MARÍA TRIGUEROS et ASUMAN OKTAÇ

LA THÉORIE APOS ET L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE*

Abstract. APOS Theory and the Teaching of Linear Algebra
In this article we present the APOS (Action - Process - Object - Schema) theoretical framework and we explain its use in the case of a research project involving mental constructions that linear algebra students make while learning this subject. To illustrate the use of the theory we have chosen the concept of vector spaces, as it is one of the fundamental concepts of linear algebra and since in the approach that we describe, it constitutes the beginning of an introductory course.

Keywords. APOS theory, linear algebra, vector spaces.

Résumé. Cet article a pour but de présenter le cadre théorique APOS (Action – Processus – Objet – Schème) et d'expliciter son usage dans le cas d'un projet de recherche concernant les constructions mentales chez les étudiants en algèbre linéaire. Pour cela, nous avons choisi le thème des espaces vectoriels, car c'est un des concepts de base de ce domaine mathématique et, de plus, dans l'approche que nous décrirons, il constitue le début de l'enseignement dans un cours introductif.

Mots clés. Théorie APOS, algèbre linéaire, espaces vectoriels.

---

1. Antécédents

L'enseignement de l'algèbre linéaire, et surtout les difficultés des étudiants lors de l'apprentissage des concepts abstraits de ce domaine mathématique, ont reçu l'attention de plusieurs chercheurs. De nombreux travaux de recherche concernant les différents aspects de son enseignement et son apprentissage ont été publiés.

Sierpinska et ses collaborateurs se centrent sur les modes des pensées synthétique et analytique, comme ceux des pensées théorique et pratique et nous expliquent comment les objets d'algèbre linéaire tels les systèmes d'équations linéaires, changent de sens suivant le mode qu'on utilise pour résoudre des problèmes. Les différentes interprétations qui sont requises pour le même objet constituent une source de difficultés pour les débutants qui ont peu l'expérience des transitions qu'il faut faire pour comprendre ces différents aspects. (Sierpinska, 2000 ; Sierpinska, Nnadozie et Oktaç, 2002).

Les chercheurs français (Dorier, Robert, Robinet, Rogalski) nous parlent de l'obstacle du formalisme. Cet obstacle se manifeste chez des étudiants qui

* Ce projet a été partiellement subventionné par le projet CONACYT 2002-C01-41726.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 157 - 176.

manipulent des nombres, des vecteurs, des équations, des coordonnées, *etc*. en se submergeant "sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux". Ces auteurs concluent que "pour une majorité d'étudiants, l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter". D'autre part, ils nous préviennent de la difficulté de trouver des situations au niveau des étudiants où les concepts d'algèbre linéaire joueraient le rôle d'outil pour résoudre des problèmes. Ce fait est lié avec la nature généralisatrice et unificatrice de ce domaine, et ces auteurs suggèrent d'autres approches comme celle du 'levier-meta' pour introduire et développer les concepts plus abstraits d'algèbre linéaire. (Dorier, et al., 1997).

Les préoccupations (sur l'enseignement de l'algèbre linéaire) d'un groupe de chercheurs, mathématiciens et professeurs universitaires aux États Unis, ont donné lieu à une publication qui apporte des connaissances sur les études concernant les problèmes didactiques et présente des suggestions d'enseignement (Carlson, et. al., 1997).

Une autre approche qui est en train d'être utilisée dans la recherche cognitive en algèbre linéaire est le cadre théorique APOS développé par Ed Dubinsky et le groupe RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) (Asiala, et. al., 1996). Dans cette approche l'intérêt se porte sur les constructions mentales que les étudiants peuvent faire pour apprendre des concepts mathématiques. Le chercheur travaille d'abord sur la description de ces constructions. Il élabore ensuite des activités pédagogiques susceptible de permettre leur mise en place chez les étudiants et de faciliter leur emploi. Dans cette approche, une manière de s'assurer que les étudiants fassent les constructions indiquées résulte du recours à l'ordinateur ; plus spécifiquement, les étudiants "construisent des implémentations des concepts mathématiques en écrivant des programmes". (Dubinsky, 1997).

Selon Dubinsky, l'enseignement de l'algèbre linéaire ne doit pas éviter le formalisme de celle-ci. A son avis, les approches où on essaie de construire les concepts abstraits à partir de concrétisation et à travers des applications ne sont pas efficaces. Tout au contraire, il faut d'abord construire la structure générale ; les objets concrets suivront comme des exemples particuliers. "L'abstraction est l'essence des mathématiques" dit Dubinsky et selon lui s'éloigner de l'abstraction dans l'enseignement de l'algèbre linéaire n'est ni nécessaire ni désirable. C'est ainsi que dans le manuel d'algèbre linéaire qui a été écrit en utilisant le cadre APOS on introduit d'abord les espaces vectoriels.

Dans l'approche que le groupe RUMEC utilise, il y a une relation très étroite entre la recherche et l'enseignement. Dans chaque projet, le cycle Recherche – Enseignement -Recherche se répète jusqu'à l'obtention de résultats satisfaisants, tant du point de vue de l'enseignement que de la recherche. En concordance avec cette idée, plusieurs manuels ont été écrit qui se basent sur le cadre théorique APOS et sur des résultats de recherches antérieurs. En échange, les étudiants qui suivent des cours différents en utilisant ces manuels aident à l'obtention de données qui à leur tour servent de feed-back au travail de recherche.

Le groupe RUMEC a entrepris un projet d´enseignement et de recherche sur l'algèbre linéaire. Nous présentons ici les caractéristiques les plus importantes du projet et du manuel qui a été écrit comme son élément central. Le projet a été développé en prenant comme cadre théorique la théorie APOS ; c'est pourquoi nous commençons par présenter cette théorie avant de décrire le projet.

2. La théorie APOS

La théorie APOS prend comme cadre de référence épistémologique la théorie de Piaget. A partir des idées piagétiennes sur la façon de passer d'un état de connaissances à un autre, la théorie APOS s'intéresse uniquement à la construction des concepts mathématiques, en particulier ceux qui correspondent aux mathématiques universitaires. Comme c'est le cas pour n'importe quel autre changement des idées d'un environnement à un autre, cette transposition de l'épistémologie à l'éducation implique des arrangements et de nouvelles définitions.

Dans la théorie APOS la construction de la connaissance mathématique passe par trois étapes principales : action, processus et objet. Le passage par ces trois étapes n'est pas nécessairement linéaire. Un individu peut rester longtemps à des étapes intermédiaires, voire être à une étape pour certains aspects d'un concept et à une autre pour d'autres aspects du concept. Ce qui est vraiment linéaire c'est que la forme de travail qu'un individu montre en face de diverses situations problématiques est différente quand il répond d'une manière qui peut être caractérisée dans la théorie comme un processus ou au contraire comme un objet ou une action. Il est clair de plus que le type de réponses de l'individu dépend beaucoup de la demande cognitive du problème posé.

Le mécanisme principal dans la construction de la connaissance mathématique dans cette théorie est l'abstraction réfléchissante. Ce mécanisme est activé à travers les actions physiques ou mentales que l'individu réalise sur l'objet de connaissance, par le moyen de la réflexion du sujet lui-même sur ses actions. De même que dans la théorie de Piaget, l'interaction entre le sujet et l'objet de connaissance est considérée comme dialectique.

Un aspect important du modèle APOS comme instrument de recherche mais aussi comme instrument d'enseignement, se trouve dans le fait que pour travailler avec le modèle, il est nécessaire d'interpréter les concepts à apprendre du point de vue des mathématiques mêmes. Il est reconnu dans la théorie que la construction des concepts mathématiques doit suivre une logique qui est différente de celle qui est utilisée pour construire des concepts d'autres disciplines. La théorie inclut, au-dessus de la partie cognitive, un composant qui incorpore la partie sociale de l'apprentissage. Dans cette dernière partie, l'importance pour la construction des connaissances de la collaboration entre les étudiants et le professeur, ainsi que l'importance de l'utilisation d'autres moyens comme la technologie dans le processus d'apprentissage, est reconnue.

Dans la théorie APOS on commence par une analyse des concepts mathématiques à étudier. Dans cette analyse, connue comme décomposition génétique du concept, on met en relief les constructions qui peuvent être nécessaires à l'apprentissage. Originellement ce sont les chercheurs qui proposent, sur la base de leur expérience dans la salle de classe, une décomposition génétique du concept a étudier. Plus tard, à travers le processus de recherche, cette décomposition est raffinée pour qu'elle s'approche de l'activité observée chez les étudiants quand ils travaillent avec le concept. Il est important de dire qu'il n'est pas possible de parler de LA décomposition génétique d'un concept, car elle dépend de la formulation qui a été faite par les chercheurs. Il est possible que diverses décompositions génétiques coexistent pour un même concept, mais il est important que n'importe quelle décomposition génétique du concept soit un instrument qui décrive effectivement les observations des travaux des étudiants.

Une décomposition commence, comme on l'a déjà dit, par l'analyse des constructions du sujet quand il apprend un concept mathématique en termes de ce qui est observable. Ces constructions sont caractérisées par les noms : action, processus, objet et schème.

Action

Une action est une transformation des objets que l'individu perçoit comme quelque chose d'externe. Autrement dit : un individu qui a une compréhension d'une transformation limitée à une *conception-action* peut exécuter la transformation qu'en réagissant à des indications externes qui lui donnent des détails sur les pas à suivre. Puisque la *conception-action* est très limitée, les actions déterminent le début crucial de la compréhension d'un concept.

Un exemple d'une *conception-action* sur la notion de «classe latérale» (à gauche ou à droite) d'un groupe en algèbre abstrait est le suivant. Prenons le groupe modulaire Z_{20} (les entiers $\{0,\ldots,19\}$ avec l'opération d'addition modulo 20) et le sous-groupe $H = \{0, 4, 8, 12, 16\}$ des multiples de 4. Il n'est pas très difficile pour les étudiants de travailler avec les classes latérales telles que $2 + H = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ car elles sont formées, soit par une liste explicite des éléments obtenus en additionnant 2 à chaque élément de H, soit en appliquant une règle, par exemple, «on commence par 2 et on ajoute 4» ou bien en appliquant une condition explicite comme «le résidu de la division par 4 est 2». La compréhension d'une «classe latérale» comme l'ensemble des opérations qu'on considère vraiment effectives pour obtenir un certain ensemble est une *conception-action*. Dans le cas de S (le groupe de toutes les permutations de n objets), il faut quelque chose de plus pour travailler avec les classes latérales car il n'y a pas de formule simple.

Un exemple d'action de la condition de fermeture sur un ensemble donné de vecteurs consiste à prendre deux vecteurs de l'ensemble, faire l'addition et vérifier si le résultat est un élément de l'ensemble.

Processus

Quand on répète une action et réfléchit sur elle, l'action peut s'intérioriser comme un processus. Cela veut dire qu'il y a une construction interne qui se produit, qui exécute la même action, mais cette fois-ci, pas nécessairement dirigée par un stimulus externe. Un individu qui a une *conception-processus* d'une transformation peut réfléchir sur les pas de la transformation, les décrire ou même les inverser sans vraiment les effectuer.
En comparaison avec une action, l'individu perçoit le processus comme quelque chose d'interne, placé sous son contrôle, au lieu d'une réponse à des impulsions externes.

En algèbre abstraite, une compréhension des classes latérales intériorisée comme un processus inclut de penser à la formation d'un ensemble à travers l'opération d'un élément fixe, avec tous les éléments d'un sous-groupe particulier. De plus, il n'est pas nécessaire d'effectuer les opérations, mais seulement de penser qu'elles s'effectuent. Quand on a une *conception-processus*, on peut former des classes latérales dans des situations où il n'y a pas de formules. En algèbre linéaire un exemple de processus se rencontre quand un étudiant est capable d'exprimer les étapes nécessaires pour déterminer, sans besoin de vérification, que l'addition de deux éléments d'un ensemble de vecteurs donnés est ou n'est pas un élément de l'ensemble. On peut dire que le sujet a intériorisé les actions en processus. De la même façon, quand il est capable d'expliquer comment chaque axiome se vérifie (sans avoir besoin de calculer) pour qu'un ensemble donné soit un espace vectoriel, on dit qu'il est au niveau d'une *conception-processus*.

Les étudiants peuvent construire différents processus en faisant diverses chaînes d'action sur un objet, et ils peuvent aussi coordonner ces processus ou les généraliser pour obtenir un nouveau processus.

Objet

Quand un étudiant réfléchit sur les opérations appliquées sur un processus particulier, il se rend compte de la totalité du processus et perçoit le processus comme une transformation globale et il peut aussi construire par lui-même cette transformation. On dit alors que l'étudiant a encapsulé le processus pour construire un objet cognitif. On dit donc que l'étudiant a une *conception-objet* d'un concept mathématique s'il est capable de travailler avec cette idée comme une entité mathématique. Ceci prend en compte la capacité de faire des actions sur l'objet et de raisonner sur les propriétés de cet objet. Les étudiants peuvent aussi renverser l'objet ou le désencapsuler pour travailler une nouvelle fois avec le processus si nécessaire pour la solution d'un problème.

Par exemple si x est un élément et H un sous-groupe du groupe G, et si un étudiant pense d'une manière générale à la classe latérale (à gauche) xH comme un processus dans lequel on fait opérer x sur chaque élément de H, ce processus peut être encapsulé en un objet xH. L'étudiant est alors capable de faire des opérations sur cet objet, aussi bien que désencapsuler cet objet pour utiliser ce processus lorsque nécessaire.

En algèbre linéaire, un étudiant qui est capable de démontrer que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs est un sous-espace d'un espace vectoriel est très vraisemblablement en train de manifester une *conception-objet* du concept "combinaison linéaire". Dans le cas du concept sous-espace, cet évidence peut inclure sa possibilité de déterminer si deux ensembles de vecteurs différents forment des sous-espaces équivalents.

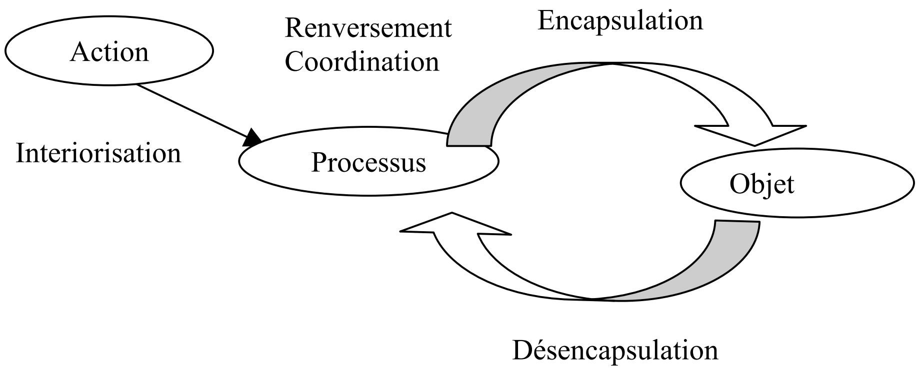

Figure 1

Schème

On appelle schème d'un thème mathématique ou d'un concept plus général, la collection d'actions, de processus, d'objets et d'autres schèmes qui ont des liens entre eux de telle façon qu'ils forment pour l'étudiant un cadre cohérent. L'individu peut être ou pas conscient du cadre qui rend les liens possibles. Pour que l'individu démontre que cette collection est cohérente, il est nécessaire qu'il soit capable de reconnaître les différentes situations où elle est applicable, qu'il puisse décider entre les types de problèmes qui peuvent être résolus en utilisant cette collection et ceux où elle ne sert pas et qu'il puisse connaître les capacités de la collection.

Les étudiants peuvent considérer un schème comme un objet sur lequel l'on peut faire des actions. Quand les étudiants sont capables de considérer un schème comme un objet on dit qu'ils ont thématisé le schème. On a donc deux façons de construire des objets, soit par l'encapsulation d'un processus, soit par la thématisation d'un schème.

APOS comme instrument didactique

Comme on l'a déjà mentionné, une décomposition génétique est construite par les chercheurs comme une première approximation pour modéliser l'apprentissage du concept mathématique en question. Néanmoins, cette décomposition non seulement est utilisée dans la recherche, mais elle sert aussi comme instrument du projet d'enseignement. Le cycle ACE (**A**ctivités – Discussion en **C**lasse – **E**xercices), comme nous le décrirons plus tard, se base sur les idées de cet instrument et tout est préparé pour que les étudiants puissent faire les constructions mentales prévues dans la décomposition génétique.

Visualisation en APOS

La représentation graphique et géométrique est considérée comme une partie intégrale de la construction des concepts. Le développement de la représentation demande aussi une intériorisation des actions, une encapsulation des processus et une construction des liens avec l'objet analytique. Quand on utilise la théorie APOS pour développer des activités et des matériels pour les étudiants, la représentation graphique est incluse soit dans la Discussion, soit dans les Activités. Quand on considère que cette représentation joue un rôle important dans la construction des concepts, une partie centrale lui est consacrée.

La théorie APOS se centre sur la visualisation des processus qui transforment les objets. Pendant que la visualisation des objets statiques est relativement facile à faire, la visualisation des processus dynamiques demande la construction mentale de ces processus sur des phénomènes statiques. (Dubinsky, 1997).

Le rôle du professeur

Dans cette approche, pendant que les étudiants travaillent les activités en petits groupes, le professeur joue le rôle de guide : il aide les étudiants, il pose des questions. Il décide par avance des activités à utiliser en classe et de celles qui feront partie du devoir. Dans la partie de la discussion, il aide à l'institutionnalisation des savoirs.

3. Un manuel d’introduction à l’algèbre linéaire

Comme partie d’un projet de recherche du groupe RUMEC, quelques membres du groupe ont écrit un manuel d’Algèbre Linéaire (Weller, et al., 2002) qui a été préparé en utilisant le cadre théorique APOS et qui est organisé autour du cycle ACE qui contient les trois éléments que nous avons déjà signalé :

1) Des **Activités** qui utilisent ISETL (Interactive Set Language), favorisant une forme d’apprentissage collaboratif au sein de petits groupes, de trois ou quatre individus. Cette partie a lieu dans un laboratoire avec des ordinateurs. ISETL est un langage mathématique de programmation qui a une syntaxe assez proche de la syntaxe mathématique. Il est utilisé comme un outil pour aider à la construction des concepts mathématiques. Il permet à l’usager de définir des ensembles et des opérations, et de valider des conjectures à leur sujet, en utilisant des quantificateurs. D’un point de vue didactique, la programmation aide au passage des actions au processus. Quand l’étudiant commence à apprendre un concept, il fait par lui-même les actions. Quand le programme est déjà écrit, on considère que son travail est de type processus ; le programme peut alors faire les actions pour lui.

Par exemple, le code :

```
sm:= func(s,x);
    return [(s*x(i)) mod 3: i in [1,2,3]];
end;
```

définit la multiplication d’un vecteur dans $(Z_3)^3$ par un scalaire, pendant que le code:

```
is_assoc:= func(S, op);
    return forall a,b,c in S | a .op (b .op c) = (a .op b) .op c;
end;
```

détermine si l’ensemble S est associatif par rapport à l’opération op.

Selon Dubinsky, les caractéristiques d’ISETL qui sont essentielles pour son usage dans l’enseignement sont les suivantes :

a) La syntaxe est proche du système mathématique d’écriture.

b) Certaines propriétés mathématiques sont soutenues par ses propriétés usuelles. Cela inclut les ensembles finis et les séquences finies avec des éléments de n’importe quel type de données (y compris eux-mêmes), les connecteurs et les quantificateurs logiques, les fonctions comme des procédures et comme des ensembles de paires ordonnées, les relations comme des ensembles de paires ordonnées.

c) Tous les types de données sont des objets de la première classe dans le sens qu'ils peuvent apparaître dans n'importe quelle expression quand cela a un sens mathématique. En particulier, les ensembles et les séquences peuvent contenir des éléments de différent types et les procédures peuvent être des entrées et des sorties des procédures. (Dubinsky, 1995).

2) Une partie de **Discussion** en **Classe** où on invite l'étudiant à réfléchir sur ce qu'il a fait dans le laboratoire et où les concepts mathématiques sont présentés et explicitement nommés. Le professeur guide cette discussion et dans le cas où il y a des étudiants qui n'ont pas découvert les relations en question, il les aide à faire les constructions nécessaires.

3) Des **Exercices** traditionnels que l'étudiant doit résoudre par écrit.

Les activités du manuel ont été préparées en prenant la décomposition génétique comme guide. On a essayé là de prendre en compte les constructions considérées comme devant être faites par les étudiants pour arriver à une *conception-objet* du concept et pour établir des liens entre des différents concepts.

La section de discussion élabore les différents concepts. Il n'y a pas beaucoup d'exemples à suivre comme dans d'autres livres parce que nous voulons que les étudiants réfléchissent sur leurs propres idées et sur ce qu'ils ont fait dans le laboratoire ; c'est pour cette même raison que nous avons introduit beaucoup de questions dans ce point. Les questions peuvent être prises aussi comme point de départ pour la discussion en classe quand les étudiants ont fini les activités.

Une différence avec d'autres manuels d'algèbre linéaire est le travail sur des corps finis. Ceci a été choisi pour deux raisons fondamentales. La première est d'ordre pratique et elle est liée à l'usage du software. Les étudiants doivent écrire des programmes courts pour vérifier si certaines propriétés sont satisfaites ou non, ceci étant possible seulement si on travaille avec un nombre fini d'objets. La seconde raison est d'ordre pédagogique. Quand les étudiants travaillent avec des corps finis, ils doivent inévitablement travailler avec des espaces vectoriels finis et ils ont l'opportunité de réfléchir sur certaines choses, comme par exemple la signification de l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs spécifiques. Il est important de noter, pourtant, que les étudiants sont aussi conduits à réfléchir sur des espaces vectoriels sur les réels. Dans la discussion en classe, et aussi dans les exercices, ils peuvent trouver beaucoup d'opportunités pour travailler avec des espaces vectoriels sur les nombres réels et sur d'autres ensembles infinis.

Par exemple, dans l'Activité 1 de la section sur l'indépendance linéaire du chapitre «Linearity and Span», le propos est centré sur la possibilité des étudiants de construire une *conception-action*. Pour cela, il leur est demandé de calculer une combinaison linéaire et des pistes spécifiques leur sont données pour les aider. Dans l'activité 2 on a l'intention de faire réfléchir les étudiants sur ses actions, il leur est demandé de construire une fonction qui acceptera deux entrées : une séquence de vecteurs et une séquence de scalaires et qui retourne la combinaison linéaire résultante. L'activité est préparée pour aider les étudiants à intérioriser le concept de combinaison linéaire.

La fonction que les étudiants construisent est un programme pour l'ordinateur. S'ils l'écrivent correctement ils seront capables de l'appliquer à différentes séquences de scalaires et vecteurs pour obtenir les combinaisons linéaires correspondantes. Dans les activités 5 et 6 les étudiants écrivent encore une fois une fonction booléenne par le biais d'un programme pour l'ordinateur. Celui-ci prend un vecteur et un ensemble de vecteurs et retourne vrai ou faux selon qu'il est possible ou pas d'écrire le vecteur comme une combinaison linéaire unique des vecteurs de l'ensemble. Cette activité concerne le développement de la capacité à renverser le processus de formation d'une combinaison linéaire. Quand les étudiants écrivent le programme func All_LC, ils doivent faire un effort pour concevoir l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un ensemble de vecteurs donnés. Ceci est important quand on veut qu'ils construisent une *conception-objet* du concept combinaison linéaire.

Dans une perspective plus globale, le manuel a été organisé d'une façon différente de celle d'autres manuels scolaires du Mexique et des Etats Unis. Le premier chapitre est dédié à l'introduction du logiciel pour l'ordinateur qui doit être utilisé dans la classe. Cette introduction est faite en termes de questions et activités liées aux concepts de l'algèbre linéaire qui seront plus tard reconsidérés dans d'autres chapitres du manuel.

La majorité des cours d'algèbre linéaire commence avec les systèmes d'équations. Ce cours commence avec le traitement des espaces vectoriels. Nous considérons que le thème principal du cours est précisément celui d'espace vectoriel et c'est pour cela que nous avons choisi d'y introduire les étudiants immédiatement et de faire noter dès le premier moment son importance et, chose peut être plus importante encore, de donner les bases aux étudiants pour appliquer les idées de vecteur et d'espace vectoriel dans toutes les situations qui seront présentées dans le cours.

Les systèmes d'équations sont présentés dans le chapitre suivant. On remarque que les systèmes constituent un outil important pour répondre à des questions et des problèmes liés à l'étude des espaces vectoriels. Les matrices sont introduites comme un outil au début, et plus tard, au chapitre 6, elles seront étudiées encore une fois comme un exemple d'espaces vectoriels, leurs propriétés seront considérées avec plus de profondeur, et elles seront considérées aussi comme représentant des transformations linéaires. On a choisi de laisser l'étude des matrices pour plus tard pour signaler leur importance dans l'étude des transformations linéaires.

Après les systèmes on envisage les problèmes de linéarité et de génération. Ce chapitre finit avec l'introduction du concept de base. Le chapitre numéro cinq introduit des transformations linéaires : les étudiants sont amenés à considérer que les ensembles de transformations linéaires peuvent être conçus comme des espaces vectoriels. Le chapitre final du manuel considère les changements de base, les valeurs propres et vecteurs propres, et leurs applications.

Tout au long du manuel les étudiants sont invités à considérer différents exemples d'espaces vectoriels qui ne sont pas des ensembles formés de n-uplets. Il est aussi important de mentionner que la possibilité de travailler avec différents ensembles et diverses opérations aide à la construction des objets, et en particulier à l'acceptation par les étudiants comme espaces vectoriels, d'ensembles autres que les n-uplets.

4. Décomposition génétique du concept d'espace vectoriel

Pour construire le concept d'espace vectoriel, un sujet doit faire des actions sur les éléments d'un ensemble V en utilisant la définition d'une opération binaire. Le sujet doit alors partir de ses schèmes d'ensemble et d'opération binaire. L'étudiant fait ces actions pour vérifier si chacun des dix axiomes qui définissent un espace vectoriel se vérifie.

Vérifier si les axiomes sont satisfaits implique une coordination des actions ou processus pour vérifier chaque propriété avec le processus spécifique de l'axiome particulier qui s'applique sur l'ensemble V et avec l'opération binaire définie sur V, ou sur des ensembles V et K avec une fonction définie sur eux. Ce processus doit être coordonné avec le processus de «satisfaire un axiome».

Les dix processus individuels sont coordonnés en un seul processus de vérification de tous les axiomes, c'est-à-dire que la construction du schème d'espace vectoriel implique la coordination de quatre schèmes : axiome, opération binaire, fonction et ensemble. La cohérence de ce schème peut être attestée par la capacité du sujet à vérifier si un couple particulier {K, V} où K est un corps et V un ensemble, avec une opération binaire définie sur V, satisfait les axiomes d'espace vectoriel, ou bien si le sujet est capable de déterminer si un espace vectoriel particulier peut être utilisé dans une situation problématique spécifique.

Lors du processus de la construction du schème d'espace vectoriel, le sujet travaille sur une collection d'espaces vectoriels particuliers. Chaque cas spécifique aide le sujet à se rendre compte des différentes propriétés que la structure possède, ce qui correspond à l'intériorisation des actions de vérification en processus. Ensuite le sujet peut encapsuler ces processus en un objet et se rendre compte de l'existence d'une structure générale. Le sujet peut alors s'apercevoir des propriétés invariantes des espaces particuliers pour construire un nouvel objet qu'on peut appeler espace vectoriel. La cohérence du schème d'espace vectoriel peut être mise en évidence par la possibilité du sujet, mis en présence d'un exemple qui ne lui est pas familier, de mobiliser les propriétés générales des espaces vectoriels pour déterminer si cet exemple est un espace vectoriel ou pas. Une autre manifestation peut être la construction d'un sous-espace pour un espace vectoriel donné.

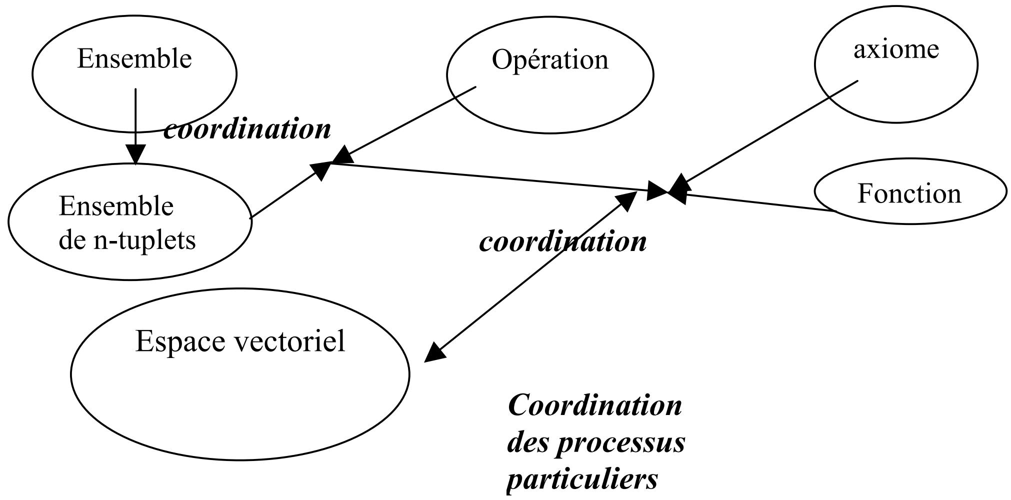

Figure 2

5. Description des activités du chapitre sur les espaces vectoriels

Dans cette section nous présentons les Activités des deux premières sections du deuxième chapitre du manuel sur les espaces vectoriels. Au début du chapitre on commence avec une très brève introduction sur ce qu'on va introduire, en faisant référence au concept général de vecteur qui est familier aux élèves, à savoir le concept de vecteur utilisé dans la géométrie affine et dans la physique. On parle là de l'intention du chapitre d'élargir le concept et le faire plus abstrait. Ensuite, en utilisant le cadre théorique APOS, nous exposerons l'analyse de ces activités, qui a donné lieu à leur forme actuelle. Dans les cas où il y a plusieurs parties d'une activité qui se répètent en changeant des ensembles ou des opérations, nous donnons seulement deux exemples pour des considérations de place.

5.1. Vecteurs

1. (a) Définissez l'ensemble $K = Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ en ISETL.
(b) Ecrivez une func ISETL add_scal qui accepte deux éléments de K et

retourne leur somme mod 5.
(c) Ecrivez une func ISETL mult_scal qui accepte deux éléments de K et retourne leur produit mod 5.

Dans cette activité on demande de faire des Actions sur les éléments de Z_5 et une opération binaire dans le but d´aider l'étudiant à intérioriser les actions en processus.

2. (a) Définissez V = $(Z_5)^2$, c'est à dire l'ensemble de tous les 2-uplets avec des components qui viennent de Z_5 en ISETL. Combien d'éléments y-a-t-il dans V?
(b) Ecrivez une func ISETL vec_add qui accepte deux éléments [v1, v2] et [w1, w2] de V et retourne l'2-uplet [(v1 + w1) mod 5, (v2 + w2) mod 5].
(c) Ecrivez une func ISETL scal_mult qui accepte un élément k de Z_5 et un 2-uplet [v1, v2] de V, et retourne le 2-uplet [(kv1) mod 5, (kv2) mod 5].

Dans cette activité on demande de faire des Actions sur les éléments de $(Z_5)^2$. Elle a l'intention d'aider l'étudiant à intérioriser les actions en processus.

3. Définissez les 2-uplets v = [2, 3], w = [1, 1] et u = [0, 3] en ISETL. Utilisez vos funcs définies dans les activités 1 et 2 pour déterminer dans chaque rubrique si les 2-uplets sont les mêmes.

(a) v + w et w + v.
(b) (u + v) + w et u + (v + w).
(c) v + v et 2v.
(d) –1v et –v.
(e) v + -1v et v – v
(f) 2(3u) et (2*3)u
(g) 2(v + w) et 2v + 2w

Dans cette activité on demande de faire des Actions pour guider l'intériorisation des propriétés des opérations binaires sur des ensembles des vecteurs.

4. Comment le code suivant diffère-t-il de la func vec_add que vous avez écrit dans l'activité 2? Quelle supposition fait ce code concernant v et w?

```
va:= |v, w -> [(v(i) + w(i)) mod 5: i in [1..#v]]|;
```

Utilisez va pour additionner les n-uplets suivantes dans $(Z_5)^n$. Pouvez-vous additionner ces n-uplets en utilisant vec_add?
(a) [2, 2, 1] + [3, 0, 4]
(b) [0, 1, 0, 1] + [1, 2, 3, 4]
(c) [1, 2] + [2, 1]

Cette activité a pour but d'aider à intérioriser les actions avec les opérations binaires à travers l'explication et l'utilisation d'un programme.

5. (a) Ecrivez une func ISETL sm qui accepte un élément k de Z_5 et un n-uplet v, et retourne le n-uplet kv dont chaque composante de v ait été multipliée (mod 5), par k.
(b) Essayez votre func pour k = 3 et v = [2, 4].
(c) Essayez votre func pour k = 0 et v = [1, 3, 3].

L'écriture du programme dans cette activité implique la possibilité d'exprimer les actions faites dans les activités antérieures. Son but est d'aider à intérioriser le Processus d'utilisation d'une opération binaire sur un ensemble donné.

6. (a) Ecrivez une *func* ISETL *is_closed_va* qui accepte un ensemble V de n-uplets et une opération va (addition de vecteurs). Votre *func* doit vérifier si la somme de n'importe quelle paire de deux n-uplets dans V est aussi dans V.
(b) Vérifiez votre *func* sur $V = (Z_5)^2$, avec va défini comme dans l'activité 4.
(c) Vérifiez votre *func* sur $V = (Z_3)^3$. Modifiez va de manière adéquate, en utilisant l'arithmétique mod 3.

Le but de la première partie de l'activité est d'aider l'étudiant à intérioriser les actions nécessaires pour vérifier que l'addition de deux n-uplets est un n-uplet. L'écriture du programme demande la généralisation, ce qui est un processus. Les parties suivantes ont pour but de donner à l'étudiant l'opportunité de vérifier que la généralisation, telle qu'il l'a programmée, est adéquate. À travers l'activité, l'étudiant commence aussi à intérioriser les actions de vérification des propriétés des opérations sur des n-uplets.

7. (a) Ecrivez une *func* ISETL *is_commutative* qui accepte un ensemble V de vecteurs (n-uplets) et une opération *va* et qui détermine si l'opération *va* est commutative sur V ou pas.
(b) Vérifiez votre *func* sur $V = (Z_5)^2$ et *va*.
(c) Vérifiez votre *func* sur $V = (Z_3)^3$ et une *va* convenablement modifiée.

Dans cette activité, on a d'un côté l'Action de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel dans un cas concret et de l'autre le Processus dans la construction d'un programme.

8. (a) Ecrivez une func ISETL is_associative_va qui accepte un ensemble V de vecteurs (n-uplets) et une opération va et qui détermine si va est associative sur V ou pas.
(b) Vérifiez votre func sur $V = (Z_5)^2$ et va.

(c) Vérifiez votre func sur V = $(Z_2)^2$ et une va convenablement modifiée.

Cette activité a le même but que l'activité antérieure.

9. Expliquez le code suivant en ISETL. Quelles sont les entrées de cette func? Que-retourne cette func?

```
has_zervec:= func (V, va);
VZERO:= choose z in V | forall v in V | (v .va z) = v;
        Return VZERO;
End;
```

En exprimant les pas du processus en cours au moyen de la description du programme présenté dans l'activité, l'étudiant peut intérioriser les actions nécessaires à la construction du vecteur zéro et son rôle dans l'addition des vecteurs.

10. (a) Utilisez la func has_zervec pour écrire une nouvelle func has_vinverses qui accepte un ensemble V de n-uplets et une opération va et qui détermine si pour tous les x dans V il existe un y dans V qui a la propriété que va (x, y) = le résultat de has_zervec (V, va).
(b) Vérifiez votre func sur V = $(Z_5)^2$ et va.
(c) Vérifiez votre func sur V = $(Z_3)^3$ et une va convenablement modifiée.

Cette activité aide à intérioriser les actions, dans le Processus de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel dans un cas concret, au moyen de l'explication et de la construction d'un programme.

11. Expliquez le code suivant en ISETL :

```
is_closed_sm:= func(K, V, sm);
        return forall k in K, v in V | (k .sm v) in V;
end;
```

Cette activité demande le Processus de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel au moyen de l'explication d'un programme.

12. Ecrivez une func ISETL is_associative_sm qui accepte un ensemble K de scalaires, un ensemble V de vecteurs, et deux opérations, sm (multiplication scalaire) et ms (multiplication de scalaires). Votre func doit déterminer si pour tous les k, j dans K et tous les v dans V, k(jv) = (kj)v. Notez que la partie de droite de cette équation utilise «multiplication de scalaires» ainsi que la «multiplication scalaire». Quelle est la différence? Vérifiez votre func sur V = $(Z_2)^2$.

Cette activité demande le Processus de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel dans un cas concret au moyen de l'explication et de la construction d'un programme.

13. Que fait la func ISETL qui suit? Quelles sont les entrées ? Les sorties ?

```
has_distributive1:= func(K, V, sm, va);
    return forall k in K, v, w in V | (k .sm (v .va w)) = (k .sm v) .va (k .sm
  w);
end;
```

Cette activité a le même but que l'activité antérieure.

14. Ecrivez une func ISETL has_distributive_2 qui accepte un ensemble K de scalaires, un ensemble V de n-uplets, et trois opérations, va, addition de vecteurs, sm, multiplication scalaire, et as (addition de scalaires). L'action de votre func est de déterminer si l'expression suivante se vérifie pour tous les k, j dans K, v dans V : $(k + j)v = kv + jv$.

Cette activité demande le Processus de vérification de la validité d'un des axiomes qui définissent l'espace vectoriel dans un cas concret, au moyen de l'explication et de la construction d'un programme.

15. Ecrivez une func ISETL has_identityscalar qui accepte un ensemble K de scalaires, un ensemble V de vecteurs (n-uplets), et une opération sm, multiplication scalaire. L'action de votre func est de déterminer s'il existe un élément k dans K tel que pour tous les v dans V, sm(v, k) = v.

Cette activité a le même but que l'activité antérieure.

5.2. Introduction aux Espaces Vectoriels

1. La liste suivante est une liste de quelques **func**s avec lesquelles vous avez travaillé dans la section antérieure.

```
is_closed_va
is_commutative
is_associative_va
has_zervec
has_vinverses
is_closed_sm
is_associative_sm
has_distributive1
has_distributive2
has_identityscalar
```

Écrivez une description sur ce que chaque **func** fait, incluant le type d'objets acceptés, ce qui leur est fait, et le type d'objets retournés.

L'étudiant doit faire des Processus de généralisation des propriétés qui se vérifient en général par les éléments d'un ensemble et avec une opération binaire, au moyen de l'explication de ce que font les programmes qui ont été construits. La réflexion inclut l'explication de la nature des éléments avec lesquels on peut utiliser les programmes.

2. (a) Construisez en ISETL un ensemble $\boldsymbol{K = Z_3}$ de scalaires, un ensemble $V = (\boldsymbol{Z_3})^3$ de vecteurs, et quatre opérations, *va* (addition vectorielle) qui est l'addition mod 3 d'éléments dans V, *sm* (multiplication scalaire), qui est la multiplication mod 3 d'éléments dans V par les éléments du ***K***, *as* (addition de scalaires), qui est l'addition mod 3, et *ms* (multiplication de scalaires), qui est multiplication mod 3.

Par exemple, vous pourriez écrire et mettre en mémoire un code tel que:

```
K:={0..2}; V:={[x,y,z] | x,y,z in K};
va:= |v,u -> [(v(i)+u(i)} mod 3: i in [1..3]]|;
sm:= |k,v -> [(k*v(i)} mod 3: i in [1..3]]|;
as:= |k,j -> (k+j) mod 3|; ms:= |k,j -> (k*j) mod 3|;
```

(b) Appliquez toutes les **funcs** de l'Activité 1 à ce système, [K, V, va , sm ,as , ms]. Créez une table avec les **funcs** comme titres de colonnes et ce système comme première rangée, et utilisez cette table pour déterminer quelles propriétés ce système vérifie.

Dans les activités 2 et 3, l'application répétée des processus intériorisés guide l'étudiant vers l'encapsulation dans un objet qui a une structure. Les activités demandent à l'étudiant de faire les actions de classification et comparaison nécessaires pour coordonner les schèmes : ensemble (en particulier l'étudiant utilise l'ensemble de n-uplets, et celui de scalaires) et opérations [sur des ensembles finis].
Le résultat de cette comparaison est une classification qui aide l'étudiant à commencer à intérioriser la structure d'espace vectoriel.

3. Répétez l'Activité 2 pour chacun des systèmes suivants. Ajoutez une nouvelle rangée a votre table pour chaque système.

(a) $K = Z_5$, $V = (Z_5)^2$, va est l'addition mod 5 des éléments dans V, sm est la multiplication mod 5 des éléments du V par les éléments du K, as et ms sont l'addition et la multiplication mod 5 respectivement.

(b) $K = Z_3$, $V = \{<x,x,x>: x \in K\}$, va est l'addition mod 3 des éléments dans V, sm est la multiplication mod 3 des éléments du V par les éléments du K, as et ms sont l'addition et la multiplication mod 3 respectivement.

Ici on demande l'emploi du processus de vérification dans une variété de cas concrets, en utilisant des programmes déjà construits. De l'autre côté, la répétition des actions aide à l'intériorisation.

4. Lesquels des systèmes des activités 2 et 3 vérifient toutes les dix propriétés de l'Activité 1? Pouvez-vous conjecturer des conditions sur $K = Z_p$, $(Z_q)^n$ et sur les quatre opérations, de telle sorte qu'un tel système vérifie toutes les dix propriétés?

La première partie de l'activité a pour but de focaliser l'attention sur ces ensembles qui possèdent la structure considérée auparavant. Ensuite, on veut susciter une réflexion sur cet objet telle que le processus employé lors des activités antérieures soit encapsulé en un objet qu'on peut appeler espace vectoriel particulier.

5. Voici une liste supplémentaire de systèmes [K, V, va , sm ,as , ms]. Lesquels des ces systèmes vérifient toutes les propriétés de l'Activité 1? Note : La plupart des systèmes suivants peuvent être construits et exécutés seulement dans VISETL (Virtuel ISETL). Cela veut dire que tout votre travail doit être fait à la main et par la pensée.

(a) $K = \{-1,1\}$, $V = (K)^3$, va = addition ordinaire par des composantes, sm est la multiplication ordinaire par des composantes, as, ms sont l'addition et la multiplication ordinaires respectivement.

(b) $K = R$, $V = R^2$, va = addition ordinaire par des composantes, sm est la multiplication ordinaire par des composantes, as, ms sont l'addition et la multiplication ordinaires respectivement.

Cette activité a le même objectif que celui de l'activité antérieure, mais cette fois-ci les ensembles sur lesquels on travaille sont des ensembles infinis et il est alors nécessaire de généraliser le processus avant de l'encapsuler.

6. Ecrivez une *func is_vector_space* qui accepte un ensemble K de scalaires, un ensemble V de vecteurs, et quatre opérations *va, sm, as,* et *ms* définies sur V et K, et qui teste si toutes les propriétés données dans l'Activité 1 se vérifient. Votre *func* doit retourner *true* si le système vérifie toutes les dix propriétés, et *false* s'il ne vérifie pas une ou plusieurs des propriétés. Mettez à l'épreuve votre *func* en utilisant quelques-uns des systèmes définis dans l'Activité 1.

L'objectif de cette activité est l'encapsulation de l'objet espace vectoriel général. Pour réussir à faire cette encapsulation, il est nécessaire de désencapsuler les objets espaces vectoriels particuliers, de coordonner tous ces processus et les encapsuler en un objet plus général. A ce moment-là on désigne cet objet comme espace vectoriel.

6. Conclusion

La théorie APOS a été utilisée par un certain nombre de chercheurs provenant de nombreux pays pour étudier la façon dont les étudiants construisent divers concepts mathématiques. Peut être que les travaux les plus connus sont ceux qui se réfèrent au concept de fonction, mais la théorie a été appliquée avec succès aux concepts de l'Analyse, de l'Algèbre Abstraite, des Équations Différentielles et la Logique Mathématique. La théorie n'a pas été utilisée uniquement comme cadre théorique pour faire de la recherche, elle a été aussi appliquée à la préparation de matériels d'enseignement et de manuels universitaires.

L'utilisation de ces matériels a été l'objet de projets de recherche qui ont montré qu'effectivement les étudiants qui les utilisent réussissent à faire les constructions prévues par la théorie, et par conséquent à apprendre les concepts avec plus de profondeur que les étudiants qui suivent d'autres méthodes.

Le cycle de recherche et enseignement prévu par la théorie APOS a commencé à être appliqué dans le cas du manuel sur l'Algèbre Linéaire. Les étudiants de cinq cours dans des diverses universités de divers pays : États-Unis, Mexique, Israël et Porto Rico ont utilisé le manuel et la méthodologie proposés par la théorie APOS. On a fait des entretiens avec quelques étudiants ayant suivi ces cours. On a posé des questions spécifiques sur les concepts introduits par le manuel et on est en train d'analyser et comparer leurs réponses, pour déterminer si le manuel a prouvé son efficacité pour les guider vers les constructions des concepts en question. Avec les résultats de cette analyse, on va examiner les changements qui sont nécessaires afin d'obtenir meilleurs résultats et pour identifier les concepts où le manuel peut être considéré comme un appui efficace pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

Sites web d'intérêt

Ed Dubinsky : http://trident.mcs.kent.edu/~edd/
RUMEC : http://www.cs.gsu.edu/~rumec/
ISETL : http://www.ilstu.edu/~jfcottr/isetl/
Manuel et projet sur Algèbre Linéaire :
http://www.ilstu.edu/~jfcottr/linear-alg/

Bibliographie

ASIALA M., BROWN A., DE VRIES D., DUBINSKY E., MATHEWS D. et THOMAS K., 1996, A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, CBMS Issues in Mathematics Education, **6**, 1-32.

CARLSON D., JOHNSON C. R., LAY D. C., PORTER A. D., WATKINS A. E., WATKINS W. (eds.), 1997, Resources for Teaching Linear Algebra, MAA Notes, **42**.

DUBINSKY E., 1997, Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. Dans D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, et W. Watkins (eds), *Resources For Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, 42, 85-106.

DUBINSKY E., 1995, ISETL : A Programming Language for Learning Mathematics, Comm. in Pure and Appl. Math., **48**, 1027-1051.

DORIER J.-L., ROBERT A., ROBINET R. et ROGALSKI M., 1997, L'Algèbre Linéaire : L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. Dans J.-L. Dorier (ed.), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, 105-147.

SIERPINSKA A., 2000, On some aspects of students thinking in linear algebra. Dans J.-L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers., 209-246.

SIERPINSKA A., NNADOZIE A. et OKTAÇ A., 2002, A Study of Relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra. Concordia University : Montreal, disponible sur :

http://alcor.concordia.ca/~sierp/downloadpapers.html

WELLER K., MONTGOMERY A., CLARK J., COTTRILL J., TRIGUEROS M., ARNON I., DUBINSKY E., 2002, Learning Linear Algebra with ISETL, disponible sur : http://www.ilstu.edu/~jfcottr/linear-alg/

Nous voudrions remercier François PLUVINAGE de l'aide apportée pour la rédaction finale de cet article.

MARÍA TRIGUEROS
ITAM, Mexique

ASUMAN OKTAÇ
Cinvestav-IPN, Mexique et UQAM, Canada