C. ARMANDO CUEVAS V., SALVADOR MORENO G. & FRANÇOIS PLUVINAGE

UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DEL OBJETO FUNCIÓN

Abstract. Experimenting an Object-Oriented Teaching of Function
Previous investigation has reported that students, instructed about the theorem of maximum and minimum reached by a continuous function on a closed interval, most generally adopt an algorithmic conduct applying it to a differentiable function: They start from an algebraic expression and obtain its critical values, even if those lie outside of the interval to be considered. Our hypothesis was this conduct, alike to different manifestations mentioned by other searchers, should result from a lack of meaning in the concept of function itself. Therefore, we have designed an experiment, intending to expand the meaning of the concept of function. We chose, as an *action project*, the modelling of an easy-to-understand physical situation, an inflatable sphere in a recipient containing some liquid, which allowed introducing a function in a not merely algebraic form, but in a way more similar to the historical approach that implies to study interconnected variables. We decided to implement three successive stages in our experiment: descriptive, quantitative, and generalizer. The purpose was to favour the use of various semiotic registers in order to express functions and their properties. After the two-week experiment, the assessment clearly demonstrates students' enhancement in the knowledge of functions. Most (17 out of 21) succeeded in partially or totally solving a problem reported in previous studies as mishandled.

Key words. Calculus, function, function concept, extreme values, variables, modelling, action project, semiotic registers, teaching experiment.

Resumen. Investigaciones previas han reportado que los estudiantes, instruidos sobre el teorema de máximos y mínimos alcanzados por una función continua en un intervalo cerrado, generalmente lo aplican a una función diferenciable adoptando una conducta algorítmica: Ellos, a partir de la expresión algebraica, obtienen sus valores críticos, incluyendo aquéllos que quedan fuera del intervalo considerado. Nuestra hipótesis, al igual que reportes de otros investigadores, es que esta conducta es el resultado de una falta de significados en el concepto de función. Por consiguiente, hemos diseñado un experimento, con la intención de extender el significado del concepto de función. Elegimos, como proyecto de acción, la modelación de una situación física sencilla de entender, un globo esférico inflable en un recipiente que contiene cierta cantidad de líquido, lo cual nos permitió introducir a una función, no como una mera fórmula algebraica, sino en un acercamiento semejante al histórico que implica el estudio de variables interconectadas. Decidimos implementar tres fases sucesivas en nuestro experimento: descriptiva, cuantitativa, y generalizante. El propósito fue favorecer el empleo de varios registros de representación semiótica para trabajar funciones y sus propiedades. Después de un experimento de dos semanas la evaluación demuestra una clara mejoría en la comprensión de funciones. La mayoría (17 de 21) obtienen un éxito total o parcial al resolver un problema que en reportes previos ha mostrado ser difícil de resolver.

Palabras clave. Cálculo, función, concepto de función, valores extremos, variable, modelación, proyecto de acción, registro semiótico, experimento de enseñanza.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 177 - 207.

Présentation analytique d’ « Une expérience d'enseignement de l'objet fonction »

1. Bases de l'étude

Un résultat élémentaire important en analyse est le théorème des extrema atteints : Une fonction réelle de variable réelle, continue sur un intervalle fermé borné, y atteint un maximum et un minimum. Ce résultat de nature topologique est fréquemment à mettre en œuvre à propos de fonctions non seulement continues, mais dérivables. Pour une fonction dérivable, les points critiques, correspondants à des zéros de sa dérivée, jouent un rôle essentiel dans la recherche des extrema. Cette recherche s'engage alors le plus souvent sur un terrain algébrique, à partir des formules de dérivation des fonctions élémentaires. Or on sait que, dans un contexte de ce genre en l'absence de formation spécifique, la structure la plus riche tend à prendre le pas sur la plus pauvre pour les traitements à effectuer. C'est par exemple le cas dans des situations de géométrie plane, où la structure euclidienne est plus riche que la structure simplement vectorielle ou affine. Ici, il s'agit d'espaces de fonctions de classe plus ou moins élevée : La classe la plus élevée tend à prendre le dessus.

S'ajoutent à ce phénomène deux tendances qui ont fréquemment été pointées dans des études de didactique. La première est la réduction algorithmique : une propension à rabattre un apprentissage mathématique sur la bonne exécution de quelques algorithmes standardisés est non seulement le fait d'une certaine proportion d'apprenants, mais même d'enseignants qui y voient la possibilité d'aboutir « au moins » à des résultats tangibles et contrôlables. La seconde est la répulsion répandue à travailler avec des inégalités : celles-ci ont non seulement un côté négatif, présent dans leur désignation même, mais un aspect incomplet (une inégalité ne dit pas « tout », contrairement à une égalité). Or des inégalités sont présentes dans la recherche précédemment décrite, à la fois à propos de valeurs prises, ce qui à soi seul ne serait pas une réelle difficulté (déterminer la plus grande de deux ou plusieurs valeurs relève de la comparaison, sous-cas simple du traitement d'inégalités), mais surtout à propos du domaine de définition de la fonction à l'étude, entre deux valeurs frontières. Et dans le contexte algébrique le plus souvent rencontré (celui des fonctions obtenues à partir des fonctions élémentaires par des opérations algébriques), un domaine de définition n'est qu'un sous-produit de la formule exprimant une fonction. Par exemple, une formule telle que $y=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ détermine une fonction dont le domaine de définition est l'intervalle ouvert]-1, 1[, échappant donc au champ de notre étude.

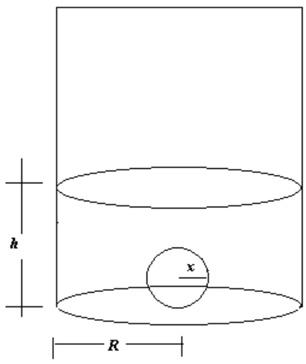
Ainsi, tant que les fonctions se présentent essentiellement sous la forme d'expressions algébriques, la mise en œuvre du théorème sur les extrema se heurte à résistances, voire des obstacles. C'est ce qu'avait constaté, à l'occasion des recherches engagées au Mexique pour sa thèse de doctorat, Salvador Guzman. Un article récemment paru, co-signé par lui-même et Armando Cuevas, précisait la nature et le niveau (important) des difficultés rencontrées. Des travaux entrepris par ailleurs sur la notion même de fonction, notamment au sein du groupe qui développe le cadre APOS proposé par Ed Dubinsky, nous avaient conduits à envisager que c'est bien le concept général de fonction qui risque ici d'être en jeu, révélé par l'exploitation d'un théorème particulier. S'agissant d'acquisition conceptuelle, il nous paraissait tout naturel de songer aux registres d'expression.

2. Description de l'expérience réalisée

La question didactique qui se trouve posée au terme de l'examen précédent est celle de savoir s'il se présente encore une importante difficulté d'acquisition, lorsque l'enseignement s'appuie sur des situations conduisant les étudiants à mobiliser les différents registres susceptibles d'exprimer une fonction. Pour l'étude de cette question, la contrainte qui s'impose à une expérimentation didactique est plus forte qu'il ne pourrait y paraître, car il convient que la présentation d'une fonction à étudier ne privilégie pas au départ une forme d'expression particulière. Sinon le risque, surtout à partir d'une présentation par une formule, de buter sur les difficultés signalées serait considérable. C'est pourquoi une situation isomorphe à celles rencontrées aux sources des études de variations, à l'instar de la fameuse étude de Kepler à propos de la capacité des barriques, méritait d'être envisagée. Une situation rencontrée dans un groupe informatique de l'IREM de Strasbourg a semblé réunir les caractéristiques souhaitées. Elle peut notamment se prêter à une simulation interactive avec un logiciel de géométrie plane dynamique (nous avons fait utiliser Cabri par les étudiants) et s'intégrer à un scénario didactique élaboré pour conduire à l'utilisation visée du théorème des extrema atteints.

La situation tridimensionnelle retenue est la suivante. On considère un récipient cylindrique de rayon donné R, dont la hauteur sera supposée suffisante pour les besoins de l'expérience à réaliser. Celle-ci consiste à fixer au fond du récipient un ballon sphérique gonflable et à verser dans le récipient une certaine quantité de liquide. Lorsque le ballon est complètement dégonflé, le liquide atteint dans le récipient une hauteur initiale h_0. On gonfle alors le ballon, ce qui conduit le niveau h du liquide à s'élever. On s'intéresse à la possibilité que, pour une ou plusieurs valeurs de son rayon x, le ballon soit tout juste immergé.

Le problème fait intervenir plusieurs variables en interaction : h_0, h et x. Les conditions conduisent assez naturellement à conférer à h_0 le rôle de paramètre, que l'on fixe avant de suivre les évolutions continues concomittantes de h et x. La variable x est évidemment astreinte à ne pas dépasser la valeur R. Pour h_0 assez petit, le ballon gonflé émerge assez vite du liquide, pour rester alors partiellement émergé jusqu'à la fin ($x = R$). Pour h_0 assez grand au contraire, le ballon reste constamment immergé. Jusqu'ici, rien d'étonnant. Mais l'observation réserve une surprise : pour certaines valeurs intermédiaires du paramètre h_0, il y a deux valeurs différentes de x pour lesquelles le liquide affleure tout juste le sommet du ballon.



Le scénario didactique retenu a comporté trois phases : une *phase descriptive*, une *phase quantitative* et une *phase généralisante*. Dans les deux premières phases, c'est le problème du ballon dans le cylindre qui est mis à l'étude, dans la troisième ce sont de nouvelles questions. Les divers registres de représentation d'une fonction (algébrique, graphique, tabulaire) ont été utilisés. Un questionnaire initial de positionnement et un questionnaire diagnostic final ont complété le dispositif, prévu pour une durée d'une quinzaine de jours, à raison de deux à trois séances de travail hebdomadaires. Un tel cadrage semblait raisonnable, eu égard à l'objectif visé. Chacune des phases a conduit à un travail sur ordinateur donnant lieu à un questionnement écrit, pour lequel une feuille avait été préparée et était distribuée aux étudiants. Des objectifs précisément définis à chaque séance orientaient ainsi le travail sur ordinateur.

3. Résultats observés

L'expérimentation a été conduite avec deux petits groupes d'étudiants d'une unité de formation interdisciplinaire à l'informatique et aux sciences sociales et administratives, se situant à un niveau post-baccalauréat qui peut être comparé à celui des BTS français. L'un des groupes était constitué de onze étudiants de la filière informatique, l'autre de dix étudiants de la filière ingénierie.

Le questionnaire initial a fait nettement apparaître que, pour tous les étudiants de l'expérimentation, l'idée de fonction n'est au départ présente qu'à travers des substitutions de valeurs. Par exemple, aucun étudiant ne forme l'expression d'une variable en fonction d'une autre à partir d'une équation implicite, dans le cas pourtant assez simple qui était proposé : $xy^2 + 4xy - x^2 = 0$. Dans la phase descriptive, cette difficulté à conférer un sens global et complet à une variable se repère à l'absence de réponse à la question sur l'interprétation que l'on peut proposer pour $h - 2x$ (une réponse possible est la *profondeur* du ballon, en précisant le sens qu'il convient de donner à son signe, à l'instar des profondeurs d'écueils données par les cartes marines de l'Atlantique). En contraste, la phase quantitative, avec il est vrai l'assistance d'un logiciel, a conduit à une réussite générale. Dans la phase généralisante, les questions posées sur les domaines de définition de certaines fonctions ont toutes été également bien réussies par le groupe de la filière informatique, alors que la troisième de ces questions, un peu plus complexe que les deux premières, a suscité davantage de difficultés pour la filière ingénierie.

Les résultats au questionnaire final mettent au premier chef en évidence une avancée spectaculaire par rapport aux observations relatées dans des publications antérieures : Sur les 21 étudiants concernés, 17 ont répondu que, pour le problème envisagé, ce n'est pas un point critique de la fonction obtenue qui détermine un maximum. De manière surprenante, ce sont des étudiants de la filière ingénierie qui, pour ce questionnaire final, ont fourni les réponses les plus complètes. Une moindre aisance à procéder à des traitements algorithmiques, repérée dans la phase généralisante, a-t-elle ici pour conséquence un plus grand besoin de développements, d'explicitations ? Sans qu'une réponse puisse être apportée, les petits effectifs en jeu ne l'autorisant pas, la question méritait d'être posée. Par ailleurs, parmi les commentaires des étudiants qui se sont spontanément exprimés par oral, il vaut la peine de relever celui sur la compréhension de ce à quoi peut servir le domaine d'une fonction. Modulons cependant : Les résultats du questionnaire final montrent qu'il serait excessif de prétendre que des progrès considérables dans l'acquisition de la notion de fonction ont été enregistrés. L'objectif d'apprentissage de cette courte période d'expérimentation était seulement un *théorème cible*. Mais il nous semble qu'il a pu être largement atteint, précisément en raison d'une certaine évolution dans l'appréhension de l'objet fonction.

1. Introducción: un fracaso típico

Recientemente, Moreno & Cuevas (2004), realizaron un estudio con profesores de cálculo, con estudiantes del primer año de ingeniería y con estudiantes de maestría provenientes de diversas escuelas de ingeniería y ciencias. El estudio consistió en proponerles resolver dos problemas de máximos y mínimos, utilizando el cálculo diferencial, con las siguientes características:

a) ser un problema práctico que ejemplificara una situación real, y ser interesante o atractivo para la mayoría de los estudiantes;
b) ser fácil de entender, aunque no necesariamente fácil de plantear y resolver;
c) ser un problema con un nivel de dificultad similar al que poseen los problemas típicos de máximos y mínimos que presentan los textos de nivel medio superior, y por último que:
d) las funciones que resultaran de cada problema deberían ser continuas y diferenciables en todo su dominio.

Adicionalmente, los problemas deberían cumplir con que:

1. La función que modelara el primer problema, poseyera un máximo que se localizara en un punto crítico y, consecuentemente, posible de calcular mediante el criterio de la segunda derivada.
2. El segundo problema, variante del primero, debería producir una función con un máximo que se ubicara en un extremo de su dominio de definición, en donde el criterio de la segunda derivada no operara.

Los problemas elegidos fueron:

Problema 1

Determinar las dimensiones de los cuadrados de las esquinas que se deben de cortar, de una lámina cuadrada de 13 cm. de lado[1], para construir una caja de base cuadrada sin tapa, que tenga volumen máximo (véase figura 1).

[1] La dimensión 13 cm. se eligió de manera que el punto crítico se localizara en un valor no entero y por ende no fácil de calcular mediante una tabulación.

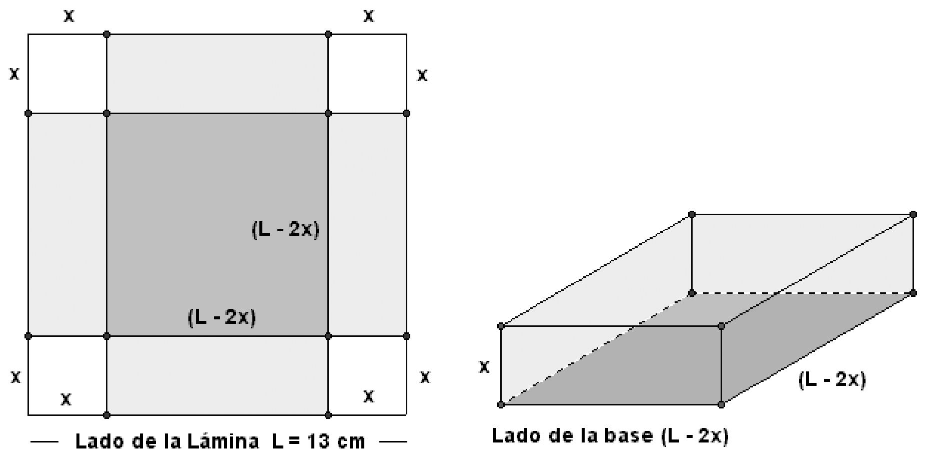


Figura 1 : Caja que se construye con la lámina de la izquierda

Problema 2

Determinar el volumen máximo que se puede obtener al construir una caja de base cuadrada sin tapa, con una lámina cuadrada de 13 cm. de lado, donde la base esté formada por una esquina de la lámina (véase figura 2).

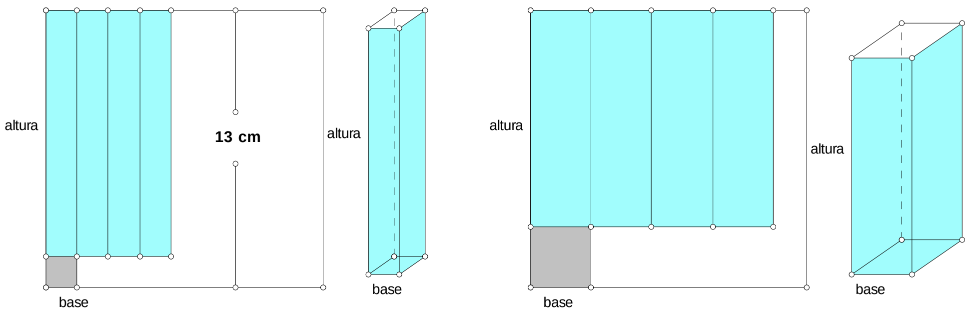


Figura 2 : Construcción de una caja mediante las láminas de la izquierda

Al resolver el problema 1, resulta una función volumen de la forma $V(x)=(13-2x)^2 x$; con dominio $0 \le x \le 13/2$[2], cuyo valor crítico resulta ser $x=\frac{13}{6}$. Esto da lugar a un volumen máximo $V_{máx}$ =162.74 cm^3, que se alcanza cuando la longitud que se recorta es de $x=\frac{13}{6}$ cm.

[2] En el modelo se pueden admitir los valores extremos 0 y 13/2, que corresponden a casos limites: "cajas" de volumen 0.

Mientras que al resolver el problema 2, resulta la función $V(x) = x^2(13 - x)$, en la que el dominio está determinado por el intervalo (*0 ≤ x ≤ 13/4*). En esta función el máximo se localiza en $x = \frac{13}{4}$ *cm,* extremo del dominio de definición, y da lugar a un volumen máximo de: $V\left(\frac{13}{4}\right) = \left(\frac{13}{4}\right)^2\left(13 - \frac{13}{4}\right) = 102.98\ cm^3$

Los autores mencionan que el estudio se diseñó de manera que los problemas se resolvieran en forma gradual y, mediante cuestionarios cuidadosamente diseñados, se dio seguimiento al trabajo de los estudiantes.

Resultados reportados

Los resultados que aportó el citado estudio, son los siguientes:

En general toda la población elegida resolvió bien el problema 1; es decir, el ejercicio donde el máximo se encuentra mediante el criterio de la segunda derivada. No ocurrió lo mismo en relación al problema 2 ya que, de todos los profesores del departamento de matemáticas pertenecientes a la academia de Cálculo Diferencial de una escuela superior, sólo dos resolvieron bien este problema cuyo máximo se encuentra en un extremo del dominio. Además, Moreno & Cuevas (ibidem), mencionan que el dominio pasó desapercibido para el 75% de los profesores de la muestra y que todos, sin excepción, aplicaron el criterio de la segunda derivada, obteniendo un valor para el volumen máximo, imposible de aplicar, sin lograr percibir su error.

Con respecto a los estudiantes de maestría, todos llegaron a la respuesta incorrecta $x = 26/3$ al problema 2, a pesar de que a ellos se les proporcionó, en una hoja, el problema y el dominio de la función.

Finalmente, todos los estudiantes de ingeniería aplicaron el criterio de la segunda derivada para la obtención de los puntos críticos en ambos problemas y, desde el punto de vista operativo, no tuvieron errores. La interpretación de la solución al problema 2 fue casi similar a la registrada por los estudiantes de maestría. Esto es, sólo tres estudiantes se percatan que el valor crítico está fuera del dominio de la función, concluyendo erróneamente que el problema no tiene solución. Los demás estudiantes, como los de maestría, dan por buena la respuesta que obtienen para el punto crítico, sin percatarse de que es un resultado imposible de realizar.

Los autores del estudio anterior, concluyeron que una educación matemática llevada a cabo en forma operativa y rutinaria (en donde la comprensión de los conceptos queda de lado), conduce a sobreponer la operatividad al sentido común.

> *Los resultados anteriores ponen de manifiesto una interpretación errónea de los conceptos de máximos y mínimos, al aplicar el criterio de la segunda derivada sin reflexionar en la solución obtenida y al no considerar como información relevante que el dominio de la función es cerrado, cuestión importante al definir los máximos y mínimos de una función continua, acotada y diferenciable en su dominio. En una encuesta, aparte del cuestionario, se les preguntó sobre cómo definían o entendían el máximo o mínimo de una función; la respuesta en general, salvo un 10%, fue que para definir un máximo o un mínimo se requería que la derivada fuera cero en esos puntos. Es decir que para la mayoría, tanto de profesores como de estudiantes, el máximo o mínimo de una función sólo se puede encontrar a través del criterio de la segunda derivada; de no ser posible el aplicar este criterio, entonces concluyen, erróneamente, que el problema no tiene solución o que la función no tiene máximo (Moreno & Cuevas 2004).*

¿Como introducir en el aprendizaje una visión más amplia del objeto función?

2. Antecedentes sobre la adquisición del concepto de función

El concepto de función ha sido y es fundamental para el desarrollo de la matemática; además, con frecuencia modela innumerables fenómenos físicos, químicos, socioeconómicos, biológicos, por mencionar algunos. Sin embargo, y a pesar de ello, diversos investigadores reportan serias dificultades en los estudiantes para comprender este concepto, lo que conduce, con frecuencia, a falsas interpretaciones de conocimientos matemáticos que dependen de la comprensión del concepto de función (Selden, 1992; Dubinsky & Harel, 1992; Norman, 1992).

Usualmente el concepto de función se introduce mediante su definición formal, olvidando que se trata de un objeto matemático muy sofisticado. Su definición es consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una lenta evolución, aún en proceso (Rüting, 1984); requiere, a su vez, de subconceptos matemáticos que han mostrado ser complejos, como: relaciones de dependencia, variable, conjuntos, producto cartesiano, etc. En efecto, a pesar de que en el periodo comprendido entre 1450 y 1650, ocurrió una serie de desarrollos importantes para la fundamentación del concepto de función, éste no surgió, en forma explícita, hasta principios del siglo XVIII (Youschkevitch, 1976), por su parte Kleiner sostiene que a pesar de que la noción del concepto de función se remonta a 4000 años atrás; 3700 años *consistieron sólo de anticipaciones*; considera incluso, como ya se dijo arriba, que tal concepto continúa en evolución. (Kleiner, 1989).

Algunas de las dificultades que experimentan los estudiantes con el concepto de función se parecen a las ideas que tenían los matemáticos del siglo XVIII (Sierpinska, 1992; Markovits et al., 1986, 1988; Martínez, 1993). También se ha detectado que, por parte de los estudiantes, el reconocimiento de los subconceptos dominio y rango puede ser lo último que aparezca en el desarrollo del concepto de función. Estas dificultades corresponden a obstáculos cognitivos relacionados con el desarrollo histórico del concepto de función (Sierpinska, 1992; Ruiz, 1993). Por su parte Slavit (1997), divide las teorías acerca de la representación que los estudiantes tienen de función, en: *Ver la función como una acción*, en esta parte el estudiante considera la función como una regla de asociación, en donde sólo existen valores de entrada y, mediante un algoritmo definido por la función, se calculan los valores de salida. No existen patrones, invariantes, ni regularidades y produce un conocimiento no permanente. *Mirar la función como un objeto*, este punto de vista comprende a la función como una *correspondencia* y como una *covarianza*. La correspondencia es una concepción relacional, basada sobre relaciones de causa y efecto entre parejas de entrada-y-salida. Briedenbach et al (1992), ofrecen evidencia de que la instrucción que utiliza la programación en computadoras, promueve este tipo de relaciones; para ellos, un *proceso* de concepción de función es el completo entendimiento de una actividad transformacional ejecutada por una función, y que consiste de relaciones de causa-efecto entre variables dependientes e independientes.

Para Sfard (1989), concebir la función como un objeto, es la *reificación* de la acción percibida que permite, eventualmente, concebir a la función como un objeto matemático que posee o no, diferentes propiedades funcionales. Por otra parte, la covarianza es una manera de entender cómo cambian la variable independiente y la variable dependiente, cuando se realizan actividades en varios registros de representación semiótica; Schwarz & Dreyfus (1995), sugieren que los estudiantes identifican propiedades invariantes de las funciones en estudio. La última división que Slavit propone consiste en *orientar la visión de la función hacia sus propiedades*, afirmando que *una visión orientada hacia propiedades se relaciona con la conciencia gradual de propiedades específicas de crecimiento funcional de naturaleza local o global*[3].

[3] A property-oriented view of function deals with the gradual awareness of specific functional growth properties of a local or global nature...(Slavit, 1997, p. 266).

3. Preliminares a la experiencia

3.1. Un cuestionario inicial y sus resultados

Una conjetura al problema detectado en el artículo mencionado (Moreno & Cuevas, 2004), proviene de suponer que la concepción que los estudiantes tienen de una función, es el de considerar a ésta como una mera asociación entre dos números, una regla de correspondencia y no como un objeto matemático que posee propiedades como lo son el dominio, rango, etc. por ello a pesar de que a los estudiantes se les dotó, en las hojas de actividades, el dominio de la función del segundo problema, esta información pasó desapercibida para ellos. Para comprobar esta conjetura, decidimos llevar a cabo una experiencia, con dos grupos de 11 y 10 estudiantes de dos carreras diferentes: cómputo e ingeniería de UPIICSA (Unidad Profesional Interdisciplinaria de Informática y Ciencias Sociales y Administrativas). Antes de la experiencia, aplicamos una prueba inicial, que consistía de contestar las preguntas de un cuestionario, diseñado con el objeto mostrarnos su imagen o representación del concepto de función. El cuestionario inicial, de una duración prevista de 50 minutos, sin uso de computadora, constaba de dos partes.

Las tareas propuestas en el cuestionario inicial

La primera parte consistía en el estudio de la función dada bajo la forma implícita:

$$xy^2 + 4xy - x^2 = 0\,.$$

Las dos primeras preguntas solicitaban resolver la ecuación considerada (en x, o en y), en función de la otra variable la cual debería ser considerada como parámetro. La tercera pregunta consistía en trazar la gráfica.

La segunda parte presentaba un cuadrado de lado $a = 6$ cm, con un punto M que se desplaza sobre sus lados (véase figura 3). Siendo OP un lado del cuadrado, se consideraba el área A_M (posiblemente nula) del triángulo OMP. Se denota con x la longitud de la parte del perimetro del cuadrado de O a M, o: recorrido necesario desde M para llegar a O al caminar sobre los lados del cuadrado. Se solicitaba decidir si A_M es o no una función de x, y después representar gráficamente la situación.

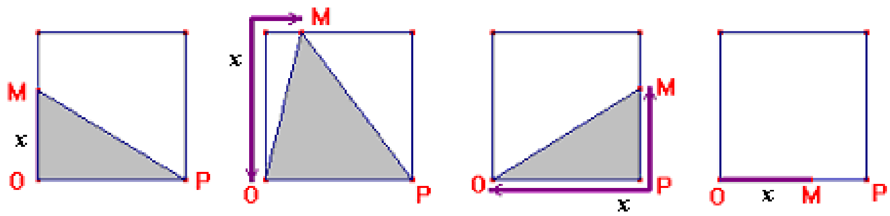


Figura 3

Indicaciones sobre soluciones posibles

La primera parte se puede resolver considerando que al factorizar *x*, la ecuación $xy^2 + 4xy - x^2 = 0$ se puede escribir como $x\left(y^2 + 4y - x\right) = 0$, forma que en el plano $\left(x\ ,\ y\right)$ evidencia la reunión de una recta y una parábola.

Para resolver la segunda parte se considera que el cuadrado, al ser una curva cerrada, tiene dos puntos M diferentes que dan lugar a un mismo valor de *x*, excepto cuando M está en O (punto para el cual $x = 0$) o en el punto opuesto (punto donde $x = 2a$). Y las áreas correspondientes son diferentes. Por eso A_M no es una función de *x*. Al desplazar M, la gráfica que se obtiene en el plano (*x*, A_M) es un paralelogramo.

Resultados observados

Los resultados (véanse las columnas CI en la tabla del Anexo 3: Hoja general de resultados), tanto en el grupo del área de cómputo como en el grupo del área de ingeniería resultan homogéneos, con respecto al manejo de funciones y de representaciones gráficas solicitadas en este cuestionario, ambos a un nivel de primer acercamiento de los conceptos involucrados. Para precisar lo anterior, podemos subrayar que, en las dos primeras preguntas de la primera parte, todos calcularon sólo con valores numéricos, a excepción de una estudiante que trató, sin éxito, de expresar una variable en función de la otra. Con respecto a la gráfica, todos se quedaron en representaciones parciales, correctas o incorrectas. En la segunda parte, todos respondieron, salvo una única ausencia de respuesta, que se presenta una función, con argumentos del tipo “el valor del área depende de *x*”. Solo un estudiante realizó una gráfica con un segmento completo correcto, los demás se quedaron en tratamientos puntuales.

Eso significa que todos los estudiantes de los dos grupos pueden establecer una correspondencia entre valores y localizar un punto por coordenadas. Pero les falta un sentido más general; es decir, el “encapsulamiento” del concepto de función (Dubinsky & Harel, 1992), así como una visión global de gráficas que les permitiría por ejemplo asociar sistemáticamente una recta a una función lineal o afín, o una cónica a una forma cuadrática en dos variables. Entonces, estos resultados comprobaron que los estudiantes, de esta experiencia, tenían una concepción de función limitada a una regla de correspondencia.

3.2. Proyecto de acción: un globo dentro de un recipiente cilíndrico con agua

Para favorecer un cambio conceptual, nos dimos a la tarea, conforme al modelo didáctico propuesto en Cuevas&Pluvinage (2003), de construir un proyecto de acción que incluyera la elaboración de un problema que, desde su planteamiento, requiriera una formulación precisa del dominio y de esta manera, promover el interpretar el concepto de función como un objeto matemático. Así, surge el siguiente proyecto: Se propone estudiar la situación de un globo inflable, que está asido al fondo de un cilindro de radio $R=5$ cm. Cuando el globo está desinflado, es decir, cuando el globo tiene un radio nulo, se vacía agua en el cilindro, hasta que alcance una altura h_0 (véase fig. 4). Ahora bien, el experimento se divide en dos partes: 1) observar lo que ocurre cuando se infla el globo (véase fig. 5), y 2) estudiar cuando el nivel alcanzado por el agua, que llamaremos *h*, sea igual al diámetro del globo; es decir, cuando el globo quede exactamente sumergido (véase fig. 6). Empezaremos por presentar el estudio matemático del tema, que en particular nos permitió elaborar un material destinado a los estudiantes. El lector más específicamente interesado en la experiencia puede pasar directamente a la lectura del § 4. Presentaremos en el § 4 la experimentación y por último los resultados obtenidos.

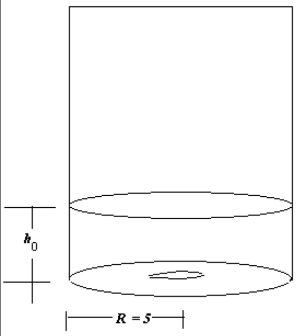


Figura 4 : Recipiente cilíndrico con agua y un globo desinflado asido al fondo

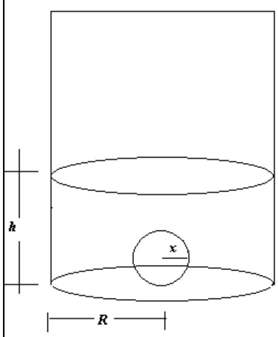


Figura 5 : Recipiente cilíndrico con agua y globo esférico de radio *x*, asido al fondo

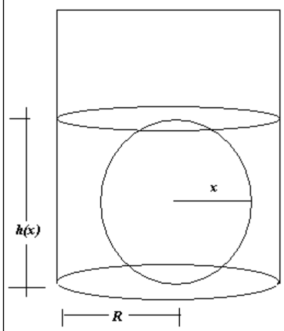


Figura 6 : Recipiente cilíndrico con agua y globo esférico de radio *x*, asido al fondo y tangente a la superficie

Presentación matemática del problema

En el plano $(X\ ,\ Z)$ la ecuación de un círculo de centro $(0\ ,\ x)$ y radio *x* (véase fig. 7) es :

$$X^2+(Z-x)^2-x^2=0\ .$$

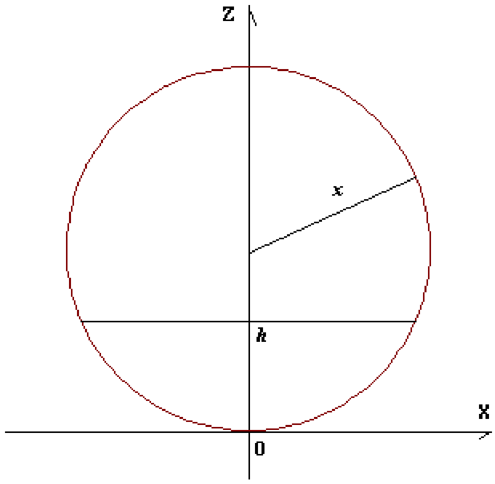


Figura 7 : Circulo de radio *x* en el plano XZ

Despejando X^2 queda:

$$X^2 = 2xZ - Z^2$$

Con esta ecuación se puede calcular el volumen V_{sg} de una sección de esfera de radio *x*, entre el nivel 0 y la altura *h*:

$$V_{sg} = \int_0^h \pi\left(2xZ - Z^2\right)dZ = \pi\left(h^2x - \frac{h^3}{3}\right)$$

De aquí se puede deducir que el volumen de una esfera de radio *x* estará dado por

$$V_e = \frac{4}{3}\pi x^3$$

Tomemos ahora un recipiente cilíndrico con una base circular de radio *R*. Si se deposita en él un líquido de altura *h* y se infla un globo asido al fondo, se tienen dos posibles casos.

Primer caso: Si la altura *h* del agua, es superior o igual al diámetro 2*x* del globo esférico se tienen las dos situaciones dibujadas en las figuras 8 y 9.

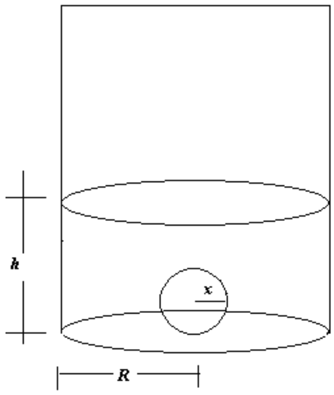


Figura 8 : Globo de radio *x* inmerso en un recipiente cilíndrico

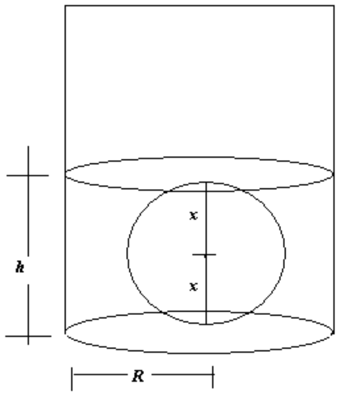


Figura 9 : Globo de radio *x* tangente a la superficie del agua en el recipiente

Como se puede observar, en ambos casos, la esfera queda completamente sumergida, por lo que el volumen del liquido que incluye el globo, estará dado por el volumen del globo $V_g = \frac{4}{3}\pi x^3$, más el volumen del liquido que esta dado por $V_a = \pi R^2 h_0$.

Entonces, en este primer caso, tenemos que

$$\pi R^2 h = \pi R^2 h_0 + \frac{4}{3}\pi x^3$$

de donde

$$h = h_0 + \frac{4x^3}{3R^2}$$

Es decir que *h* queda en función de *x*.

$$h(x) = h_0 + \frac{4x^3}{3R^2}$$

Ahora bien, cuando el globo es tangente a la superficie del líquido se tiene que

$$h = 2x$$

Por lo que para encontrar el valor de *x*, para cuando el globo es tangente a la superficie se tiene que resolver la ecuación

$$2x = h_0 + \frac{4x^3}{3R^2}$$

$$4x^3 - 6R^2 x + h_0 = 0$$

Segundo caso: La altura *h*, del agua, es inferior al diámetro $d = 2x$ del globo esférico (véase fig. 10)

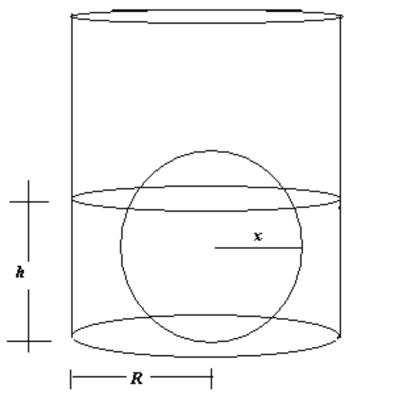


Figura 10 : Recipiente cilíndrico con un globo esférico de radio *x*, asido al fondo, que rebasa la superficie del agua

Como en este caso sólo una parte de la esfera, de volumen V_{sg}, esta sumergida, el volumen a una altura *h* del agua se obtiene con la igualdad

$$\pi R^2 h = \pi R^2 h_0 + \pi\left(h^2 x - \frac{h^3}{3}\right)$$

Esto implica que *h* se encuentra resolviendo la ecuación

$$h^3 - 3xh^2 + 3R^2 h - 3R^2 h_0 = 0$$

Notemos que con esta ecuación se forma el polinomio

$$P(h) = h^3 - 3xh^2 + 3R^2 h - 3R^2 h_0$$

un polinomio en *h* formado por el primer miembro de la ecuación cuya derivada es

$$P'(h) = 3\left(h^2 - 2xh + R^2\right)$$

Ahora bien, se deduce que $P'(h) = 3\left(h^2 - 2xh + R^2\right) > 0$ para cualquier valor de *h*. En efecto, en la ecuación $P'(h) = 0$, el discriminante resulta ser $\Delta = 4(x^2 - R^2) < 0$, dado que la esfera (globo) tiene un radio *x* menor que el radio R del cilindro. Esto significa que el signo del polinomio $P'(h) = 0$ no cambia. Así, al evaluar $P'(h)$ en cualquier valor de *h*, se obtiene el signo; es decir, puesto que $P'(0) = 3R^2 > 0$. Con esto concluimos que $P(h)$ es una función estrictamente creciente, lo que implica que $P(h)$ tiene exactamente una raíz real. Consecuentemente esta raíz es la solución del problema.

Modelo geométrico en la computadora

En nuestro modelo geométrico nos apoyaremos en el acercamiento clásico de la raíz; es decir, aproximarse por medio de una sucesión de valores al valor de la raíz. La justificación matemática se proporciona en el **Anexo1.**

4. Fases de la experimentación didáctica del proyecto

Las secuencias de trabajo se desarrollaron en una sala equipada con computadoras. A los estudiantes se les entrega un programa diseñado en Cabri que simula el inflamiento del globo mediante una manipulación sencilla en la computadora. En este programa los alumnos pueden elegir la altura h_0 de liquido en el cilindro sin globo (o con globo de radio nulo) y mover el radio *x* del globo, al ir inflando al mismo.

A continuación se describen las fases de observación y descripción, con la introducción de los diversos registros señalados por Bloch, 2003, que sirven para expresar funciones (véase lista de "*settings*" en Bloch).

Fase 1: descriptiva

Se pide a los estudiantes, que observen lo que ocurre para diversas elecciones de parámetros. Por ejemplo, pueden observar que con mucha agua el globo quedará completamente sumergido, para cualquier valor de radio. Por el contrario, con poca agua, una parte de la esfera que forma el globo, quedará fuera del agua, luego que el radio sobrepasa un pequeño valor. Pero hay situaciones más sorprendentes... Son tres las variables que se distinguen: el radio de la esfera, la altura del líquido, que son positivas, y la altura del punto más alto de la esfera arriba o debajo del nivel del líquido, variable que se expresa entonces por un número con un signo. Por tal situación, se requiere presentar una descripción cuidadosa de los aspectos cualitativos que se observan. El calificativo "descriptiva" no significa ausencia de demostración; por ejemplo, se puede pedir a los estudiantes que observen que el nivel alcanzado por el líquido sube cuando el radio de la esfera aumenta. Conforme la metodología expuesta por Cordier (1993), es necesario presentar una descripción cuidadosa de los aspectos cualitativos que se observan.

Fase 2: cuantitativa

En la primera etapa, con las fórmulas de volumen del cilindro y de la esfera, se espera que los alumnos establezcan la ecuación que permite obtener los casos en los que $h-2x=0$. Posteriormente, se les proporcionará el software ***CalcVisual*** (Cuevas & Mejía, 2004), para facilitar la determinación de las raíces que solucionan el problema. Se espera que las limitaciones del radio x del globo, que está $0 \leq x \leq R$, en donde R es el radio del cilindro, se impongan a lo largo de esta búsqueda.

Fase 3: generalizante

El artículo de Moreno & Cuevas (2004), muestra el carácter memorístico y rutinario en la aplicación de fórmulas para resolver problemas de máximos o mínimos y, evidentemente, constata el olvido frecuente de las limitaciones presentes en tales problemas. La situación mostrada aquí, condujo a tomar en cuenta un dominio que es distinto del dominio de validez de las funciones; el objetivo de aprendizaje es hacer, de tal situación, una generalización al problema de los extremos de una función considerada sobre un segmento (Anexo 2 – Unas hojas del estudiante

El teorema meta). En particular se pondrá el énfasis sobre el teorema de existencia para una función continua. También se expondrá la metodología de obtención de los extremos para una función derivable.

5. Resultados cualitativos y cuantitativos

Recordemos que para realizar la experiencia se eligieron dos grupos de 11 y 10 estudiantes de UPIICSA, de dos carreras diferentes: cómputo e ingeniería. Las secuencias de trabajo se desarrollaron en una sala equipada con computadoras. A continuación se presentan los resultados y se hace un breve análisis de lo obtenido en cada fase de la experiencia (para una visión completa, vease Anexo 3: Hoja general de resultados). Las hojas de preguntas, en la experimentación, a diferencia de los cuestionarios inicial y final, no constituían pruebas en sí mismas si no se acompañaban con las actividades que los estudiantes tenían que desempeñar con la computadora. Recordemos que la idea era en cada fase darles *metas* y *objetivos*, y permitir un control, posiblemente para una retroacción si hubiera sido necesaria.

En la **fase descriptiva,** se les presentaban cuatro preguntas relacionadas con los posibles casos que se pueden encontrar en el modelo del globo dentro de un recipiente cilíndrico. En la primera pregunta, el nivel inicial de agua en el recipiente estaba dado y se pedía observar la evolución de la situación del globo (sumergido, emergente, o caso límite entre ambas situaciones). La segunda pregunta se refería al dominio de evolución del radio del globo (entre 0 y el radio del cilindro). La tercera solicitaba encontrar una designación verbal para la diferencia (con signo, positivo o negativo) entre la altura del agua en el recipiente y el diámetro del globo. Y la cuarta, y última, pedía determinar si las diversas elecciones del nivel inicial de agua (con el globo totalmente desinflado), pueden producir diversas evoluciones cuando se infla el globo. Recordemos que en un experimento, o en el funcionamiento de un modelo, una variable debe ser vista como una función.

El número de éxitos fue mayoritario únicamente en la segunda pregunta (el dominio de variaciones del radio del globo). Le sigue la primera, luego la cuarta y, en último lugar, donde no se tuvieron éxitos fue en la tercera pregunta. Estos resultados contrastan con los obtenidos en la fase cuantitativa. Una interpretación de las dificultades encontradas podría tener como base los siguientes cuatro niveles de pensamiento:

- La sustitución de valores es el nivel más elemental de manejo de una variable,
- observar una evolución es más difícil que determinar valores,
- considerar de manera global una variable representa un grado de dificultad más elevado que la determinación de valores,
- determinar un objeto conceptual tributario de dos variables simultáneas alcanza el máximo nivel de dificultad.

Los pocos éxitos encontrados en tres de las preguntas de la fase descriptiva no permiten estudiar relaciones entre las respuestas de un mismo individuo.

La decisión que tomamos, al final de la fase descriptiva, fue seguir con lo previsto; o sea, presentar a los estudiantes solamente elementos de respuesta relativos a los aspectos involucrados en la fase descriptiva. Así, les entregamos una hoja de estudio para el caso en el que la superficie del líquido es exactamente tangente al globo, hecho que conduce a determinar las raíces del polinomio $\frac{4}{75}x^3 - 2x + h_0$ que pertenecen al intervalo $[0\ ,\ 5]$ (en el modelo, el radio del recipiente cilíndrico es de 5 cm.); además, este estudio introduce el cuestionario de la fase cuantitativa

La **fase cuantitativa**, consistía en resolver ecuaciones polinomiales en un intervalo con la ayuda del paquete de cálculo ***CalcVisual*** (Cuevas & Mejía, 2004), los estudiantes resultaron ser mucho más exitosos. Se propusieron tres ecuaciones de grado tres, que corresponden a los diversos valores numéricos de h_0 para la ecuación general $\frac{4}{75}x^3 - 2x + h_0$. No se encontró ningún valor erróneo y casi todas las respuestas fueron completas (a excepción de dos).

Por su parte, la **fase generalizante** se componía de dos partes: La presentación de una hoja de resultados generales, referentes a los extremos alcanzados por una función sobre un segmento; y la otra parte, constituía un cuestionario sobre los dominios correspondientes a las funciones polinomiales obtenidas en dos problemas estudiados en el artículo de Moreno & Cuevas (2004): el problema 1 presentado en la Introducción y un problema 2 similar (véase Anexo 2 – Unas hojas del estudiante), y a la función que resulta de un problema relativo a una ventana tipo Normanda, que consiste de un rectángulo coronado por una semicircunferencia. En cada caso, el modelo se presentó acompañado por la expresión algebraica del polinomio que expresa la magnitud estudiada, con la gráfica completa del polinomio, y la pregunta planteada era: "Determinar únicamente el dominio de la función que modela el problema". Además, se les pedía subrayar en la gráfica el intervalo del dominio.

En los resultados obtenidos en esta fase (columnas DO1 a DO3 en el Anexo 3: Hoja general de resultados), se nota cierta diferencia entre los dos grupos. Por ejemplo, se observa que en el grupo "computo", hay más respuestas pero también más errores; mientras que en el grupo "ingeniería", la tendencia hacia no responder en caso de dificultad predomina. Los resultados obtenidos por el grupo "computo" son similares en los tres casos; en tanto que, para el grupo "ingeniería" el problema de la ventana tipo normanda ocasionó más dificultades que los demás casos. En forma general, se puede expresar que los resultados alcanzados en esta fase no fueron muy satisfactorios, a pesar de los estudios anteriores, quizás por la presentación muy completa. En cada caso: un modelo, una fórmula y una gráfica.

Cuestionario final

El cuestionario final presentaba el problema del volumen máximo de una caja sin tapa, que en observaciones anteriores había dado lugar a un fracaso fuertemente mayoritario de los profesores y estudiantes entrevistados (véase Introducción, Problema 2 en Moreno & Cuevas, 2004), a causa de la tendencia de aplicar el criterio de la segunda derivada sin tomar en cuenta el dominio de la función. Este cuestionario final constaba de nueve preguntas: dos para llegar a la fórmula del volumen; una referente al dominio de la función; dos de construcción de una tabla de valores; una para solicitar la gráfica y tres sobre los extremos del volumen. Así entonces, en términos de tener actividades en los diferentes registros de representación para las funciones, el cuestionario terminal lo consideramos muy completo.

Los resultados observados en la experiencia (columnas CF en Anexo 3: Hoja general de resultados) ponen en evidencia que el objetivo general esperado fue alcanzado por una fuerte mayoría de los estudiantes: precisamente, 17 de los 21, se dieron cuenta de que el polinomio tiene un punto crítico fuera del dominio de la función y que, por consecuencia, no conduce al máximo deseado. Esto es un éxito convincente, pero no significa que estos estudiantes llegaron a una adquisición que se pudiera considerar completa. Muchos estudiantes no contestaron a una u otra de las ocho preguntas planteadas, o cometieron errores en algunas de las respuestas dadas. Las razones son diversas: A unos les molestó que un extremo del dominio de la función, que corresponde a una situación límite ("caja" de volumen nulo, véase nota 2 de pie de pagina) no tenga una realización concreta; la tabla de valores se puede relacionar con el polinomio sin las limitaciones de la función; también el manejo de números con aproximaciones puede generar problemas; después de rechazar un punto crítico para la obtención del máximo, muchos (13 estudiantes de los 17 que rechazaron el punto crítico) se sienten satisfechos y deciden no continuar con la búsqueda. Es lo que consideramos como exito parcial en la tabla general de resultados (columna CF8). Si se considera un nivel de exigencia máxima, sólo dos estudiantes del grupo "ingeniería", obtuvieron un éxito completo en las nueve preguntas planteadas. En general, los estudiantes del grupo "ingeniería" tuvieron más éxitos que los del grupo "computación". Específicamente el caso del mínimo (nulo) casi no ocasionó dificultad a los primeros (un único error), mientras que causó una grave molestia a los segundos (un único éxito). ¿Podría ser esto la consecuencia de una inquietud mayor de los segundos en cuanto al significado concreto de un resultado calculado? En este caso, el fenómeno se podría interpretar como una contraparte de cierta destreza en el manejo de expresiones.

6. Conclusiones de la experimentación del "proyecto globo"

Los resultados que observamos nos permiten asegurar que nuestra experiencia dio un resultado concluyente en cuanto al objetivo de promover una mayor comprensión del concepto de función. A nuestro juicio la experiencia fue limitada, sin embargo, dentro del marco de una investigación breve (dos semanas en nuestro caso), nos sugiere perseguir a la vez un objetivo utilitario de promover una mejor comprensión de los conceptos matemáticos y un objetivo más científico de comprensión de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje en juego.Y las observaciones ponen en evidencia que, soló para adquirir los conocimientos y métodos relativos al teorema de los extremos alcanzados por una función continua sobre un intervalo, un camino consiste en efecto en profundizar el concepto mismo de función.

En este sentido, cada una de las diversas fases introducidas jugó un papel para el alcance del resultado final. La contribución de los diversos registros de expresión (geométrico, algebraico, tabular y gráfico) que permiten estudiar funciones, también fue decisiva. Recordemos el programa de trabajo que se encuentra en el libro de Dubinsky, Schwingendorf & Mathews:

> "*La construcción de una función es frecuentemente llamada una representación de ella. Se puede representar una función en la computadora de varias maneras: como una expresión, como una función de computadora, como un conjunto de pares ordenados-tablas, o como una gráfica. Cada una de estas representaciones tiene sus puntos fuertes y débiles.*
> *Cual se debe seleccionar en una situación particular depende del problema.*"

Para cumplir con este programa, se deben proporcionar al estudiante las oportunidades para utilizar todos estos aspectos.

Anexo 1

Obtención de un valor aproximado de altura de agua
cuando no hay inmersión completa del globo

La ecuación

$$\pi R^2 h = \pi R^2 h_0 + \pi\left(h^2 x - \frac{h^3}{3}\right) \qquad \text{(I)}$$

se puede rescribir en la siguiente forma:

$$h = -\left(\frac{1}{3R^2}\right)h^3 + \left(\frac{x}{R^2}\right)h^2 + h_0 \qquad \text{(II)}$$

Si designamos con $k_1 = f(h)$ a el polinomio que se tiene en el segundo miembro de la ecuación, se tiene que

$$f(h) = -\left(\frac{1}{3R^2}\right)h^3 + \left(\frac{x}{R^2}\right)h^2 + h_0 \qquad \text{(III)}$$

en donde $R > 0$ y $x \geq 0$

Analizando este tipo de función se tiene que:

$$f(0) = h_0 > 0$$

su extensión o límites a infinito de $f(h)$ son:

$$\lim_{h \to -\infty} f(h) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{h \to \infty} f(h) = -\infty .$$

Además dado que su derivada resulta ser:

$$f'(h) = \frac{(2x - h)h}{R^2}$$

se derivan las siguientes propiedades

$$f'(0) = 0$$
$$f'(h) > 0 \text{ si } 0 < h < 2x$$
$$f'(2x) = 0$$

Por otra parte se puede definir a otra función $k_2 = g(h) = h$

Por ello la ecuación II, resulta de igualar a $k_2 = k_1$.

Y por las propiedades geométricas deducidas resulta que la cúbica $k_1 = f(h)$ corta a la recta $k_2 = h$ en un único punto de abscisa entre 0 y 2x, y en este punto con una derivada situada entre 0 y 1 (véase figura A).

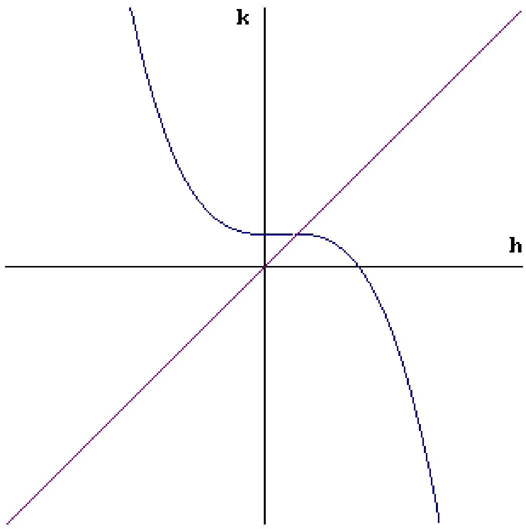


Figura A : Comportamiento de la cúbica $k = f(h)$ y de la recta $k = h$, en el plano $(h\ ,\ k)$.

Entonces podemos utilizar el algoritmo usual para aproximar este valor: Iniciamos con $h = 0$ y calculamos sucesivamente $f(0) = h_1$, $f(h_1) = h_2$, ... , $f(h_{n-1}) = h_n$. Sabemos que h_n tiende hacia el valor deseado cuando n tiende hacia el infinito. Unos ensayos muestran que ya con h_4 se alcanza una precisión aceptable.

Queda nada más el problema de encontrar una función que nos permita escoger entre el valor de la altura $a_0 = h_0 + \dfrac{4x^3}{3R^2}$, que corresponde a la inmersión completa de la esfera, y el valor h_4 obtenido. La función "*signo*", que toma el valor 1 cuando su argumento es positivo y el valor (- 1) cuando su argumento es negativo, conviene para que la computadora haga esta selección:

$$h = \left[1 + signo\left(a_0 - 2x\right)\right]\left(\frac{a_0}{2}\right) + \left[1 - signo\left(a_0 - 2x\right)\right]\left(\frac{h_4}{2}\right)$$

Anexo 2 – Unas hojas del estudiante

El teorema meta

Aquí se presentan resultados generales sobre funciones reales cuyo dominio es un segmento cerrado (puntos extremos incluidos).

Se admitirá el *teorema de los valores extremos alcanzados*, cuyo enunciado es el siguiente.

TEOREMA. Sea f una función de variable real x cuyo dominio contiene un segmento $[a, b]$. Si f es **continua** sobre $[a, b]$, entonces $f(x)$ alcanza sobre $[a, b]$ un máximo y un mínimo.

Las conclusiones del teorema se escriben también:

Existe x_1, $a \leq x_1 \leq b$, tal que para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(x_1)$.

Existe x_2, $a \leq x_2 \leq b$, tal que para todo $x \in [a, b]$, $f(x_2) \leq f(x)$.

La primera concierne el máximo, la segunda el mínimo.

Ejemplo: Se podrá verificar que la función definida sobre [-1, 2] por

$$f(x) = 2x^2 + 3x$$

alcanza un máximo en 2, con el valor $f(2) = 14$,

un mínimo en –3/4, con el valor $f(-3/4) = -9/8$.

Se puede observar en este caso que uno de estos dos puntos es un extremo del segmento, mientras el otro es interior al segmento. Ambos casos se pueden presentar para el máximo como el mínimo, según la función considerada.

Hace falta cuidar en las hipótesis del teorema. Las conclusiones pueden ser falsas si una hipótesis no se cumple.

Ejemplo de una función discontinua: Consideremos $f(x) = x - ENT(x)$ sobre [0, 2], donde $ENT(x)$ designa la parte entera de x (p. ej. la parte entera de 0.35 es 0, la parte entera de 1.732 es 1). Esta función tiene un máximo 1 que no se alcanza.

Ejemplo de un intervalo no cerrado: La función definida sobre]0, 1] por $f(x) = 1/x$ no tiene máximo.

Búsqueda de valores extremos en el caso de función derivable

Método de búsqueda de extremos para una función derivable sobre un segmento [*a, b*]: Una función f derivable es continua, entonces las hipótesis del teorema son verificadas por f sobre $[a, b]$. Si un valor extremo se alcanza en un punto x_0 interior al segmento, este es un punto crítico y en particular $f'(x_0)$.= 0. Pero un valor extremo puede alcanzarse en un punto extremo del segmento. Entonces es preciso:

- calcular $f(a)$ y $f(b)$,

- determinar las raices de *f'(x)*.= 0 que estan en el segmento[*a, b*],
- comparar con *f(a)* y *f(b)* los valores críticos correspondientes a estas raices.

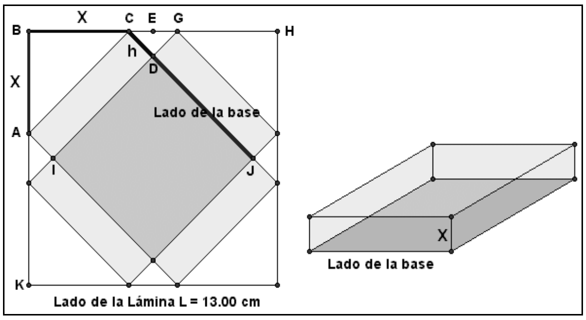
Ejemplo: En el caso ya encontrado de la función *f* definida sobre [-1, 2] por $f(x) = 2x^2 + 3x$, la derivada es $f'(x) = 4x + 3$. Esta derivada viene nula en $x = -3/4$. El valor –3/4 pertenece al segmento [-1, 2]. Entonces tenemos que considerar en este caso los valores

$f(-1) = -1$, $f(-3/4) = -9/8$ y $f(2) = 14$.

Así el máximo de *f(x)* sobre [-1, 2] es 14 y el mínimo –9/8.
****

Una pregunta de dominio: problema 2 en la hoja del estudiante

Determinar el máximo volumen de una caja sin tapa de base cuadrada al trazar los lados y la base en líneas paralelas a las diagonales de una lámina cuadrada de 13 cm de lado

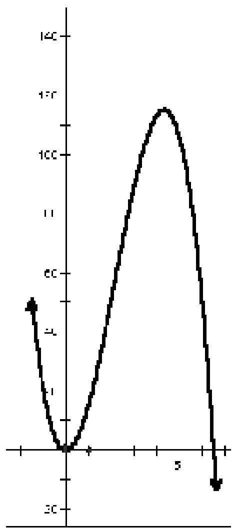


$$V(x) = 2x^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(L-2x)\right)$$

Dominio:

....

Subraya en la gráfica el intervalo del dominio:



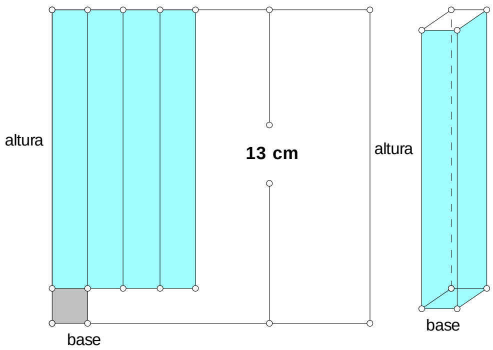
Cuestionario: Máximos y Mínimos

Nombre ____

Fecha ________________ Secuencia

Problema

Determinar el volumen máximo que se puede obtener al construir una caja de base cuadrada sin tapa, de una lámina cuadrada de 13 cm de lado, donde la base este formada por una esquina de la lámina, ver figuras.



Realice un dibujo de la caja

Lado de la lámina **L** = 13 cm

Actividades

Para resolver el problema, realiza las siguientes actividades.

1. Se denota con **x** el lado del cuadrado de la base. ¿Cómo se expresa la altura **h** de la caja en función de **L** y **x**?

h = ______________________

2. El volumen de la caja en forma de paralelepípedo es el producto del área de su base por su altura. Plantee su función.

V(x) = ______________________

3. Determina el *dominio de la función* **V(x)**

4. Elabora una tabla de valores

x											
V(x)											

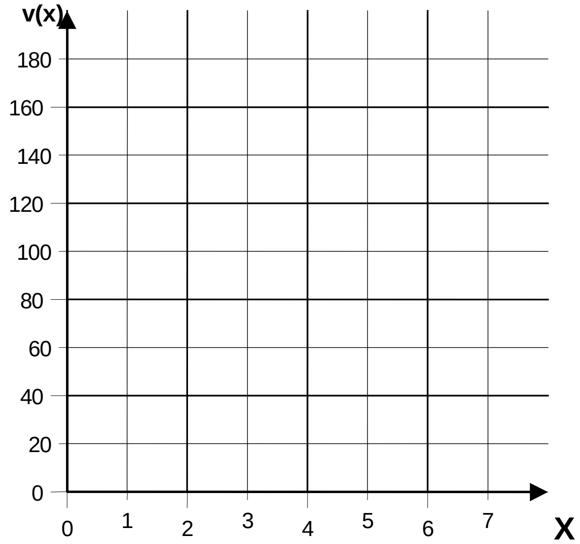
5. Interpretación de la tabla

Haciendo un análisis de la tabla, escribe el valor de:

x = ________ cm que da lugar al volumen máximo $V_{máx}$ = ______ cm^3

x = ________ cm que da lugar al volumen mínimo $V_{mín}$ = _______cm^3

6. Con los valores de la tabla grafica la función



7. Interpretación de la gráfica

Haciendo un análisis de la gráfica, determina:

x = ________ cm que da lugar al volumen máximo $V_{máx}$ = ______ cm^3

x = ________ cm que da lugar al volumen mínimo $V_{mín}$ = _______cm^3

8. Resuelve el problema planteado al inicio utilizando el Cálculo Diferencial.

Anexo 3: Hoja general de resultados

Estudiante	Grupo	CI1a	CI1b	CI1c	CI2a	CI2b	FD1	FD2	FD3	FD4	FC1a	FC1b	FC2a	FC2b	FC3A	FC3b	DO1	DO2	DO3	CF1	CF2	CF3	CF4	CF5	CF6	CF7M	CF7m	CF8
Mario	Computo	1	2	2	2	1					9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	0	2	9	9	9	9	8
Oscar	Computo	1	1	1	3	1	1	0	0	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	0	9	7	1	9	1	8
Leonel	Computo	2	3	2	3	7	9	7	8	8	9	9	9	9	9	9	1	1	1	9	9	0	9	7	9	0	0	8
Carlos Eduardo	Computo						1	9	0	3	9	9	9	9	9	9	9	1	1	9	9	1	9	1	7	9	1	8
Alvaro Daniel	Computo	2	2	0	3	1					9	9	9	9	9	9	9	0	1	9	9	0	2	7	3	9	1	8
Elideth	Computo	1	0	1	3	3	2	9	0	3							3	9	1	9	9	1	2	7	7	0	0	8
Jocsan	Computo	2	3	1	2	1	1	9	1	2							1	1	9	9	9	0	2	0	1	0	0	8
Jorge Uriel	Computo						1	9	1	2							1	1	9	9	9	0	2	0	1	0	0	8
Margarita	Computo																1	1	1	9	9	9	3	7	3	1	1	0
Cecilia	Computo	5	0	0	3	3											1	0	0	9	9	0	2	7	3	1	1	2
Elisabeth	Computo	2	3	2	2	2											1	1	1	9	9	7	2	7	1	1	1	2
Juan Carlos G	Ingeniería	3	2	2	2	2	1	9	7	3	9	9	9	9	9	9	9	9	1	9	9	9	9	9	9	9	9	9
Eric	Ingeniería	2	2	2	2	7					9	9	9	9	9	9	9	9	0	9	9	9	9	9	9	9	9	9
Adan	Ingeniería	3	2	2	0	2	1	9	1	2	9	9	9	9	9	9	9	9	0	9	9	9	9	9	2	9	9	8
Carolina	Ingeniería	2	2	2	2	2					9	9	9	7	9	9	9	9	0	9	9	9	1	7	1	1	1	8
Antonio	Ingeniería	2	1	2	3	1	1	9	1	3										9	9	2	2	7	3	2	9	9
Joel Alejandro	Ingeniería						9	9	7	2										9	9	1	2	7	3	1	9	9
Daniela	Ingeniería	2	3	2	3	1	1	9	1	2										9	9	2	2	7	3	2	9	8
Luis	Ingeniería																			9	9	1	2	7	3	1	9	8
Juan Carlos R	Ingeniería						9	9	2	3										9	9	2	2	7	3	2	9	8
Blanca Estela	Ingeniería										9	9	9	7	9	9	1	9	0	9	9	9	1	7	3	1	9	2

Los niveles de gris en las celdas reflejan niveles de exitos, de muy claro: ausencias de respuesta, o claro: fracasos, a oscuro o negro: exitos parciales o completos.
Los números son codigos (9: exito completo, 8 o 7: exitos parciales, 3 o 2: errores típicos, 1: otros errores, 0: ausencia de respuesta).

Bibliografía

BLOCH I., 2003, *Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?,* Educational Studies in Mathematics, 52, 3-28.

BRIEDENBACH D. E., DUBINSKY E., HAWKS J. & NICHOLS D., 1992, *Development of the process conception of function,* Educational Studies in Mathematics, 23, 247-285.

CUEVAS C. A. & PLUVINAGE F., 2003, *Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques*, Annales de didactique et de sciences cognitives, **8**, Strasbourg, IREM.

CUEVAS C. A. & MEJÍA H. R., 2003, *Cálculo visual*, México, Oxford University Press, Libro de texto incluyendo un disco compacto con el software CalcVisual.

DUBINSKY E. & HAREL G., 1992, The Nature of the Process Conception of Function., En G. Harel y E. Dubinsky (eds.), *The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy,* Mathematical Association of America, Notes Series, **25**, 85-106.

DUBINSKY E., SCHWINGENDORF K. & M., DAVID M., 1995, *Calculus, Concepts & Computers*, Segunda Edición, McGraw-Hill.

KLEINER I., 1989, *Evolution of the Function Concept: A brief survey,* The college Mathematics Journal, 20(4), 282-300.

MARKOVITS Z., EYLON B. S. & BRUCKHEIMER M., 1986, *Functions Today and Yesterday,* For the Learning of Mathematics, 6(2), 18-24.

MARKOVITS Z., EYLON B. S., & BRUCKHEIMER M., 1988, *Difficulties students have with the function concept,* In A. F. Coxford and A. P. Shulte (Eds.), The Ideas of Algebra. 1988 Yearbook,. 43-60, Reston, VA: NCTM.

MARTÍNEZ A. M., 1993, *Knowledge and Development of Functions in a Technology-Enhanced High School Precalculus Class: A Case Study,* PhD thesis, The Ohio State University, USA.

MORENO S. & CUEVAS C. A., 2004, *Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial,* Educación Matemática, **16-2.**

NORMAN A., 1992, *Teacher's Mathematical Knowledge on the Concept of Function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy,* Mathematical Association of America, Notes Series, **25**, 215-232.

RUIZ H., 1993, *Concepciones de los Alumnos de Secundaria Sobre la Noción de Función: Análisis Epistemológico y Didáctico,* Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada, España.

RÜTING D., 1984, *Some definitions of the Concept of Function from J. Bernoulli to N. Bourbaki,* The Mathematical Intelligencer, 6 (4).

SCHWARZ B. & DREYFUS T., 1995, *New actions upon old objects: A new ontological perspective on function,* Educational Studies in Mathematics, 29, 259-291.

SELDEN A., & SELDEN J., 1992, *Research perspectives on conceptions of function summary and overview. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, Mathematical Association of America, Notes Series, Vol. 25, 1-21.

SIERPINSKA A, 1992, *On understanding the notion of function. The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy,* Mathematical Association of America, Notes Series, Vol. 25, 23-58.

SFARD A., 1989, *Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited*, Proceedings of the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, 151-158, Paris, France.

SLAVIT D., 1997, *An alternate route to the reification of function*, Educational Studies in Mathematics, 33, 259-281.

USISKIN Z., & SENK S. L., 1992, *The University of Chicago School Mathematics Project Material,* Glenview, IL: Scott, Foresman.

VILENKIN N. Ya., 1968, *Stories about sets,* Academic Press.

YOUSCHKEVITCH A. P., 1976, The *Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*, Arch. Hist. Ex. Sci, 16, 37-85.

C. ARMANDO CUEVAS VALLEJO
DME, CINVESTAV-IPN, México
ccuevas@mail.cinvestav.mx

SALVADOR MORENO GUZMAN
CCH, UNAM, México

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM de Strasbourg, France
pluvin@math.u-strasbg.fr