

LE PROJET CASYOPÉE : UN ENVIRONNEMENT DE CALCUL FORMEL POUR L'ÉTUDE DE PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS AU LYCÉE

Résumé. Le travail rapporté dans cet article part d'une réflexion sur l'usage éducatif de logiciels de calcul formel. Cette réflexion nous¹ a conduit à la conception d'environnements d'apprentissage pour l'algèbre et l'analyse au lycée. Ces environnements sont conçus pour gérer des objets mathématiques, leurs propriétés et leurs différentes représentations. Ils permettent ainsi à l'élève des démarches associant exploration numérique, graphique et algébrique et preuve, et donnent au professeur les moyens de préparer l'activité de l'élève. Pour assurer ces fonctions, ils ont recours au noyau symbolique d'un logiciel de calcul formel existant. L'article présente notre réflexion, puis un exemple d'utilisation de Casyopée², le plus récent des environnements, et développe les choix de conception et les apports de ce travail.

1. Introduction

1.1. L'usage éducatif de logiciels de calcul formel : intérêt et difficultés

Voici comment nous voyons l'utilisation du calcul formel après une dizaine d'années d'expérimentation.

En premier lieu, le calcul formel nous apparaît comme un moyen moderne de faire des mathématiques en ce sens que l'automatisation des tâches, spécialement celles qui demandent de l'application et de la minutie est une tendance forte de la vie actuelle. Les manipulations algébriques font partie de ces tâches et nous pensons qu'à moyen terme, les élèves n'accepteront plus de consacrer autant de temps que dans le passé à l'entraînement que suppose une pratique experte. Le calcul formel offre aussi des potentialités pour l'apprentissage. Les nouvelles représentations des objets mathématiques et les nouvelles possibilités d'action qu'il apporte peuvent en effet contribuer aux conceptualisations, dans une articulation à trouver entre le travail sur ordinateur et la pratique papier/crayon³. Permettant notamment de traiter des objets plus généraux (par exemple des familles de fonctions, plutôt que des fonctions isolées), le calcul formel est un moyen de dépasser le caractère particulier des exemples qu'il est possible de traiter "à la main", de développer des techniques de portée plus vaste et d'accéder ainsi à la généralité. L'utilisation du calcul formel nous paraît donc une condition et un moyen pour que l'algèbre continue d'exister comme pratique scolaire.

Pourtant, le calcul formel tarde à prendre sa place dans les classes. Les expérimentations de cette technologie dans les classes ont contribué à une prise de conscience chez les chercheurs et les innovateurs : l'utilisation d'un logiciel mathématique met en jeu de façon liée des connaissances mathématiques spécifiques et une compréhension du fonctionnement du

¹ Deux équipes sont impliquées dans ce travail, l'une à Paris (INRP, Tecné) et l'autre à Rennes (IREM) dans le cadre du projet de recherche INRP 40122. Les idées, réalisations et observations de classe présentées dans cet article sont le produit de ce travail collectif. Dominique Lenne (Maître de Conférence à l'Université Technologique de Compiègne) pilote le projet dans son ensemble et dirige l'équipe de Paris. L'auteur dirige l'équipe de Rennes. Pour en savoir plus sur la composition et l'activité du groupe, consulter <http://www.inrp.fr/recherche/encours/rec40122.htm>.

² Casyopée est l'acronyme de Calcul Symbolique Offrant des Possibilités aux Elèves et à l'Enseignant.

³ Nous donnons ici seulement les éléments de réflexion directement utiles. Une discussion plus approfondie sur les apports conceptuels des manipulations algébriques avec et sans calcul formel peut être trouvée notamment dans Guin & Trouche (eds., 2002).

logiciel. Ces connaissances et cette compréhension ne sont en rien prédéterminées. L'utilisateur les construit dans un processus que l'on appelle genèse instrumentale (Trouche 2000). Bien que cette problématique "instrumentale" ne soit pas spécifique du calcul formel, je voudrais souligner que, lors des expérimentations, les genèses instrumentales du calcul formel nous ont paru poser des difficultés particulières chez les élèves. Une de nos hypothèses est que ces difficultés sont pour partie dues à la conception très ouverte des logiciels⁴ qui ne tient compte ni du domaine de tâche ni des connaissances de l'utilisateur. L'élève est confronté aux multiples fonctionnalités de la machine qui lui offrent de nouvelles capacités d'action, mais qu'il (elle) peut difficilement adapter à l'objectif qu'il (elle) vise. Il lui faut beaucoup de temps et des situations spécifiques pour "faire le tri" parmi ces fonctionnalités et les relier à ses connaissances mathématiques. Certes, il existe des exemples de genèses instrumentales réussies, mais elles se placent dans le contexte d'expérimentations impliquant un usage relativement intensif du calcul formel qu'il serait hasardeux de penser directement transposable aux classes "ordinaires".

La conception très ouverte des logiciels nous semble aussi à l'origine de difficultés rencontrées par les enseignants expérimentant l'usage du calcul formel dans leurs classes. Organiser de véritables situations d'apprentissage suppose que l'enseignant anticipe les comportements des élèves et le fonctionnement du logiciel. Les enseignants que nous avons observés nous ont paru n'être pas en mesure de le faire, du fait de la multiplicité des comportements et fonctionnements possibles, notamment dans le pilotage des calculs. Nous avons en effet observé des séances très ouvertes à l'évolution imprévisible et des travaux très guidés ne laissant pas d'initiative aux élèves, mais peu de véritables situations où l'élève puisse développer librement des stratégies identifiables, a priori par l'enseignant⁵.

Ces difficultés d'intégration de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques ne sont pas particulières au calcul formel, mais certains indices montrent qu'elles sont plus résistantes dans le cas de cette technologie. Les logiciels de géométrie dynamique ou de calcul approché (tableurs-grapheurs, calculatrices graphiques) sont très fortement encouragés par les instructions officielles et commencent à être utilisés dans les classes, ce qui n'est pas le cas du calcul formel. Cette tendance s'accompagne d'une importance plus grande donnée aux pratiques de résolution approchées et à la visualisation graphique au détriment des méthodes algébriques.

1.2. Notre projet

L'intégration du calcul formel dans les classes nous paraît nécessaire, notamment pour que l'introduction de l'ordinateur dans les classes ne se traduise pas par un recul des pratiques algébriques et par l'utilisation exclusive du calcul approché et de la visualisation graphique, mais elle nous paraît aussi difficile avec les logiciels existants. Ces logiciels sont constitués d'un moteur de calcul formel (ou noyau symbolique) et d'une interface. Les fonctionnalités du

⁴ Les logiciels expérimentés ont été DERIVE (Soft Warehouse) et le module principal de la calculatrice TI-92 (Texas-Instruments). Ils sont considérés comme les plus facilement utilisables dans les classes de lycée. Les réflexions sur la conception des logiciels de calcul formel, issues de notre expérience avec ces logiciels s'appliqueraient a fortiori à d'autres logiciels conçus plutôt pour un usage universitaire.

⁵ Monaghan (2000, p.159) note que le caractère ouvert des logiciels de calcul formel (notamment le fait qu'ils sont indépendants du domaine de tâche et des connaissances de l'utilisateur) séduit une minorité d'enseignants curieux et provoque chez eux un intérêt nouveau pour les mathématiques. Il donne l'exemple de la résolution de l'équation $\sin(x)=2$ avec DERIVE, qui conduit à un résultat paradoxal dans le cadre des connaissances des enseignants de mathématiques. Il montre aussi que la majorité des enseignants est loin d'être prête à exploiter cette ouverture et que les tâches avec calcul formel généralement proposées en classe contraignent fortement l'activité de l'élève.

noyau reprennent les différentes techniques algébriques (factorisation, développement, résolution d'équations,...) et calculs utiles en analyse (limites, dérivation, intégration,...) L'interface vise simplement à mettre à disposition de façon "conviviale" les fonctionnalités du noyau et s'adresse à un utilisateur supposé avoir les connaissances mathématiques nécessaires. L'implémentation des techniques sous forme d'algorithmes varie notablement d'un logiciel à l'autre. En revanche l'interface diffère peu.

Notre projet est d'incorporer un noyau de calcul formel dans un environnement basé sur un schéma d'interaction impliquant l'élève et le professeur plutôt qu'un utilisateur non spécifié. Un schéma général est donné figure 1. À la différence des logiciels existants qui considèrent principalement des expressions, l'environnement est conçu pour gérer des objets mathématiques, leurs propriétés et leurs différentes représentations. À titre d'exemple, les objets considérés dans l'environnement Casyopée sont les fonctions d'une variable réelle, avec ou sans paramètres.

Il nous semble important, pour une pratique consistante du calcul formel, d'inscrire les propriétés comme des éléments visibles et manipulables dans l'environnement et d'offrir à l'élève des aides logicielles à la preuve. La preuve algébrique de propriétés motive en effet la recherche d'expressions pertinentes et de formes adaptées. Elle donne ainsi du sens aux manipulations formelles. Elle est complémentaire de la visualisation qui, par la mise en relation des différentes représentations, donne une existence aux objets⁶. Elle suppose que l'environnement gère les propriétés de façon à permettre l'enchaînement de pas de preuve et donne un diagnostic sur les preuves élémentaires (application d'un théorème ou d'une proposition algébrique).

L'idée de proposer différentes représentations des objets n'est pas spécifique à notre projet. Elle est cohérente avec l'importance donnée aux démarches de visualisation et d'exploration assistées par l'ordinateur. En revanche, les propriétés et leur preuve algébrique sont souvent considérées comme du domaine du papier/crayon. Notre schéma les intègre clairement comme des objets et actions bénéficiant elles aussi de l'assistance de l'ordinateur.

Pour la gestion des objets, l'environnement a recours au noyau de calcul formel. L'appel au noyau permet de vérifier la cohérence de la définition d'une fonction et d'en obtenir différentes expressions algébriques (factorisée, développée,...). Les possibilités de calcul approché du noyau sont utilisées pour les représentations graphiques et numériques. Les capacités symboliques du noyau permettent à l'environnement de donner un diagnostic pertinent à l'élève lors des preuves élémentaires.

Les possibilités de paramétrage sont cohérentes avec la nécessité soulignée plus haut de tenir compte des connaissances de l'élève. Elles sont en principe dédiées à l'enseignant, même si elles peuvent à l'occasion être utilisées par les élèves. Des outils spécifiques, s'appuyant sur les capacités symboliques du noyau peuvent permettre au professeur d'anticiper l'interaction de l'élève et de l'environnement. Par exemple, pour un problème centré sur l'étude d'une fonction, il est très utile à l'enseignant de disposer des différents objets et représentations pouvant être obtenues à partir de cette fonction par un élève utilisant l'environnement, et donc un module les donnant automatiquement sera une aide précieuse.

⁶ Comme le disent les commentaires du programme de Seconde : "On n'atteindra une certaine maîtrise du calcul algébrique que si on développe une aptitude à anticiper les effets d'une modification d'écriture. Pour ce faire, on développera la réflexion sur les différentes formes possibles qu'une expression peut prendre et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre."

Pour une discussion plus approfondie, voir Kieran (2002).

1.3. Méthode de développement

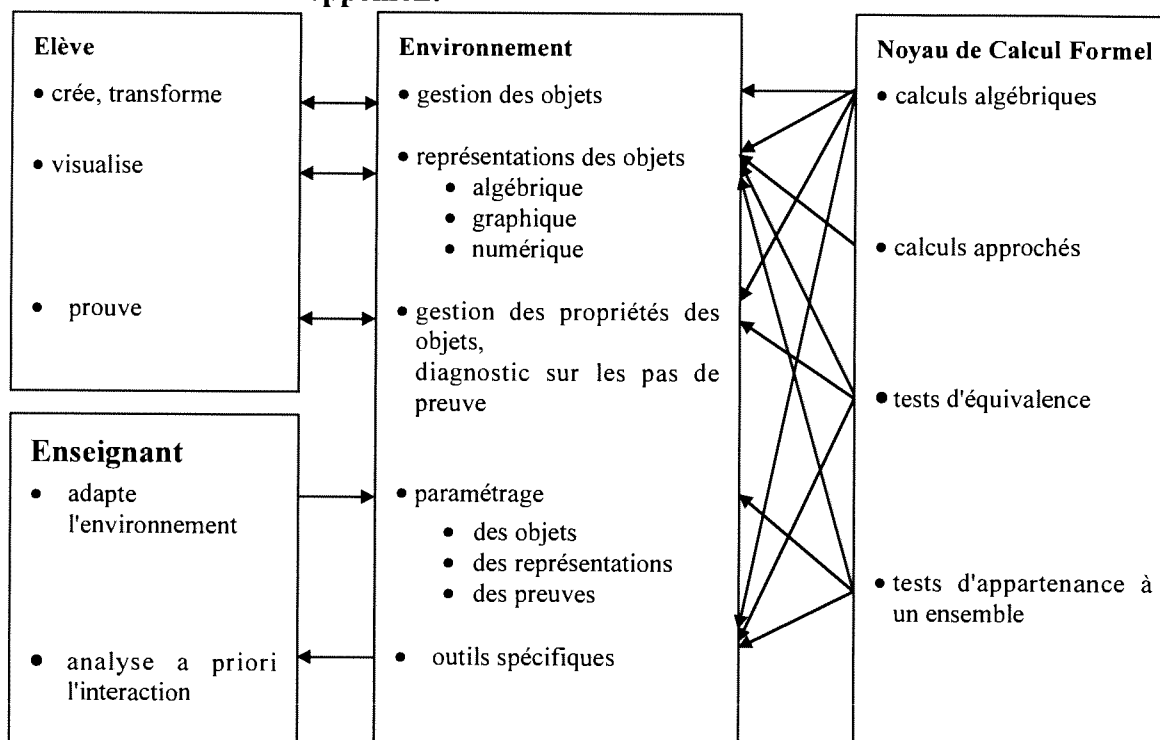


Figure 1

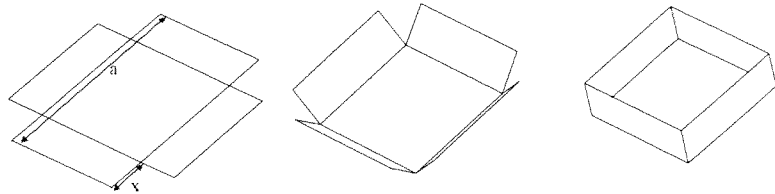
Pour développer et expérimenter des environnements à partir du schéma ci-dessus, nous avons adopté une méthode itérative en quatre pas. En premier lieu, nous définissons un domaine de tâche, nous spécifions le schéma en fonction de ce domaine, puis nous développons un environnement logiciel et enfin nous faisons des expérimentations auprès d'élèves de façon à vérifier la cohérence du développement avec les principes à la base du schéma. À l'issue de ce quatrième pas, nous repartons au premier pas en élargissant le domaine de tâches.

Nous nous situons actuellement à la seconde itération et travaillons à nouveau à un développement logiciel et à des expérimentations. Les travaux réalisés à Paris et à Rennes lors de la première itération sont rapportés respectivement par Lenne & Gelis (2002) et par Lagrange & Py (2002). J'en reprendrai certains éléments au moment de préciser les principes de conception et les apports de nos environnements. Auparavant, je vais exemplifier le schéma de la figure 1 en présentant l'utilisation de l'environnement Casyopée pour la résolution d'un problème classique.

2. Un exemple de réalisation

Le texte du problème est donné par la figure 2. Il s'agit du problème bien connu de l'optimisation du volume d'une boîte que je propose de résoudre par une technique algébrique accessible à des élèves de Seconde.

Considérons une feuille de papier de forme carrée de côté a . À chacun des quatre coins, nous coupons un carré de même côté x . Ensuite, nous plions pour faire une boîte. La boîte est ouverte sur le dessus.



Le problème est de déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximum.

Figure 2

Je vais d'abord montrer ce que peut être une exploration géométrique et graphique du problème à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, puis comment Casyopée permet d'aller plus loin dans l'exploration algébrique, la preuve et la généralisation.

2.1. Exploration géométrique et graphique

Avec le logiciel de géométrie dynamique Géoplan, il est possible (figure 3), après avoir choisi par exemple la valeur 18 pour a , de construire une figure dépendant d'une variable x évoluant de 0 à 9. En "pilotant"⁷ x , un point se déplace sur la courbe représentant le volume en fonction de x , en même temps que la figure se redessine. Cette exploration suggère qu'un maximum du volume ait atteint pour la valeur 3 de x .

Il s'agit de l'exploration visuelle d'un cas numérique, intéressante pour donner du sens au problème, mais que nous pensons insuffisante pour des élèves qui ont à se confronter à l'algèbre et à la puissance de ses méthodes.

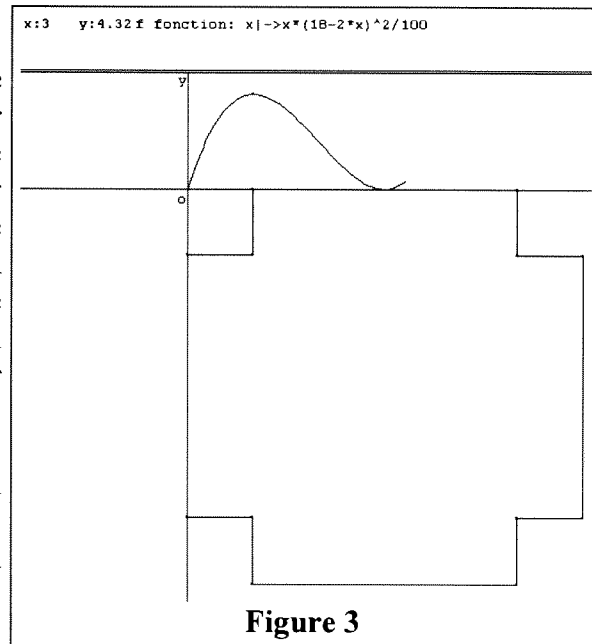


Figure 3

⁷ L'aide de Géoplan, rubrique "Pilotage d'un objet libre" indique : "On peut piloter les points libres et les variables numériques. Tous les objets qui en dépendent seront modifiés en conséquence. Les variables numériques (non dessinables) sont pilotées à l'aide (des touches flèches du) clavier".

Nous avons transposé cette fonctionnalité dans Casyopée d'une façon qui est montrée dans la suite du texte.

La figure 4 montre l'interface de Casyopée. La fenêtre de gauche est celle des fonctions. A la différence des expressions des logiciels standards les fonctions ont un nom (ici y_0), un intervalle de définition donné par des valeurs de la fenêtre des x (à droite) et différentes expressions qui peuvent être obtenues à l'aide de fonctionnalités symboliques de la fenêtre de calcul (au milieu, au dessus). Les fonctions ont aussi des propriétés qui peuvent être prouvées à l'aide de "justifications" qui correspondent à des pas de preuve élémentaires (au milieu, en bas).

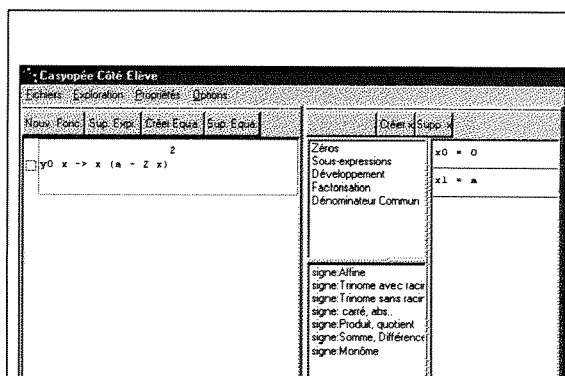


Figure 4

Les fenêtres de calcul et de justification ont été paramétrées par le professeur. Par exemple, il n'y a pas de calcul de dérivée, en cohérence avec le niveau auquel nous proposons la résolution du problème. La fonction donnant le volume pour un carré initial de côté a a été entrée et nommée y_0 . A ce stade, la fonction dépend du paramètre formel a et donc l'exploration numérique et graphique n'est pas possible.

Pour rendre possible l'exploration, l'élève peut choisir de "piloter" a . En donnant ainsi à a la valeur 18, l'exploration montre volume maximum pour x proche de 3. Avec Casyopée il est possible de prouver algébriquement cette propriété.

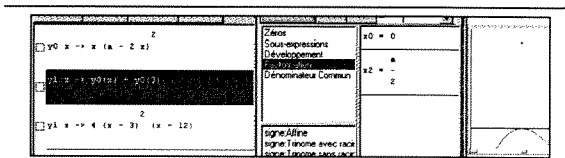


Figure 5

Une nouvelle fonction y_1 est définie par $x \rightarrow y_0(x) - y_0(3)$. Son graphe (figure 5) semble en dessous de l'axe des x , ce qui est aussi une exploration.

2.2. La preuve

La preuve commence par la factorisation de y_1 obtenue à l'aide de l'item correspondant de la fenêtre de calcul. Les deux facteurs ont la propriété d'être de signe constant sur l'intervalle de définition. La preuve continue donc par la définition des deux facteurs comme nouvelles fonctions à l'aide d'un item spécial (sous-expressions) de la fenêtre de calcul. L'une (y_2) est un carré et l'autre (y_3) est une fonction affine.

Des items de la fenêtre de justification (respectivement **carré**,.. et **affine**) peuvent être utilisés pour la preuve de leur signe (respectivement positif and négatif), ensuite la règle des signes pour un produit (**produit/quotient** dans la fenêtre de justification) permet de prouver que y_1 est négative sur l'intervalle (voir la fenêtre d'historique sur la droite, figure 6). Ceci prouve l'existence

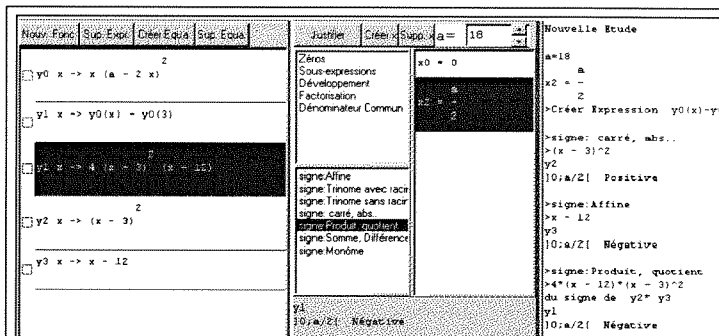


Figure 6

d'un maximum du volume pour x égal 3. La figure 7 donne un exemple de la façon dont une justification s'effectue. Pour appliquer la règle des signes, l'élève choisit les facteurs parmi les fonction dont le signe a été prouvé ou conjecturé.

L'environnement vérifie que la fonction considérée est bien le produit des facteurs donnés (à une constante près). L'élève propose ensuite une conclusion dont la cohérence est vérifiée par l'environnement.

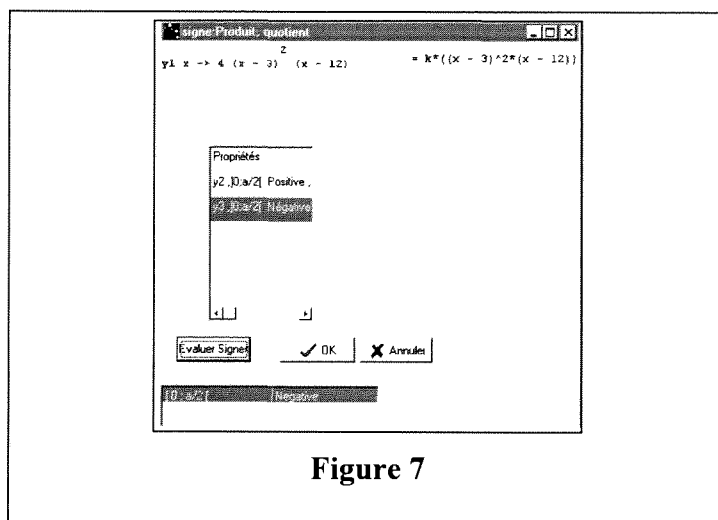


Figure 7

Le pilotage du paramètre a permet l'étude semblable d'un nouveau cas. Pour une valeur de a différente de 18, $y_0(x) - y_0(3)$ change de signe pour x égal 3, ce qui signifie que 3 est la valeur de x donnant un volume maximum seulement pour $a=18$. L'exploration et la preuve peuvent s'opérer sur des valeurs différentes de a en adaptant la valeur de y_1 (comme nous le verrons plus loin), jusqu'à ce qu'une conjecture générale apparaisse selon laquelle la valeur de x donnant un volume maximum est le sixième du côté du carré initial.

2.3. Généralisation

Une étude générale est alors possible. Pour cela, il faut que, comme au début de la résolution, le paramètre a ne soit pas piloté. C'est alors un paramètre formel. La définition de y_1 est modifiée en $x \rightarrow y_0(x) - y_0(a/6)$. y_1 se factorise et les signes des facteurs puis de y_1 peuvent être prouvés à l'aide des justifications présentées ci-dessus.

3. Choix de conception

Je vais maintenant expliciter les choix que nous avons fait au long des deux itérations. Il était important pour nous de choisir un domaine de tâche car nous pensons qu'un élève de lycée ne conçoit pas les objets algébriques et leurs transformations en elles-mêmes, mais dans un domaine donné. Par exemple Casyopée, comme nous venons de le voir, porte sur les propriétés élémentaires des fonctions (signes, variations). L'équipe de Rennes a ainsi fait le choix de se centrer sur une approche fonctionnelle de l'algèbre où les objets et transformations sont différents par exemple de ceux rencontrés dans la résolution d'équations. L'équipe de Paris a choisi un autre domaine relatif aux fonctions, qui mobilise des techniques algébriques spécifiques : la détermination de limites.

Comme je l'ai dit plus haut, le domaine de tâche évolue à chaque itération. L'équipe de Rennes a commencé par un domaine restreint (fonctions sans paramètres, tâches "classiques" d'étude de fonctions) qu'elle a étendu lors de la seconde itération pour inclure des problèmes de modélisation et de généralisation comme le problème de la boîte que je viens de présenter. L'équipe de Paris a ajouté lors de la seconde itération une dimension d'exploration graphique et numérique qui n'existait pas dans la première.

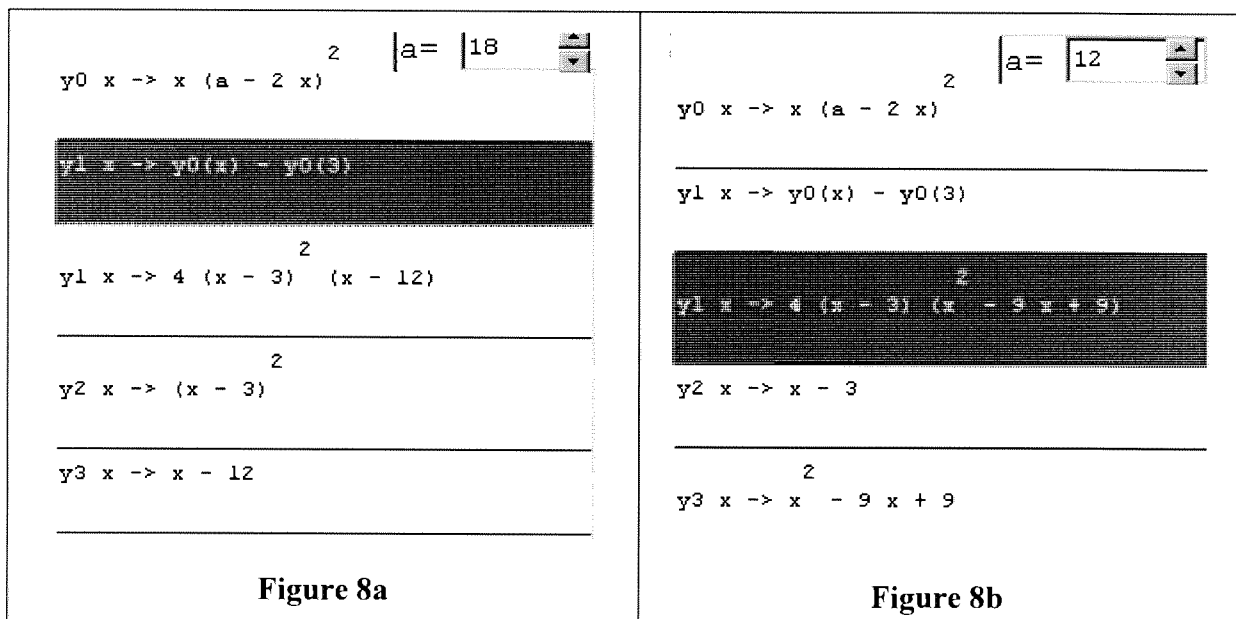
La spécification et le développement d'un environnement logiciel consistent à concevoir l'organisation des objets dans l'environnement, les calculs et justifications offertes aux élèves, les représentations permettant l'exploration et les différents paramétrages et outils spécifiques permettant à l'enseignant d'adapter l'environnement en fonction de ses objectifs.

L'environnement fait appel à un noyau de calcul formel existant, selon les modalités de la figure 1. Nous avons utilisé successivement les noyaux de différents logiciels de calcul formel avant d'opter pour le noyau de Mupad⁸ qui doit permettre plus facilement à des enseignants extérieurs aux équipes d'utiliser le logiciel dans leurs classes.

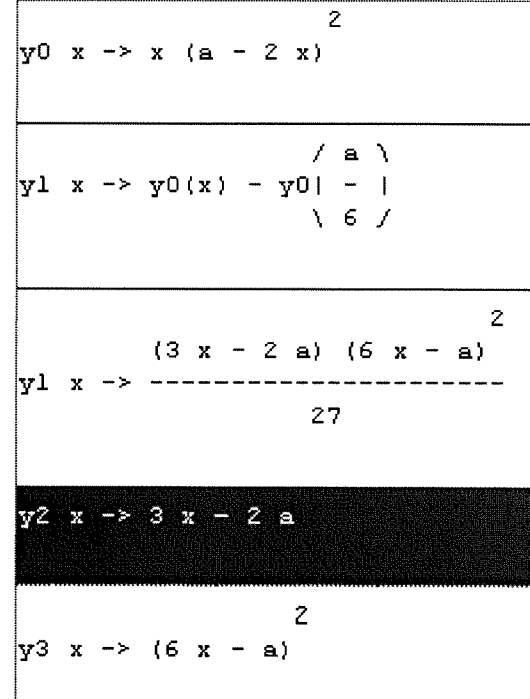
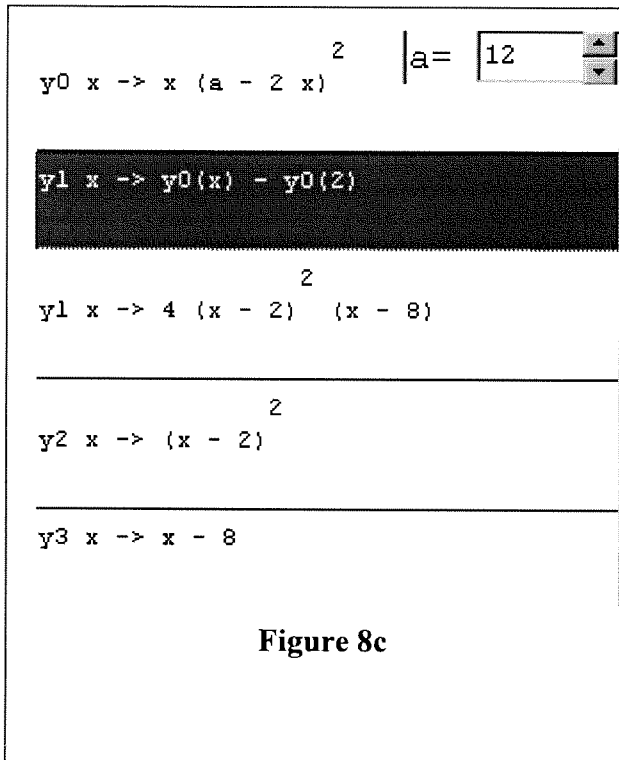
Pour l'équipe de Rennes, les calculs sont les transformations algébriques standard que nous avons vues plus haut (figure 4). L'élargissement du domaine de tâches dans la seconde itération nous a conduit à une organisation dynamique de la fenêtre de fonctions, déterminée par les calculs qui ont créé les fonctions. Voici un exemple montrant cette organisation, à partir du problème étudié ci-dessus.

Supposons que, comme dans la figure 8a ci-dessous, un étudiant a résolu le problème pour la valeur 18 du côté a du carré initial. Pour cela, il a défini la fonction, a obtenu sa forme factorisée, et a créé les fonctions y_2 et y_3 comme sous-expressions de y_1 . Il a prouvé le signe de y_2 et y_3 puis de y_1 , en utilisant les justifications que j'ai indiquées ci-dessus.

Supposons qu'il se propose maintenant d'étudier le problème pour $a = 12$. Il change la valeur du paramètre a et l'environnement met à jour les expressions dans la fenêtre de fonctions (figure 8b). Visiblement y_2 change maintenant de signe pour $x = 3$ et donc 3 n'est plus une valeur de x maximisant le volume. Une exploration graphique suggère alors que 2 est cette valeur. L'élève change donc la définition de y_1 en $x \rightarrow y_0(x) - y_0(2)$. Les expressions sont de nouveau mises à jour (figure 8c), et y_2 et y_3 sont de nouveau de signe constant sur l'intervalle, ce qui montre que 2 est bien la valeur cherchée. La généralisation que j'ai présentée ci-dessus peut également s'effectuer dynamiquement en "libérant" le paramètre a et changeant la définition de y_1 en $x \rightarrow y_0(x) - y_0(a/6)$ (figure 8d).

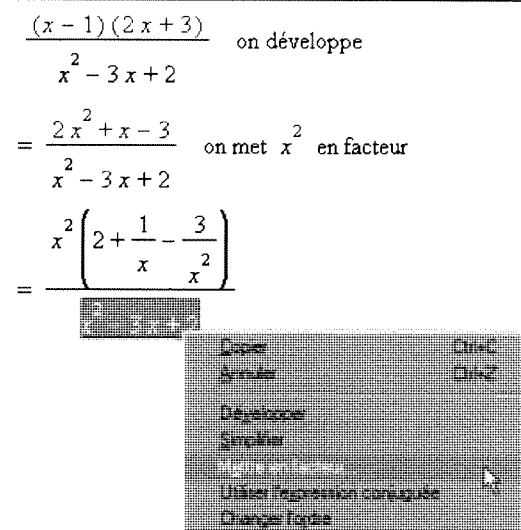


⁸ Distribué par SciFace : www.sciface.com. Pour une discussion sur les problèmes posés par la communication entre l'environnement et le noyau voir Lenne & Gelis (2002) p.143.



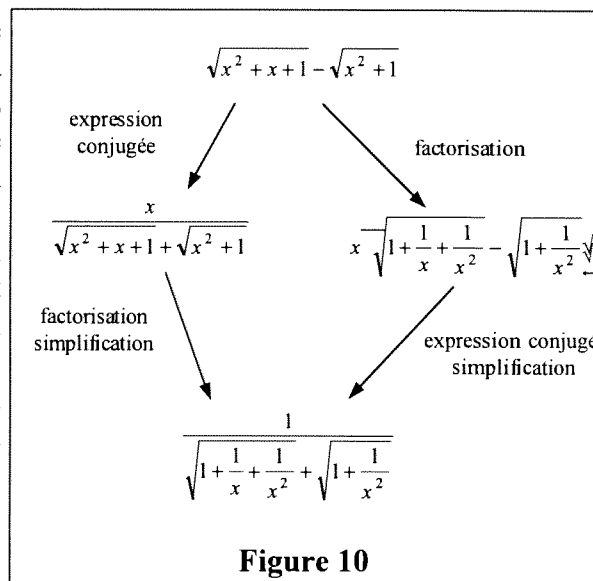
Nous préparons actuellement les expérimentations de la seconde itération. Nous attendons de cette organisation dynamique qu'elle donne de nouvelles possibilités d'exploration algébrique et de généralisation et nous travaillons à concevoir des situations pour cela.

S'intéressant aux limites, l'équipe de Paris a eu à concevoir de nombreuses transformations spécifiques en ce sens qu'elles ne sont pas obtenues directement dans les logiciels de calcul formel standard. Par exemple, la factorisation d'un terme dans une somme est une transformation appropriée pour lever des indéterminations et elle n'est pas obtenue facilement dans les logiciels de calcul formel. L'équipe de Paris a identifié et implémenté 34 transformations différentes, qui sont accessibles à l'utilisateur via des menus contextuels dépendant de la structure de l'expression (figure 9)⁹.

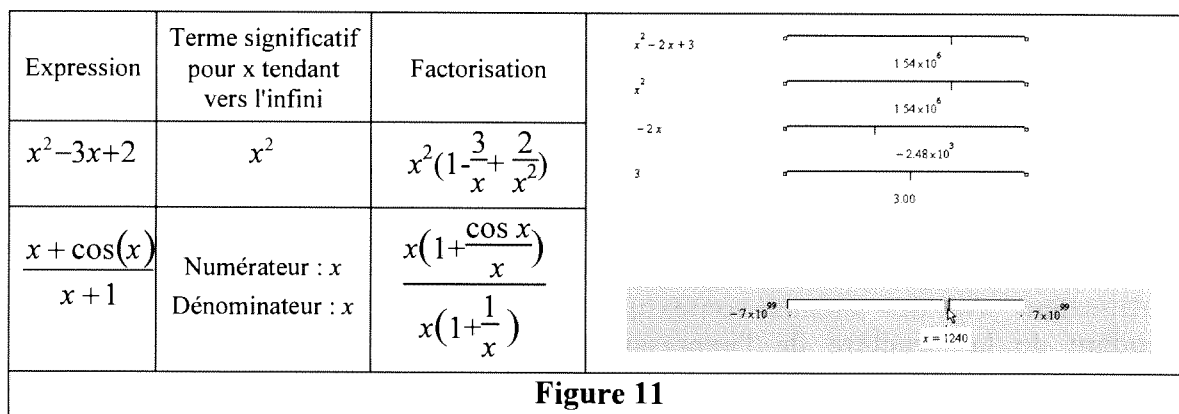


⁹ Les figures 9 à 12 sont reprises ou adaptées de Lenne & Gelis (2002).

Sur l'exemple d'un problème d'indétermination, je vais préciser la nature du travail demandée aux élèves. Les transformations symboliques étant faites par le noyau, ce travail pourrait sembler facile et peu exigeant sur le plan cognitif. Au contraire, comme le montre la figure 10, la détermination de la limite d'une expression bien choisie peut s'effectuer via différentes stratégies (expression conjuguée d'abord, ou factorisation d'abord dans l'exemple). Le travail de l'élève consiste en décisions stratégiques de cette nature qui, selon nous, donnent du sens aux transformations.



Toujours à propos de limites, je vais préciser la notion d'exploration spécifique et comment elle est liée aux transformations dans l'activité de l'élève. Reprenons l'exemple de la factorisation d'un terme dans une expression, une transformation intervenant dans une technique de levée d'indétermination. Un point crucial dans la mise en œuvre de cette technique est le repérage du terme de la somme significatif au voisinage concerné, comme le montre le tableau de la figure 11 (partie gauche). Pour un élève débutant, ce repérage est loin d'être immédiat et c'est pour cela qu'une exploration spécifique a été introduite. La figure 11 (partie droite) est une copie du module permettant cette exploration. La valeur de x est pilotée via un curseur. Des expressions sont entrées par l'utilisateur (un polynôme et ses termes dans l'exemple) et leurs valeurs approchées respectives sont représentées par un tiret sur une échelle. Il est alors possible d'observer l'évolution respective des valeurs des expressions quand x varie et d'identifier ainsi le terme significatif.



Une autre fonctionnalité importante, que les logiciels de calcul formel standard n'offrent pas à l'utilisateur de façon simple, est la possibilité de travailler sur des sous-expressions. Les deux équipes ont implémenté une fonctionnalité de ce type, mais de façon différente. Dans l'environnement développé à Paris, la sélection s'opère par manipulation directe et les transformations et justifications sont effectuées sur la sélection. Dans Casyopée, développé à Rennes, une transformation spéciale permet de définir de nouvelles fonctions à partir des termes d'un produit ou des facteurs d'une somme comme nous l'avons vu dans l'exemple figure 6.

La gestion des propriétés des objets et le diagnostic sur les pas de preuve passe par la conception et l'implémentation de "justifications". Dans Casyopée, ces justifications correspondent à des propriétés variées des fonctions. Dans les mathématiques du lycée, certaines sont considérées comme élémentaires, d'autres ont le statut de théorème. Les propriétés les plus élémentaires portent sur les variations et le signe de fonctions du premier et du second degré et sur les liens entre variations et signe (par exemple, une fonction croissante sur un intervalle et positive ou nulle à la borne droite est positive sur l'intervalle). Les théorèmes sont le théorème de Lagrange sur les variations d'une fonction dérivable et le théorème des valeurs intermédiaires sur l'existence d'un zéro pour une fonction continue monotone. Dans l'environnement, elles sont implémentées indépendamment de leur statut par les données (une fonction et un intervalle où elle est continue), les hypothèses à vérifier (par exemple, la fonction est monotone et de signe différent aux bornes) et la conclusion (il existe un zéro sur l'intervalle). Les justifications sont opérées de la façon montrée ci-dessus figure 7. L'élève choisit les données et la justification à effectuer, puis il (elle) donne des éléments concernant les hypothèses à partir desquels l'environnement rend un premier diagnostic¹⁰. L'élève donne ensuite les conclusions et l'environnement rend un diagnostic sur la cohérence de la déduction. Un paramétrage permet que cette dernière étape soit allégée, l'environnement donnant lui-même les conclusions.

La gestion des propriétés des objets dans Casyopée est conçue pour que l'élève organise sa preuve librement. Pour cela il est possible d'entrer des conjectures et d'opérer des justifications dont les prémisses sont des conjectures. Un "arbre de preuve" permet que ces justifications soient validées lorsque les conjectures sont elles-mêmes prouvées.

Dans le projet de Paris, les justifications correspondent à des théorèmes généraux sur l'algèbre des limites (figure 12). À la différence de Casyopée, les justifications ne sont pas paramétrables individuellement. Trois niveaux sont définis. Au premier niveau (à gauche figure 12) les preuves sont demandées de façon plus détaillée qu'au troisième niveau (à droite figure 12).

Le paramétrage des justifications est un élément important d'adaptation des démarches de preuve offertes par le logiciel aux connaissances des élèves. Quand un(e) élève rencontre un théorème pour la première fois il est intéressant qu'il (elle) en considère tous les détails. En revanche, lorsque l'application de ce théorème devient une étape routinière dans la résolution d'un problème, il n'est plus nécessaire que l'élève entre dans tous les détails et un allègement lui permet de se concentrer sur les aspects stratégiques.

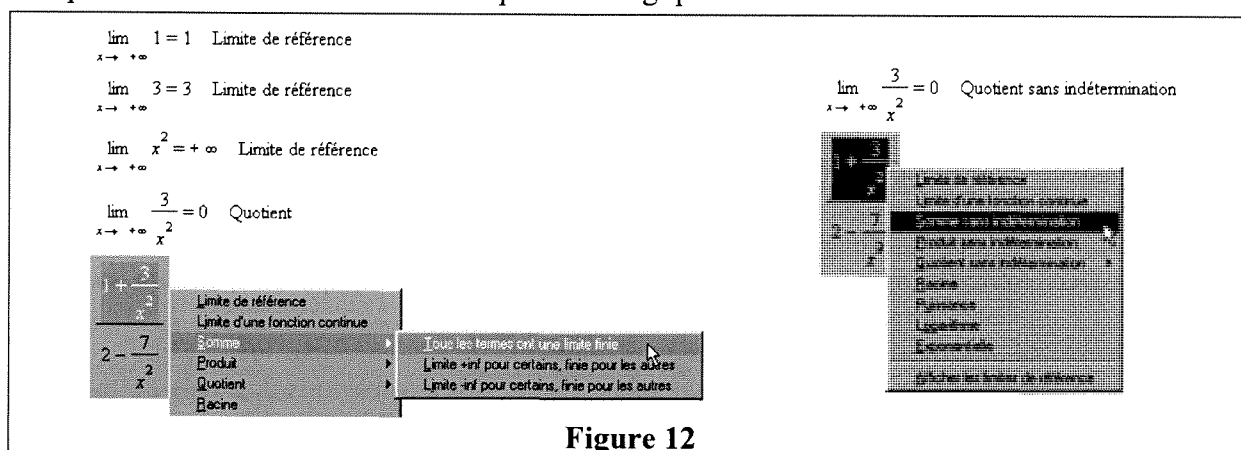


Figure 12

¹⁰ La nature de ces éléments et le diagnostic rendu par l'environnement dépendent de la justification. Il est donc impossible de les expliciter ici. L'exemple de la justification du signe d'un trinôme du second degré est développé par Lagrange & Py (2002, page 107).

Ce paramétrage fait partie des possibilités données au professeur pour adapter l'environnement aux connaissances de ses élèves et à ses objectifs.

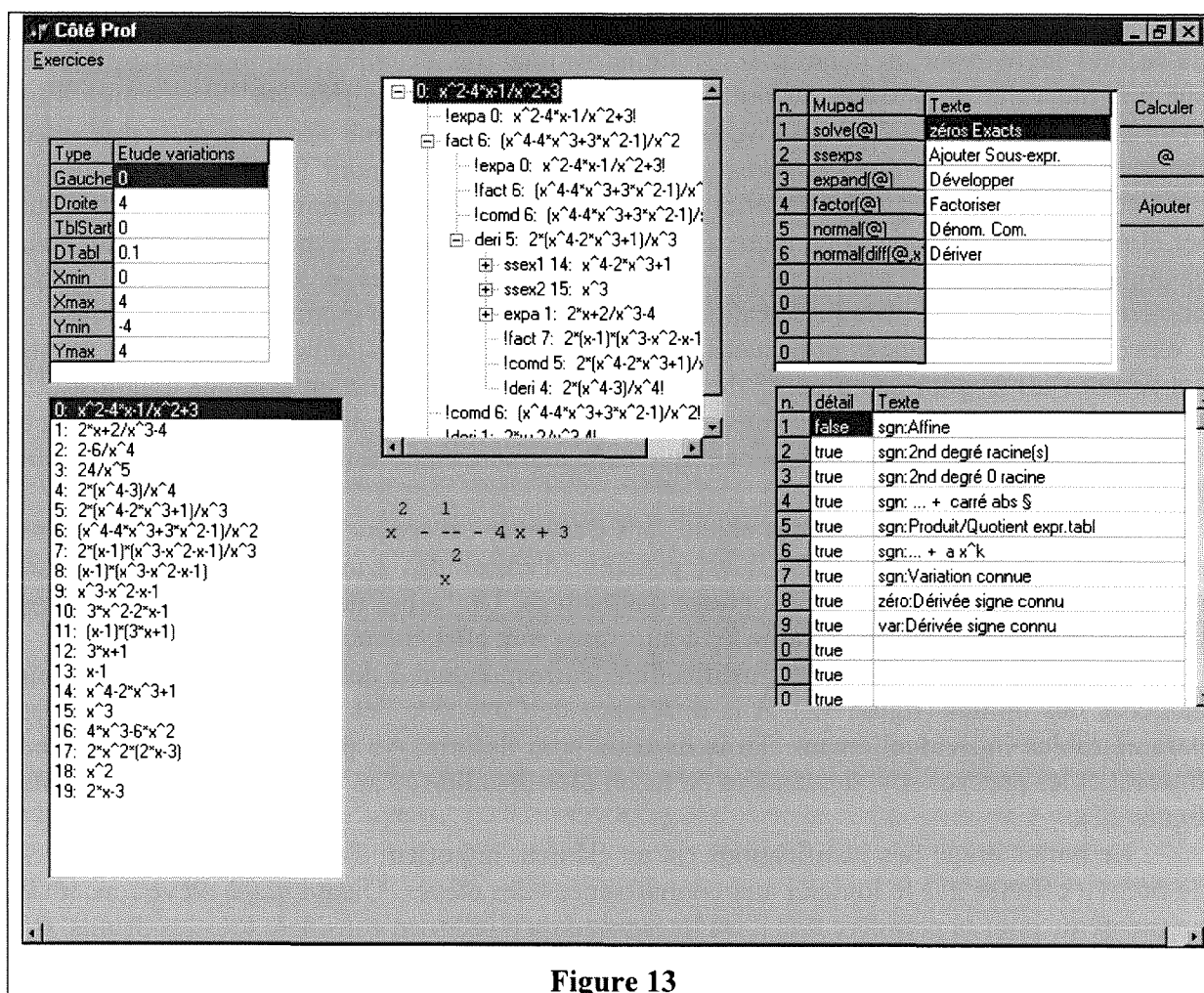


Figure 13

La figure 13 montre l'écran d'un module spécial développé dans le projet de Rennes comme aide au professeur pour cette adaptation. Dans la fenêtre en haut à droite le professeur sélectionne et nomme les calculs qu'il souhaite mettre à disposition de ses élèves. Dans la fenêtre en bas à droite il (elle) fait de même avec les justifications et opère le paramétrage dont je viens de parler. Il peut définir de nouveaux calculs en entrant la formule correspondante selon la syntaxe du noyau de calcul formel.

Pour l'étude d'une fonction particulière, le professeur peut aller plus loin dans la préparation en entrant l'expression et l'intervalle la définissant, ainsi que des valeurs initiales pertinentes pour les fenêtres d'exploration graphique (fenêtre en haut à gauche). Il utilise les différents calculs pour anticiper les expressions pouvant être obtenues par les élèves (en bas à droite). Pour chacune des expressions il visualise l'arbre des expressions dérivées de façon à avoir une vue d'ensemble des résolutions possibles (fenêtre au milieu).

4. Une expérimentation

Dans ce paragraphe, je vais rapporter une expérimentation par l'équipe de Rennes à la fin de la première itération. Comme je l'ai dit plus haut, le but de nos expérimentations est d'évaluer à partir d'observations d'élèves la cohérence du développement avec nos principes

de base. Dans cette première itération, nous n'avions pas encore mis l'accent sur l'exploration algébrique et la généralisation. Les principes portaient donc sur la compréhension par les élèves des différentes expressions d'une fonction et leurs propriétés, la contribution d'une assistance à la preuve et de moyens donnés au professeur pour préparer la résolution ainsi que sur la possibilité d'une instrumentation plus aisée du calcul formel. L'environnement avec lequel nous avons expérimenté était une maquette développée sur la calculatrice symbolique TI-92. J'indique ici seulement les grandes lignes de la méthodologie d'observation et les résultats. Le lecteur intéressé pourra se reporter à Lagrange & Py (2002) pour plus de détails.

Les élèves avaient été choisis avec des profils variés et ont été observés lors de la résolution de cinq problèmes différents au long de l'année civile 2000. Ils étaient en Première Scientifique au début de cette année, et avant qu'ils abordent la dérivation, nous leur avons proposé un problème de position relative de courbes. Après l'introduction de la dérivation, nous leur avons posé des problèmes classiques d'étude de variations d'abord pour une fonction rationnelle puis pour une fonction incluant une racine carrée. Après les vacances d'été et leur passage en Terminale, ils ont abordé le théorème des valeurs intermédiaires et nous leur avons posé deux problèmes impliquant des zéros non explicites de fonctions, l'un pour l'étude des variations d'une fonction rationnelle, l'autre pour les positions relatives d'une sinusoïde et d'une droite.

La méthode générale d'observation a consisté à identifier a priori des étapes "obligatoires" dans la résolution et à enregistrer un script de toutes les actions de chaque élève dans l'environnement. Nous avons ensuite noté la position des étapes "obligatoires" dans chacun des scripts. Cela nous a conduit à identifier comme "critiques" des étapes dont les élèves, à cause de l'état de leurs connaissances, parviennent difficilement à considérer comme nécessaires. Une étape critique est considérée et accomplie par un élève seulement après qu'il (elle) ait essayé un nombre parfois important d'autres actions plus ou moins pertinentes pour la résolution. Par exemple, un élève qui ne voit pas comment continuer l'étude de variation d'une fonction après le calcul de sa dérivée peut se lancer dans une exploration graphique qui est une action pertinente, mais ne conduit pas directement à la preuve des variations ou demander la forme développée de la dérivée, ce qui n'a pas d'intérêt dans le problème.

Cette identification d'étapes critiques dans les scripts des élèves et des actions plus ou moins significatives qui les précèdent nous ont permis d'apercevoir comment les élèves parviennent à franchir ces étapes et à leur donner une signification. Voici quelques résultats.

Le premier est que les caractéristiques des situations d'utilisation du calcul formel que nous avons soulignées dans l'introduction demeurent dans une certaine mesure. La multiplicité des actions, souvent non pertinentes, précédant une étape critique est, comme avec les logiciels standards, permise par la facilité d'obtention des résultats. Cependant, l'organisation des objets, le paramétrage par le professeur des fonctionnalités offertes ainsi que la nécessité de la preuve ont permis davantage aux élèves de se concentrer sur le but.

Des étapes identifiées comme critiques ont été par exemple le calcul de la différence des fonctions définissant les deux courbes dans le cas d'une étude de positions relatives et la factorisation de la dérivée pour l'étude de son signe dans le cas d'une étude de variations. Les élèves les moins à l'aise les ont souvent découvertes après avoir épuisé les autres possibilités offertes par l'environnement. Ce type de recherche d'une solution par essai plus ou moins exhaustif des fonctionnalités est aussi un comportement observé dans l'usage des logiciels de calcul formel. Cependant ici les "fausses pistes" sont plus rapidement abandonnées quand il devient clair que les résultats qu'elles donnent ne peuvent être utilisés dans les preuves. Envisagée seulement après l'échec des fausses pistes, une étape critique ne prend évidemment pas sens immédiatement. Le fait qu'elle ouvre sur la justification de la propriété cherchée (par exemple la règle des signes pour la factorisation) aide néanmoins l'élève à prendre conscience de l'intérêt de la forme obtenue.

Nous avons pu observer également des effets d'instrumentation se traduisant par la mise en relation par les élèves, au long des cinq rencontres avec l'environnement, de fonctionnalités de l'environnement avec leurs connaissances mathématiques. Des élèves ont eu par exemple lors des premières utilisations des difficultés à comprendre ce qui leur est demandé lors des étapes de justification. Le type de preuve exigée par l'environnement leur semblait éloigné des productions requises en papier/crayon¹¹. Ultérieurement, les élèves ont mieux intégré les exigences de l'environnement, les voyant plus clairement comme constitutives de la preuve mathématique. Ils (elles) ont aussi situé plus clairement les connaissances mathématiques liées aux fonctionnalités proposées. Par exemple, lors de la quatrième observation, les élèves avaient étudié en classe le théorème des valeurs intermédiaires mais n'avaient pas encore rencontré la justification correspondante. Ayant reconnu la nécessité de faire appel à ce théorème pour pouvoir considérer un zéro d'un polynôme du troisième degré non donné par le calcul formel, il n'a pas fait de doute pour eux (elles) qu'une justification relative à ce théorème devait exister dans la liste fournie par l'environnement. Ils (elles) ont pu facilement sélectionner l'item pertinent dans cette liste, bien que le nom qui lui était donné ("zéro: variations connues") n'évoque pas directement le théorème.

5. Bilan et perspectives

Comme je l'ai dit plus haut nous avons fait le choix d'une méthodologie de développement itérative et nous situons à la seconde itération. Les environnements développés lors de la première itération concernaient seulement un domaine restreint et des tâches très classiques. En ce sens, ils ont pu apparaître limités par comparaison avec la grande ouverture des logiciels de calcul formel. Ils nous ont cependant permis, par des expérimentations telles que celle rapportée ci-dessus, de valider le schéma général d'un environnements gérant des objets mathématiques, leurs propriétés et leurs différentes représentations et faisant appel pour cela à un noyau de calcul formel non directement accessible à l'élève.

La seconde itération nous a conduit à étendre le domaine de tâche et les fonctionnalités pour développer les possibilités d'exploration et de généralisation en associant approches graphico-numériques et gestion dynamique des représentations algébriques. Le schéma général conçu au cours de la première itération se trouve bien adapté à cette extension. En vue d'une expérimentation, nous préparons actuellement des situations d'utilisation. Ces situations sont moins simples à concevoir qu'il n'y paraît au premier abord, car l'organisation dynamique des expressions et les tâches de généralisation n'ont pas de correspondant direct dans les pratiques papier/crayon ou avec calculatrices. Ce travail devrait être néanmoins profitable en donnant une dimension nouvelle à l'étude en classe de problèmes de modélisation fonctionnelle.

¹¹ Un élève déclare par exemple : "(en papier/crayon) on fait plein de trucs les uns à côté des autres, et puis après on ajoute tout. Là (avec le logiciel) c'est dur".

BIBLIOGRAPHIE

GUIN D. & TROUCHE L., eds. [2002], *Calculatrices symboliques, Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

KIERAN C. [à paraître], The core of algebra : Reflections on its main activities, In K. Stacey & H. Chick (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. An ICMI Study*. Dordrecht, The Netherlands : Kluwer.

LAGRANGE J.B. & PY D. [2002], Développer un environnement d'apprentissage utilisant le calcul formel. Hypothèses, méthode, première réalisation, *Sciences et Techniques Educatives*, Hermes **9.1-2**, 91-120.

LENNE D. & GÉLIS J.M. [2002], LIMITES, un environnement d'apprentissage fondé sur un système de calcul formel, *Sciences et Techniques Educatives*, Hermes **9.1-2**, 121-148.

MONAGHAN J. [2000], Les enseignants et la technologie, In Guin D. (ed), *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »*, Mai 1998, IREM de Montpellier, 159-163.

TROUCHE L. [2000], « La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques », *Educational Studies in Mathematics* **41**, 239-264.

Jean-Baptiste Lagrange
IREM de Rennes
IUFM de l'Académie de Reims
23, rue Clément Ader
B.P. 175
51685 REIMS CEDEX 2
jb.lagrange@reims.iufm.fr