Du pendule au vélo, la méthode d'Euler dans le cadre des TPE

Jean-Pierre Darou

Résumé. Je montre comment utiliser la méthode d'Euler et un tableur pour résoudre des équations différentielles décrivant le pendule ou l'amortissement de la fourche d'un VTT.

1. Intérêt de la méthode d'Euler et présentation de deux exemples d'utilisation

Dans le domaine des sciences appliquées, en mécanique, en physique, en chimie, en biologie, etc., on sait que la modélisation se traduit souvent par la résolution d'une équation différentielle. L'élève qui prépare un TPE sera donc assez fréquemment conduit à une telle résolution, ce qui lui donnera l'occasion de présenter une activité mathématique de réel intérêt.

Au lycée, les élèves ne sont en mesure de résoudre de manière exacte que quelques cas très simples ; on sait que les situations effectivement rencontrées, même en les simplifiant, sont beaucoup plus complexes et se ramènent rarement aux seules équations linéaires, du premier ordre, à coefficients constants, accessibles en terminale S.

Toutefois, dès le début de l'année scolaire, les élèves ont eu l'occasion de découvrir la méthode d'Euler, ils ont ainsi eu également la possibilité de travailler avec un tableur, ils disposent donc de tous les outils nécessaires pour résoudre de manière approchée des équations différentielles plus compliquées que l'équation $y' = ky$ qui figure au programme. On verra qu'il n'est pas très difficile d'expliquer comment la méthode d'Euler s'applique à des équations différentielles du second ordre.

Évidemment, et c'est là le point faible de ces méthodes qu'il est honnête, je pense, de leur signaler, ils ne sont pas en mesure d'apprécier les erreurs commises et la fiabilité (convergence, stabilité) de la méthode. Au mieux pourra-t-on leur montrer, sur des exemples où la solution est connue, les écarts entre la solution exacte et la solution approchée obtenue.

Lors de la première année d'existence des TPE, mes élèves s'étaient intéressés au mouvement du pendule. C'étaient de bons élèves qui avaient été primés au rallye mathématique, ce qui leur avait valu d'être invités à l'Hôtel du Département où se tenait une exposition mathématique. Ils y avaient découvert le pendule de Kepler, ils avaient d'abord voulu l'étudier, mais ils s'étaient vite aperçus de la complexité du travail et avaient fini par se contenter plus modestement de la classique étude du pendule simple. Je leur avais alors suggéré d'utiliser la méthode d'Euler pour résoudre l'équation différentielle qu'ils avaient obtenue. Je leur avais ensuite proposé de prendre en compte un amortissement proportionnel à la vitesse et d'essayer, en salle de physique, de déterminer expérimentalement la valeur de la constante de proportionnalité.

Je n'ai malheureusement pas retrouvé leurs travaux ; je me souviens qu'ils n'avaient pas eu le temps de terminer la dernière partie, mais que tout le reste avait été traité de manière très satisfaisante.

Je donne en deuxième partie l'essentiel de leur travail que j'espère avoir fidèlement reconstitué et, à la fin, complété.

J'ai récemment participé à l'animation de la journée de formation proposée par le groupe TPE de l'IREM auquel j'appartiens. C'est à cette occasion que j'ai découvert le TPE intitulé

« les mathématiques du vélo » que présente Marie-Odile Sauvanaud (dans ce numéro, page 35).

La modélisation de l'étude de la suspension avant conduit à une équation différentielle que ses élèves avaient résolue en utilisant d'une part le logiciel DERIVE, d'autre part le logiciel spécialisé MECA 3D. Dans les deux cas, cette résolution se réduit à l'entrée des données et la sortie des résultats sans que les élèves puissent comprendre comment ils ont été obtenus. Je me suis alors amusé à jouer le rôle de l'élève et à utiliser la méthode d'Euler pour résoudre cette équation. Les collègues qui assistaient à cette journée de formation ont pu constater toute la souplesse de l'utilisation d'un tableur qui permet de modifier très facilement les différents paramètres et de tenir ainsi virtuellement le rôle d'un ingénieur dans son bureau d'étude.

Je présente ce travail en troisième partie.

2. Le pendule simple

Le pendule simple est formé d'une masse ponctuelle m suspendue par un fil de longueur ℓ et de masse négligeable. Lorsque le pendule fait un angle a avec la verticale, le vecteur poids se décompose en deux forces, l'une opposée à la tension du fil et l'autre, notée F, normale au fil, qui ramène le pendule vers sa position de repos. En négligeant les forces de frottement, on déduit que

$$F = mg \sin a = -m\ell a'',$$

où $-\ell a''$ est l'accélération angulaire du pendule, la valeur de a est donc à tout moment solution de l'équation différentielle

$$a'' = -(g/\ell)\sin a.$$

On obtient ensuite l'écart $e = \ell a$ du pendule avec la verticale, qu'il est plus intéressant de visualiser sur le graphique. Les conditions initiales sont la valeur de l'angle a et celle de a' qu'on peut choisir égale à 0, ce qui est le cas lorsqu'on écarte le pendule avant de le laisser osciller sans donner d'impulsion.

Pour pouvoir se ramener à une équation que l'on sait résoudre (mais qui n'est plus actuellement au programme de terminale), on confond souvent $\sin a$ et a, ce qui est licite pour des angles suffisamment petits. Cette approximation n'est pas utile avec la méthode d'Euler, on pourra donc envisager des angles quelconques. On placera dans des cellules du tableur la valeur[(1)] h (par exemple $h = 0,01$) du pas choisi, la valeur ℓ (par exemple $\ell = 2$ m) de la longueur du pendule, la valeur de g (par exemple $g = 9,81N$) et la valeur initiale de a en radians (on peut par commodité la donner d'abord en degrés, puis faire la conversion). Il est enfin commode de nommer k une cellule contenant la valeur g/ℓ. Je donne à ces cellules les noms g, h, k, ℓ et a.

On utilise cinq colonnes B à F contenant les valeurs de t (temps écoulé), a'', a', a et e. En première ligne (par exemple dans les cellules B3 à F3) on porte les valeurs initiales. En deuxième ligne (cellules B4 à F4) on applique la méthode d'Euler : la nouvelle valeur de a' est

$$a'_{n+1} = a'_n + a''_n h,$$

la nouvelle valeur de a est

$$a_{n+1} = a_n + a'_n h,$$

enfin la nouvelle valeur de a'' est $a'' = -ka$ d'après l'équation différentielle.

(1) Toutes les grandeurs sont exprimées dans le système SI, les masses en kg, les longueurs en m et les temps en secondes.

B3 à F3	0	$= -k * \sin(\text{E3})$	0	$= a$	$= \ell * \sin(\text{E3})$
B4 à F4	$= \text{B3} + h$	$= -k * \sin(\text{E4})$	$= \text{D3} + \text{C3} * h$	$\text{E3} + \text{D3} * h$	$= \ell * \sin(\text{E4})$

Les lignes suivantes s'obtiennent immédiatement en sélectionnant les cinq cellules B4 à F4 et en tirant vers le bas avec la souris (jusqu'à la ligne 1003 pour une étude sur 10 secondes).

Le graphique 1 qui suit donne le résultat obtenu avec un angle a initial de 10°. On est alors dans le cas dit des petits angles et on devrait obtenir une sinusoïde. On constate que c'est à peu près le cas mais que l'amplitude qui, en l'absence de frottements, devrait rester constante, est amplifiée ; en revanche la période est stable, un examen de la table des valeurs conduit aux valeurs successives de 0,75 ; 3,59 ; 6,43 et 9,28 secondes (écart égal à 0) donc à une période de 2,84 secondes alors que $2\pi\sqrt{\ell/g} \sim 2,837$. La précision sur la période est excellente !

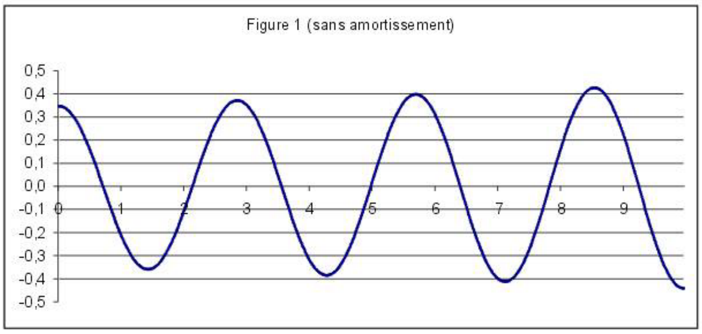


Figure 1 (sans amortissement)

Un complément intéressant consiste à prendre en compte un amortissement de l'amplitude des oscillations proportionnel à la vitesse angulaire. Il est alors facile de voir que l'équation différentielle devient dans ce cas

$$a'' = -ma' - (g/\ell)a,$$

où m est le coefficient d'amortissement. Ce coefficient est inconnu mais pourrait être déterminé expérimentalement (il faut noter qu'un « résidu » de ce coefficient sert à compenser l'augmentation de l'amplitude due aux erreurs résultant de la méthode). Comme je l'ai signalé, ce travail n'avait pas été fait par les élèves qui manquaient de temps.

Pour ce qui est du tableur, la seule modification à apporter concerne la cellule C4 (nouveau calcul de a) qui devient $= -k * \sin(\text{E4}) - m * \text{D4}$. La figure 2 donne les résultats constatés avec un angle initial de 10° et un coefficient m égal à 0,2. On constatera toutefois qu'en introduisant un coefficient de 0,05, on rétablit une amplitude sensiblement constante, ce dont il faudrait tenir compte pour une vérification expérimentale de la valeur de m.

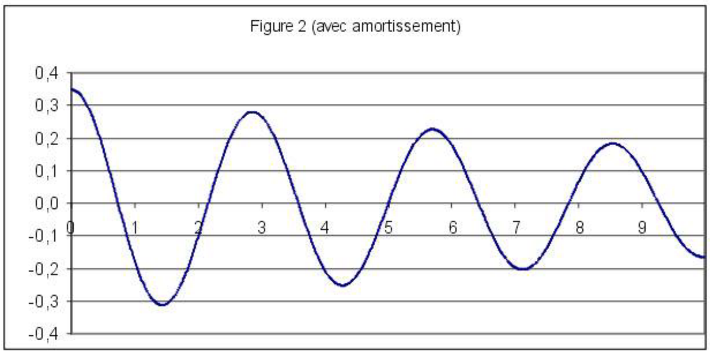
On pourra enfin observer le comportement du pendule dans le cas où l'angle initial est important (par exemple 90°).

3. Mathématiques du vélo, étude de la suspension de la fourche

L'étude théorique a été présentée dans le TPE réalisé par les élèves de Marie-Odile Sauvanaud, je la reprends cependant rapidement en précisant les notations que j'ai utilisées.

On note y_0 la hauteur de la fourche rigide, y_2 la hauteur de la route (par rapport à la valeur initiale) et y la hauteur de la fourche sous l'effet de l'amortissement. Les forces qui s'exercent sur la fourche sont :

– le poids mg dirigé vers le bas ;



– la force du ressort, dirigée vers le haut, égale à $a(y_2 + y_0 - y)$, (la constante a est la raideur du ressort) ;
– la force due à l'amortissement, dirigée vers le bas pour $y' - y_2' > 0$, égale à $-b(y' - y_2')$, la constante b est le coefficient d'amortissement de la fourche.

Le principe fondamental de la dynamique conduit à l'équation différentielle

$$a(y_2 + y_0 - y) - b(y' - y_2') - mg = my''.$$

En prenant $y_0 = 1$, on en déduit que

$$y'' = -\frac{b}{m}y' - \frac{a}{m}y + \frac{a}{m}y_2 + \frac{b}{m}y_2' + \frac{a}{m} - g.$$

Pour bien mettre en évidence l'effet de l'amortissement, on superpose deux graphiques : celui qui donne les variations de la hauteur y de la fourche et celui qui donne les variations de la fonction $c(t) = y_2 + y_0 - mg/a$ (on garde l'effet du poids qui comprime le ressort et baisse donc la hauteur $y_2 + y_0$ qu'aurait une fourche rigide, mais on ne prend pas en compte les effets de l'amortissement).

On portera les paramètres m (par exemple $m = 30\,\mathrm{kg}$), a (par exemple $a = 5000$), b (par exemple $b = 500$), le pas h en secondes (par exemple $h = 0,001$) dans des cellules de même nom. Il est également commode de porter dans des cellules les valeurs qu'on gardera fixes, $y_0 = 1$ et $g = 9,8\,\mathrm{N}$.

Je reprends d'abord le travail des élèves en modélisant l'irrégularité de la route par un dos d'âne d'équation $y_2(t) = 0,05(1 - \cos(20\pi t))$ avec t compris entre 0 et 0,1 seconde. Si le cycliste roule à 18 km/h, on vérifiera que ce dos d'âne s'étend sur 50 cm et a une hauteur maximale de 10 cm. Pour t supérieur à 0,1 seconde, la route redevient horizontale et $y_2(t) = 0$.

La feuille de calcul comporte huit colonnes avec dans l'ordre :
– la valeur de t (temps écoulé) en colonne E ;
– les valeurs de y'', de y', de y en colonnes F, G et H ;
– la valeur du second membre

$$f(t) = \frac{a}{m}y_2 + \frac{b}{m}y_2' + \frac{a}{m} - g$$

en colonne I ;
– les valeurs de $y_2(t)$, fonction dérivable modélisant la variation de la hauteur de la route et de $y_2'(t)$ en colonnes J et K ;
– la valeur de $c(t)$ en colonne L.

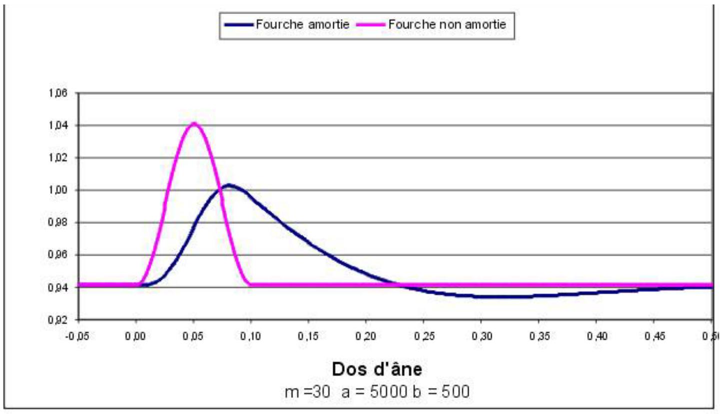
Voici, représentés en colonnes, les contenus de la ligne initiale (ligne 57) et de la ligne 58. Dans la ligne 58, la cellule E58 ainsi que les cellules G58 et H58, où l'on applique la méthode d'Euler, sont à réécrire. Les autres peuvent être obtenues en tirant les cellules correspondantes de la ligne 57.

Ligne 57		Ligne 58	
Cell.	Formule	Cell.	Formule
E57	0	E58	$= \mathrm{E57} + h$
F57	$= -b/m * \mathrm{G57} - a/m * \mathrm{H57} + \mathrm{I57}$	F58	$= -b/m * \mathrm{G58} - a/m * \mathrm{H58} + \mathrm{I58}$
G57	0	G58	$= \mathrm{G57} + h * \mathrm{F57}$
H57	$= 1 - m * g/a$	H58	$= \mathrm{H57} + h * \mathrm{G57}$
I57	$= b/m * \mathrm{K57} + a/m * \mathrm{J57} + a/m - g$	I58	$= b/m * \mathrm{K58} + a/m * \mathrm{J58} + a/m - g$
J57	$= 0,05 * (1 - \cos(20 * \pi * \mathrm{E57}))$	J58	$= 0,05 * (1 - \cos(20 * \pi * \mathrm{E58}))$
K57	$= \pi * \sin(20 * \pi * \mathrm{E57})$	K58	$= \pi * \sin(20 * \pi * \mathrm{E58})$
L57	$= 1 - m * g/a + \mathrm{J57}$	L58	$= 1 - m * g/a + \mathrm{J58}$

En sélectionnant l'ensemble et en tirant avec la souris on obtient immédiatement les lignes suivantes, cependant il faudra penser à modifier l'expression de $f(t)$, celle de $y_2(t)$ et celle de $y_2'(t)$ pour les valeurs de t supérieures à 0,1. On a alors $f(t) = a/m - g$, alors que $y_2(t) = y_2'(t) = 0$.

On peut enfin prévoir de représenter la situation pendant les quelques fractions de seconde précédant l'obstacle, il n'y aura à remplir alors que les colonnes E (valeurs négatives), H ($= 1 - mg/a$) et L ($= 1 - mg/a$).

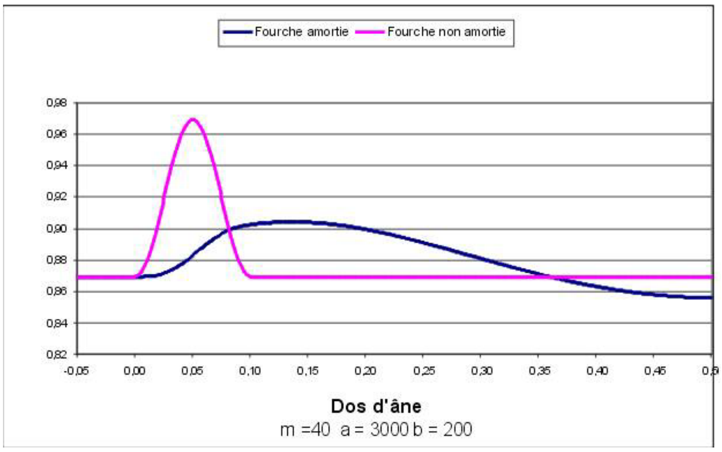
Voici quelques graphiques obtenus en faisant varier m (qui correspond au tiers environ de la masse totale du cycliste et du vélo), la raideur a du ressort et le coefficient b d'amortissement de la fourche :

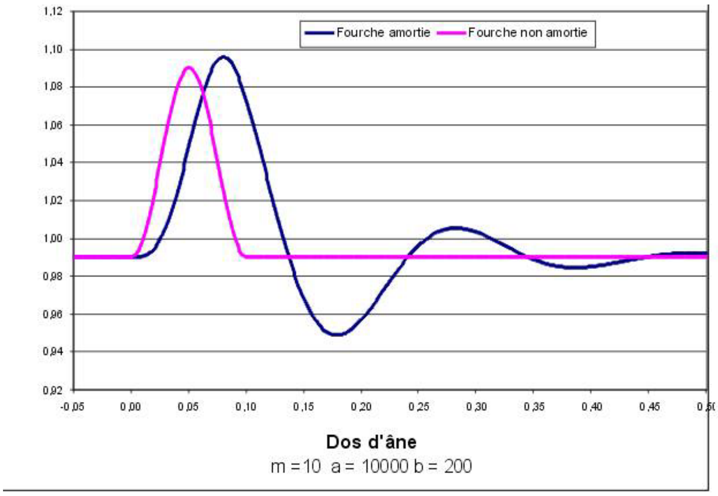


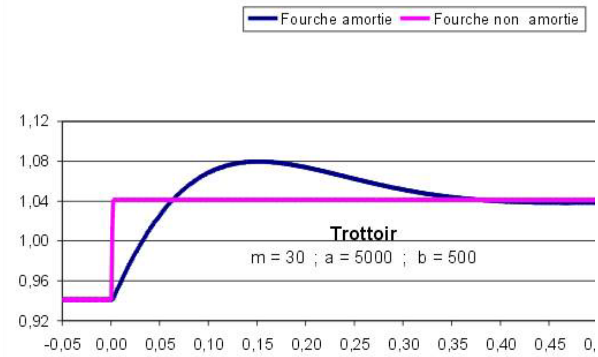
Le dernier graphique montre que les effets peuvent être néfastes lorsque les constantes sont mal choisies !

On peut très aisément modifier la fonction qui modélise l'obstacle, il faut cependant qu'elle soit dérivable. Essayons par exemple de simuler la rencontre brutale avec un trottoir de 10 cm de hauteur. La fonction $y_2(t) = 0,1\sin(250\pi t)$ convient bien. La hauteur de $0,1\,m$ est atteinte pour $t = 0,002$, ce qui correspond à une distance horizontale d'environ 1 cm seulement si le cycliste roule à 18 km/h. On peut reprendre la feuille précédente où il suffit de modifier y_2 et y_2', on pensera aussi à donner à ces deux fonctions les valeurs 0,1 et 0 lorsque t est supérieur à 0,002. Le graphique ci-dessous montre l'efficacité de l'amortissement.

Je dois reconnaître que l'exemple de la fourche est sensiblement plus compliqué que celui du pendule. Il aurait certainement fallu donner une aide importante aux élèves pour qu'ils puissent le traiter, mais j'espère qu'ils se seraient amusés comme je l'ai fait en étudiant







diverses situations et en observant les effets plus ou moins favorables. Cela leur permettrait aussi de se persuader eux-mêmes et de convaincre leur camarades de l'utilité si souvent mise en doute des mathématiques.

Documentation. Les fichiers excel réalisés sur le pendule et sur l'amortissement de la fourche sont accessibles sur le site de l'irem.

Jean-Pierre Darou
Lycée Jean Monnet
Strasbourg
Jean-Pierr.Darou@ac-strasbourg.fr