

QUELQUES EXEMPLES D'UTILISATION DES MATHÉMATIQUES DANS LA THÉORIE ET LA COMPOSITION MUSICALES

Rachel TACQUARD

Résumé : Dans cet article, je vais donner des exemples d'utilisation de structures algébriques dans la composition et dans la théorie musicale. En particulier, je mentionnerai certains aspects de la musique de Messiaen et de Xenakis, ainsi que le travail du mathématicien Ronald C. Read.

Introduction

Depuis l'Antiquité grecque et jusqu'à la fin du Moyen Âge, la musique n'était pas dissociée des sciences : elle faisait partie de l'enseignement et des traités de mathématiques, à égalité avec l'arithmétique, l'astronomie et la géométrie. Elle a motivé une certaine quantité de recherches dans le domaine de la physique, mais aussi en mathématiques, par exemple sur les équations diophantiennes ou la théorie des moyennes. Au VI^e siècle avant Jésus-Christ, Pythagore fut celui qui inaugura cette longue amitié entre mathématiques et musique en trouvant une relation entre les intervalles musicaux et les fractions d'entiers. Lui et ses disciples, les pythagoriciens, se sont beaucoup penchés sur la théorie de la musique et ont attaché un grand intérêt à la symbolique des nombres qui a été le moteur de beaucoup de leurs recherches. (Plus tard, Bach mais aussi Bartok, Berg et bien d'autres ont fait jouer un grand rôle aux nombres dans leur musique.)

Ce lien étroit n'a pas totalement disparu avec l'évolution des mathématiques ; il a au contraire presque évolué en parallèle avec les mathématiques. L'analyse musicale, ainsi que la composition, ont par exemple utilisé des éléments de théorie des probabilités ou celle des groupes. Nous nous intéressons ici en particulier à ce dernier point. À l'aide de quelques exemples, nous essayerons de donner un aperçu de l'utilisation des mathématiques, et plus particulièrement des groupes, dans le domaine musical : dans la composition, avec les approches de Messiaen et Xenakis, et dans les problèmes de dénombrement générés par des questions de musique.

1. Composition et groupes chez Messiaen

Né en 1908 en Avignon, mort en 1992, Olivier Messiaen a été l'un des grands compositeurs de musique du XX^e siècle. Également théoricien et professeur, de nombreux musiciens sont passés dans ses classes, à l'image de Stockhausen et Xenakis. Ses idées ont énormément enrichi la musique contemporaine pendant de nombreuses années. Dans ces quelques pages, nous allons aborder certains aspects de sa théorie qui font appel à la théorie des groupes.

Avant d'en dire plus, nous allons rappeler le formalisme mathématique qui va nous servir à décrire certaines caractéristiques des techniques de composition de Messiaen. Il s'agit de représenter chaque note de la gamme chromatique du tempérament égal par un entier relatif modulo 12. C'est Milton Babbitt, compositeur, musicologue et mathématicien qui a introduit de manière systématique cette façon de faire, et ce dans le cadre de la musique dodécaphonique.



FIG. 1 – La gamme chromatique

Ainsi, les notes do, do #, ré, ré #, mi, fa, fa #, sol, sol #, la, la # et si sont représentées respectivement par les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11 :

Deux notes sont donc “égales” si elles diffèrent d’un multiple de l’octave, tout comme deux entiers sont égaux dans le groupe cyclique $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ s’ils diffèrent d’un multiple de 12. Cette notion est plutôt naturelle car, par exemple, on a parfois du mal à reconnaître si deux notes, jouées par des instruments différents, sont identiques ou diffèrent d’une octave. Il nomme *pitch class* (ce qui signifie “classe de hauteur”, pour la hauteur de la note) la classe d’équivalence d’une note, représentée par la classe correspondante dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, et *pitch class set* un ensemble de ces classes de hauteurs, représenté par un sous-ensemble du groupe $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

On peut alors constater que si on néglige la fréquence exacte de la note, i.e. si on la ramène aux notes de base modulo l’octave, on a effectivement une structure de groupe sur les notes de la gamme chromatique.

On exprime donc de façon formelle ce qui s’appelle la transposition en musique, c’est-à-dire le déplacement d’un ensemble de notes d’un ou de plusieurs demi-tons (plus haut ou plus bas) : il s’agit de la translation modulo 12 dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. L’ensemble des transpositions est donc un groupe engendré par $x \mapsto x + 1$. De même, l’inversion correspond à l’opération $x \mapsto -x$.

Il faut remarquer que Messiaen n’a jamais utilisé ce langage mathématique pour décrire par exemple ce qu’il appelle les modes à transposition limitée ou les permutations, ce qui ne l’a pas empêché d’en donner une description précise en langage musical dans plusieurs de ses ouvrages tout en étant conscient de la nature mathématique de certaines propriétés (dans [4]).

1.1. Modes à transposition limitée

Dans son *Traité de rythme, de couleur et d’ornithologie*, Messiaen a décrit les modes comme étant une succession de notes distinctes qui permettent de décrire l’atmosphère d’une œuvre musicale.

On l’aura compris, Messiaen portait un intérêt particulier aux modes à transposition limitée : il les a définis comme étant une suite de notes toutes différentes, telles que si on les transpose un petit nombre de fois (i.e. par un diviseur strict de 12 : 2, 3, 4 ou 6), on retombe sur les mêmes notes, et ce en identifiant la gamme chromatique tempérée de 12 notes à $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. Ainsi, un mode k fois transposable est tel que si on lui applique la translation $x \mapsto x + k$, on obtient les mêmes notes, à permutation circulaire près. L’expression “transposition limitée” se justifie par le fait qu’on ne peut transposer indéfiniment sans retomber sur les mêmes notes. C’est dans ce genre d’impossibilités que Messiaen trouvait un charme particulier. Il dit lui-même dans [4] : « C’est une musique chatoyante que nous

cherchons, donnant au sens auditif des plaisirs voluptueusement raffinés. [...] Ce charme [des impossibilités], à la fois voluptueux et contemplatif, réside particulièrement dans certaines impossibilités mathématiques des domaines modal et rythmique ». En effet, l'oreille humaine est sensible aux symétries qui ne sont pas d'ordre trop grand, c'est-à-dire qui sont appréhendées plus facilement, ce qui confère à la musique qui en utilise un intérêt particulier.

On va voir qu'il est intéressant de décrire les modes à transposition limitée en termes d'éléments de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, car cela permet de mettre en évidence les symétries de tels modes.

Premier mode

Ce mode est deux fois transposable : il est invariant par l'application $t : x \mapsto x + 2$. Précisons que l'on considère que deux suites de notes sont équivalentes si elles sont égales à translation près. Dans le cas des modes, cela implique que deux suites d'éléments de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ (c'est-à-dire de notes au sens des pitch class) représentent le même mode si elles sont égales modulo un entier n , et sont deux transpositions différentes du même mode. Ceci est bien une relation d'équivalence, et nous permet donc de dire que, modulo cette relation, le premier mode est $\{0, t(0), t^2(0), t^3(0), t^4(0), t^5(0)\}$, l'orbite de 0. Il s'écrit $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, ou encore do, ré, mi, fa $\sharp$, sol $\sharp$, si $\flat$.

Deuxième mode

C'est le mode préféré de Messiaen. Dans [4], il fait remarquer que d'autres compositeurs s'en sont aussi déjà servi, plus ou moins consciemment selon les cas, comme Ravel, Stravinsky ou Scriabine.

Le mode 2 est trois fois transposable : c'est-à-dire que sa représentation modulo 12 est un sous-ensemble de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ invariant par $u : x \mapsto x + 3$. On prend pour cette suite la réunion des orbites de 0 et de 1 pour l'action de l'application de u . C'est donc $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$ ou bien do, ré $\flat$, mi $\flat$, mi, fa $\sharp$, sol, la, si $\flat$:

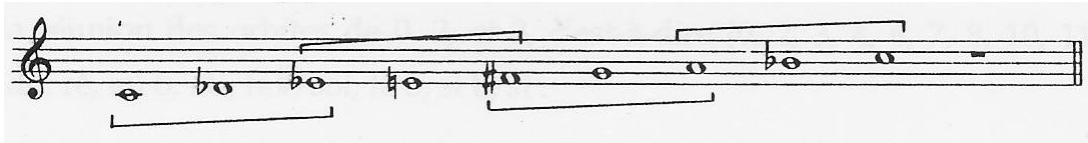


FIG. 2 – Première transposition du deuxième mode

Il se divise en groupes “symétriques” (d’après l’appellation de Messiaen) de deux façons : la première façon consiste à séparer le mode en quatre parties de deux notes : $\{0, 1 | 3, 4 | 6, 7 | 9, 10\}$. Ce qui caractérise ces groupes, c’est qu’on peut leur appliquer la translation u , et leur configuration est invariante par u . La deuxième manière de grouper est de le faire en 4 groupes de 3 notes chacun : $\{0, 1, 3 | 3, 4, 6 | 6, 7, 9 | 9, 10, 12\}$ (voir la figure 2). La même translation aura les mêmes effets sur ce découpage.

On l’a évoqué un peu plus haut, un mode se présente sous plusieurs formes équivalentes. La première transposition du deuxième mode est : $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$. C’est l’état initial représenté sur la figure 2.

La deuxième est la même décalée de +1 (figure 3). La troisième est représentée sur la figure 4.

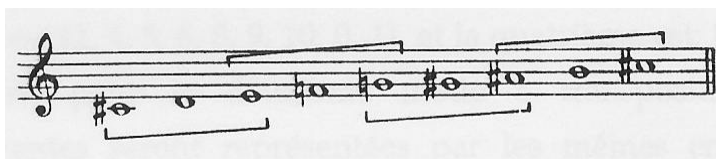


FIG. 3 – Deuxième transposition du deuxième mode

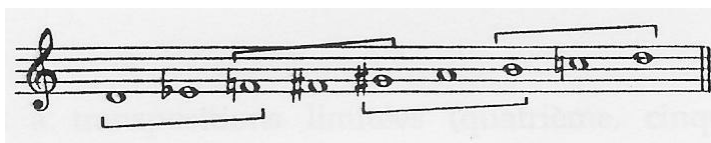


FIG. 4 – Troisième transposition du deuxième mode

La quatrième transposition du deuxième mode est en fait la même suite que la première, étant donné que l'on a trois fois décalé de $+1$, ce qui veut dire que l'on a appliqué u à $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$ qui, par définition, est invariant par u à permutation circulaire près :

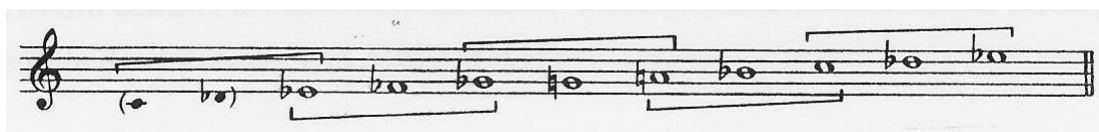


FIG. 5 – Quatrième transposition du deuxième mode

Troisième mode

Celui-ci est quatre fois transposable : il est représenté par une suite de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ invariante par l'application $w : x \mapsto x + 4$. On prend donc comme éléments de ce mode la réunion des orbites de 0, 2 et 3, c'est-à-dire $\{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$ ou encore do, ré, mi b, mi, fa #, sol, la b, si b, si :

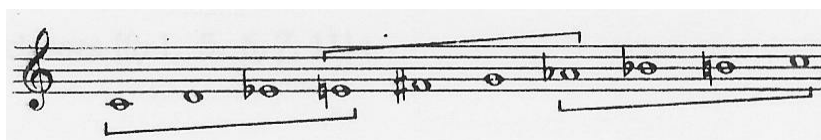


FIG. 6 – Troisième mode

Il se divise aussi de deux manières en plusieurs groupes symétriques, qui sont, dans le premier cas, trois groupes de trois notes : $\{2, 3, 4 | 6, 7, 8 | 10, 11, 0\}$. Ici c'est la translation w qui laisse invariante la configuration de ces groupes. Il en est de même dans le deuxième découpage illustré sur la figure : $\{0, 2, 3, 4 | 4, 6, 7, 8 | 8, 10, 11, 12\}$.

À nouveau, le mode peut se présenter sous plusieurs formes équivalentes, qui en sont différentes transpositions : la première transposition est la forme de base $\{0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11\}$. La deuxième transposition du troisième mode est $\{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 0\}$. La troisième est

$\{2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 0, 1\}$, et la quatrième est $\{3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 1, 2\}$. Tout comme pour le deuxième mode à transposition limitée, les transpositions suivantes seront représentées par les mêmes ensembles d'entiers modulo 12 que les première, deuxième, etc du fait de l'invariance du mode par une translation de $+4$.

Les autres modes à transposition limitée (quatrième, cinquième, sixième et septième) sont tous les quatre six fois transposables. On n'en aura pas d'autres, car 6 est le plus grand diviseur strict de 12. Ils se divisent chacun en groupes symétriques selon le principe qui a déjà été expliqué pour les deuxième et troisième modes.

Quatrième mode

Il est défini comme la succession de notes do, ré $\flat$, ré, fa, fa $\sharp$, sol, la $\flat$, si, qui correspond à l'ensemble de classes $\{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 11\}$:

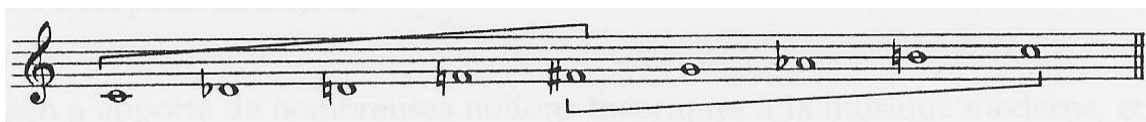


FIG. 7 – Quatrième mode

C'est l'union des orbites de 0, 1, 2 et 5 relativement à $x \mapsto x + 6$.

Cinquième mode

Il est défini comme la succession de notes do, ré $\flat$, fa, fa $\sharp$, sol, si, qui correspond à l'ensemble de classes $\{0, 1, 5, 6, 7, 11\}$:

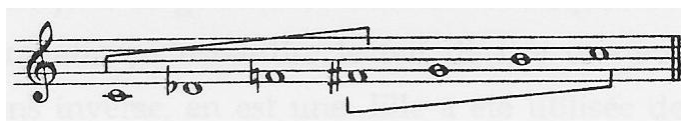


FIG. 8 – Cinquième mode

C'est l'union des orbites de 0, 1 et 5 relativement à $x \mapsto x + 6$.

Sixième mode

Il est défini comme la succession de notes do, ré, mi, fa, fa $\sharp$, sol $\sharp$, la $\sharp$, si, qui correspond à l'ensemble de classes $\{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11\}$ (figure 9). C'est l'union des orbites de 0, 2, 4

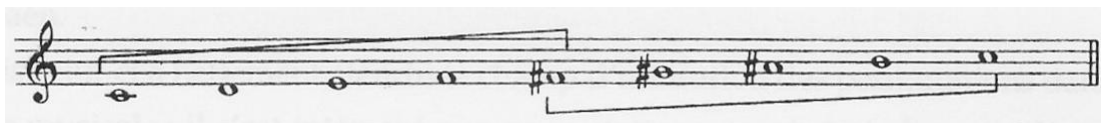


FIG. 9 – Sixième mode

et 5 relativement à $x \mapsto x + 6$.

Septième mode

Il est défini comme la succession de notes do, ré $\flat$, ré, mi $\flat$, fa, fa $\sharp$, sol, la $\flat$, la, si, qui correspond à l'ensemble de classes $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$ (figure 10). C'est l'union des



FIG. 10 – Septième mode

orbites de 0, 1, 2, 3 et 5 relativement à $x \mapsto x + 6$.

Pour ces quatre modes, on ne présentera pas les différentes formes transposées, car elles sont nombreuses, mais elles se définissent exactement comme pour les premiers modes à transposition limitée.

Messiaen a apporté de nombreuses notions théoriques à la musique moderne, et les modes à transposition limitée ne sont pas les seules qui présentent un aspect mathématique. Nous allons en aborder une autre qui est l'emploi des groupes de permutations.

1.2. Les permutations

Les permutations ont joué un grand rôle dans les techniques de composition de Messiaen. La rétrogradation, c'est-à-dire le fait de lire une succession d'éléments musicaux dans le sens inverse, en est une. Elle a été utilisée depuis déjà quelques siècles par bon nombre de compositeurs, et Messiaen aussi y a trouvé un grand intérêt, particulièrement dans les situations non rétrogradables : il s'agit de celles qui ont en fait une "symétrie", c'est-à-dire que la succession rétrogradée est égale à elle-même. Dans cette situation, c'est à nouveau le « charme des impossibilités » (impossibilité de rétrograder sans retomber sur les mêmes successions) qui fascinait Messiaen.

Mais celui-ci a nettement étendu le champ d'utilisation des permutations dans une œuvre musicale : il s'est intéressé aux permutations en général. À partir d'un motif de base qu'il permute, il effectuait certaines variations sur un même "thème" dans ses compositions. De plus, il ne s'agissait pas seulement pour Messiaen de permuter une suite de notes, un pitch class set, comme vu précédemment ; il a également appliqué cette opération à des successions de rythmes, d'intensités, de durées, etc.

Là non plus, il n'a pas étudié ces objets — les permutations — de façon mathématique ; mais il avait quand même les moyens d'en déterminer certaines propriétés. Ainsi, il avait lui-même constaté — sans le dire ainsi — que le cardinal de $\mathfrak{S}_{12}$ est $12! = 479001600$; c'est pourquoi il limita son intérêt à des permutations dont il estimait l'ordre « raisonnablement petit », "petit" signifiant inférieur à 70. Il appelait ce type de permutations des permutations symétriques.

La rétrogradation en est une et son ordre est 2. En effet, si on se place dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ pour représenter les classes de hauteur, cette application associe à une suite $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ du groupe cyclique, la suite renversée $(n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$. Une nouvelle rétrogradation produit alors la suite de départ $(n_1, n_2, \dots, n_k)$. Si on appelle f l'application rétrogradation, on peut donc dire que $f^2 = \text{id}$, c'est-à-dire que l'ordre de f est 2.

D'autres permutations ont particulièrement attiré l'attention de Messiaen : ce sont celles qui, étant donnée une succession d'objets, lui attribuent la succession qui commence par l'élément du milieu, puis alternativement par un élément de gauche et de droite. Une telle permutation associe (dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$) à 1, 2, 3 la suite 2, 1, 3. En nommant $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ cette permutation, on peut écrire

$$1, 2, 3 \xrightarrow{\sigma} 2, 1, 3 \xrightarrow{\sigma} 1, 2, 3 ,$$

ce qui montre que la permutation est d'ordre 2. On peut encore présenter pour finir un autre exemple (en gardant σ comme nom pour l'application) :

$$1, 2, 3, 4 \xrightarrow{\sigma} 2, 3, 1, 4 \xrightarrow{\sigma} 3, 1, 2, 4 \xrightarrow{\sigma} 1, 2, 3, 4 .$$

Cette fois, $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ est d'ordre 3.

Nous avons donc déjà pu nous faire une idée de la forme que prennent les mathématiques dans la composition. On l'a plusieurs fois signalé, Messiaen n'a jamais utilisé le langage mathématique pour présenter ses théories. D'autres que lui, en revanche, en ont fait un usage plus explicite. Nous allons aborder maintenant une partie des théories de composition d'un autre grand nom de la musique du XX^e siècle, Iannis Xenakis.

2. La symbolique dans la composition chez Xenakis

Iannis Xenakis est connu par le grand public pour son utilisation dans la composition d'œuvres musicales de processus probabilistes. Ingénieur, musicien mais aussi architecte, il a cherché à faire intervenir les différentes connaissances qu'il avait acquises dans sa musique. Dans son livre *Musique formelle* [10], outre les questions stochastiques, il consacre un chapitre à ce qu'il appelle la musique symbolique (c'est ce que nous allons aborder). Il y pose des structures mathématiques sur des objets de nature musicale, et ce dans le but d'avoir des « outils pour la meilleure compréhension des travaux du passé et pour la construction d'une nouvelle musique ». En d'autres termes, il se crée des objets formels qui lui permettront d'aborder l'analyse et la composition d'œuvres. Nous sommes conscients du fait que les idées de Xenakis que nous allons essayer d'exposer ici ne sont pas toujours ni rigoureuses ni claires, et qu'il reste beaucoup à faire pour les rendre correctes du point de vue mathématique. Mais l'important pour nous est de voir que même sans être rigoureuses, ces idées ont donné naissance à des compositions musicales intéressantes et chargées d'émotion, qui sont jouées et enregistrées.

2.1. Composition d'événements sonores

On considère un événement sonore de durée finie, sur lequel on ne pose aucun jugement qualitatif. Si l'on réitère ce même événement, que l'on nomme a , et si l'on ne tient pas compte de la notion de temps, on obtient un simple accollement de ces événements. On note cela $a \vee a$, $\vee$ signifiant que les deux événements sont l'un à côté de l'autre, hors du temps. On a donc une loi de composition $\vee$ sur l'ensemble des événements sonores de durée finie.

On considère maintenant en plus un deuxième événement sonore b distinct de a . On demande comme axiome pour cette loi la commutativité, car on ne tient pas compte du temps : on peut écrire $a \vee b = b \vee a$, car cela n'apporte rien de nouveau de les accoler dans

un sens ou dans l'autre si l'on exclut le temps. On constate donc que la loi de composition introduite ci-dessus est commutative.

Si l'on a trois événements distincts a , b et c , on peut considérer que $a \vee b$ constitue un nouvel élément, et alors il est possible de combiner celui-ci avec c : on effectue $(a \vee b) \vee c$. Cette opération “ne produit rien de plus”, on a $(a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$ et $a \vee (b \vee c) = a \vee b \vee c$, autrement dit, la loi est associative.

Si par contre on replace les événements a , b et c dans le temps, on n'aura bien sûr plus la commutativité : Xenakis exprime cela : $a \top b \neq b \top a$, le symbole $\top$ étant une loi de composition signifiant “avant”.

Xenakis considère ensuite une notion un peu plus subtile : il faut se détacher de notre « expérience traditionnelle » d'une relation biunivoque entre « événements et instants » et considérer le temps indépendamment des événements. En fait, il faut alors voir trois événements comme séparant le temps en deux parties (entre les événements); ainsi il revient au même de faire passer un événement avant un autre, ou l'inverse, ce qui nous donne la commutativité et l'associativité : $a \top b = b \top a$ et $(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$.

Si l'on prend alors comme élément neutre le son “vide”, on peut voir l'ensemble des événements sonores comme un monoïde. C'est ce que Xenakis considère comme étant hors du temps, inversement à la situation qui lie un événement à un instant et qui est dans le temps.

2.2. Notion d'intervalle

L'événement sonore en lui-même n'étant pas très fécond en informations, il est plus intéressant de prendre en compte ses qualités : elles peuvent être nombreuses et en font partie par exemple le ton, la durée, le timbre, ou encore, d'après Xenakis, la variabilité, la densité... Il nous suffira ici d'étudier de plus près l'une de ces qualités, et ce que nous en dirons pourra s'étendre aux autres. Le choix du musicien a été de s'occuper du ton (c'est-à-dire de la hauteur).

L'objet de ce paragraphe est de parler des intervalles entre les tons (c'est-à-dire entre des fréquences). Pour pouvoir faire cela, il nous faut nous placer dans une situation où l'on a au moins trois événements a , b et c , pour pouvoir avoir une notion de taille relative en comparant la hauteur de deux éléments à celle d'un troisième. On peut considérer que cela nous donne une sorte de notion de distance. Faisons remarquer qu'alors on a mis une relation d'ordre sur les intervalles mélodiques : on appelle H l'ensemble $\{h_a, h_b, \dots\}$ des intervalles de hauteurs et $\mathcal{S}$ la relation “être plus grand ou égal à” :

$$\begin{aligned} \forall h \in H, h \mathcal{S} h & \quad (\text{réflexivité}), \\ \forall h_a, h_b \in H, [h_a \mathcal{S} h_b \text{ et } h_b \mathcal{S} h_a] & \Leftrightarrow [h_a = h_b] \quad (\text{antisymétrie}), \\ \forall h_a, h_b, h_c \in H, [h_a \mathcal{S} h_b \text{ et } h_b \mathcal{S} h_c] & \Rightarrow [h_a \mathcal{S} h_c] \quad (\text{transitivité}), \end{aligned}$$

ce qui définit bien une relation d'ordre.

Nous avons évoqué le fait qu'un événement sonore avait certaines qualités. On se restreindra par la suite à trois d'entre elles, celles qui paraissent définir le plus entièrement un son : ce sont la hauteur, l'intensité et la durée. Pour Xenakis, ces trois-là sont celles qui sont indispensables pour parler d'un événement sonore.

On considère encore l'ensemble H des intervalles mélodiques (ou de hauteur). On pose aussi G l'ensemble des intervalles d'intensité, et U l'ensemble des durées (d'un son). Ces

trois ensembles sont considérés hors du temps, au sens défini précédemment. Enfin, on regarde aussi l'ensemble T , ce n'est pas la durée de quelque chose, mais un intervalle de *temps* entre deux événements, qui peut se situer chronologiquement. Ce que l'on va maintenant effectuer sur H pourra être étendu de façon naturelle à G , U et T .

On a une loi de composition interne qui associe à deux éléments de H un troisième ; de manière concrète, cette loi fait la somme des intervalles. On l'appelle *addition* et on la note bien sûr “+”. Cette addition est associative : on voit immédiatement que pour tous $h_a, h_b, h_c \in H$, on a $(h_a + h_b) + h_c = h_a + (h_b + h_c)$. Elle a également un élément neutre que l'on nomme h_0 : c'est l'intervalle zéro, et il agit ainsi sur un élément $h_a \in H$: $h_a + h_0 = h_0 + h_a = h_a$. Il s'agit de l'unisson dans le cas de la hauteur et de la simultanéité dans le cas de la durée. Qui plus est, il existe toujours un inverse à un élément de H (ou de G , U , T). Pour H , il s'agit d'un intervalle décroissant, qui “ramène” à l'unisson ; pour G , c'est un intervalle en décibels négatifs, et pour U c'est un intervalle de durée, négatif, ce qui est possible puisque justement il s'agit d'intervalles entre des durées de différents événements. Dans U , la somme d'un intervalle et de son inverse donne la simultanéité. Enfin, on peut dire de cette loi de composition interne qu'elle est commutative. On a donc finalement mis sur H , mais aussi sur G , U et T , une structure de groupe abélien.

2.3. L'espace vectoriel $H \times G \times U$

On commence par mettre sur H , G et U une loi de composition externe avec le corps des réels $\mathbf{R}$. Cela est possible car, de par la nature de ces ensembles, pour un élément a appartenant à l'un d'eux et pour $x \in \mathbf{R}$, l'élément xa est dans le même ensemble que a . Ainsi H , G et U sont des $\mathbf{R}$ -espaces vectoriels. On forme alors l'espace vectoriel produit $H \times G \times U$, noté E_3 par Xenakis, qui est de dimension 3 sur $\mathbf{R}$. Une base est par exemple donnée par les vecteurs $\bar{h} = (1, 0, 0)$, $\bar{g} = (0, 1, 0)$ et $\bar{u} = (0, 0, 1)$.

Par ailleurs, on choisit des unités et des origines dans H , G et U . Pour l'exemple qui va suivre, on prend dans H comme unité le demi-ton, et comme origine (zéro) la note do. Dans G , l'origine sera à 50 décibels, et l'unité d'intensité sera de 10 décibels ; et enfin dans U , l'origine est à la durée de 10 secondes, et l'unité est d'une seconde. (Tout cela étant posé comme le fait Xenakis dans [10]). Prenons un exemple : soient $X_1 = 5\bar{h} - 3\bar{g} + 5\bar{u}$ et $X_2 = 7\bar{h} + 1\bar{g} - 1\bar{u}$. Xenakis prend dans ce cas pratique la croche comme étant de durée une seconde, c'est-à-dire que l'unité dans U est la croche. On peut écrire ces vecteurs sur une portée :

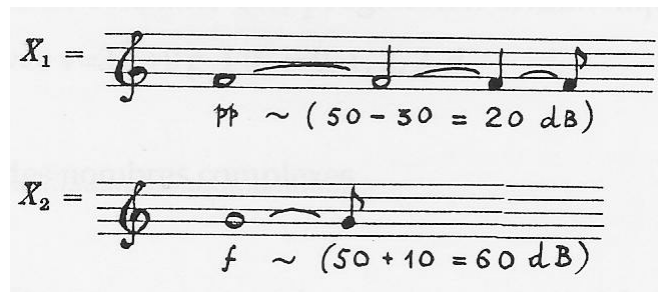


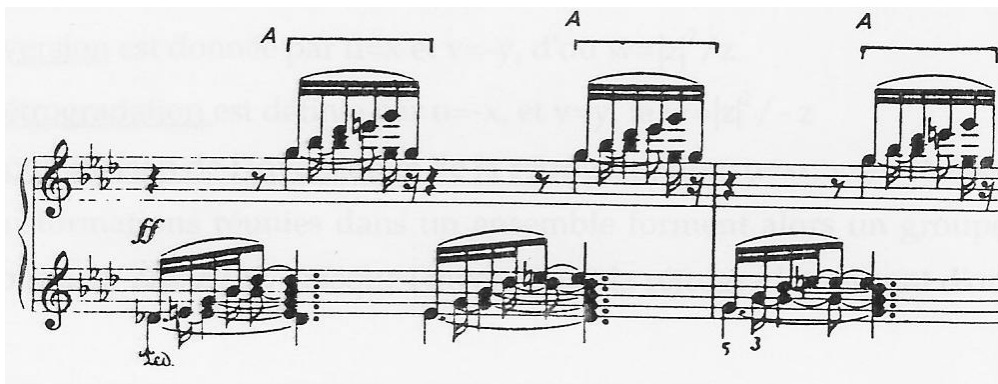
FIG. 11 – Exemple

Leur addition $X_1 + X_2 = 12\bar{h} - 2\bar{g} + 4\bar{u}$ donne alors musicalement :

$$X_1 + X_2 = \text{musical notation: treble clef, half note, quarter note, quarter note} \\ \text{mp} \sim (50 - 20 = 30 \text{ dB})$$

FIG. 12 – Somme de deux vecteurs

Pour Xenakis, ce langage algébrique permet d'analyser des œuvres, aussi bien que d'en composer en combinant les éléments de H , G et U . L'exemple suivant est un exemple d'analyse de pièce (tiré de Sonate, Op. 57, de Beethoven), dans lequel il décortique la succession A .

FIG. 13 – La séquence A

Il considère cette fois comme vecteur unité dans U la double-croche, et comme origines, ré $\flat$ pour H , 60 décibels pour G (la coordonnée dans G reste constante égale à l'origine au cours de ce fragment), et 5 doubles-croches pour U . Alors :

- à sol correspond le vecteur $X_0 = 18\bar{h} + 0\bar{g} + 5\bar{u}$,
- à si $\flat$ correspond le vecteur $X_1 = (18 + 3)\bar{h} + 0\bar{g} + 4\bar{u}$,
- à ré $\flat$ correspond le vecteur $X_2 = (18 + 6)\bar{h} + 0\bar{g} + 3\bar{u}$,
- à mi correspond le vecteur $X_3 = (18 + 9)\bar{h} + 0\bar{g} + 2\bar{u}$,
- à sol correspond le vecteur $X_4 = (18 + 12)\bar{h} + 0\bar{g} + 1\bar{u}$,
- à sol correspond le vecteur $X_5 = (18 + 0)\bar{h} + 0\bar{g} + 1\bar{u}$.

Cette écriture permet de constater une progression arithmétique dans les vecteurs, puisque $X_i = X_0 + iv$ avec $v = 3\bar{h} + 0\bar{g} - 1\bar{u}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

2.3. Utilisation des nombres complexes

Ce paragraphe va être assez court, mais va nous permettre de voir qu'il est encore possible d'introduire une nouvelle structure de groupe sur des objets musicaux.

On se place dans une situation où seuls deux paramètres interviennent, par exemple la hauteur et le temps. On appelle x ce dernier, placé sur l'axe des réels, et y la hauteur, placé sur l'axe imaginaire. Alors on peut considérer que $z = x + iy$ est un son de ton y qui démarre à l'instant x . Étant données deux fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$, on pose $w = u + iv$, et on considère la transformation $z \mapsto w(z)$. Il est alors possible d'exprimer les opérations que l'on peut faire sur un motif musical en terme de ces transformations :

- L'identité est telle que $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = y$, et donc $w = \text{id}$.
- L'inversion est donnée par $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$, d'où $w(z) = |z|^2/z$.
- La rétrogradation est définie par $u(x, y) = -x$ et $v(x, y) = y$, d'où $w(z) = -|z|^2/z$.
- La combinaison de l'inversion et de la rétrogradation : $u(x, y) = -x$, $v(x, y) = -y$ et $w = -\text{id}$.

Ces transformations réunies dans un ensemble forment alors un groupe de Klein, isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, puisque l'inversion et la rétrogradation sont d'ordre 2.

Xenakis envisage enfin la possibilité d'utilisation de transformations plus compliquées, voire même, dans le cas d'un « espace musical de plus de deux dimensions », d'utiliser les quaternions.

Les différents sujets abordés ici ont été liés à la notion de groupe, mais il peut être intéressant de voir que d'autres éléments mathématiques peuvent être introduits dans la musique en dehors de la théorie des groupes. Le lecteur intéressé pourra consulter [10].

2.5. Considérations ensemblistes pour la composition

On se place dans l'espace $\mathcal{R}$ des sons que peut produire un piano. On regarde dans ce paragraphe des ensembles d'événements sonores. Soient A et B deux tels ensembles : on peut les jouer l'un après l'autre, ce que Xenakis note $A \uparrow B$. On peut en les écoutant savoir s'ils s'intersectent, s'ils sont disjoints, inclus l'un dans l'autre, ou égaux. Xenakis note $A \cdot B$ l'intersection, qui est la même chose que $B \cdot A$. On peut également créer l'ensemble union de A et B , noté $A + B$, et la négation d'un ensemble A , notée $\overline{A}$, qui est le complémentaire de A dans $\mathcal{R}$. Xenakis s'aide de ces opérations sur des ensembles pour composer. Il considère une expression booléenne, par exemple

$$F = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C.$$

On peut montrer qu'on a également

$$F = (A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot C + \overline{(A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B})} \cdot \overline{C}.$$

Xenakis représente cette expression par le dessin de la figure 14. Pour finir, il utilise ce schéma pour construire la base de la partition de la pièce *Herma* pour piano (1961) (figure 15).

Xenakis, tout comme Messiaen, était compositeur. Ses théories ont donc beaucoup servi à la construction d'œuvres musicales, les mathématiques étant alors un outil pour la composition. Mais des problèmes mathématiques peuvent aussi naître de situations musicales.

3. Questions mathématiques dans la musique

C'est en fait au travail exposé par Ronald C. Read (mathématicien) dans [7] que nous allons nous intéresser. En particulier, nous allons porter notre attention sur deux problèmes, anciens en musique, et résolus dans un cadre mathématique.

3.1. Sous-ensembles de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$

On se place encore une fois dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ pour représenter les douze classes de notes modulo l'octave. Un sous-ensemble de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ (modulo 12), en ordre croissant, est nommé *scale* par Read. Remarquons que cette notion est très proche de ce

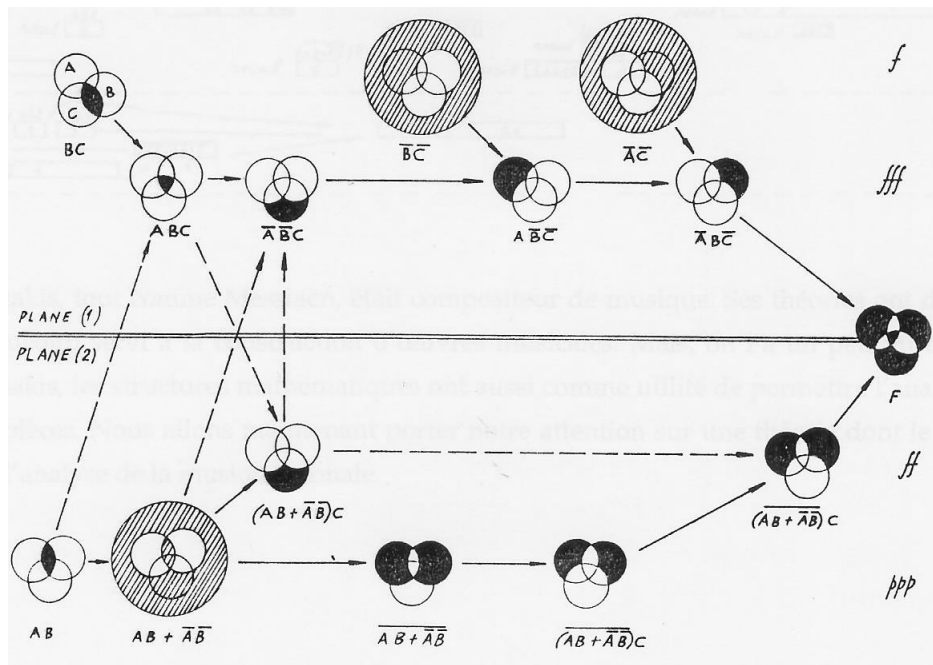


FIG. 14 – Structure de la pièce *Herma* de Xenakis. Nous avons reproduit le schéma tel qu'il apparaît dans les oeuvres de Xenakis mais un lecteur attentif verra qu'il y a 3 corrections à faire : une sur le diagramme intérieur et deux autres sur les deux diagrammes qui se trouvent dans le coin en bas à droite (merci à Odile Schladenhaufen de nous l'avoir signalé)

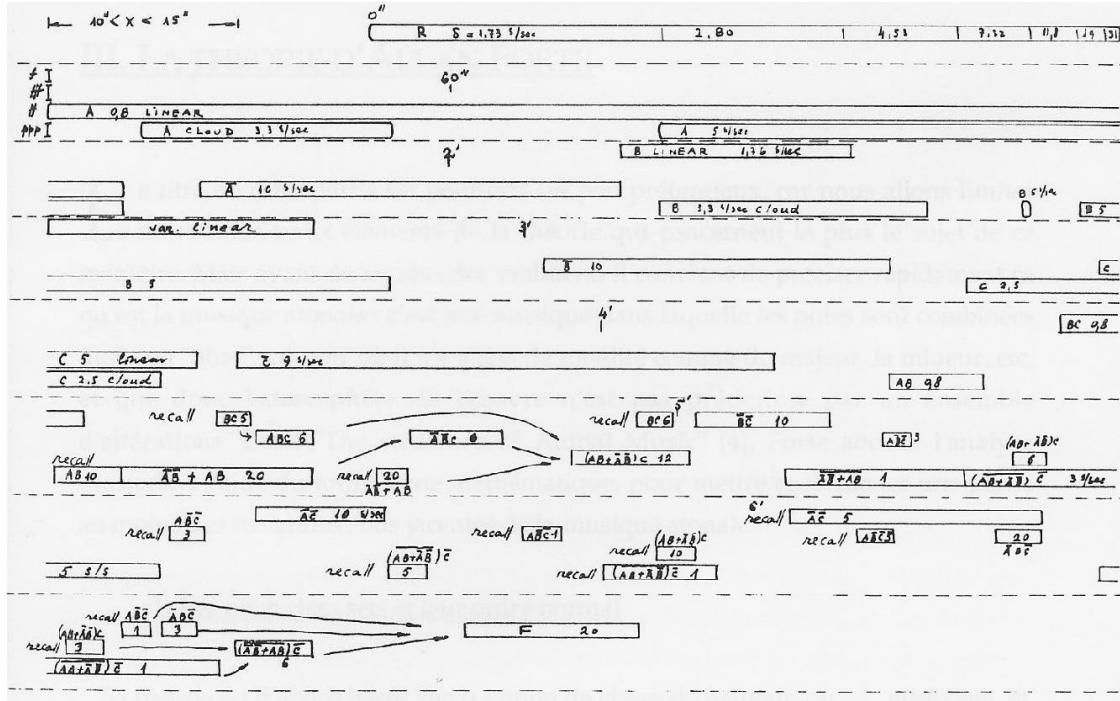


FIG. 15 – Base d'une partition de Xenakis

qui avait été appelé pitch set class. Ici aussi, on considère comme étant équivalents deux scales dont l'un est la translation par un entier k (translation $x \mapsto x + k$) de l'autre. D'une certaine façon, on généralise l'approche de Messiaen sur les modes à transposition limitée. Une question peut se poser : combien y a-t-il de scales de k notes non équivalents par translation ? Pour faciliter la réponse à cette question, on peut représenter le problème posé par un disque divisé en 12 secteurs égaux, chacun marqué ou non d'un signe :

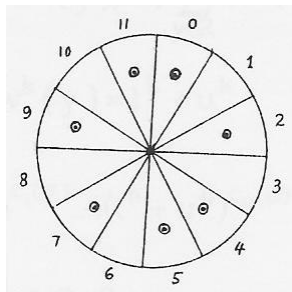


FIG. 16 – Représentation des 12 notes sur un disque

Les 12 secteurs sont donc par analogie les 12 notes, et les marques sont là où les notes font partie du scale. La translation $x \mapsto x + k$ correspond alors à la rotation du disque de k secteurs. La question qui nous intéresse se pose alors autrement : il s'agit de trouver le nombre de manières de mettre k marques sur le cercle pour avoir des disques qui ne sont pas équivalents par rotation. R.C. Read fait alors appel à un théorème de Polya pour avoir la solution. Le lecteur intéressé pourra se reporter à l'article [7].

Les résultats sont contenus dans la dernière ligne du tableau ci-dessous :

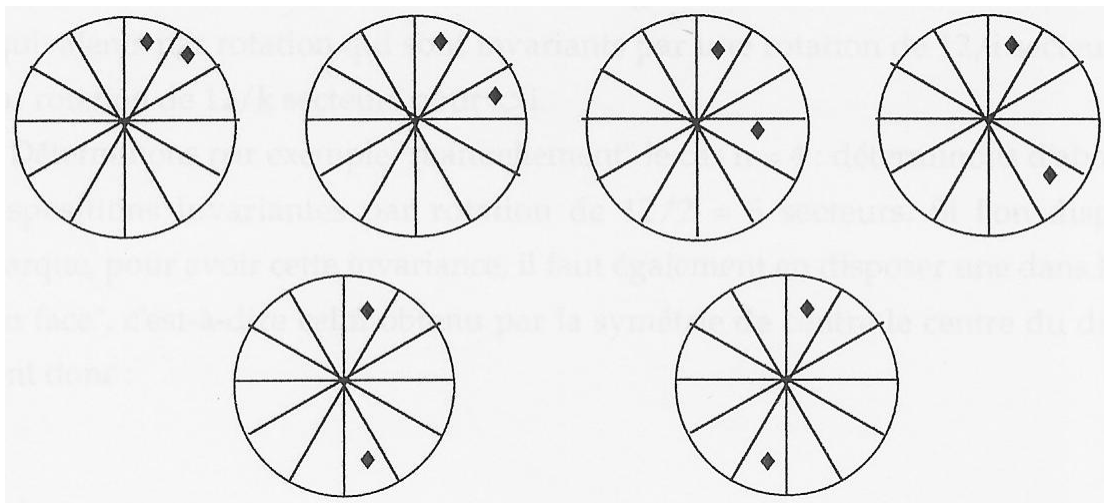
Number of notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Symmetry													
1			1	5	18	40	66	75	66	40	18	5	1
2				1	2		3		2		1		
3					1		1			1			
4						1			1				
6							1						
12		1											1
All scales	1	1	6	19	43	66	80	66	43	19	6	1	1

Ainsi, il y a 6 façons de placer deux marques sur le disque qui sont non équivalentes par rotation, 19 de placer trois marques, et ainsi de suite. Pour le cas où le nombre de marques est 2, voir la figure 17.

Une autre question peut maintenant se poser : parmi les ensembles à n éléments non équivalents par rotation du disque, combien sont équivalents à eux-mêmes par une rotation de $12/k$ secteurs ?

Dans le cas $n = 2$ illustré ci-dessus, on voit que les cinq premiers cas n'ont une "symétrie" que par rotation de 12 secteurs. Le dernier cas en revanche est manifestement symétrique, il est invariant par une rotation de $12/2 = 6$ secteurs.

On peut répondre à la question précédente en exhibant toutes les solutions possibles, comme on vient de le faire pour le cas $n = 2$. R.C. Read résoud ce problème à l'aide de

FIG. 17 – Le cas $n = 2$

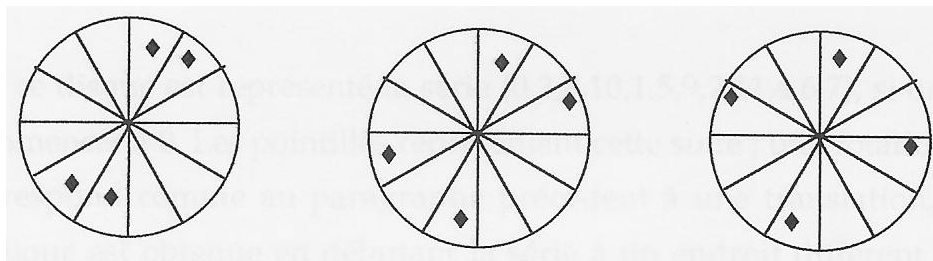
la formule d'inversion de Möbius pour l'ensemble E des diviseurs du cardinal de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ — qui est 12 — et pour les deux fonctions suivantes sur cet ensemble : le nombre a_k de disques invariants par rotation de $12/k$ secteurs, k appartenant à E , et le nombre A_m de disques invariants par $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ (i.e. par rotation de $12/m$ secteurs), m appartenant aussi à E , et par aucun autre groupe (cyclique plus grand que $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$). À nouveau, le lecteur intéressé consultera [7].

Les A_m sont représentés dans le tableau donné précédemment : la première ligne donne le nombre de scales invariants par rotation de $12/1$ secteurs, pour les différents cardinaux possibles, et pas par rotation de $12/k$ secteurs, pour $k > 1$. On retrouve pour $n = 2$ le chiffre 5. De même, la deuxième ligne donne le nombre d'ensembles (non équivalents par rotation), qui sont invariants par rotation de $12/2$ secteurs, et pas par rotation de $12/k$ secteurs, $k > 2$: pour $n = 2$ il n'y en a qu'un, c'est celui signalé plus haut. Pour les n impairs, il n'y en a pas, et pour les autres le nombre est très restreint. De même, la i -ème ligne donne le nombre d'ensembles non équivalents par rotation qui sont invariants par une rotation de $12/i$ secteurs, et pas par rotation de $12/k$ secteurs, $k > i$.

Déterminons par exemple “manuellement” le cas $n = 4$: cherchons d'abord les dispositions invariantes par rotation de $12/2 = 6$ secteurs. Si l'on dispose une marque, pour avoir cette invariance, il faut également en disposer une dans le secteur “en face”, c'est-à-dire celui obtenu par la symétrie de centre le centre du disque (voir la figure 18). Les deux premiers n'ont aucune autre invariance que par rotation de 6 secteurs ; le dernier par contre est clairement invariant par rotation de $12/4 = 3$ secteurs. Cela illustre bien le 2 de la deuxième ligne, cinquième colonne, et le 1 de la quatrième ligne, cinquième colonne.

3.2. Dénombrement de séries

Une série est l'élément de base de la musique dodécaphonique, c'est-à-dire du système musical fondé sur l'emploi exclusif des 12 sons de la gamme chromatique. Cela consiste donc en une permutation de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ (dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$). Le compositeur ne se servira que d'une série dans son œuvre, et de ses équivalents ainsi définis : ce sont de nouveau les opérations vues dans d'autres parties qui font l'équivalence de deux séries.

FIG. 18 – Le cas $n = 4$

Autrement dit, sont équivalentes des séries égales à translation, inversion ou rétrogradation près. Dans l'article, Read signale que le dénombrement de séries non équivalentes est cette fois encore résolu à l'aide du théorème de Polya, qui donne 9985920 tone rows possibles. Comme lui, nous n'entrerons pas dans les détails.

Si l'on considère de plus l'équivalence par permutation cyclique, la question se résout autrement. Read représente une série et des équivalents possibles sur un diagramme :

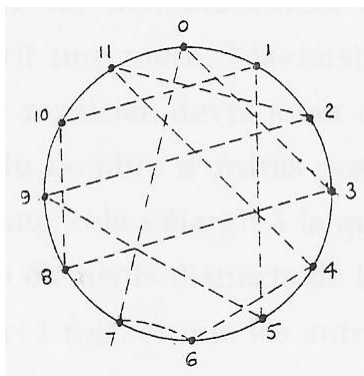


FIG. 19 – Diagramme de Read

Sur ce disque est représentée la série $\{0, 3, 8, 10, 1, 5, 9, 2, 11, 4, 6, 7\}$, si on choisit de la faire commencer à 0. Les pointillés représentent cette suite ; une rotation de ce diagramme correspond comme au paragraphe précédent à une translation. Une permutation cyclique est obtenue en débutant la série à un endroit différent ; la rétrogradation correspond au fait de suivre les pointillés dans le sens inverse, et l'inversion est donnée en faisant une symétrie du disque par rapport au diamètre vertical. Trouver le nombre de séries non équivalentes revient donc à déterminer le nombre de tels diagrammes non équivalents par l'action de D_{12} , le groupe des rotations et symétries d'un dodécagone régulier (représenté par les positions de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11). Le résultat est alors donné par le théorème de superposition que Read a lui-même introduit et dont il parle dans [8].

Mais les problèmes mathématiques soulevés dans la musique ne sont pas que de cette sorte. Il est aussi possible d'avoir recours aux mathématiques pour des questions d'une origine plutôt différente. Dans le même article [7], Read en aborde une en particulier, dans le domaine du dénombrement : le compositeur Karlheinz Stockhausen a écrit une pièce, *Klavierstück*, n. XI, qui consiste en 19 fragments de musique que le musicien devra jouer

dans l'ordre de son choix. Cela pose assez vite la question du nombre d'ordres possibles ; et en s'éloignant de la nature musicale de ce problème, cela s'élargit à la question de connaître le nombre d'agencements possibles de n éléments distincts de la chaîne $(1, 2, 3, \dots, n)$ tels que le dernier symbole apparaisse $r + 1$ fois et que les autres apparaissent au plus r fois. Nous n'entrerons pas dans les détails, mais il est intéressant de pouvoir constater la diversité des origines des problèmes musicaux-mathématiques.

Conclusion

Les mathématiques et la musique ont un long passé en commun. Les notions musicales en rapport avec les groupes que l'on a abordées ne sont pas très vieilles en comparaison de ce passé, car elles datent principalement du XX^e siècle. Mais manifestement, il y a beaucoup à dire, d'autant que bon nombre de sujets n'ont pas été abordés ici, ou bien ont été abordés très rapidement. Bien d'autres domaines des mathématiques peuvent interagir avec la musique, comme par exemple les probabilités chez Xenakis.

Les mathématiques ont fasciné certains musiciens, tandis que d'autres s'en sont toujours méfiés... Le mélange d'une science assez rigide et de l'art de la composition fait parfois craindre que la musique perde son âme. C'est en effet un risque possible, mais c'est aux compositeurs de veiller à ce que leur sensibilité ne soit pas étouffée par une recherche de règles absolues, et à ce qu'elle leur serve pour exprimer ce qu'il peut y avoir de beau dans les mathématiques.

Les théories que nous venons d'évoquer ne sont nullement des théories qui font l'unanimité : comme souvent dans ce domaine, il y a beaucoup de controverses, de courants et de contre-courants. Déjà à l'époque du père de Galilée (et dans la Grèce Antique également) ont eu lieu de rudes débats entre ceux qui cherchaient à établir les lois du fonctionnement interne de la musique et les autres. On peut imaginer que ces discussions vont continuer, tout comme "l'intrusion" des mathématiques dans la musique, et ce, en enrichissant toujours plus la création musicale

Bibliographie

- [1] L. COMTET (1970), Analyse combinatoire, tome premier, *Presses universitaires de France*.
- [2] L. COMTET (1970), Analyse combinatoire, tome second, *Presses universitaires de France*.
- [3] L. FICHET (1996), Les théories scientifiques de la musique aux XIX^e et XX^e siècles, *Musique et esthétique*, J. Vrin.
- [4] O. MESSIAEN (1944), Technique de mon langage musical, *Alphonse Leduc, Paris*.
- [5] A. PAPADOPOULOS (2003), *La matematica nella musica di Olivier Messiaen*, Lettera Matematica (ed. Springer), **47**, 24–41.
- [6] A. PAPADOPOULOS, cours « Sciences et musique », Université Louis Pasteur.
- [7] R.C. READ (1997), *Combinatorial problems in the theory of music*, Discrete mathematics, **167/168**, 543–551.

- [8] R.C. READ (1968), *The use of S -functions in combinatorial analysis*, Canadian journal of mathematics, **20**, 808–841.
- [9] E. VUILLERMOZ (1973), Histoire de la musique, *Fayard*.
- [10] I. XENAKIS (1990), Formalized music : thought and mathematics in composition, Harmonologia series No. 6, *Pendragon Press*.

Rachel TACQUARD
Université Louis Pasteur, Strasbourg
`tacquard.rachel@wanadoo.fr`