Les mathématiques de la relativité restreinte utilisables dans un TPE math-physique

Michèle Audin

Résumé. Je propose des mathématiques accessibles aux élèves de terminale qui interviennent dans la théorie de la relativité restreinte.

Ces notes

Elles ne constituent bien entendu pas un TPE. Elles s'adressent d'ailleurs plus aux enseignants qu'à leurs élèves. Elles visent à mettre en évidence le fait qu'il y a, dans la relativité restreinte, beaucoup de mathématiques à la fois sérieuses, intéressantes et accessibles à des élèves de terminale. C'est pourquoi, si l'on trouvera dans ce texte des remarques faisant référence à des notions trop compliquées pour les élèves (comme l'allusion aux formes quadratiques), le discours dans sa cohérence logique n'est composé que de démonstrations, calculs, étude de fonction, et autres techniques connues des élèves.

L'idée de donner des références sur ce sujet est assez naturelle puisque celui-ci est souvent choisi par les élèves (c'est après avoir assisté à des soutenances de TPE au lycée Jean Monnet de Strasbourg en 2004 que l'idée d'axer une partie du stage sur ce sujet nous est venue). La difficulté est alors d'aider les élèves à préciser la problématique. L'apport des professeurs de mathématiques pourrait être de mettre en évidence les questions de mathématiques lorsqu'elles apparaissent.

1. À quelles questions répond la relativité restreinte ?

Il s'agit de décrire les phénomènes physiques mettant en jeu des vitesses proches de celles de la lumière (l'électromagnétisme mais *pas* la mécanique — j'y reviens au § 5).

On sait que la relativité galiléenne ne s'applique pas, grâce à l'expérience de Michelson, qui a montré (en 1881, puis, avec encore plus de précision, avec Morley, en 1887) que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels. C'est en 1905 qu'Einstein publie les résultats de ses travaux sur ce sujet(1).

2. La relativité galiléenne et la relativité restreinte, les deux (seules) solutions d'un même problème

Le problème est le suivant. Comme l'énoncent les physiciens, *on postule qu'il existe une classe de repères (référentiels), dits référentiels inertiels, dans lesquels les lois de la physique s'écrivent de la même façon.*

On a deux repères $Oxyz$ et $O'x'y'z'$, chacun est muni d'une horloge, lui permettant de mesurer, l'un un temps t, l'autre le temps t'. Le repère $Oxyzt$ est immobile (ce qui veut dire que l'observatrice est liée à ce repère), le repère $O'x'y'z't'$ est mobile et il se meut avec une vitesse constante (c'est un vecteur constant). Voir la figure 1. On exprime (x', y', z', t') en fonction de (x, y, z, t) par des transformations que je vais supposer linéaires et je vais démontrer (c'est un article sur les *mathématiques de la relativité restreinte*) que, de deux choses l'une,

(1)La relativité générale, une autre théorie, date de 1915. Lorsqu'Einstein reçoit le prix Nobel, en 1921, c'est pour ses travaux sur les quanta de rayonnement, pas pour ces théories, encore mal connues.

– soit il n'existe aucune vitesse qui prenne la même valeur dans les deux repères, et on est dans le cadre galiléen,
– soit il existe une (et d'ailleurs une seule) vitesse à laquelle les observatrices liées à tous les repères trouvent la même valeur, et on est dans le cadre de la relativité restreinte.

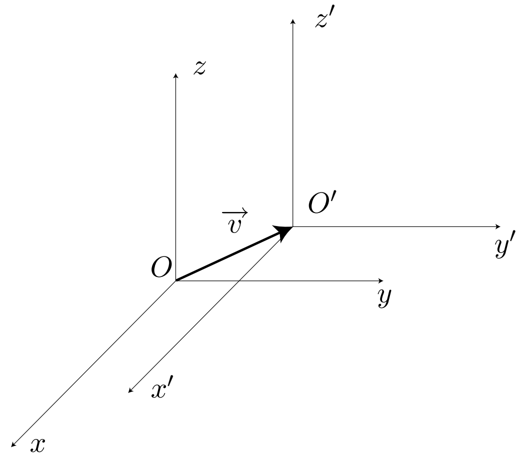

FIGURE 1

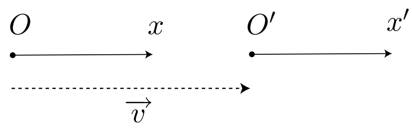

FIGURE 2

Pour simplifier les notations, je vais supposer que la translation est dans la direction (commune) des axes Ox et Ox' (figure 2). Ainsi, $y' = y$, $z' = z$, on est ramené à une question bidimensionnelle et

$$\begin{cases} x' = Ax + Bt \\ t' = Cx + Dt. \end{cases}$$

Sans changer la translation considérée, on renverse maintenant le sens des axes, $X = -x$, $X' = -x'$, donc

$$\begin{cases} X' = AX - Bt \\ t' = -CX + Dt. \end{cases}$$

Mais, comme la translation n'a pas changé (l'observatrice située sur $O'X'$ voit OX translaté de la même façon), le repère OX est le repère $O'X'$ translaté, donc (c'est un effet du « principe » postulé ci-dessus)

$$\begin{cases} X = AX' + Bt' \\ t = CX' + Dt', \end{cases}$$

de sorte que (résolution du système linéaire)

$$t' = \frac{At - CX}{AD - BC}, \text{ mais c'est aussi } -CX + Dt,$$

donc

$$\begin{cases} -\dfrac{C}{AD-BC} = -C \\ \dfrac{A}{AD-BC} = D \end{cases} \quad \text{et donc } AD - BC = 1, \quad A = D, \text{ et aussi } C = \frac{A^2-1}{B}.$$

L'abscisse de O' est $x' = 0$, de sorte que son abscisse x dans le référentiel Ox vérifie $0 = Ax + Bt$, ainsi

$$x = -\frac{Bt}{A},$$

et donc
$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -\frac{B}{A} = v, \text{ c'est la vitesse du point } O', \text{ donc } B = -Av.$$
On obtient finalement
$$\begin{cases} x' = A(x - vt) \\ t' = \dfrac{1 - A^2}{A}\dfrac{x}{v} + At. \end{cases}$$

Reposons maintenant notre question (motivée, je le rappelle, par le résultat de l'expérience de Michelson) : existe-t-il une vitesse qui ait la même valeur dans les deux repères ? Appelons c une hypothétique telle vitesse(2). On aurait
$$c = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{A\left(\dfrac{dx}{dt} - v\right)}{\dfrac{1 - A^2}{Av}\dfrac{dx}{dt} + A} = \frac{A(c - v)}{\dfrac{1 - A^2}{Av}c + A}$$
soit
$$(A^2 - 1)c^2 = A^2v^2 \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$
On peut bien sûr supposer que A et v sont positifs, de sorte que la dichotomie annoncée a bien lieu :

– soit $A = 1$ et il n'existe pas de solution, le passage d'un repère à l'autre est de la forme
$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t, \end{cases} \qquad \text{les transformations de Galilée,}$$
dans lesquelles le temps est « absolu » (et, entre nous, nous appellerons le groupe de ces transformations le « groupe de Galilée »),
– soit $A > 1$ et il existe une solution unique,
$$c = \frac{Av}{\sqrt{A^2 - 1}}.$$
Exprimées à l'aide de c, les transformations sont de la forme
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \end{cases}$$
le temps est « relatif », ce sont les transformations de la relativité restreinte, ce que, entre nous, nous appellerons le « groupe de Lorentz(3) ». Notons qu'alors la vitesse de translation v de n'importe quel référentiel est strictement inférieure à c.

On ne considère pas le cas où il y aurait une vitesse imaginaire invariante.

(2) L'usage de la lettre c pour la vitesse de la lumière vient du mot « célérité ».

(3) C'est Lorentz qui a mis en évidence dès 1892, ces transformations, qui laissent invariantes les équations de Maxwell et qui portent son nom. Mais c'est Einstein qui, en 1905, a formulé le principe de la relativité, qui postule l'invariance de toutes les lois de la physique.

3. Conséquences des formules de Lorentz

3.1. Le coefficient A. Le coefficient A obtenu ci-dessus est une fonction « simple » de la vitesse v,

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

que les élèves de terminale sont capables d'« étudier », comme on dit, c'est-à-dire d'en comprendre assez pour dessiner son graphe. Par exemple en remarquant que c'est une fonction paire, en en calculant la dérivée et les limites aux bornes, on obtient le graphe représenté sur la figure 3. L'essentiel est que la vitesse v doit être inférieure à celle, c, de la lumière (la fonction n'est définie que pour $v < c$), que A est toujours plus grand que 1 (et ne prend la valeur 1 qu'en 0) et, bien sûr, que A tend vers l'infini quand v tend vers c.

Sur la figure, j'ai insisté sur le fait que, près de 0, la fonction est très proche de la fonction constante égale à 1 : aux vitesses ordinaires, petites par rapport à la vitesse de la lumière, les transformations de Lorentz sont presque les transformations de Galilée.

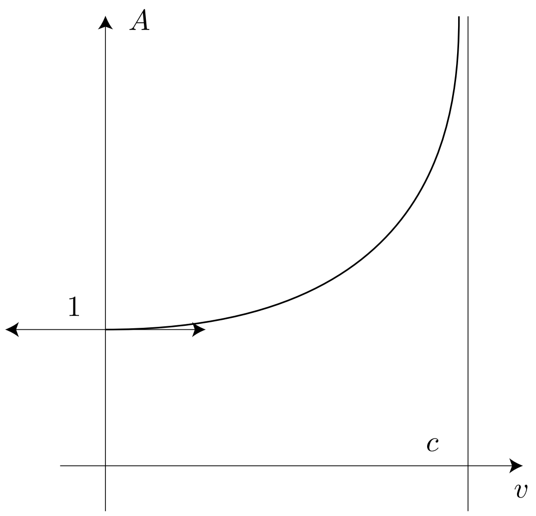

Figure 3. Le coefficient A

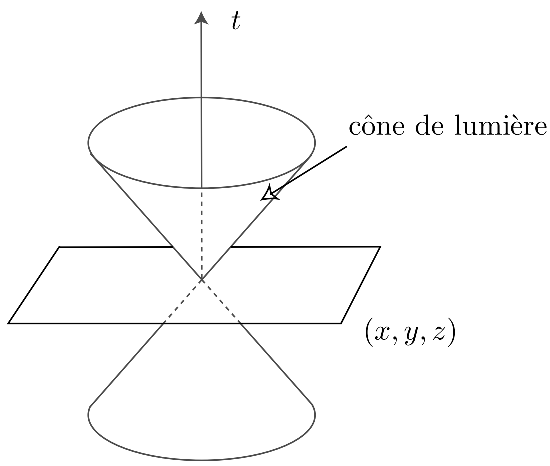

Figure 4. Le cône de lumière

3.2. Une parenthèse, le groupe de Lorentz. Les transformations de Lorentz forment un groupe. On vérifie sans mal que

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2.$$

En fait, si on écrit les formules plus générales en dimension 3 (ou même 4), les transformations de Lorentz préservent la « forme quadratique »

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Le groupe de Lorentz est, en fait, le groupe des « isométries » de cette forme quadratique (que l'on appelle $\mathrm{O}(3,1)$ parce que la signature de la forme quadratique est $(3,1)$, trois signes $+$ et un signe $-$).

3.3. Le cône de lumière. Même sans savoir ce qu'est un groupe de transformation, une forme quadratique ou une signature, on est capable de dessiner le « cône » d'équation $x^2 - c^2t^2 = 0$ et même, pour que cela ressemble plus à ce que les élèves de terminale appellent un « cône », celui d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$, un dessin dans $\mathbf{R}^4$ dans lequel on voit (comme dans celui de la figure 4, plutôt représenté dans $\mathbf{R}^3$ — pas plus qu'une élève de terminale, je ne sais dessiner dans $\mathbf{R}^4$) que l'espace est partagé en trois parties :

- les points tels que $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 < 0$, ce sont les points de l'espace-temps que peut atteindre une particule partie de 0 au temps 0 (la particule a une vitesse $v < c$),
- ceux tels que $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$, ce sont les points que peut atteindre un photon qui part du point 0 au temps 0 (le photon va, par définition, à la vitesse c),
- et enfin, ceux tels que $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 > 0$, des points que l'on n'atteint jamais si l'on part du point 0 au temps 0 (il faudrait aller plus vite que la lumière).

3.4. L'« addition » des vitesses. Supposons maintenant qu'une observatrice liée au repère $Oxyz$ regarde passer le repère $O'x'y'z'$ à la vitesse v, auquel est liée une autre observatrice, qui de même regarde passer le repère $O''x''y''z''$ à la vitesse v'. La première voit passer le troisième repère à une vitesse v''. Que vaut v'' en fonction de v et v' ?

Dans la mécanique galiléenne, la réponse est très simple, on a $v'' = v + v'$. Un exemple habituel de cette situation est celui où l'observatrice « à l'arrêt » regarde passer un tapis roulant sur lequel marchent des gens.

Étudions cette situation à l'aide des transformations de Lorentz. On utilise les notations ci-dessus pour passer de Ox à $O'x'$ (lettres A, B, etc.), les notations analogues (A', B', etc.) pour passer de $O'x'$ à $O''x''$ et, sans surprise, les notations A'', B'', pour passer directement de Ox à $O''x''$. Ainsi,

$$v = -\frac{B}{A}, \quad v' = -\frac{B'}{A'} \quad \text{et } v'' = -\frac{B''}{A''}.$$

Avec $x' = Ax + Bt$, $x'' = A'x' + B't'$ et $t' = Cx + Dt$, on a

$$x'' = (AA' + B'C)x + (BA' + B'D)t.$$

Mais

$$D = A \text{ et } C = \frac{A^2 - 1}{B}$$

comme on l'a vu, de sorte que

$$v'' = -\frac{B''}{A''} = -\frac{AB' + BA'}{AA' + B'\dfrac{A^2-1}{B}} = \frac{-\dfrac{AB' + BA'}{AA'}}{1 + \dfrac{B'(A^2-1)}{AA'B}}.$$

Le numérateur est tout simplement $v + v'$. En utilisant la relation $(A^2 - 1)c^2 = A^2v^2$, on obtient la formule d'addition recherchée :

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \dfrac{vv'}{c^2}}.$$

Bien sûr, si v et v' sont très petites par rapport à c, comme dans le cas des piétons sur le tapis roulant, le dénominateur est pratiquement égal à 1 et on retrouve la formule galiléenne.

Une vérification plus intéressante serait le cas où les observatrices liées aux repères $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ regardent passer un photon. C'est le cas où $v' = c$, qui nous donne

$$v'' = \frac{v + c}{1 + \dfrac{v}{c}} = c,$$

nos deux observatrices vont bien mesurer la *même* vitesse de la lumière, comme nous l'avons souhaité.

Deux remarques pour les professeurs. D'abord la formule donnant v'' « rappelle » quelque chose, oui, la formule d'addition des tangentes, sauf le signe + au dénominateur... il s'agit de la formule d'addition des tangentes hyperboliques (poser $\tanh \alpha = v/c$, etc.). Ensuite (et c'est essentiellement la même remarque), si l'on voulait définir une « addition », disons $\star$, par la formule

$$v \star v' = \frac{v + v'}{1 + \dfrac{vv'}{c^2}},$$

on définirait une structure de groupe sur $]-c, c[$... il faut bien sûr exclure $\pm c$, on ne peut pas avoir $v \star c = c$ pour tout v dans un groupe. La vitesse de la lumière c joue le rôle d'infini.

3.5. Les paradoxes. Notre observatrice regarde passer une règle graduée (ou une cycliste, comme sur la figure 5). Dans son repère propre, la règle mesure une longueur ℓ_0. Disons qu'elle est disposée le long de l'axe des x', donc ℓ_0 est la différence $x'_1 - x'_0$ des extrémités. En appliquant nos formules,

$$\ell_0 = x'_1 - x'_0 = \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

... de sorte que la longueur mesurée par l'observatrice est

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \ell_0.$$

Un phénomène habituellement appelé la contraction des longueurs.

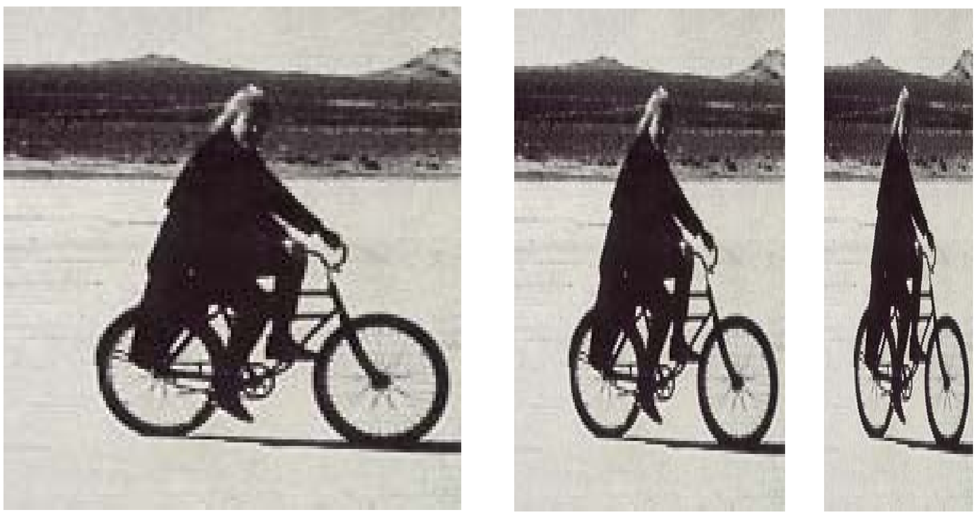

Figure 5. Contraction des longueurs

On a de même une dilatation des durées. L'observatrice au repos pendant un temps $t_2 - t_1$ compare cette durée à celle mesurée dans le repère en mouvement ainsi

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > t'_2 - t'_1.$$

Ce que l'on appelle en général le « paradoxe des jumeaux », la jumelle restée au repos ayant vieilli davantage que celle ayant fait un voyage. Et qui n'a bien entendu rien de paradoxal, la vitesse v à laquelle même les jumelles les plus rapides voyagent étant absolument négligeable par rapport à la vitesse de la lumière.

4. $E = mc^2$, mon amour...

Par un raisonnement analogue, la conservation de l'énergie cinétique mène à la formule

$$E_c = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

pour une particule de masse m_0 et de vitesse v, ce qui est assez raisonnable puisque

$$\lim_{v \to c} E_c = +\infty \text{ et } E_c \sim_{v \to 0} \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

On décide d'appeler « masse en mouvement » la quantité

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

qui, remarquons-le, tend vers l'infini quand v tend vers c. L'énergie cinétique s'écrit alors

$$E_c = (m - m_0)c^2.$$

Quant à l'énergie totale, somme de l'énergie au repos ($m_0 c^2$, donc) et de l'énergie cinétique, elle vaut

$$E = mc^2.$$

5. L'affaire Mercure

On mentionne souvent, à propos de la « relativité », la précession du périhélie de Mercure. De quoi s'agit-il exactement ?

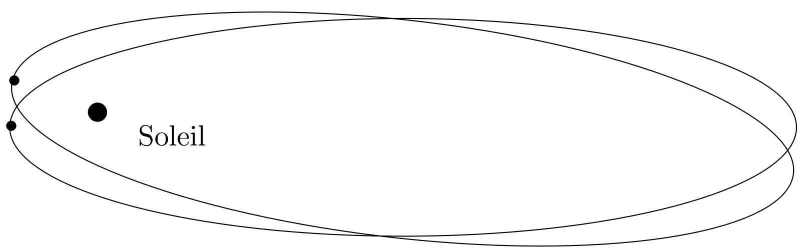

Figure 6

Mercure est une planète difficile à observer depuis la Terre, une raison pour laquelle elle a été beaucoup regardée. Elle a une orbite en première approximation elliptique, une ellipse très excentrique (l'excentricité est de l'ordre de $0,2$, pour fixer les idées, l'excentricité de l'orbite de la Terre, qui est presque circulaire, est $0,017$). Le périhélie est le point de l'orbite qui est le plus proche du foyer occupé par le Soleil. Le fait que l'orbite soit elliptique est une conséquence des lois de Kepler qui s'appliquent à un problème « à deux corps », dans lequel on tiendrait seulement compte du Soleil et de Mercure. Or, il y a d'autres corps célestes qui interviennent et c'est pourquoi c'est une approximation, on a à peu près une ellipse et en particulier le périhélie est variable, on peut en effet observer une « précession » dudit périhélie. Et la mesurer : au bout d'un siècle, ce périhélie a bougé de $572''$ d'arc. En utilisant la loi de la gravitation de Newton, l'aplatissement du soleil et les corps célestes proches, on explique sans mal toutes ces secondes... à l'exception de 43 d'entre elles.

La relativité générale rend assez parfaitement compte de ces $43''$. Ce qui appelle (au moins) deux remarques :
- La vitesse de Mercure sur son orbite est de 48 kilomètres par seconde, beaucoup plus que la vitesse d'une sœur jumelle en voyage, mais encore assez négligeable par rapport à la vitesse de la lumière (que je n'ai pas encore rappelée, il serait temps, c'est environ 300 000 kilomètres par seconde, soit 6250 fois plus).
- Malgré leurs noms, la relativité restreinte et la relativité générale sont deux théories distinctes et j'oserai même dire disjointes. La relativité restreinte, j'ai expliqué son champ d'action plus haut, c'est essentiellement le domaine des particules élémentaires. La relativité générale, c'est une théorie de la gravitation. La première n'a *aucune* application à la mécanique céleste. La deuxième relèverait, du point de vue des mathématiques, du domaine de la géométrie riemannienne (ce qui la met très au-dessus des possibilités d'apprentissage des élèves de lycée, aussi douées soient-elles).

L'intérêt principal de l'évocation de Mercure[(4)] dans ce texte serait alors d'insister sur la nécessité, pour qu'un TPE soit « bon », que la problématique en soit bien cernée et, en particulier dans le cas d'un TPE math-physique, que le champ d'application de la théorie physique étudiée en soit précisé.

6. La bibliographie

Pour préparer ce texte, j'ai utilisé presque exclusivement l'*Encyclopædia Universalis*[(5)] sous les deux formes, CD-ROM et version papier. Autant dire que les données sont accessibles à tous (cette encyclopédie est présente dans la plupart des CDI et des bibliothèques municipales), au moins sous forme papier. Pour ceux ou celles qui ne disposeraient pas du CD-ROM[(6)], je précise que les choses les plus intéressantes viennent des articles :
- Relativité, par Thibault Damour et Stanley Deser, qui expliquent très clairement ce qu'est le principe de relativité (commun à Galilée et à Einstein) et qui mentionnent le fait que, ce principe étant posé, il n'y a que deux solutions possibles. Ils abordent aussi les questions gravitationnelles.
- Relativité restreinte, par Michel Paty, qui est assez clair sur le champ d'application de la théorie.
- On peut bien sûr consulter les articles sur Galilée, Einstein, Michelson, Lorentz...

[(4)] J'en ai parlé parce que c'est joli, ce qui est sans doute aussi pourquoi je l'ai vu cité à contre-emploi au cours de la soutenance d'un authentique TPE.

[(5)] C'est généralement une excellente référence, plus précise, plus complète et surtout plus sûre que ce que l'on trouve, au hasard du ouèbe, où il y a aussi, bien sûr, des choses intéressantes, mais assez difficiles à distinguer, en tout cas pour des adolescentes, d'un fatras vide et mal cerné un peu omniprésent.

[(6)] Il n'y a rien dans le CD-ROM qui ne soit pas dans la version papier, mais il est vrai qu'il est plus facile de chercher une notion par le moteur de recherche, quitte ensuite à aller lire l'article dans le livre.

– Mercure, par Pierre Thomas, article dans lequel j'ai trouvé les données numériques (excentricité, vitesse) que j'ai mentionnées sur cette planète.

La démonstration du fait qu'il n'y a que deux solutions possibles, je l'ai copiée dans un « vieux » livre de physique, celui que j'ai utilisé moi-même lorsque j'étais étudiante, écrit par Hubert Gié, et qui n'est probablement plus disponible. Cette démonstration doit bien exister dans des livres plus récents mais je n'ai pas eu le temps de chercher.

Pour les élèves, on peut aussi leur suggérer de lire

– la BD *Tout est relatif*, dans la série des aventures d'Anselme Lanturlu, de Jean-Pierre Petit (publiée par Belin) ;
– il y a aussi un *Que Sais-je* sur la relativité et un numéro hors-série de *Science et vie junior* sur le même sujet ;
– il faut aussi leur conseiller, à eux et à ceux de leurs enseignants qui ne les ont pas lues, les aventures de l'ineffable Mr Tompkins, le héros de livres de vulgarisation écrits il y a plus de cinquante ans par le physicien George Gamow, et qui sont toujours aussi passionnants que lorsque j'étais moi-même lycéenne, il y a plus de trente ans... Les illustrations de l'auteur et de John Hookham, qui éclairent le livre, ont inspiré la figure 5 de cet article — et par suite la couverture de ce volume.

C'est Nadine Meyer qui a trouvé toutes ces références (sauf peut-être le Gamow), effectivement disponibles, à la médiathèque de Sélestat ; j'ai vérifié dans le catalogue « en ligne » de la bibliothèque municipale de Strasbourg que toutes y étaient aussi disponibles, on doit donc pouvoir les trouver un peu partout.

Michèle Audin
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
Strasbourg
maudin@math.u-strasbg.fr