DENIS TANGUAY

APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION ET GRAPHES ORIENTÉS

Abstract. Learning formal proof by organizing oriented graphs: an experiment
According to Duval, traditional tasks of analysing, reading or writing proofs don't enable pupils to discriminate between formal proof — a (logical) *computation,* where each proposition obeys criteria of *validity* and is brought in for its *operative status* — and argumentation — a *discourse*, where propositions obey criteria of *relevance* and are organised by simple *accumulation*.
Pushing more radically Duval's proposed research orientations and trying as much as possible to *isolate difficulties*, we have designed tasks in which pupils organise, within the empty boxes of an oriented graph, the propositions of a geometrical proof, the general idea of which they have been previously introduced to. The sequence of tasks has been experimented with three 1st year secondary classes (12-13 years old) in Montreal, in the spring of 2004.
A first analysis of the data that have been gathered allows us, among other things, to conclude that:

- the deductive structure, consisting of chained inferences, is neither spontaneously, nor easily understood by pupils;
- the passage from what seems to be a satisfactory understanding of a proof, of how the general ideas are linked in it, to a logically well-controlled written production of that proof, constitutes a fundamental leap for pupils and deeply hinges on their mastery of the deductive structure;
- the organizational work required by the proposed tasks may contribute to pupils' better understanding of the mechanisms that rule this structure.

Résumé. Selon Duval, les tâches traditionnelles d'analyse, lecture et écriture de démonstrations ne permettent pas aux élèves de distinguer entre une démonstration formelle, c'est à dire un enchaînement logique de propositions dont chacune respecte des critères de validité et a sa place en vertu de son statut dans la démarche, et une argumentation, dont les propositions obéissent à des critères de pertinence et se contentent de s'accumuler.
En développant plus radicalement des pistes de recherche proposées par Duval et en tentant dans la mesure du possible d'isoler les difficultés, nous avons proposé à des élèves de remplir par des propositions les boîtes vides du graphe orienté d'une démonstration géométrique préalablement présentée. La séquence d'activités a été expérimentée auprès d'élèves du début de l'enseignement secondaire (12 – 13 ans) au printemps 2004 à Montréal.
Une première analyse des données recueillies nous a notamment permis de conclure que :

- la structure déductive, consistant en enchaînements d'inférences, n'est ni spontanément, ni aisément comprise des élèves;
- le passage d'une compréhension apparemment satisfaisante d'une preuve, des liens entre ses idées générales, à sa rédaction sous l'égide d'un bon contrôle logique,

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 55 - 93.

constitue un saut fondamental pour les élèves et est intimement lié à leur maîtrise de la structure déductive;

- le travail d'organisation qui a été proposé aux élèves a pu contribuer à une meilleure compréhension par les élèves des mécanismes qui régissent cette structure.

Mots-clés. enseignement secondaire, géométrie, démonstration, pas de déduction, inférence, enchaînement logique, graphe de démonstration, rédaction.

LA FLÈCHE

Mère de la flèche est la pensée : comment étendre ma portée vers là-bas ? par delà ce fleuve, ce lac, cette montagne ?

Paul Klee

1. Introduction

Les difficultés qu'ont les élèves avec la démonstration, notamment en géométrie, ont été abondamment analysées et commentées par les didacticiens des mathématiques, comme s'en convaincra quiconque jette un œil sur le site d'adresse

http://www.lettredelapreuve.it/.

Les travaux de Duval (1991, 1992-93, 1995, 2001 ; Duval & Egret, 1989), à cet égard, remettent en question nombre d'études qui, dans la foulée des travaux de Piaget et des van Hiele, focalisent sur la maîtrise des règles logiques comme celles de l'implication ou de l'inclusion des classes. Pour Duval (1995, p. 212), l'apprentissage des démarches de raisonnement intrinsèquement liées à l'utilisation d'un langage (naturel ou formel) passe par la nécessaire capacité à juger de la validité d'un raisonnement selon des critères autres que le recours à l'empirisme, l'apport d'informations supplémentaires ou l'établissement d'un consensus au sein d'un groupe. Le respect des règles logiques d'organisation des propositions fait certes partie de ces critères, mais « … la connaissance de ces règles ne rend guère sensible au caractère valide ou non valide d'un raisonnement, pas plus que celle des règles de grammaire n'aide la plupart des élèves à écrire correctement… »[1] (op. cit., p. 212).

---

[1] Thom (1974, p. 45) va plus loin : « … la connaissance explicite de la définition formelle de l'activité peut perturber cette activité, qui fonctionnait fort efficacement jusque-là sans théorie : à la manière de ces individus scrupuleux qui hésitent à parler une langue parce qu'ils en connaissent trop bien la grammaire et ont peur de commettre des fautes. »

Si l'on envisage les raisonnements non plus selon leur degré de conformité aux lois logiques formelles, mais sous l'angle des interactions sociales s'exprimant à travers les pratiques discursives usuelles, l'on se heurte à une rupture cognitive profonde : les raisonnements spontanés alors mis en œuvre, qui visent à convaincre et obéissent à des critères de pertinence, ne permettent pas d'entrer dans le fonctionnement cognitif de la démonstration qui obéit, elle, à des critères de validité et cherche à prouver (op. cit., p. 213). Comment faire face à cette rupture dans l'enseignement ?

Les travaux de Duval ont servi de cadre théorique à la conception d'une activité dont le présent article rend compte. Dans la section 2, nous tentons de faire une synthèse de ceux-ci, et en illustrons certains aspects sur la base de l'analyse d'une preuve extraite d'un manuel québécois. Dans la section 3, nous formulons quelques-unes de nos réflexions suscitées par ces travaux. Elles sont de prime abord de nature théorique, mais les résonances des écrits de Duval dans notre propre expérience d'enseignement ont certainement servi d'élément déclencheur. La section 4 rend compte de la conception des trois tâches qui constituent l'activité, de leur expérimentation dans trois classes de secondaire 1 (12-13 ans) et des premières conclusions que nous en tirons.

2. Cadre théorique

2.1. Le raisonnement

Dans son livre *Sémiosis et pensée humaine*, Duval (1995, p. 217) propose la caractérisation suivante du raisonnement :

D'une façon générale, tout discours ayant pour but de prouver la vérité d'un énoncé ou de faire admettre par un interlocuteur le « bien-fondé » de son affirmation, ou de son rejet, est reconnu comme « raisonnement ». Autrement dit, les deux caractéristiques suivantes sont nécessaires pour qu'un discours puisse être reconnu comme un raisonnement :

- *être orienté vers un énoncé-cible, c'est-à-dire vers la proposition à justifier,*
- *être centré sur la valeur, logique ou épistémique, de cette proposition et non pas sur son contenu.*

Duval appelle *propositions* des unités discursives combinées par le discours. Le « sens » n'y est pas uniquement fonction de leur contenu sémantique, mais aussi de leurs valeurs logique, épistémique et sociale. Les valeurs logiques (de vérité) possibles pour une proposition sont *vrai*, *faux*, ou *indéterminé*. Duval distingue :

- la *valeur épistémique sémantique*, qui est le degré de fiabilité du contenu de la proposition au moment de son énonciation (évident, certain, vraisemblable, possible, peu probable, impossible, absurde…), bien sûr fonction du contenu mais aussi de l'état de connaissances et du milieu socioculturel de l'interlocuteur (émetteur ou récepteur) ;
- la *valeur épistémique théorique* (conventionnel, possible, impossible, nécessaire, authentique…), en principe indépendante de l'interlocuteur, et qui est celle associée au statut de la proposition dans le cadre théorique sous-jacent, quand il y en a un : définition, axiome, conjecture, théorème, hypothèse en mathématiques ; principe, loi, règle, convention, article de contrat, etc. dans les autres domaines.

Contrairement à ce qu'il en est des autres formes d'expansion discursive comme l'explication ou la description, le fonctionnement cognitif du raisonnement — en quoi tel raisonnement est valide ou non ; comment cette validité doit être appréhendée pour entraîner la conviction… — ne dépend pas tant du contenu sémantique des propositions en cause que de son interaction avec les valeurs logique et épistémique, la fonction première du raisonnement étant de changer la valeur épistémique de l'énoncé-cible (op. cit., pp. 217-233).

2.2. Argumentation et démonstration

Pour Duval, l'argumentation et la démonstration sont deux types de raisonnement fondamentalement distincts. Le lecteur pourra consulter Duval (1991) ou Duval (1995, chap. V) pour une caractérisation détaillée de chacun. Dans le tableau ci-dessous, nous avons cherché à faire la synthèse de ce qui distingue les deux démarches.

Argumentation	Démonstration
o De nature dialogique.	o De nature logique.
o Aucune autre contrainte d'organisation que celles propres à un *discours*.	o Organisation stricte autour de l'unité structurale qu'est *l'inférence*, cela rapprochant la démonstration d'un *calcul*.
o Se développe à partir des relations de contenu entre les propositions, en interaction avec les valeurs	o Chaque proposition y a l'un des trois statuts opératoires : prémisse, règle d'inférence, proposition inférée. Ce

épistémiques *sémantiques* que leur donne l'interlocuteur émetteur. Celles-ci, elles-mêmes fonction des contenus et de leur appréhension (variable selon l'état des connaissances et le milieu socioculturel de l'émetteur), sont généralement en opposition avec les valeurs que leur donne l'interlocuteur récepteur, cette opposition agissant comme moteur de l'argumentation.	statut est déterminé par l'organisation déductive et non par le contenu, et est en outre discriminé par la valeur épistémique *théorique* de la proposition, qui doit pour cela « refouler » la valeur épistémique sémantique adjugée par un interlocuteur éventuel.
o Structure non hiérarchisée, qui repose sur le cumul d'arguments, dans le respect obligé de la *continuité thématique*.	o Structure en arbre (ou encore modulaire, à plusieurs arbres[2]), où les inférences s'enchaînent par « recyclage » de la proposition inférée, sans nécessaire continuité thématique.
o Cherche à modifier la valeur épistémique *sémantique* qu'a l'énoncé-cible pour l'un des deux interlocuteurs.	o Cherche à modifier la valeur épistémique *théorique* de l'énoncé-cible.
o La conclusion et sa valeur de vérité n'en découlent ni nécessairement, ni uniquement, puisqu'elles y sont défendues par la *pertinence* du contenu des propositions avancées, et non par la validité des opérations discursives mobilisées ; l'argumentation *convainc*, mais ne *prouve* pas.	o Chaque proposition inférée est uniquement et nécessairement déterminée par l'inférence, dont la *validité* peut être théoriquement contrôlée. C'est le cas en particulier de l'énoncé-cible, dernière proposition inférée, dont la nécessité « prouve » alors sa valeur logique de vérité.

[2] Par exemple, une preuve qui fait appel à un ou plusieurs *lemmes*, dont le ou les résultats sont recyclés non pas comme prémisses, mais comme (nouvelles) règles d'inférence ; voir par exemple la seconde preuve, § 4.2.

2.3. Le passage de l'une à l'autre

Une thèse de Duval (1991, 1992-93, 1995 ; Duval & Egret, 1989) est à l'effet que les élèves ne perçoivent ni ne comprennent aisément les exigences propres à la démonstration mathématique, qu'ils appréhendent et traitent comme des argumentations. Tentons de cerner les causes de ce dysfonctionnement.

1. Les manuels et les enseignants ne prennent pas toujours le soin de distinguer lesquelles, parmi les démarches discursives *explication*, *illustration commentée*, *heuristique*, *argumentation*, *démonstration*, ils sont en train d'utiliser ; voir par exemple Dreyfus (1999, § 4).

2. L'argumentation est la forme de raisonnement à laquelle les élèves sont confrontés au primaire, tant en mathématiques que dans les autres disciplines. La recension systématique (voir Tanguay, 2002, § 5) des problèmes et exercices de géométrie synthétique dans une des collections de manuels du secondaire (12 à 17 ans) la plus utilisée au Québec, montre que parmi les problèmes dont la solution passe par un véritable raisonnement déductif, la très grande majorité ne nécessite en fait que ce que nous avons appelé une *déduction locale*, à savoir une déduction en un seul pas. Or, quand la complexité du raisonnement reste en deçà de l'enchaînement déductif, l'élève n'est pas confronté à la difficulté de coordonner les propositions selon leur statut opératoire changeant : voir le point 5. Nous supputons que cette prédominance des problèmes à déductions locales sur les problèmes à enchaînements déductifs n'est pas propre aux manuels québécois.

3. La *structure locale* qui est celle, ternaire, de l'inférence, n'est que rarement explicitée en démonstration écrite (cf. l'Annexe 1) :
   - soit que la règle d'inférence soit immédiate au point qu'on ne juge pas bon de la mentionner (ex. : la transitivité de la congruence ou du parallélisme) ;
   - soit que pour alléger la rédaction, l'on évite de répéter la proposition « recyclée », ou l'on regroupe deux inférences en une seule, ou deux conditions de la règle d'inférence en une seule, etc. ;
   - soit que le texte, pour des raisons d'organisation, de formulation, de mise en page, n'explicite pas, ou rende équivoque le statut opératoire des propositions invoquées ;
   - soit que le statut théorique de certaines propositions n'ait pas été clairement préétabli (c'est par exemple souvent le cas des preuves qui mobilisent la géométrie des transformations).

4. Même quand la structure de l'inférence est lisible, c'est ce que Duval (1995, p. 244) appelle « l'utilisation algorithmique de l'énoncé-tiers » — à savoir, la vérification que toutes les conditions sont réunies dans les prémisses pour que la règle d'inférence s'applique et que se détache la proposition inférée — qui est relégué à l'implicite par les contraintes rédactionnelles. Le caractère opératoire des liens entre prémisses, énoncé-tiers et conclusion reste alors masqué pour l'élève, qui n'y voit que des relations symétriques de proximité sémantique, de nature argumentative (cf. l'Annexe 1).

5. La structure globale de la démonstration peut elle aussi rester inintelligible pour l'élève. Elle repose fondamentalement sur la variabilité du statut opératoire des propositions. Or, l'appréhension par l'élève de cette variabilité nécessite de sa part une décentration par rapport au contenu, à ses valeurs épistémique sémantique et logique (cf. l'Annexe 1). En outre, cette décentration passe par une nécessaire intelligibilité de la structure locale et du rôle qu'y joue le statut théorique de chaque proposition, si bien que les difficultés soulevées aux points 3 et 4 nourrissent en quelque sorte celle dont il est ici question :

   Les propositions étant considérées en dehors de leur contexte [théorique] *d'énonciation et leur « sens » se trouvant réduit à la seule composante de leur contenu, leur organisation en pas de déduction se fait alors en fonction de leur contenu et non en fonction de leur statut opératoire. Il en résulte que la valeur épistémique théorique ne peut plus être dissociée de la valeur épistémique sémantique qui reste dominante* (Duval, 1995, p. 303).

Nous reviendrons sur ce point à la section suivante, d'une part pour y prendre en compte les plus récentes réflexions de Duval (2001) sur la *pratique orale* du texte de démonstration par les élèves, d'autre part pour développer certains aspects du problème sur lesquels Duval n'a à notre avis peut-être pas assez insisté.

6. Les points 3, 4 et 5 sont exacerbés par la similitude linguistique des deux formes de raisonnement, notamment par le fait qu'elles emploient les mêmes connecteurs, malgré qu'ils y aient des fonctions différentes ; voir Duval (1992-93 ; 1995, p. 305) ou Duval et Egret (1989).

3. L’appréhension de la structure déductive en démonstration

3.1. Prégnance de la valeur de vérité

Plus que le contenu, c'est à notre avis la valeur de vérité des propositions en jeu qui fait écran aux structures locale et globale en démonstration. L'organisation déductive impose en effet une hiérarchisation, une « orientation[3] » des combinaisons propositionnelles, qui doit primer non seulement sur les liens sémantiques, mais même sur les liens logiques théoriques. Expliquons-nous. Un élève prend par exemple connaissance de la preuve donnée à l'Annexe 1. Il doit comprendre que la congruence des angles aux sommets du triangle $\Delta ACC'$ *précède* la congruence des côtés. Il ne peut saisir la structure de la preuve que s'il conçoit, au moment où les affirmation et justification 5 sont énoncées, que la congruence des angles aux sommets est **déjà vraie**, quand celle des côtés n'est **pas encore vraie** ! Cette appréhension doit se faire à l'encontre de l'équivalence logique théorique « isocèle si et seulement si isoangle » (celle qu'a apprise l'élève il y a peu) mais surtout, en dépit du sentiment qui s'est imposé à lui dès qu'il a saisi l'affirmation 3, en conformité avec ce qu'il perçoit de la figure d'accompagnement, à savoir que les propositions « $\Delta ACC'$ est équilatéral » et toutes celles qui en découlent *sont vraies*.

Car selon nous, la valeur de vérité est beaucoup plus en cause ici que la valeur épistémique sémantique. Avec les années, l'élève s'est convaincu, comme ses enseignants ne se sont jamais fait faute de lui rappeler, que la mathématique est par excellence la science où les énoncés doivent être sans ambivalence soit vrai, soit faux. Et l'on a insisté, souvent même *à l’encontre* des conceptions spontanées des élèves : « les nombres premiers sont impairs » est un énoncé faux car… (Zazkis et Levy, 2001) ; « les carrés sont des rectangles » est un énoncé vrai car… (Furinghetti et Paola, 1991). Ces mêmes enseignants ont bien prévenu l'élève des pièges de l'empirisme et de « l'évidence », tout particulièrement en géométrie, mais du moment que le manuel affirme, en *argumentant* cette affirmation, que le triangle $\Delta ACC'$ est équilatéral ! Comment « l'équi-angularité-latéralité » du triangle saurait-elle n'être tout à coup qu'**à moitié vraie** ?!!

Autrement dit, quand l'élève a atteint ce stade où il est capable de remettre en question l'évidence, où il a dépassé le désormais consacré « ça se voit sur le dessin », celui-là, en « bon élève », refoule la valeur épistémique sémantique qu'il prête spontanément à l'énoncé, mais c'est alors pour laisser toute la place à la valeur

[3] Au sens où les graphes propositionnels qui modélisent le raisonnement sont orientés, c'est-à-dire que les arêtes y sont des flèches ; cf. les annexes 4, 5 et 6.

de vérité, et augmenter d'autant son poids d'entrave au raisonnement[4]. Et ce, aussi longtemps qu'il n'a pas pris conscience de cette autre valeur épistémique qu'est la valeur théorique, et n'a pas « … découvert une organisation du raisonnement centrée sur le seul statut des propositions » (Duval, 1995, p. 231). Cette « prégnance » de la valeur de vérité est notamment exacerbée à l'égard des preuves par l'absurde, comme le suggère l'analyse de trois productions[5] d'étudiants (Tanguay, 2003, § 5.3), que nous avions retenues comme particulièrement typiques et révélatrices sous ce rapport.

3.2. Graphes orientés, linéarité et pratique orale de l'écrit

On vient de le voir, la structure déductive en démonstration impose une organisation hiérarchique des propositions, où même la relation d'adjacence entre deux propositions théoriquement équivalentes est en général hiérarchisée. Cette structure de graphe orienté (voir annexes 4, 5 et 6) est bien sûr de complexité variable, complexité que le texte écrit, dans sa linéarité, a tendance à masquer. Ce sera entre autres le cas si une proposition inférée est recyclée comme prémisse, non pas de l'inférence qui suit dans le texte, mais d'une inférence énoncée plus tard.

Considérons, par exemple, la conclusion de la preuve donnée à l'Annexe 1. Des prémisses $\mathrm{m}\ \overline{AC} = \mathrm{m}\ \overline{CC'}$ (affirmation 5) et $\mathrm{m}\,\overline{CC'} = 2\times \mathrm{m}\,\overline{CB}$ (affirmation 6), on infère que $\mathrm{m}\,\overline{AC} = 2\times \mathrm{m}\,\overline{CB}$ (affirmation 7). Mais l'affirmation 6 est elle-même conclusion d'une inférence qui s'insère entre 5 et 7. Veut-on justifier l'alignement des points *C*, *B* et *C'*, de fait préalable à cette inférence, que l'affirmation 5 s'éloignera alors d'autant dans le texte de l'inférence dont elle est une des prémisses, et dont la transitivité de l'égalité est la règle. Et où insérer affirmations et justifications si l'alignement de *C*, *B* et *C'* est déduit :

- des égalités m∠CBA = 90° = m∠ABC',
- du fait que ces deux angles sont adjacents,
- pour conclure par additivité que m∠CBC' = 180° ?

---

4 Cette difficulté pour l'élève — se décentrer par rapport à la valeur de vérité des propositions — constitue à notre avis un véritable *obstacle*, au sens de Brousseau (1998), dont on pourrait entendre la saga de l'*Axiome de la parallèle* comme un écho historico-épistémologique : ce n'est que quand l'axiome de la parallèle a pu être considéré non plus sous l'angle exclusif de sa valeur de démontrabilité, mais bien pour son statut opératoire à l'intérieur d'une parmi différentes géométries possibles, que le problème de son indépendance a pu être définitivement élucidé.

5 Il s'agit d'extraits d'examens, où des étudiants de 1re année de Cégep (17-18 ans) devaient montrer par l'absurde que (2+√3)/4 est irrationnel, sachant que √3 l'est, et dont des exemples analogues avaient été traités en cours.

En même temps que l'affirmation 3, de façon à partager avec celle-ci la règle de conservation de la mesure des angles par symétrie ? Juste avant l'affirmation 6, pour bien faire ressortir que l'alignement de C, B et C' en est une prémisse ? Quelle que soit l'organisation retenue, le texte écrit aura à rendre compte d'un tel enchevêtrement qu'il faudra un usage particulièrement fin des connecteurs[6] pour le clarifier.

Que le texte rende compte habilement ou non de la structure, un syndrome risque de se manifester chez l'élève, à savoir sa *pratique orale du texte*, que Duval diagnostique comme suit :

> *Qu'il s'agisse d'écrire ou qu'il s'agisse de lire, on peut toujours se contenter d'un traitement local, rapide et ininterrompu (sans retour en arrière et sans délai), comme lorsqu'on intervient ou que l'on écoute dans une conversation ou dans une discussion. Et il semble que beaucoup d'élèves s'en tiennent à cette pratique et rencontrent beaucoup de difficultés à entrer dans une pratique écrite de l'écrit…* (p. 191). (…) *Cette limitation subjective aux fonctionnements propres à l'expression orale n'empêche pas l'accès à l'écrit, du moins en tant qu'objet culturel jouant un rôle dans la vie sociale et dans les loisirs. Elle est même souvent suffisante pour réussir scolairement. Mais les possibilités de traitement, d'exploration, de contrôle, de réflexion que l'expression écrite offre restent méconnues et inutilisées* (Duval, 2001, p. 189).

La compréhension de la structure d'une démonstration tant soit peu complexe nécessite de la part de l'élève un travail — de lecture ou d'écriture — ponctué de pauses, de retour sur les propositions déjà énoncées, de réaménagements et simultanéisations (pour rapprocher des propositions ou blocs de propositions non contigus dans le texte), de recul, d'appréhension globale (pour saisir certains éléments de macro-organisation), de contrôle, de réflexion. Toutes choses que ne permet pas cette « linéarisation de la pensée » (op. cit., p. 191) imposée par une pratique orale du texte, faite de fluence, de séquencialité, d'irréversibilité[7].

Du moins peut-on penser que la pratique orale du texte ne nuit pas à l'appréhension de la structure *locale* de la démonstration ; voire, espérer que la linéarisation du traitement par l'élève facilite cette conception hiérarchisée, orientée, de l'enchaînement des propositions, dont nous avons vu à la section précédente qu'elle pouvait être entravée par la prégnance de la valeur de vérité. Mais rien n'est

[6] La fonction des connecteurs en démonstration est de marquer le statut opératoire des propositions (voir Duval, 1992-93).

[7] Le fait d'imposer un format *en deux colonnes* ne prévient en rien, à notre avis, du syndrome de la pratique orale du texte, l'élève fonctionnant alors selon la séquence : affirmation 1, justification 1, affirmation 2, justification 2, *etc*.

moins sûr. Il est possible qu'au contraire, l'élève prête à la simple linéarité de l'expansion discursive ce qu'il devrait en fait comprendre comme une hiérarchisation fondamentalement structurelle de l'organisation déductive. Certaines réactions des élèves, au cours du travail de constitution des preuves comme graphes orientés (voir point 4, § 4.4.2), nous semblent révélatrices à cet égard. La situation paradoxale pourrait donc être la suivante : l'élève doit saisir une structure en arbre, orientée, qu'il doit pour cela travailler globalement, par retours en arrière, réaménagements, etc. Mais ce qu'il conçoit est une structure par cumul, un agglomérat de relations non orientées, et [peut-être ***parce que***] son travail s'effectue en mode strictement linéaire, sans réversibilité. La pratique orale du texte, assurément une entrave à l'appréhension de la structure globale en démonstration, le serait donc *également* pour la structure locale. L'étude de cette question mériterait en tous cas d'être poussée plus avant.

3.3. Démonstration et intuition

Selon Fischbein (1982, p. 10, notre traduction), « … les structures intuitives sont des composantes essentielles de toutes formes actives de compréhension et de réflexion tant soit peu productives »[8]. Pour lui, l'intuition (intellectuelle) a la même fonction au niveau symbolique qu'a la perception au niveau concret : donner accès à une forme de cognition qui soit directe, globale et immédiatement disponible. C'est là selon lui qu'on se heurte à ce qu'il appelle le *paradoxe fondamental de l'apprentissage de la preuve* :

> *Le concept de preuve formelle (non inductive, non intuitive, non empirique) ne peut devenir un instrument efficace pour les processus de raisonnement que si, et seulement si, il acquiert les qualités requises par le comportement empirique d'adaptation !*
> *Autrement dit : les voies formelles de raisonnement et de preuve peuvent se libérer des contraintes du savoir empirique si elles atteignent ces qualités qui confèrent à la recherche empirique sa productivité spécifique ; à savoir ces formes globales, synthétiques, intuitives d'anticipation et d'interprétation* (op. cit., p. 17, notre traduction).[9]

---

[8] (…) *the intuitive structures are essential components of every form of active understanding and of productive thinking.*

[9] *The concept of formal, noninductive, nonintuitive, non-empirical proof can become an effective instrument for the reasoning process if, and only if, it gets itself the qualities required by adaptive behavior!*
In other terms: formal ways of thinking and proving can liberate themselves from the constraints of empirical knowledge if they become able to include in themselves those qualities which confer on the empirical search its specific productivity. We refer to the global, synthetic, intuitive forms of guessing and interpreting.

Plus qu'un paradoxe, il s'agit ici d'après nous d'un véritable cercle vicieux. Pour être opératoires (au sens de Fischbein), les mécanismes logiques de la démonstration doivent accéder, dans l'entendement de l'élève ou de l'étudiant, au stade de la connaissance intuitive, c'est-à-dire à une forme de cognition directe, globale, efficace, immédiatement disponible. Mais une telle forme de cognition n'est possible que si elle embrasse des structures ou des schèmes relativement stables, invariables, comme le sont les règles et contraintes qui régissent l'organisation déductive en démonstration. Au contraire, l'argumentation revêt autant de formes et structures qu'il y a de contextes, de contenus et de combinaisons de contenus issus des propositions sous-jacentes : « … l'argumentation a pour caractéristique essentielle de n'avoir pour contraintes d'organisation que celles inhérentes à toute pratique spontanée du discours » (Duval, 1995, p. 213). Ainsi, tant que l'élève aborde la preuve à travers des schèmes argumentatifs de raisonnement, ne peut-il intégrer la démonstration en une « … forme structurale interne de nécessité qui est caractéristique d'une adhésion intuitive » (Fischbein, 1982, p. 15)[10]. Et tant qu'il n'est pas parvenu à une telle adhésion intuitive sera-t-il condamné à aborder la preuve à travers des schèmes de raisonnement de nature argumentative.

Comme le suggère Fischbein, cette absence d'adhésion intuitive pourrait expliquer des comportements — symptômes de la difficulté des élèves à saisir la nature apodictique de la démonstration — comme : se déclarer satisfait d'une preuve et demander du même souffle plus de vérifications empiriques (Fischbein et Kedem, 1982) ; ou reprendre à zéro une démonstration en l'adaptant à un cas particulier auquel on cherche à appliquer le résultat général déjà démontré (Vinner, 1983) ; ou considérer qu'une démonstration géométrique ne s'applique qu'à l'unique cas illustré par la figure d'accompagnement (Chazan, 1993). D'un point de vue psychologique, c'est peut-être le sentiment inconscient d'être pris dans un cercle vicieux qui se révèle consciemment à l'élève dans sa conviction panique qu'il n'y comprendra jamais rien en démonstration. Faute de maîtriser ses mécanismes d'organisation interne, se rabattra-t-il sur les manifestations externes de la preuve formelle, notamment sur ses aspects *ritualistes*, en lien avec un fort effet de contrat (Harel et Martin, 1989).

[10] (…) *an internal structural form of necessity which is characteristic of an intuitive acceptance.*

4. Des tâches de découverte de la structure déductive

4.1. Hypothèses de recherche

Comment faire découvrir à l'élève ce que, dans Duval et Egret (1989), on appelle *la structure profonde* de la démonstration ? Nous avons adopté, dès la première analyse, certaines des orientations de recherche proposées par Duval (1991, 2001 ; Duval & Egret, 1989), pour les raisons qu'il a données, et que nous ne reprendrons pas ici :

- dissocier les tâches heuristiques et les tâches d'organisation déductive ;
- faire interagir une représentation non discursive, par graphes orientés (ou schémas sagittaux) avec un traitement rédactionnel de la preuve.

Nous avons choisi de prendre quelques distances vis-à-vis de ces mêmes orientations en ce qui a trait à la construction du graphe par l'élève (Duval, 2001, p. 201). Nos hypothèses sont les suivantes.

a) L'apprentissage de la démonstration est un processus de longue haleine, qui doit commencer tôt. Sans en faire un objet d'enseignement magistral, sans même nécessairement les énoncer explicitement, il faut chercher à faire comprendre aux élèves aussitôt que possible les « règles du jeu ».

b) L'élève est pris dans des cercles vicieux qu'il faut briser. Celui du rapport de l'intuition à la démonstration (cf. § 3.3). Celui de la prise de conscience de la valeur épistémique théorique et du statut opératoire variable des propositions : comment la faire naître si l'élève n'arrive pas à se décentrer des contenus et valeurs de vérité ? Celui de l'appréhension de la structure hiérarchisée, globalement et localement, de la démonstration : comment la saisir tant qu'elle n'est perçue que comme un cumul d'arguments symétriquement inter-reliés ? Quels choix peut faire l'élève, dans sa construction d'un graphe propositionnel, s'il n'a pas encore compris comment doit en être la structure ?

Nous faisons le pari qu'on peut, dans un premier temps, faire travailler les élèves (nous verrons plus loin comment) sur des graphes déjà construits, avec des propositions et des justifications (règles d'inférence) déjà énoncées ; quitte à déléguer de plus en plus d'éléments de la tâche (le choix des règles, la construction du graphe…) à mesure que progresse l'apprentissage. Il y a en outre ici l'idée, vieille comme la science et la pédagogie, de chercher à *isoler les difficultés*.

c) Nous en avons discuté au point 2, § 2.3, les démonstrations à schématiser devront enchaîner plus d'une inférence. Nous faisons de plus l'hypothèse que les mécanismes logiques de la démonstration ont plus de chance d'être intégrés si à la structure par enchaînement d'inférence répond, à un niveau supérieur, une structure analogue par enchaînement et « recyclage » des théorèmes.

d) Nous faisons pour finir l'hypothèse que le travail *en équipes* — assorti des inévitables échanges argumentatifs — sur l'organisation des propositions dans les graphes favorisera cette *adhésion intuitive* aux mécanismes logiques de la démonstration (cf. § 3.3), dans la mesure où ceux-ci émergeront tant soit peu des délibérations entre coéquipiers.

4.2. Conception des tâches

Pour aller dans le sens de la tradition scolaire et des programmes, nous avons opté pour un travail de la démonstration en *géométrie plane.* Nous avons décidé, pour les raisons exposées au point a) ci-dessus, de concevoir et soumettre une première (courte) séquence de tâches à des élèves de Secondaire 1 (12-13 ans).

Le modèle de la tâche a ensuite été arrêté : elle consiste à organiser une « preuve » dont on a d'abord trouvé les grandes lignes lors d'une discussion de classe dirigée par l'enseignant, pendant laquelle est introduite la figure d'accompagnement. Par équipes de trois ou quatre élèves, ceux-ci doivent ensuite placer des énoncés (écrits sur petits cartons rectangulaires, donnés pêle-mêle) dans les cases vides d'un schéma sagittal, où seul l'énoncé-cible est déjà inscrit et numéroté, dans la dernière case. De façon à bien marquer, à la fois le statut particulier des justifications (les règles d'inférence) et la structure ternaire de l'inférence, celles-ci sont énoncées et numérotées sur une feuille à part. Les élèves disposent de pastilles numérotées, trois ou quatre pastilles de chaque numéro. Les numéros correspondant aux règles doivent être placés dans les bulles attachées aux flèches-inférences : voir annexes 4, 5 et 6.

Les règles sont choisies pour leur évidence, leur universalité, leur caractère de non-démontrabilité, mais l'on ne cherche ni à axiomatiser l'ensemble du corpus géométrique du niveau en cause, ni à réduire le nombre de règles au minimum, ni à faire une construction formelle stricte[11], à la Hilbert. Une conséquence parmi d'autres : certains éléments de preuve — le fait par exemple que deux angles soient adjacents — ne seront pas justifiés et seront implicitement admis sur une base perceptive. Après le travail sur le graphe, les élèves doivent individuellement rédiger un message (« dans leurs propres mots ») pour convaincre l'élève Thomas (« qui ne croit jamais ce que ses professeurs lui disent ») de la vérité (« hors de tout doute raisonnable ») de l'énoncé-cible.

---

[11] On pourrait donc parler d'une *axiomatique de contenu* (Duval, 1995, pp. 277-301) qui ne serait que locale.

Comme résultat-cible d'une première série de tâches, notre choix s'est porté sur le théorème de la somme des mesures des angles intérieurs du triangle :

- d'abord bien sûr parce que le résultat est au programme du niveau concerné ;
- ensuite parce qu'il ne relève pas de l'évidence perceptive, et est même pris en défaut lorsque soumis à la vérification empirique d'une classe de jeunes qui mesurent des angles au rapporteur[12] ;
- finalement parce que plusieurs preuves « quasi-formelles » du résultat sont à la portée de l'élève.

Nous avons cherché, dans un premier temps, à tenir compte de la recommandation du Ministère de l'Éducation du Québec, pour qui « … c'est notamment par la géométrie des transformations que l'élève se créera un réseau de relations lui permettant de faire des déductions pour se convaincre de la véracité d'une affirmation » (MEQ, 1993, p. 35). Nous avons donc conçu une preuve dont la construction figurale préalable consiste à tracer les images du triangle ΔABC par les deux translations de vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. On y fait appel à des règles d'inférence comme :

– une translation applique sur elle-même toute droite qui est dans la direction de la translation ;

– une translation applique sur une droite qui lui est parallèle toute droite qui n'est pas dans la direction de la translation ;

– une translation applique un angle sur un angle de même mesure ;

règles dont le caractère d'évidence est discutable. La complexité du schéma déductif résultant a achevé de nous convaincre que cette preuve ne devait pas être retenue.

La seconde preuve envisagée consiste en une adaptation du raisonnement exposé dans Hanna et Jahnke (1993, p. 436) :

1) on montre que la somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle rectangle est de 180° ;
2) on généralise en appliquant 1) aux deux triangles rectangles obtenus en traçant, dans un triangle quelconque, une des hauteurs dont le pied est sur un des côtés.

[12] Les enseignants collaborateurs ont eu la consigne de mener une activité de validation empirique du résultat par mesurage, avant l'activité de démonstration.

L'organisation en deux modules nous est apparue intéressante, parce que l'utilisation du résultat 1) comme règle d'inférence dans 2) rend explicite cette idée du « recyclage ». Pour établir le résultat 1) en restant dans l'esprit du programme du MEQ, on peut par exemple appliquer au triangle rectangle une rotation de 180° autour du milieu de l'hypoténuse, et montrer que le quadrilatère ainsi formé est un rectangle. Mais l'enchaînement déductif résultant a été jugé trop compliqué par les enseignants-collaborateurs compte tenu du niveau, et cette preuve n'a pas été retenue elle non plus.

Et pourquoi pas la preuve « classique », qui consiste à tracer la parallèle à AB qui passe par C (A, B, C les sommets du triangle), et à invoquer la congruence des angles alternes-internes ainsi formés ? Il se trouve que le programme du MEQ ne prévoit l'étude des angles correspondants, alternes-internes et alternes-externes qu'en 4^e^ secondaire. Nous avons alors pris la décision d'incorporer la démonstration de la congruence des alternes-internes à l'activité. Après concertation avec les enseignants collaborateurs, ceux-ci ont accepté d'insérer dans leur planification trois tâches d'une période[13] chacune :

1. Une première tâche de reconstitution d'un schéma déductif, pour la preuve que *les angles opposés par le sommet ont même mesure*. Nécessaire à la preuve 2, le résultat est intuitivement évident. L'idée générale de la preuve, bien que simple, fait quand même l'objet d'une discussion préliminaire entre la classe et l'enseignant. Et le travail sur le schéma, pas si facile, permet aux élèves de s'initier aux « règles du jeu » et de s'approprier les énoncés qui vont servir de justifications : voir Annexe 4.
2. Une deuxième tâche de reconstitution d'un schéma déductif, pour la preuve que *les angles alternes-internes, déterminés par deux parallèles coupées par une sécante, ont même mesure*. Il faut consacrer une demi-heure de la période à définir *angles correspondants*, *angles alternes-internes*, à expliquer pourquoi la congruence des angles correspondants sera tenue pour acquise (« on ne peut pas tout démontrer ! »), en revenant sur la « philosophie » de la démarche déductive. La constitution du deuxième schéma n'est pas précédée d'une recherche commune des grandes lignes de la preuve et de fait, les élèves n'auront aucune difficulté à l'organiser. Voir Annexe 5.
3. La reconstitution du schéma déductif, pour la preuve que *la somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle est de 180°*. Les deux résultats précédents, maintenant démontrés, se sont ajoutés à la liste des règles d'inférence. L'idée de la preuve fait l'objet d'une discussion

[13] Une période au secondaire dure de 55 à 75 minutes. Il s'agissait ici de périodes de 75 minutes.

préliminaire. La construction figurale préalable est donnée en même temps que l'amorce du message pour l'élève Thomas (voir Annexe 7). La reconstitution du schéma est plus difficile mais les élèves sauront déjà mieux en quoi consiste la tâche et s'y engageront plus rapidement. Voir Annexe 6.

Réajusté puis approuvé par les enseignants-collaborateurs, le choix des règles d'inférence est d'abord décidé en ajustant deux variables dont les effets opposés sont :

- obtenir des démonstrations où même les pas en apparence anodins seront rendus explicites ;
- obtenir des schémas de complexité raisonnable.

Ce choix est pour l'instant imposé *ex cathedra* aux élèves, mais on peut penser que si des activités analogues étaient planifiées sur une base régulière, à plus long terme, il pourrait faire l'objet d'un travail de toute la classe.

4.3. Premières expérimentations

L'activité est constituée des trois tâches décrites ci-dessus. Elle a été menée auprès de trois classes de Secondaire 1 (12-13 ans) à Montréal, aux mois de mars, avril et mai 2004. Les élèves n'avaient jusqu'alors été introduits à la preuve en mathématiques que sous la forme des justifications et explications informelles usuellement données au primaire.

La première tâche était précédée d'une introduction, où l'on expliquait aux élèves qu'ils auraient à reconstituer une « vraie preuve mathématique », faite d'une série de déductions, « comme dans une enquête de Sherlock Holmes ou de Colombo ». Un exemple de *déduction* était représenté au tableau sous forme schématique (avec la « bulle » de justification), puis discuté.

On trouvera la liste des justifications, distribuée à chaque fois sur une feuille volante, à l'Annexe 2. Pour la première tâche, seules les quatre premières règles apparaissaient dans la liste. La première règle, plus obscure, était expliquée à partir d'un exemple, en introduction, avec un rappel de ce que sont des angles adjacents. Il faut mentionner que les élèves du Québec ne commencent l'algèbre qu'en secondaire 2 (13-14 ans) ; d'où le libellé et les notations un peu embarrassés dans les justifications 3, 4 et 9. Les figures d'accompagnement, reproduites et laissées au tableau à chaque fois, sont données à l'Annexe 3.
Les séances, neuf en tout, ont été filmées par un assistant de recherche. Compte tenu de la piètre qualité du son de la toute première séance (bruit ambiant trop important), nous n'avons gardé de cette classe que trois ou quatre équipes, volontaires pour accomplir les tâches 2 et 3 pendant deux périodes libres, sur

l'heure du midi. Pour les deux autres classes, nous avons plutôt décidé de suivre une seule équipe à la caméra-vidéo, branchée à un micro de table qui ne capte que les sons du voisinage immédiat. Les discussions d'une autre équipe ont été enregistrées avec magnétophone et micro de table. Cela a permis aux huit équipes de chacune de ces deux classes de faire l'activité, pendant les heures de cours. Le chercheur a pris des notes et l'enseignant collaborateur, qui assistait à chaque fois, a été invité à faire de même. Les grands cartons ont été photographiés à intervalles (plus ou moins) réguliers. Il faut ajouter à cela les preuves « pour convaincre Thomas », rédigées par les élèves. L'analyse de cet ensemble de données, sa confrontation avec l'analyse a priori et les conclusions à en tirer feront l'objet d'autres articles. Nous nous contenterons ici de rendre compte de ce qui a le plus frappé les membres de l'équipe de recherche, incluant les trois enseignants.

4.4. Premières observations

4.4.1. La réussite

Pour la première tâche, vingt-deux équipes sur vingt-quatre ont réussi une reconstitution du schéma, dans quelques cas à une règle d'inférence fautive près (à chaque fois, la règle 4 invoquée à la place de la règle 3 : voir point 3, § 4.4.2). Le temps de réussite a varié entre 30 et 55 minutes (l'introduction demande de 15 à 20 minutes). Une équipe a réussi le schéma à l'inversion de deux propositions près, avec donc une inférence qui n'en n'était pas vraiment une. Une équipe a tourné en rond pendant toute la période, sans jamais débloquer.

Le second schéma déductif a été réussi par toutes les équipes en 5 à 15 minutes. Avec les explications préalables sur les angles alternes-internes et la rédaction du message pour Thomas, les élèves ont été occupés pour tout juste une heure. Par ailleurs, la facilité avec laquelle ils se sont acquittés de la tâche les a certainement confortés dans leur capacité à réussir la troisième tâche.

Dans des temps variant entre 30 et 65 minutes, les dix-neuf équipes (trois sur l'heure du midi et seize en cours) ont réussi la reconstitution du troisième schéma, mais avec de l'aide à divers degrés. D'abord, le numéro 9 est systématiquement placé dans la dernière bulle par l'animateur après une vingtaine de minutes (le numéro y était déjà pour deux des équipes). Dans deux des classes, on a dû revenir pour expliquer, exemple à l'appui, la règle 9 (des élèves ne comprenaient pas le mot *substitution*). Avec quatre à cinq équipes qui disaient n'arriver à rien, le chercheur ou l'enseignant ont repris l'idée générale de la preuve : « essayez de traduire cette idée avec les propositions que vous avez… ». En montrant ensuite certains éléments de la preuve correctement établis dans leur schéma (« cette partie là est correcte, comment intervient-elle dans l'idée générale ? Essayez de raccorder ça aux deux dernières propositions[14] »), ces équipes ont fini par débloquer.

4.4.2. Autres éléments à relever

Dès la deuxième tâche, les élèves se mettaient rapidement au travail, sachant très bien ce qu'ils avaient à faire. Ils semblent avoir apprécié les tâches, mais difficile de dire quelle part attribuer au fait que l'activité les changeait de leur routine.

- *Contrôle possible par les élèves.* Ceux-ci semblent en effet en mesure de valider par eux-mêmes leur schéma. L'erreur la plus fréquente, celle du « raccourci déductif », qui consiste à faire une seule déduction avec ce qui aurait dû en être deux ou trois,

  > *Exemple, première tâche :* de ce que $\angle MOQ$ et $\angle QON$ sont adjacents, par la règle 1, les élèves déduisent que
  > $$\mathrm{m}\angle MOQ + \mathrm{m}\angle QON = 180°$$

  finit pratiquement toujours par être corrigée, parce que les élèves restent alors pris avec des énoncés qu'ils ne savent plus où placer, et reconsidèrent l'organisation des propositions. Ce qui ne veut pas dire qu'ils ont à chaque fois identifié précisément ce qui n'allait pas avant : nous y reviendrons. S'il leur arrive de demander au chercheur ou à l'enseignant de vérifier un schéma fautif, leur manque de conviction est très net à chaque fois ; par exemple, dans un des enregistrements : « On pense qu'on a fini mais on pense que ça ne marche pas ». Nos interventions ont alors consisté à montrer du doigt deux « déductions », une bonne, une mauvaise, en demandant pour chacune : « Expliquez-moi cette déduction-là dans vos mots », ou « essayez de m'expliquer comment fonctionne cette déduction ». La conclusion qu'une déduction n'en est pas vraiment une fait alors rapidement consensus dans le groupe. À l'inverse, les élèves savent quand le schéma est réussi (au bon choix d'une justification près), et leur conviction que tel est le cas se manifeste alors clairement.

- *Les stratégies.* Aucune équipe ne semble avoir adopté une stratégie systématique. Quelques équipes, les plus efficaces, ont cherché à travailler davantage « à reculons », mais pas systématiquement. Les schémas se construisent par zones, par morceaux qu'on cherche ensuite à connecter entre eux. Le travail local se fait selon des considérations géométriques, logiques, symboliques (« On met tous les *MOQ* et les *POM* de ce côté-là, et les autres là »), des recherches de symétrie, en un mélange difficile à dissocier. Les équipes les plus inefficaces sont celles qui ne prennent en

---

[14] Les élèves ont tout de suite compris où devait aller l'avant dernière proposition qui est l'instanciation, dans le contexte de la figure d'accompagnement, de la proposition-cible.

compte les justifications qu'après coup. Une des enseignantes a dû intervenir auprès de deux équipes qui ignoraient complètement les justifications, et n'arrivaient à rien. Il apparaît clairement que la traduction de la preuve en un enchaînement de déductions ne se fait que très laborieusement, de façon non systématique et mal contrôlée ; et que *même quand la preuve est bien saisie dans ses grandes lignes, l'utilisation de ce canevas comme guide pour l'organisation déductive ne va absolument pas de soi.* Un élève qui, de façon convaincante, a su synthétiser la 3^e^ preuve devant ses coéquipiers, s'exclamera : « Mais je ne sais pas comment l'expliquer avec ce tableau là ». Et l'autre de renchérir : « On comprend mais pas avec le tableau ». La traduction inverse, du schéma à la preuve écrite « pour Thomas », ne va pas de soi elle non plus : voir le cinquième point ci-dessous.

- *Algèbre.* Certains élèves ont du mal à identifier la règle 3 (transitivité de l'égalité) quand un des termes de l'égalité est une somme : cf. les déductions à deux prémisses dans l'Annexe 4. Ils n'arrivent pas à envisager la somme comme *un seul* nombre, et invoquent alors la règle 4 simplement parce qu'elle fait apparaître une somme. Cela nous fait dire que l'activité serait probablement mieux adaptée aux 2^e^ ou 3^e^ secondaires (13-15 ans), après l'introduction à l'algèbre. Son insertion en Secondaire 2 serait compatible avec l'échéancier des contenus géométriques du *nouveau* programme, dont l'implantation au Québec débute en septembre 2004.

- *Graphes orientés.* Les élèves ont pris conscience de la structure fondamentalement orientée du graphe propositionnel, surtout par l'entremise des déductions où intervient la règle 2. Spontanément, ils ont majoritairement fait de $\mathrm{m}\angle MON = 180°$ une prémisse pour inférer, par la règle 2, que l'angle *MON* est plat. Il s'agit probablement d'un effet de l'enseignement des angles qui fait de la mesure l'objet premier : on mesure d'abord des angles au rapporteur et on classifie ensuite selon les mesures obtenues (« un angle droit est un angle qui mesure 90°, un angle aigu est un angle qui mesure moins de 90° », etc.). Mais devant l'impossibilité de raccorder l'énoncé *∠MON est un angle plat* à quoi que ce soit, ils prennent conscience de l'équivalence des deux énoncés (« qu'un angle plat égale 180 et qu'un angle de 180 soit plat, c'est la même chose », dira l'un d'eux à sa coéquipière), et de la nécessité de les placer dans le bon ordre pour avancer dans le schéma.

- *Preuves écrites.* Les messages pour Thomas rédigés par les élèves ne sont pas concluants du point de vue de la recherche. Ceux de la deuxième tâche, en général bien rédigés, portent sur une démonstration trop facile pour donner des informations significatives. Par manque de temps, les messages pour les première et dernière tâches ont été laissés à faire à la maison. Parmi ceux, peu nombreux, que nous avons pu récupérer par la suite, certains avaient visiblement fait l'objet d'une révision parentale. Dans un des groupes plus rapide, la consigne pour la troisième tâche ayant donné lieu à un malentendu entre le chercheur et l'enseignante, les élèves ont rédigé un message par équipe, et ont pu remettre le message pour Thomas à la fin de la période. Deux équipes ont cependant débordé de cinq à dix minutes, pour fignoler.

Sur les huit messages ainsi obtenus, trois messages cherchent à suivre le schéma en reprenant les énoncés, mais montrent à divers degrés une maîtrise imparfaite de l'organisation déductive. Le premier message reproduit à l'Annexe 7 est l'un d'eux. Un message, le second de l'Annexe 7, suit de près le schéma en montrant cette fois une bonne maîtrise de l'organisation déductive, à une confusion dans l'identification de deux sécantes près (vraisemblablement une étourderie). Chez les quatre autres des huit équipes, on a cherché à se réapproprier la démonstration. Les textes produits présentent à chaque fois une version simplifiée du raisonnement, mais montrent par ailleurs une assez bonne maîtrise de celui-ci. Le troisième texte de l'Annexe 7 reproduit la plus condensée d'entre ces « preuves ». La quatrième production de l'Annexe 7 est celle où l'effort de réappropriation est le plus marqué.

5. Conclusion

5.1. Retour sur les hypothèses

À travers ces activités, qu'ont compris les élèves des règles du jeu de la démonstration géométrique ? Ont-ils saisi : ce qu'est une inférence ? l'unicité et nécessité de la proposition inférée quand les prémisses satisfont aux conditions d'application de la règle ? la nature calculatoire, automatique[15] de la structure en arbre selon laquelle s'organisent les enchaînements ?

> *Le point décisif dans un apprentissage de la démonstration est la découverte d'un pas de raisonnement valide dont la validité puisse être éprouvée par l'élève lui-même sans aucun recours à un contrôle externe (accord d'un interlocuteur, consensus d'une communauté, conformité à un schéma logique…)* (Duval, 1995, p. 312).

Dans la mesure où la reconstruction du graphe ne s'est pas faite uniquement selon des critères logiques et géométriques, où l'adéquation entre l'organisation déductive et ce que les élèves comprennent du raisonnement reste difficile, où des élèves n'arrivent à se décentrer de l'évidence géométrique m$\angle MON$ = 180°, pour corriger l'inférence fautive

[15] Au sens par exemple où le serait un programme informatique.

$\angle MOQ$ et $\angle QON$ sont $\xrightarrow{1}$ $m\angle MOQ + m\angle QON = 180°$

qu'avec le secours externe de la conformité au schéma (voir l'exemple, § 4.4.2), on peut se demander ce qui restera de l'activité aux élèves, du point de vue de leur apprentissage de la démonstration. Duval (2001, p. 201) insiste sur la nécessité de faire construire le graphe par l'élève, pour que celui-ci découvre par lui-même comment l'organisation du graphe se fait et se contrôle en prenant en compte le statut opératoire des propositions. Nous affirmons pour notre part que le travail sur un graphe déjà construit peut contribuer à jeter les bases de l'apprentissage escompté. Devant ses coéquipiers qui permutaient sans cesse les énoncés « *AB* et *PQ* sont parallèles », « *AC* est une sécante pour les droites *AB* et *PQ* » et « $m\angle ABC = m\angle BCQ$ » dans trois des cases du troisième schéma, une élève défendra la solution valable en s'exclamant :

> *NON ! C'est à cause d'une sécante qui traverse une parallèle ! C'est à cause qu'il y a deux parallèles coupées par une sécante qu'ils sont alternes-internes et c'est à cause qu'ils sont alternes-internes qu'ils sont égaux !*

Dans au moins une autre équipe, nous avons pu prendre acte de la découverte par des élèves de ce qui fait un pas de raisonnement valide. Un étudiant à la maîtrise, laissant momentanément la caméra, explique aux membres d'une équipe qui ne s'entendent pas que chaque déduction doit en principe pouvoir être analysée et validée indépendamment des autres. Il a pu assister par la suite à un déblocage rapide et significatif du travail de l'équipe. Les autres points relevés en section 4.4, sans être absolument concluants eu égard aux hypothèses émises en 4.1 a) et b), montrent tout de même que le type d'activités proposé permet effectivement d'isoler les difficultés et de concentrer l'attention des élèves sur certains des mécanismes fins de l'organisation déductive.

En outre, le travail sur des schémas déjà construits permet aux élèves d'accéder plus tôt à des enchaînements déductifs plus complexes. À cet égard, la deuxième tâche s'est avérée nettement trop facile. Elle met en oeuvre ce qui en théorie est plus qu'une simple *déduction locale* (cf. Tanguay, 2002, § 3.3). Mais la dernière inférence, où intervient la transitivité de l'égalité, est trop immédiate pour que soient provoquées les difficultés d'un véritable enchaînement. Si la deuxième tâche a rassuré les élèves quant à leur capacité à réussir la troisième, elle n'a cependant produit aucune donnée significative du point de vue de la recherche — par exemple, des messages pour Thomas tous à peu près uniformes — sinon que de confirmer la validité de l'hypothèse avancée en 4.1 c).

Le travail en équipes a-t-il favorisé ou défavorisé une adhésion intuitive aux mécanismes logiques de la démonstration ? Les élèves sauront-ils adapter le mode de travail non linéaire qui a été le leur pendant l'activité, à un travail individuel plus standard de recherche et de rédaction d'une preuve ? Il est trop tôt à notre avis pour statuer sur ces questions, et par ailleurs peu probable que l'analyse plus fine des données permette de répondre de façon décisive.

5.2. Extensions anticipées

Pour être mieux fixé, de même que pour mieux étayer les affirmations à travers lesquelles nous avons cherché à confirmer les hypothèses a) et b) émises en §4.1, il faudra expérimenter à plus long terme, avec des activités réparties sur plus d'une année, déléguant de plus en plus d'éléments de la tâche comme l'énonciation des propositions, le choix des règles ou la construction du graphe. Il faudra pouvoir établir des points de comparaison avec un enseignement plus traditionnel, faire des entrevues individuelles, avoir un meilleur contrôle des phases d'institutionnalisation des activités[16], etc. Nous ne sommes surtout pas en train d'affirmer que tout travail de démonstration en géométrie devrait faire l'objet de telles activités. Nous envisageons plutôt qu'elles soient intercalées, à intervalles réguliers, dans des séquences d'enseignement comme celles que proposent Gaud et Guichard (1984), Pluvinage (1989) ou Arsac et al. (1992), en complémentarité avec des activités de découverte, de recherche de conjecture, de validation inductive, de construction, etc.

Ces expérimentations encore à venir permettront également d'explorer des questions plus pointues, comme celle qui touche à l'appréhension de la nature fondamentalement orientée de la structure locale en démonstration, question soulevée à la fin de la section 3.2 et liée aux incontournables problèmes qu'ont les élèves avec les implications et leur réciproque. Comme un relecteur l'a justement relevé, la difficulté de cette appréhension pourrait être due aux formes d'énonciation des règles d'inférence fournies aux élèves, cette énonciation adoptant très souvent de fait une forme non orientée. La règle « tout angle plat mesure 180° », par exemple, n'est certes pas optimalement formulée pour favoriser l'appréhension « si plat, alors 180° » (cf. § 4.4.2). Il faudra donc s'interroger sur la place que doit prendre, en démonstration, l'aptitude de l'élève à lire « dans le bon sens » un énoncé en langage naturel, que cet énoncé corresponde à une implication simple ou à une équivalence. Il faudra en parallèle s'interroger sur la pertinence,

---

[16] Pratiquement absentes de la présente expérimentation à cause des contraintes de temps, les phases d'institutionnalisation constitueraient ces moments privilégiés où, sur la base du travail accompli dans les activités, l'on ferait le point en classe sur ces fondements de la démonstration dont il est ici question ; entre autres, la possibilité d'une validation isolée de chaque inférence, indépendamment de ses liens avec les autres.

pour l'enseignant de mathématiques, de chercher à proposer, systématiquement ou non, des énoncés de référence non ambigus.

5.3. Un premier bilan

Comme premier bilan, nous avançons que la présente expérimentation met en évidence la justesse de certains des diagnostics de Duval :

- le raisonnement déductif par enchaînement d'inférences n'est pas spontanément compris des élèves, ni dans sa structure locale, ni dans sa structure globale ;
- la nécessaire décentration par rapport aux contenus, à la valeur épistémique d'évidence ou à la valeur logique de vérité, ne va pas du tout de soi pour l'élève, et il s'agit pour lui de quelque chose de beaucoup plus complexe et profond que de répondre aux consignes « tu n'as pas le droit de te fier à la figure » ou « tu dois justifier chacune de tes affirmations » ;
- comme le relève également Dreyfus (1999), le passage de la compréhension de prime abord satisfaisante d'une preuve, des idées en cause, de leur articulation dans les grandes lignes, à la production écrite de cette preuve en un raisonnement logiquement bien contrôlé, constitue pour l'élève un saut fondamental, dont la difficulté tient à beaucoup plus qu'à sa *maladresse à rédiger*, et est intimement lié à sa maîtrise de la structure déductive.

Pour Duval (2001, p.197), ce saut n'est possible que si l'élève accède à une pratique écrite de l'écrit, à travers laquelle il produit le texte de démonstration non plus à des fins de communication, mais pour en contrôler et la validité, et l'absence de lacunes. Avant Duval, Balacheff (1987) avait parlé d'une adhésion de l'élève-étudiant à une position théorique, au centre de laquelle celui-ci met la connaissance plutôt que la nécessité de convaincre « l'autre », et où prévaut sa très personnelle et simple *satisfaction intellectuelle*.

On objectera que la majorité des élèves n'a pas besoin d'accéder à une telle position théorique, et que la rationalité « … fondée sur le dialogue et orientée vers la régulation des interactions sociales » (Duval, 2001, p. 204), qui s'exprime entre autres à travers l'argumentation, est suffisante à la formation d'un citoyen éclairé. Ce serait à notre avis refuser au citoyen ce plus sophistiqué parmi les outils de contrôle de la rationalité, qui n'est pas autre chose que *la rigueur* et dont nous sommes convaincus qu'il devrait être au cœur même de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

5.4. Remerciements

L'auteur tient à remercier Nathalie Krikorian, Valériane Passaro et Louis Trottier pour avoir rendu l'expérimentation possible, ainsi que les deux relecteurs pour la finesse et la pertinence de leurs suggestions.

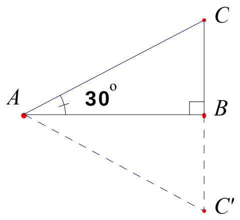
Annexe 1

Analyse d'une preuve extraite de Breton (1997, p. 28), manuel de 4^e secondaire (15-16 ans). Pour simplifier l'exposé, nous avons rempli les boîtes (vides dans le texte destiné à l'élève, qui doit compléter), avec ce que propose le *Guide d'enseignement* de la collection comme « solution ». Notre analyse commence immédiatement après.

Énoncé : **Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.**

Hypothèses : m $\angle ABC$ = $\boxed{\ldots\ 90°}$;

m $\angle BAC$ = $\boxed{\ldots\ 30°}$.



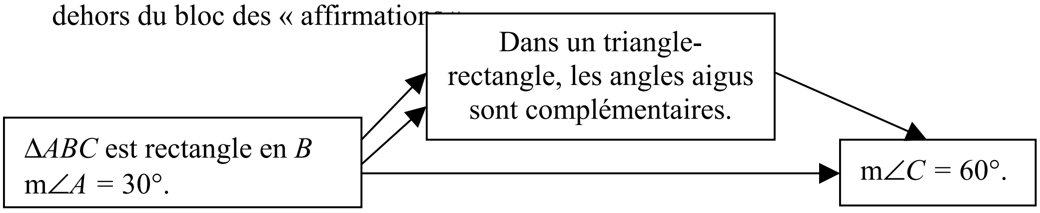
Conclusion : m $\overline{CB}$ =

$\boxed{\ldots\ \frac{1}{2}\text{m}\,\overline{AC}}$.

AFFIRMATIONS	JUSTIFICATIONS
1° On a m $\angle C = 60°$.	1° Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont $\boxed{\text{… complémentaires.}}$
2° Traçons l'image du Δ *ABC* par une réflexion d'axe *AB*.	2° Afin d'obtenir Δ *AC'B*.
3° L'angle *C* et l'angle *C'* mesurent 60° chacun. De plus $\angle CAB$ et $\angle BAC'$ mesurent 30° chacun.	3° Car les réflexions… $\boxed{\text{... conservent les mesures des angles.}}$
4° Le Δ *ACC'* est équiangle.	4° $\boxed{\text{… car tous les angles mesurent 60°.}}$
5° Les côtés du Δ *ACC'* sont congrus et m $\overline{AC}$ = m $\overline{CC'}$.	5° Tout triangle équiangle est aussi $\boxed{\text{… équilatéral.}}$
6° Mais m $\overline{CC'} = 2\times$ m $\overline{CB}$.	6° Car les réflexions… $\boxed{\text{… conservent les mesures des segments.}}$
7° Donc m $\overline{AC} = 2\times$ m $\overline{CB}$ ou m $\overline{CB} = \frac{1}{2}\times$ m $\overline{AC}$.	7° Par substitution et en appliquant la règle de transformation de l'égalité par division.

L'examen de cette preuve nous amène à faire les constatations suivantes.

a) L'identification des prémisses et des propositions inférées reste partout implicite. C'est le cas des prémisses de la première inférence, dont il n'est pas dit que l'élève les identifiera, énoncées qu'elles sont comme « hypothèses », en dehors du bloc des « affirmations ».



L'affirmation 3 regroupe en fait deux inférences de même règle (l'image d'un angle par symétrie axiale[17] est un angle de même mesure), et mêle en les mettant sur le même pied prémisses (m$\angle C$ = 60°, m$\angle CAB$ = 30°) et propositions inférées (m$\angle C'$ = 60°, m$\angle BAC'$ = 30°). L'affirmation 4 est inférée de 3, et prémisse pour inférer 5. L'affirmation 5 regroupe la proposition inférée de 4 (les côtés de $\Delta ACC'$ sont congrus) et son instanciation m $\overline{AC}$ = m $\overline{CC'}$ qui servira, avec l'affirmation 6, de prémisse pour inférer 7.

b) Les affirmation et justification 2 devraient avoir un statut à part : elles ne relèvent pas du raisonnement déductif à proprement parler, mais plutôt de la construction figurale préalable.

c) Les justifications viennent *après* la proposition inférée, et ne sont pas toujours énoncées comme des « règles » (par ex., la justification 4). Elles n'apparaissent donc pas explicitement comme *règle permettant de passer des prémisses à la proposition inférée*. La justification 5 est en fait la concaténation d'une double application de la règle *isocèle si et seulement si isoangle*, qui est celle ayant statut théorique de *théorème* dans le manuel.

d) Des inférences sont totalement escamotées, probablement parce qu'elles constituent des « évidences perceptives » que le rédacteur de la preuve n'a pas cru bon justifier. C'est le cas par exemple du fait que l'image par symétrie, d'un angle est un angle, d'un segment est un segment, d'un triangle est un triangle. Ou encore, du fait que m$\angle CAC'$ = 60°, nécessaire à l'affirmation 4 et qui découle, par additivité de la mesure des angles, de ce que $\angle CAB$ et $\angle BAC'$ sont adjacents. Plus grave à notre avis est cette omission : on tient pour acquis que C, B et C' sont alignés ce qui de fait ne va pas de soi : voir § 3.2.

Il faut bien comprendre qu'il ne s'agit pas ici de faire le procès du libellé de cette preuve, typique d'un format « en deux colonnes » relativement standard. Les sous-

[17] On dit « réflexion » au Québec, y compris dans les documents officiels du Ministère de l'Éducation.

entendus, omissions, regroupements et autres raccourcis de rédaction sont inévitables en pareils cas, pour peu qu'on veuille éviter à l'élève un texte étourdissant, indigeste par ses redondances et sa surenchère de précisions. Il s'agit plutôt d'être conscient que la structure par enchaînements d'inférences peut rester totalement opaque à un élève moyen ou faible, qui percevra les affirmations et les justifications comme autant « d'arguments », égaux en poids, dont l'ordonnance sur papier n'est nécessitée que parce qu'il faut bien que les choses soient écrites les unes à la suite des autres. Ces arguments gravitent dans son esprit pour soutenir ces affirmations d'emblée tenues pour vraies, à savoir que $\Delta ACC'$ est équilatéral et que AB en est axe de symétrie. En particulier, les affirmations 3, 4 et 5 et les justifications 4 et 5 risquent d'être « aplaties », pour n'être inter-reliées que par des relations sémantiques symétriques d'interchangeabilité et ainsi avoir, pour un tel élève, toutes exactement le même statut ; ou alors des statuts théoriques mal dissociés des valeurs épistémiques sémantiques, et d'autant plus flous que la preuve ne discrimine pas clairement ce qu'on est autorisé à « voir » sur la figure de ce qu'on doit justifier.

Annexe 2. Liste des justifications (ou règles d'inférence) …

… pour les tâches décrites à la section 4.2 (voir également annexes 4, 5 et 6). Pour la première tâche, seules les quatre premières règles étaient données.

① La mesure d'un angle résultant de la juxtaposition de deux ou plusieurs angles adjacents, égale la somme des mesures de ces angles.
② Tout angle plat mesure 180°.
③ Propriété de l'égalité : si ◙ = ☼ et ☼ = Θ, alors ◙ = Θ.
④ Simplification dans une égalité : si ☺ + ◘ = ☺ + ♀, alors ◘ = ♀.
⑤ Les angles opposés par le sommet ont même mesure.
⑥ Les angles correspondants, déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante, ont même mesure.
⑦ Les angles alternes-internes, déterminés par deux parallèles coupées par une sécante, ont même mesure.
⑧ Par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite.
⑨ Substitution : si deux quantités sont égales, on peut substituer l'une par l'autre dans n'importe quelle égalité.

Annexe 3. Les figures d'accompagnement

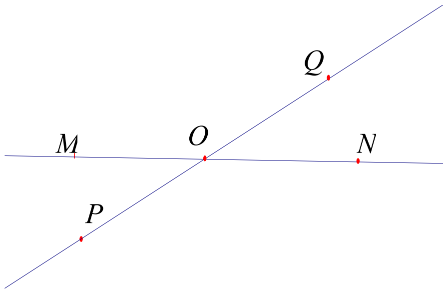


Figure d'accompagnement pour la première tâche

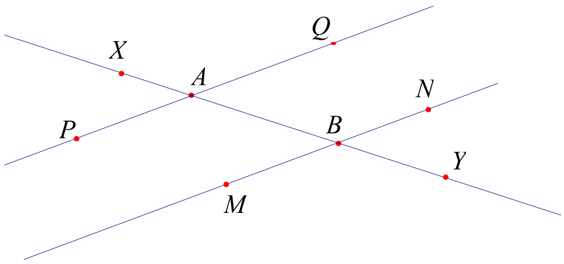


Figure d'accompagnement pour la deuxième tâche

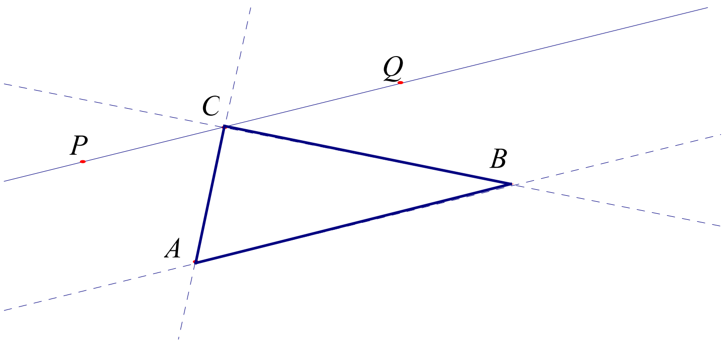
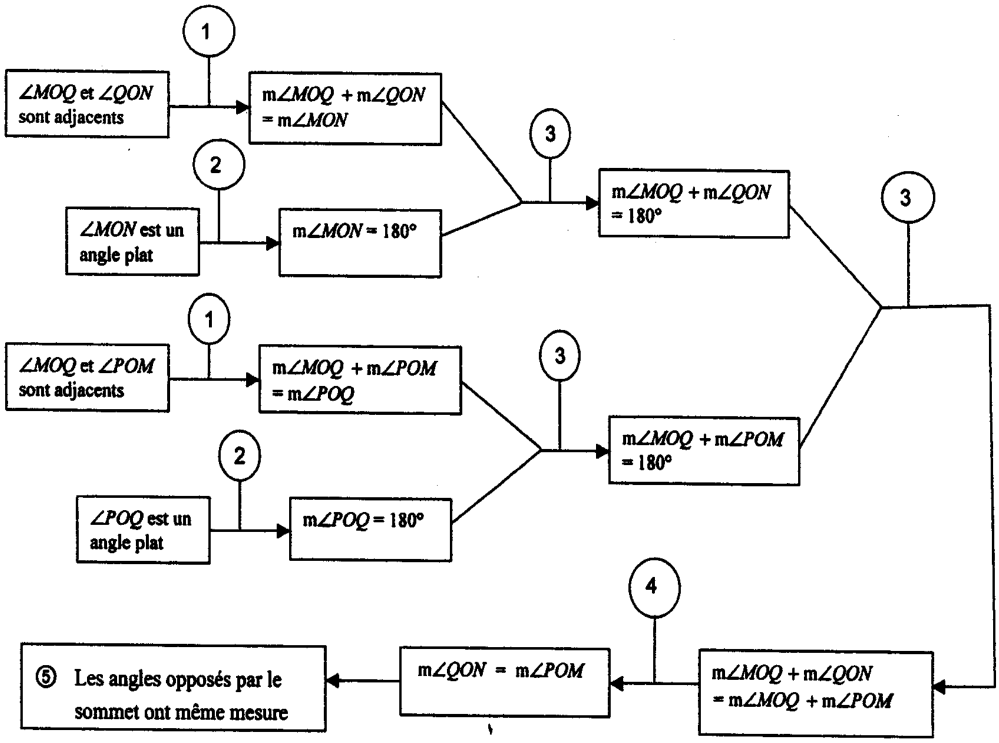
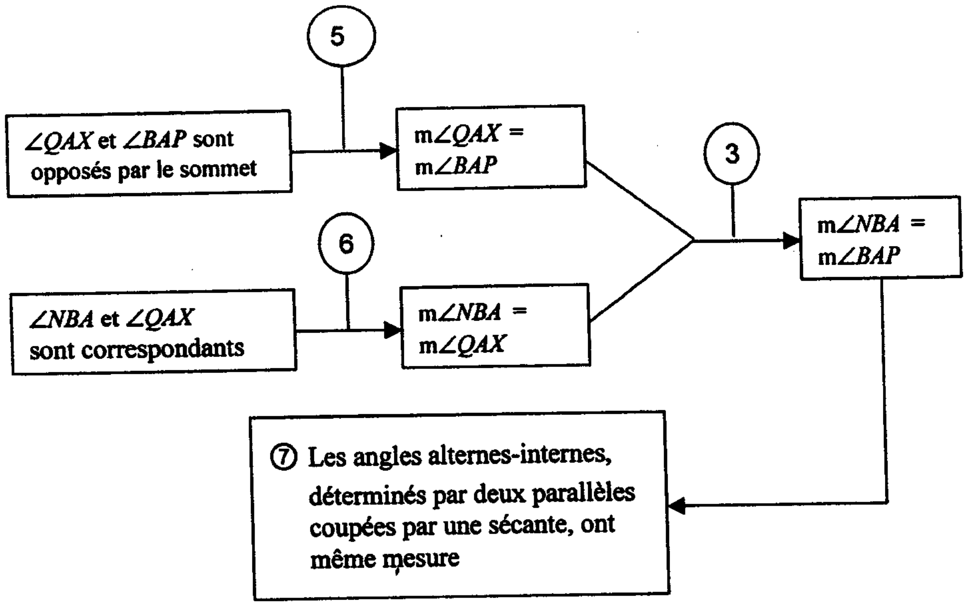


Figure d'accompagnement pour la troisième tâche

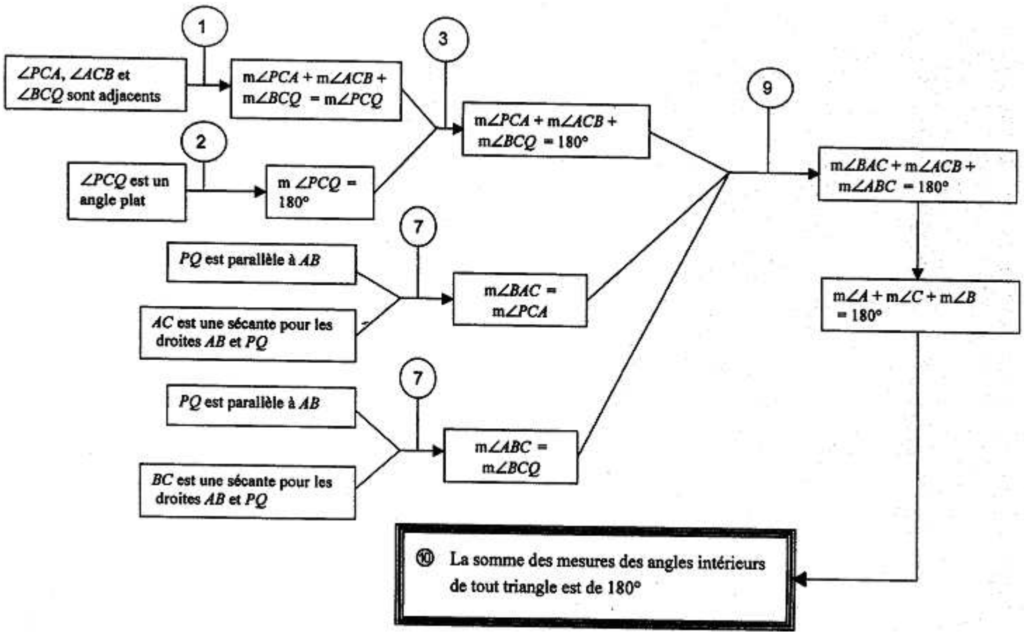
Annexe 4. Solution pour la première tâche



Annexe 5. Solution pour la deuxième tâche



Annexe 6. Solution pour la troisième tâche



Annexe 7

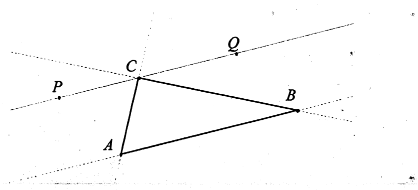
La preuve de la troisième tâche, telle que rédigée par quatre équipes de trois ou quatre élèves chacune. Les élèves ont eu la consigne de poursuivre le « message pour l'élève Thomas » dont le début, y compris la figure, était donné.

Message pour l'élève Thomas, de l'École des Sept Tiques
(Commission scolaire des Douteurs)

Cher Thomas, j'ai tracé un peu plus bas sur la feuille un triangle ΔABC quelconque, et je vais te *prouver mathématiquement* que

$$\mathrm{m}\angle A + \mathrm{m}\angle B + \mathrm{m}\angle C = 180°.$$

J'ai prolongé les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ du triangle. Tu es d'accord avec moi que par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite. Je peux donc tracer l'unique parallèle à la droite AB qui passe par C. Sur cette parallèle, je place deux points P et Q de chaque côté de C (c'est pour faciliter l'identification des angles).



si <PAC, <ACB et < BCQ sont adjacent.

m <PAC + m <ACB + m BCQ = 180° (la somme des mesures de deux ou plusieur angle adjacent égale la mesure de l'angle obtenu par juxtaposition de ces angles)

<PCQ est un < plat

m PCQ = 180° (tout < plat = 180°)

m<BAC + m<ACB + m < ABC = 180°

m <PCA + m<ACB + m<BCQ = m PCQ

m<A + m<C + m<B = 180°

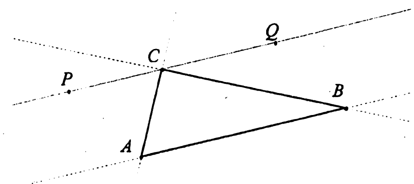
la somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle est de 180°

Message pour l'élève Thomas, de l'École des Sept Tiques
(Commission scolaire des Douteurs)

Cher Thomas, j'ai tracé un peu plus bas sur la feuille un triangle ΔABC quelconque, et je vais te *prouver mathématiquement* que

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°.$$

J'ai prolongé les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ du triangle. Tu es d'accord avec moi que par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite. Je peux donc tracer l'unique parallèle à la droite AB qui passe par C. Sur cette parallèle, je place deux points P et Q de chaque côté de C (c'est pour faciliter l'identification des angles).



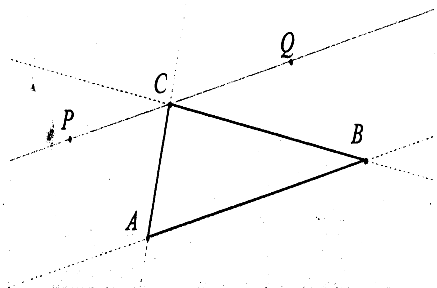
- L'angle PCA, $\angle ACB$, $\angle BCQ$ sont adjacents la mesure de $\angle PCA + m\angle ACB + m\angle BCQ = m\angle PCQ$. $\angle PCQ$ est un angle plat et mesure 180°. Donc $\angle PCA + \angle ACB + \angle BCQ = 180°$.
La droite PQ est parallèle à AB. AC est sequente pour les droites AB et PQ donc les angles alternes internes déterminer par 2 droites parallèle couper par une sequente ont même mesure donc l'angle ABC et BCQ sont congrus.
La droite PQ est // à A.B. $\overline{BC}$ est une sécante pour les droites AB et PQ étant donné que les angle alterne-internes, déterminés par deux // coupées par une sécante, ont même mesure donc l'angle BAC = PCA. Ont peut faire la subtitution et arriver à : $m\angle BAC + m\angle ACB + m\angle ABC = 180°$
Donc la mesure de $\angle A + m\angle C + m\angle B = 180°$.

Message pour l'élève Thomas, de l'École des Sept Tiques
(Commission scolaire des Douteurs)

Cher Thomas, j'ai tracé un peu plus bas sur la feuille un triangle ΔABC quelconque, et je vais te *prouver mathématiquement* que

$$\text{m}\angle A + \text{m}\angle B + \text{m}\angle C = 180°.$$

J'ai prolongé les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ du triangle. Tu es d'accord avec moi que par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite. Je peux donc tracer l'unique parallèle à la droite AB qui passe par C. Sur cette parallèle, je place deux points P et Q de chaque côté de C (c'est pour faciliter l'identification des angles).



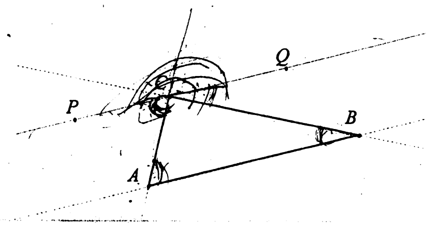
Si m∠PCA est alterne-interne avec m∠CAB alors on peut subtituer m∠CAB à la place de ∠PCA et si m∠QCB est alterne-interne avec m∠CBA alors on peut subtituer m∠CBA à la place de ∠QCB. Donc les ∠PCA + ∠ACB + ∠QCB = la droite PC qui mesure 180°

Message pour l'élève Thomas, de l'École des Sept Tiques
(Commission scolaire des Douteurs)

Cher Thomas, j'ai tracé un peu plus bas sur la feuille un triangle ΔABC quelconque, et je vais te *prouver mathématiquement* que

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°.$$

J'ai prolongé les côtés $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ du triangle. Tu es d'accord avec moi que par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite. Je peux donc tracer l'unique parallèle à la droite AB qui passe par C. Sur cette parallèle, je place deux points P et Q de chaque côté de C (c'est pour faciliter l'identification des angles).



L'angle BCQ et l'angle CAB sont alternes-internes, donc égaux. Il en est de même pour les angles CAB et PCA. Finalement, si on ajoute l'angle ACB aux angles BCQ et PCA, on obtient un angle plat donc 180°.

L'idée est relativement simple c'est comme si on déplaçait l'angle CAB et qu'on le mettait à la place de l'angle PCA et qu'on faisait la même chose pour l'angle ABC que l'on mettrait à la place de l'angle BCQ. On aurait alors tout les angles du triangle les uns à côté de l'autre et on verrait qu'à trois ils forme un angle plat donc 180°.

Bibliographie

ARSAC G., CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN, G. GUICHARD, Y. & MANTE, M., 1992, Initiation au raisonnement déductif au collège. *Presses Universitaires de Lyon*.

BALACHEFF N., 1987, Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 18, n°2, mai 87, 147-176.

BRETON G., en coll. avec A. DESCHÊNES, A. LEDOUX et B. CÔTÉ , 1997, Réflexions mathématiques, Mathématiques 436, Vol. 2. *Les éditions CEC inc*. Montréal.

BROUSSEAU G., 1998, Théorie des situations didactiques. Éditions *La pensée sauvage*, Grenoble.

CHAZAN D., 1993, High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 24, 359-387.

DREYFUS T., 1999, Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, n°38, 85-109.

DUVAL R., 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational studies in Mathematics*, vol. 22, 233-261.

DUVAL R., 1992-93, Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, n°31, 37-61.

DUVAL R., 1995, Sémiosis et pensée humaine. Éditions *Peter Lang*, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

DUVAL R., 2001, Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In *Produire et lire des textes de démonstration*. Collectif coord. par É Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde. Ellipses. Paris.

DUVAL R. & EGRET M. A., 1989, L'organisation déductive du discours. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* N°2, 25-40. IREM de Strasbourg.

FISCHBEIN E., 1982, Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 3, n°2 (novembre), 9-19.

FISCHBEIN E. & KEDEM I., 1982, Proof and Certitude in the Development of mathematical Thinking. In *Proceedings of the sixth International Conference for the Psychology of mathematical Education*, A. Vermandel (ed.), p. 128-131. Universitaire Instelling, Anvers (Pays-Bas).

FURINGHETTI F. & PAOLA D., 1991, On some obstacle in understanding mathematical texts. In *Proceedings of the XVth PME Conference*, Vol. 2, p. 57-63. Assise, Italie.

GAUD D. & GUICHARD J. P., 1989, Apprentissage de la démonstration. *Petit x*, n°4, 5-25.

HANNA, G. & JAHNKE H. N., 1993, Proof and Application. *Educational Studies in Mathematics*, N° 24, 421-438.

HAREL, G. & MARTIN, W. G., 1989, Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 20, n°1, 41-51.

MEQ, 1993, Programme d'Études, Secondaire 1, Mathématique 116. *Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec.* Québec.

PLUVINAGE F., 1989, Aspects multidimensionnels du raisonnement en *géométrie. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* N°2, 5-24. IREM de Strasbourg.

TANGUAY D., 2002, Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, Vol. 2, n°3, 371-396.

TANGUAY D., 2003, Un enseignement de la preuve au collégial. *Actes du 45^{e} Congrès de l'Association Mathématique du Québec (AMQ),* publiés sous la dir. d'André Ross, 82-103. Les éditions Le Griffon d'argile, Sainte-Foy, Québec.

THOM R., 1974, Mathématiques modernes et mathématiques de toujours. In *Pourquoi la mathématique ?,* sous la dir. de R. Jaulin, 39-56. Éditions 10-18, Paris.

VINNER S., 1983, The Notion of Proof: Some Aspects of Students' Views at the Senior High Level. *Proceedings of the VIIth International Conference for the PME,* 289-294. Rehovot, Israël: Weizmann Institute of Science.

ZAZKIS R. & LEVY B.-S., 2001, Truth Value of Mathematical Statements : Can Fuzzy Logic Illustrate Students' Decision Making ? *Focus on Learning in Mathematics*, Vol. 23, n°4, 1-26.

DENIS TANGUAY
UQAM
Département de mathématiques, section didactique
tanguay@math.uqam.ca