième) plus grand élément, soit l'on considère un ordre partiel où q (quinte) et s sont tous deux éléments maximaux. Cette distinction n'a pas d'importance dans le cas général, où l'on peut considérer indifféremment l'une ou l'autre classe comme inverse de $[K^{+}_{\flat 7}]$.

L'inversion de l'ordre linéaire conduit, pour un accord appartenant à la classe $[K^{0}_{\flat 7}]$, à considérer s comme plus petit élément et p comme plus grand élément ; en revanche, l'inversion de l'ordre riemannien donne q comme plus petit élément, et p et s comme éléments maximaux. Conformément à la notation originelle de Riemann, où l'on écrit g^{VII} et gis^{VII} respectivement pour $\mathrm{C}^{-}_{(6)}$ et $\mathrm{C}\sharp^{-}_{(6)}$, la septième inférieure est ici calculée à partir de q, représentée, dans cet exemple, par la classe de hauteurs 7 (*sol*) dans l'accord générateur $\mathrm{C}^{+}_{\flat 7}$.

Cette distinction vaut pour l'ensemble des accords de septième lorsque l'on étend à ceux-ci la définition de la famille restreinte donnée en 2.3.1. On doit donc définir à quel type d'ordre (linéaire ou riemannien) on se réfère pour établir un anti-isomorphisme d'accords.

Pour $C^{+}_{\flat 7}$, sa famille restreinte comprend dès lors $C^{0}_{\flat 7}$ et $C\sharp^{0}_{\flat 7}$ si l'on se réfère à l'ordre linéaire, $C^{-}_{(6)}$ et $C\sharp^{-}_{(6)}$ si l'on se réfère à l'ordre riemannien. Cette dernière définition présente l'avantage d'être conséquente avec celle de la famille cordique restreinte de C^{+}, composée de C^{-} et de $C\sharp^{-}$. Là où $C^{+}_{\flat 7}$ constitue une extension de C^{+}, qui inclut ce dernier, les membres de la famille restreinte riemannienne incluent les membres de la famille restreinte de C^{+}, dont ils constituent des extensions. On a bien, en effet, $C^{-} \subset C^{-}_{(6)}$ et $C\sharp^{-} \subset C\sharp^{-}_{(6)}$. Cette continuité disparaît lorsqu'on considère la famille restreinte linéaire.

4. Famille cordique d'une c.c.h. chromatique

4.1. On tente à présent de généraliser la définition de famille cordique à l'ensemble des collections de classes de hauteurs (c.c.h.) chromatiques équivalentes par transposition (mais non par inversion), et non plus seulement à l'ensemble des accords classés tonals de trois ou quatre sons.

Remarque. — Une classification communément utilisée telle que la table de Forte [1] doit donc être modifiée afin de distinguer les c.c.h. de leurs inverses.

On a jusqu'ici défini la famille cordique dans la classe inverse de l'accord générateur. Ce choix se justifie pour des raisons de pertinence analytique dans le contexte tonal. Il est néanmoins possible d'étendre la définition de famille cordique à n'importe quelle classe d'accord équipotente à la classe de l'accord générateur. Pour éviter le cas trivial de la transposition, on maintient néanmoins la condition que la classe source soit différente de la classe but (pour la transposition).

Définition 4.1.1. Une famille cordique généralisée d'une collection de classes de hauteurs I donnée se définira donc comme l'ensemble des c.c.h. J vérifiant les propriétés suivantes :

- I et J ne sont pas équivalents par transposition ;
- $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(J)$;
- $\forall\, j \in J, \exists\, i \in I$ tel que $d(i, j) \leq 1$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dira que $J \in \mathcal{F}(I)$, ou que $I \mathcal{F} J$. Comme il peut y avoir plusieurs familles pour une même c.c.h. génératrice, on doit donc préciser la classe dans laquelle on définit la famille.

Dans le cas où $[J] = \mathrm{inv}([I]) = [I]$, on ne peut définir de famille cordique dans cette classe.

Remarque. — Étant donné la difficulté d'établir des relations d'ordre sur les c.c.h. dans le contexte atonal, on réserve la possibilité de définir une famille restreinte.

4.2. L'appartenance à une famille cordique constitue une particularité analytiquement intéressante dans le contexte atonal puisqu'elle limite le nombre de c.c.h. en relation en sélectionnant leurs niveaux de transposition. Une famille cordique constitue un sous-ensemble de la classe d'équivalence dans laquelle elle est définie.

Exemple 4.2.1. On cherche à déterminer la famille cordique de la collection $I = \{0,6,11\}$ d'une part dans sa classe inverse $[0,1,6]$, d'autre part dans la classe $[0,10,5]$. Les intervalles de transposition concernés sont dans le premier cas t_0 et t_{11} (fig. 4.2.1.1) ; dans le deuxième cas, t_0 et t_1 (fig. 4.2.1.2).

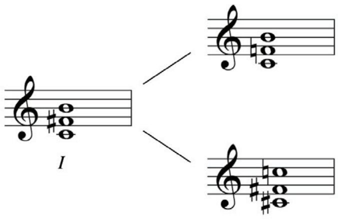

Fig. 4.2.1.1

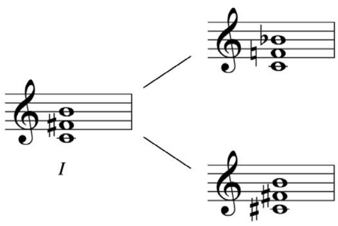

Fig. 4.2.1.2

Exemple 4.2.2. La *Pièce pour piano* op. 19/1 de Schœnberg se termine par une succession de trois c.c.h. I, J, et K (mes. 17). La collection I appartient à la classe $[0,1,3,5,7]$, la collection J à la classe $[0,1,2,5,7]$, et la collection K à la classe $[0,1,2,4,8]$. Il suffit d'appliquer t_3 à chacune de leurs formes normales pour retrouver le contenu des collections I, J, K. On voit donc directement que chaque c.c.h. est reliée par $\mathcal{F}$ à chacune des deux autres, lesquelles appartiennent à la famille cordique de cette c.c.h. dans la classe concernée (fig. 4.2.2).

Fig. 4.2.2

Remarque. — Lorsque l'on passe de I à J dans l'exemple 4.2.2, on ne déplace qu'une seule note par mouvement chromatique, les autres notes étant communes aux deux collections et formant une sous-collection $S = I \cap J$. Non seulement les collections I et J vérifient la relation $\mathcal{F}$, mais elles vérifient également la relation R_h.

5. La relation de similarité R_h Famille de classe

5.1. On définit, d'après Allen Forte [1], une relation de similarité R_h entre deux c.c.h. E_1 et E_2 de même cardinal n :

$$R_h(E_1, E_2) \Leftrightarrow \exists\, E_3 \text{ de cardinal } n-1, \text{ tel que } E_3 \subset E_1 \wedge E_3 \subset E_2.$$

Cette relation est donc différente de celle d'appartenance à une famille cordique, mais vient à coïncider avec elle lorsque la distance entre $a \in E_1 \backslash E_2$ et $b \in E_2 \backslash E_1$ est égale à 1. Dans ce cas, R_h et $\mathcal{F}$ sont toutes deux vérifiées, et le couple $(E_1, E_2) \in R_h \cap \mathcal{F}$. Cette propriété est intéressante du point de vue musical.

En effet, alors que pour une c.c.h. donnée il existe fréquemment un nombre important de collections vérifiant R_h, le nombre de collections vérifiant à la fois R_h et $\mathcal{F}$ est plus réduit. Ceci est d'autant plus significatif que, pour R_h, les niveaux de transposition respectifs de E_1 et E_2 maintiennent le nombre maximum de classes de hauteurs communes entre les deux collections.

Lorsque, au contraire, en fonction des niveaux de transposition choisis pour E_1 et E_2 on a $\mathrm{card}(E_3) < n-1$, alors la relation R_h est faible.

5.2. On peut également affaiblir la définition de $\mathcal{F}$ en l'étendant à tous les représentants des classes canoniques d'équivalence pour la transposition de deux collections I et J, lorsque ces collections elles-mêmes vérifient $\mathcal{F}$:

$$I\,\mathcal{F}J \Rightarrow \forall I' \in [I], \forall J' \in [J]\ (I'\,\mathcal{F}J'). \qquad 5.2.1$$

On a alors intérêt à parler de famille de classe, dont l'appartenance est définie par

$$[J] \in \mathcal{F}([I]) \Leftrightarrow \forall I \in [I], \forall J \in [J]\ (I\,\mathcal{F}J). \qquad 5.2.2$$

6. Famille cordique et relation d'uniformité maximum

6.1. Dans sa forme faible aussi bien que dans sa forme stricte, la relation d'appartenance à une famille cordique implique l'existence d'une conduite des voix bijective maximalement uniforme au sens de Lewin [2]. On rappelle les définitions d'une telle conduite des voix :

Définition 6.1.1. Étant donné deux collections de classes de hauteurs A et B, de cardinal égal ou différent, une conduite des voix V de A vers B sera dite maximalement uniforme si elle diffère aussi peu que possible d'une transposition littérale ;

Définition 6.1.2. Soit une conduite des voix maximalement uniforme d'une c.c.h. A vers une c.c.h. B. L'indice de pseudo-transposition n de V est le nombre (positif ou négatif) de demi-tons par lequel B peut être considéré comme « presque une transposition » de A ;

Définition 6.1.3. La valeur de déport de V est le nombre absolu de demi-tons (ascendants ou descendants) par lesquels V diffère d'une transposition littérale $t_n(A)$. Si cette valeur est nulle, on a $B = t_n(A)$.

Définition 6.1.4. Étant donné deux collections équipotentes de classes de hauteurs A et B, une conduite des voix bijective V de A vers B sera dite maximalement uniforme si elle diffère d'une transposition littérale de A vers $t_n(A)$ par la plus petite valeur de déport possible parmi toutes les conduites des voix bijectives de A vers B.

S'il existe une conduite des voix bijective maximalement uniforme d'une c.c.h. A vers une c.c.h. B, on dit que B est en relation d'uniformité maximum avec A, ou que B est maximalement uniforme à A.

Remarque. — Une conduite des voix est surjective quand chaque classe de hauteurs de B est l'image d'une classe de hauteurs de A ; lorsque A et B sont de même cardinal, une conduite des voix est bijective si et seulement si elle est surjective.

6.2. Si $B \in \mathcal{F}(A)$ dans $[B]$, alors il existe une conduite des voix bijective maximalement uniforme de A vers B. Mais l'inverse n'est pas toujours vérifié : $B = V_n(A)$ n'implique pas que $B \in \mathcal{F}(A)$. Néanmoins, il existe toujours au moins un indice de pseudo-transposition tel que $V_n(A) \in \mathcal{F}(A)$. En effet, on a $V_0(A) \in \mathcal{F}(A)$.

Pour la définition faible et la définition de famille de classe, on vérifie simplement que pour tout $A \in [A]$ et pour tout $B \in [B]$ entre lesquels existe une conduite des voix bijective maximalement uniforme, $A\mathcal{F}B$.

6.3. À chaque membre de $\mathcal{F}(A)$ strictement définie peut être attribuée une valeur d'écart, correspondant à la somme des valeurs absolues des déplacements de demi-tons de A vers B. Contrairement à la valeur de déport pour la relation d'uniformité maximum, la valeur d'écart ne peut jamais être nulle.

Exemple 6.3.1. On considère à nouveau les collections de l'exemple 4.2.1.1 avec $I = \{0, 6, 11\}$, et les deux membres de $\mathcal{F}(I)$ dans la classe [0,1,6], $J = \{0, 5, 11\}$ et $J' = \{0, 1, 6\}$. Ces deux c.c.h. sont maximalement uniformes à A avec $J = V_0(I)$ et $J' = V_1(I)$, et un déport invariant de 1 demi-ton. En revanche, la valeur d'écart, qui est égale à 1 pour J, est de 2 pour J'.

7. Famille cordique diatonique
Élargissement de la définition de famille cordique

7.1. Dans le contexte de la tonalité diatonique, il peut être intéressant de définir des familles cordiques d'accords générateurs correspondant aux fonctions harmoniques principales. On définit ainsi, en maintenant une valeur d'écart de 1 (ton ou demi-ton diatonique), la famille cordique des accords des degrés I, IV et V dans la classe des accords de signe opposé réunie à la classe des accords diminués (c'est-à-dire dans l'ensemble complémentaire, dans la tonalité, de l'ensemble formé par les accords des degrés I, IV, V).

Une telle famille comprend :

• pour I, les accords des degrés VI et III, soit

$$\mathcal{F}(\mathrm{I}^+) = \{\mathrm{III}^-, \mathrm{VI}^-\} \ ; \mathcal{F}(\mathrm{I}^-) = \{\mathrm{III}^+, \mathrm{VI}^+\} \ ;$$

• pour IV, les accords des degrés II et VI, soit

$$\mathcal{F}(\mathrm{IV}^{+}) = \{\mathrm{II}^{-}, \mathrm{VI}^{-}\} \;;\; \mathcal{F}(\mathrm{IV}^{-}) = \{\mathrm{II}^{0}, \mathrm{VI}^{+}\} \;;$$

• pour V, les accords des degrés III et VII, soit

$$\mathcal{F}(\mathrm{V}^{+}) = \{\mathrm{III}^{-}, \mathrm{VII}^{0}\} \;;\; \mathcal{F}(\mathrm{V}^{-}) = \{\mathrm{III}^{+}, \mathrm{VII}^{+}\}.$$

On relie ainsi chaque accord d'un degré principal, soit à ses deux accords relatifs (relatif et contre-relatif), soit, pour V en majeur et IV en mineur, à son relatif et les accords diminués sur VII et II respectivement (soit les accords correspondants de septième et septième duale sans fondamentale). On crée de ce fait, pour chaque accord générateur, un groupe cordique mono-fonctionnel réunissant cet accord aux membres de sa famille.

7.2. On peut modifier la définition de $\mathcal{F}$ telle qu'elle est donnée en 4.1.1 de façon à composer une famille dans une classe de cardinal différent de la collection génératrice. De telles familles ne sont pas examinées ici.

Bibliographie

[1] Allen FORTE (1973), The Structure of Atonal Music, *Yale University Press*.

[2] David LEWIN (1998), *Some Ideas About Voice-Leading between Pcsets*, Journal of Music Theory 42.1, 15–72.

Xavier HASCHER
Université Marc-Bloch (Strasbourg-II)
xavier.hascher@umb.u-strasbg.fr

LEXIQUE DES TERMES MUSICAUX

Accord : collection ordonnée de classes de hauteurs possédant certaines propriétés intervallaires. Les accords classés appartiennent au vocabulaire spécifique de la musique tonale. Ils sont nommés d'après les intervalles diatoniques entre la fondamentale (ou prime, plus petit élément dans les accords parfaits majeurs, plus grand élément dans les accords parfaits mineurs) et les autres éléments de l'accord, les intervalles de tierce et de quinte étant le plus souvent sous-entendus par commodité. L'accord est nommé d'après sa fondamentale.

Altération : déplacement d'un demi-ton, ascendant ou descendant selon la pente de l'altération, d'une note diatonique.

Atonal : système musical chromatique, sans référence à une tonique, et utilisant un matériau excluant a priori les accords du système tonal, mis en œuvre dans la première moitié du XX^{e} siècle, notamment par les compositeurs de la Seconde École de Vienne.

Chromatique : 1. **Espace chromatique :** espace musical pouvant être représenté sur une horloge arithmétique à douze chiffres. 2. **Tonalité chromatique** (ou **tonalité élargie**) : système tonal dont le matériau est l'union des matériaux diatoniques d'une tonalité majeure et de la tonalité mineure parallèle (c.-à-d. la tonalité de même nom, mais de signe opposé).

Collection de classes de hauteurs (c.c.h.) : ensemble non-ordonné de classes de hauteurs ; les c.c.h. ayant la même forme normale appartiennent à une même classe d'équivalence pour la transposition et l'inversion (classe canonique).

Cordique : relatif aux accords ou, au sens large, aux c.c.h.

Degré : ordinal, exprimé en chiffres romains de I à VII, associé à chaque note de la gamme diatonique, servant à désigner la fondamentale des accords, et, par simplification, ces accords eux-mêmes.

Diatonique : espace musical dont les éléments sont ceux de la gamme majeure (*do*, *ré*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*) ou de la gamme mineure (*la*, *sol*, *fa*, *mi*, *ré*, *do*, *si*) sans altération, et les gammes équivalentes pour la transposition.

Diminué (*accord*) : accord obtenu par altération descendante de la quinte d'un accord parfait mineur, ou par altération ascendante de la fondamentale d'un accord parfait majeur. On associe à l'accord diminué le signe 0.

Fondamentale (*position*) : disposition musicale d'un accord où la fondamentale se trouve à la basse.

Hauteur : autre désignation pour *note.*

Hauteurs (*classe de*) : ensemble des notes en relation d'octave (c.-à-d. dont le rapport des fréquences fondamentales est une puissance entière de 2) ; on associe à chacune des douze classes de hauteurs une valeur modulo 12 correspondant à l'intervalle entre ces classes et une classe de référence, par convention la classe *do.*

Intervalle : distance entre deux notes, mesurée soit en nombre de degrés diatoniques ou d'heures sur une horloge arithmétique à sept chiffres (en comptabilisant la note de départ), soit en nombre de demi-tons.

Inversion : opération qui a une classe de hauteurs h et pour une valeur fixe m (l'indice de l'inversion), associe la classe de hauteurs dont l'intervalle avec la classe de référence est $i_m(h) = m - h$ modulo 12. L'inversion est une réflexion dans l'espace musical.

Majeur : 1. **Accord parfait majeur**, composé d'une tierce majeure et d'une quinte juste au dessus de la fondamentale (on associe à l'accord parfait majeur le signe +) ; c.c.h appartenant à la classe [0,4,7] et munie d'une relation d'ordre. 2. **Tonalité majeure***,* système tonal où les accords parfaits de tonique, dominante et sous-dominante sont majeurs.

Mineur : 1. **Accord parfait mineur**, composé d'une tierce mineure et d'une quinte juste au-dessus de la fondamentale (on associe à l'accord parfait mineur le signe −) ; c.c.h appartenant à la classe [0,3,7] dont l'ordre est anti-isomorphique à celui de l'accord majeur. 2. **Tonalité mineure***,* système tonal où les accords parfaits de tonique, dominante et sous-dominante sont mineurs.

Normale (*forme*) : la forme normale d'une c.c.h. correspond à la permutation, éventuellement combinée à une inversion, permettant de présenter cette c.c.h. sous sa forme la plus compacte possible (intervalle minimum entre les notes extrêmes, plus petit intervalle de la première à la deuxième note, de la première à la troisième note, etc.), puis transposée pour commencer sur la classe de hauteurs 0.

Parfait (accord) : accord dérivé de la tranche harmonique basse (harmoniques 1, 3, 5) de la résonance naturelle, obéissant au principe de consonance. Les accords parfaits peuvent être majeurs ou mineurs.

Mode : dans le contexte de la tonalité, qualité majeure ou mineure d'un accord ou d'un système tonal ; pour éviter toute ambiguïté avec les systèmes modaux, il est préférable de parler de signe (+ ou −).

Note : son de hauteur mesurable (en hertz), désigné par une syllabe (*do*, *ré*, etc.) ou une lettre (C, D, etc.) éventuellement suivie d'une altération, et d'un indice précisant l'octave à laquelle ce son appartient. Lorsqu'on assimile toutes les notes de même nom sans référence à leur octave, on parle de *classe de hauteurs*.

Sensible : tierce majeure de l'accord placé à la quinte supérieure de la tonique ; dans une tonalité mineure, cette tierce doit être altérée pour devenir majeure, et prendre le nom de sensible.

Septième (*accord de*) : accord de cardinal 4 (fondamentale, tierce, quinte, septième) obtenu par extension d'un accord parfait ou diminué. Dans la notation des accords de septième, on désigne la septième mineure par ♭7 et la septième majeure par ♯7.

Sixte ajoutée (*accord de*) : accord de cardinal 4 (fondamentale, tierce, quinte, sixte) obtenu par extension de l'accord parfait majeur ou mineur.

Système tonal : voir *tonalité*.

Tonalité : Système musical complexe, à plusieurs niveaux hiérarchiques, défini en référence à une classe de hauteurs et à un accord parfait majeur ou mineur dont la fondamentale (la tonique) appartient à cette classe, et constituant un langage muni de règles et de contraintes variables historiquement, applicables à :

a) un vocabulaire harmonique constitué d'accords « classés » et de syntagmes fonctionnels, eux-mêmes définis en référence à l'accord parfait de tonique et aux accords parfaits ayant pour fondamentale la quinte supérieure et la quinte inférieure de la tonique respectivement ;
b) la relation entre la partie supérieure (ou principale) et la basse ;
c) la répartition des accents et l'ordre de succession des événements musicaux (dont les modulations).

Sans qu'ils participent strictement à sa définition, la tonalité est également associée à :

a) des principes de conduite des voix d'un accord vers son successeur (contrepoint) ;
b) un langage rythmique, dont les règles sont également variables historiquement.

Le matériau diatonique de la tonalité est l'ensemble des notes contenues dans les accords de tonique, dominante et sous-dominante, et des accords pouvant être formés à partir de ces notes. Du point de vue historique, la tonalité (dans la musique occidentale savante) correspond par simplification à une plage allant du XVII^e siècle à la fin du XIX^e siècle.

Tonalité de (*nom de note, signe*) : système tonal ayant pour tonique la classe de hauteurs désignée par cette note. Toutes les tonalités d'un même signe étant équivalentes à une transposition près, il n'existe que deux types historiques de systèmes tonals, le majeur et le mineur. On peut en imaginer d'autres (systèmes duals).

Tonalité élargie : voir *chromatique* (*tonalité*).

Transposition : opération qui à une classe de hauteurs h et un intervalle n associe la classe de hauteurs dont l'intervalle avec la classe de référence est $t_n(h) = n + h$ modulo 12. La transposition est une translation dans l'espace musical.