

LE CONTRE-EXEMPLE ET L'ANALYSE MATHÉMATIQUE DES FONCTIONS : ÉTUDE DE CAS EN PREMIÈRE ANNÉE DE DEUG

Résumé. L'étude historique montre que le développement du statut du contre-exemple à la fin du 19^{ème} siècle a été fortement lié au développement du concept de fonction. Certains contre-exemples étaient à l'origine de la naissance de nouveaux concepts, tels la série de Fourier réfutant le théorème de Cauchy. À la suite de ce contre-exemple, Seidel a d'ailleurs pu mettre en évidence le concept de convergence uniforme. D'autres étaient à l'origine de la remise en cause des fondements des mathématiques telle la fonction de Weierstrass. Ce rôle montre l'importance de la production des contre-exemples en analyse mathématique et peut faire penser à « exporter » cette activité chez les étudiants.

Notre recherche porte essentiellement sur l'identification des démarches des étudiants en situation de production d'exemples ou de contre-exemples autour de l'analyse mathématique des fonctions, en mettant en avant les éléments pertinents qui caractérisent ces démarches.

À cet effet, nous avons suivi un nombre assez réduit de binômes en DEUG, sur des durées assez longues, travaillant sur le même ensemble de problèmes d'analyse de fonctions. L'analyse des corpus recueillis a été réalisée grâce à des méthodes factorielles multiples qui ont permis de dégager une première caractérisation des démarches des étudiants, en terme de stratégies globales et locales. Une analyse qualitative des productions des étudiants, basée sur les résultats d'analyses factorielles, a permis de raffiner les stratégies identifiées chez les étudiants en termes de stratégies « gagnantes » ou « perdantes », avec une grande précision sur les activités qui les caractérisent.

Une perspective didactique de cette recherche serait de proposer aux étudiants un travail en groupes, sur la production de contre-exemples à des propositions fausses qui sont des sources d'erreurs fréquentes. Les contre-exemples alimentent et enrichissent le concept de fonction lui-même, ainsi que les concepts d'analyse mathématique qui lui sont associés. Ils provoquent des besoins de précisions qui conduisent à énoncer des définitions et à formuler des conditions restrictives nécessaires à la validité des résultats. La construction d'exemples et de contre-exemples permettra ainsi une appropriation de l'analyse des fonctions de manière assez fine et plus riche que celle qui résulte des exercices habituels.

1. Introduction

Le contre-exemple, à travers l'histoire, a joué un rôle moteur dans la construction de concepts mathématiques. L'histoire des mathématiques montre que le développement du statut du contre-exemple, c'est-à-dire le rôle qu'on lui reconnaît dans la démarche mathématique, est très lié au développement du concept de fonction. Dès les observations préliminaires que nous avons effectuées, l'importance du statut des contre-exemples pour les étudiants était apparue. Un éclairage épistémologique, mettant en évidence la liaison entre le statut du contre-exemple et les fondements même de l'activité mathématique, peut permettre d'expliquer certains traitements, certaines réponses. La production et la construction d'exemples ou de contre-exemples par des étudiants de première année a été au centre de notre intérêt. Elle nous a permis de montrer qu'elle permet une appropriation des fonctions de manière assez fine et différente de celle qui résulte des exercices habituels.

2. Évolution du statut du contre-exemple

2.1. Le contre-exemple considéré comme exception à la règle générale

Jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle le recours au contre-exemple était occasionnel et son statut même de démonstration de la fausseté d'une conjecture n'était pas reconnu par tous les mathématiciens. Remarquons d'abord qu'il faudrait distinguer les conjectures selon qu'elles renvoient à des concepts relativement flous ou à des objets mathématiques parfaitement fixés. Dans le premier cas, l'activité du mathématicien consiste à dégager les règles de travail, sur des objets qu'il n'est pas libre de façonner. Dans le second cas, le mathématicien travaille avec des règles bien établies.

Ainsi, Euler a trouvé un contre-exemple en arithmétique réfutant ainsi une conjecture de Fermat (cf. Glaeser, 1971). Mais, le même Euler connaissait d'autres contre-exemples dans d'autres domaines, notamment en analyse, qu'il considérait comme des exceptions de peu d'importance (cf. Youschkevitch, 1981). Le fait de considérer les contre-exemples comme des exceptions se retrouve chez Abel qui écrit dans un article : « *Il me semble que ce théorème (de Cauchy) admet des exceptions* », et il donne l'exemple de la série :

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \dots \dots \text{etc.} \quad (\text{cf. Lakatos, 1976})$$

Dans ce cas, la notion de convergence était à affiner. Les deux notions de convergences simple et uniforme n'étaient pas dissociées pour qu'il soit possible d'énoncer un théorème. Ainsi, à travers les deux situations précédentes on assiste à une rupture quant au statut logico-mathématique du contre-exemple.

Établir un cours amène généralement à plus de précisions, mais ceci n'a pas empêché Jordan, dans l'introduction de son cours de considérer que les théorèmes fondamentaux qu'il a établis ont tous des restrictions (cf. Gispert, 1982).

Ceci prouve que jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle, les contre-exemples étaient considérés comme des exceptions de peu d'importance.

2.2. Le contre-exemple rejeté : quel objet accepter comme fonction ?

Le problème, en fait, tournait autour de l'acceptabilité de certaines fonctions. Ainsi, dans sa correspondance avec Houël, Darboux produisait des fonctions représentant des contre-exemples à des théorèmes que Houël considérait dans son cours ; mais Houël récusait ces contre-exemples en disant qu'il n'avait pas ces fonctions en vue (*ibid*). Néanmoins, il exprimait son inquiétude devant les contre-exemples que lui fournissait Darboux :

« Vous me donnez des inquiétudes mortelles sur les points que je croyais les mieux établis » (lettre du 31 janvier 1875) (*ibid*).

Mais Houël n'était pas le seul à éprouver des réticences vis-à-vis de certains contre-exemples. Ainsi, Poincaré considère que les nouvelles fonctions ne peuvent contribuer à l'avancement de l'analyse et qu'elles n'ont pour but que de mettre en défaut les raisonnements de ses prédécesseurs (cf. Glaeser, 1995). Jordan, en 1882, tout en affirmant l'existence « de fonctions continues dont la dérivée est toujours indéterminée » n'en donne aucun exemple et les qualifie de « fonctions anormales » et qui « ne seront pas abordées dans ce cours ». Ces réticences, on les retrouve jusqu'au début du 20^{ème} siècle. Ainsi, Lebesgue qualifie certaines fonctions de sorte de musée de monstruosités (cf. Gispert, 1982).

En fait, les débats sur les fonctions tournaient autour de leur acceptabilité quant à leur représentation graphique, et que l'on pourrait classer selon les quatre catégories suivantes :

- les fonctions dont la représentation graphique ne relève pas les éléments pertinents. À ce titre, on peut donner l'exemple de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, citée pour la première fois par Dirichlet (cf. Youschkevitch, 1981),

- les fonctions qui présentent des difficultés au niveau de la représentation graphique ; par exemple les fonctions $x \sin \frac{1}{x}$ et $x^2 \sin \frac{1}{x}$ citées toutes les deux par Péano et qui présentent des points « singuliers » au voisinage desquels elles changent de monotonie une infinité de fois,
- les fonctions qui ne peuvent pas avoir leurs propres représentations graphiques, mais plutôt celles de leurs approximantes. On peut citer ici les fonctions de Weierstrass et Bolzano qui représentent toutes les deux des fonctions continues partout et nulle part dérivable,
- les fonctions qui ne peuvent avoir ni une représentation graphique ni celle de leurs approximantes ; la fonction de Darboux en est un exemple.

Les mathématiciens avaient une représentation essentiellement intuitive de l'objet fonction, ce qui explique la difficulté d'acceptabilité des fonctions que l'on vient de citer et dont la représentation dépasse l'intuition.

2.3. Rôles constructifs des contre-exemples

Jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle, le contre-exemple n'était pas encore d'usage courant. Plusieurs auteurs de traités didactiques faisaient des développements au sujet des fonctions discontinues, mais sans donner de contre-exemple pour attirer l'attention des étudiants sur la délicatesse de certaines propriétés considérées comme évidentes.

Péano, ainsi que Darboux, furent les principaux promoteurs du recours au contre-exemple. Avant eux, on semble ignorer l'usage systématique du contre-exemple et son avènement est révélateur d'un changement de paradigme. Ils relevèrent plusieurs erreurs commises dans les ouvrages de leur époque. Ainsi, Péano releva l'erreur commise par Serret et Jordan, de la monotonie locale de toute fonction continue en exhibant un contre-exemple. Mais Serret ne corrigea pas son erreur dans la troisième édition de son cours (1886). Mittag Leffler, dans une lettre, adressée à Charles Hermite dénonça cet état de fait. (Cf Gispert, 1982).

Darboux attira aussi l'attention, dans son mémoire de 1875, sur l'existence de « *fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes sur aucun intervalle* ». Il utilise à plusieurs reprises dans sa correspondance avec Houël, les fonctions discontinues à titre de contre-exemples. Il écrit dans sa lettre du 21 mai 1874 :

« Prenez une fonction égale à $1/q$ pour $x = p/q$ et à 1 pour x incommensurable. Elle ne sera jamais nulle entre 1 et 2 et n'aura pas de minimum. Je sais que vous allez me dire que vous ne voulez pas de ces fonctions ; mais je vous répéterai pour la millième fois que la fonction au sujet de laquelle nous discutons n'est pas de celles que vous puissiez écarter puisqu'elle s'introduit dans vos raisonnements sans que vous ayez le droit de ne rien supposer sur son compte ». (Cf. Gispert, 1982).

Dans le tome de 1887, et contrairement au tome de 1882, Jordan utilise le contre-exemple pour montrer l'existence de fonctions intégrables qui ont, dans tout intervalle, une infinité de points de discontinuité. Il y introduit aussi le contre-exemple « emprunté à Weierstrass » d'une fonction continue, nulle part dérivable. Il y corrige également toutes les insuffisances repérées par Péano dans l'introduction au livre de Genocchi et donne de nombreux autres exemples et contre-exemples. Notons que dans le tome de 1893 Jordan, ayant eu une plus grande maîtrise des questions posées auparavant, n'a pas considéré les exemples qui figurent dans le tome de 1887. Néanmoins d'autres contre-exemples sur les séries de fonctions sont exhibés pour montrer que "l'uniformité de la convergence est une condition essentielle".

2.4. Contre-exemples et développement de l'analyse

Le rôle du contre-exemple ne s'est pas limité uniquement à déceler des erreurs, il a été aussi à l'origine de nouveaux concepts tels le concept de convergence uniforme. Cauchy, en 1821, démontra que la limite d'une série convergente de fonctions continues est continue. Quelques années plus tard, en 1826, Abel reconnaît que le théorème de Cauchy n'est pas vérifié par la série de Fourier, mais considéra celle-ci comme une exception au théorème. Il a fallu attendre plus de 20 ans pour qu'il y ait, en 1847, un examen de la démonstration de Cauchy. C'est à Seidel, qu'on doit cet examen et la mise en évidence du concept de convergence uniforme (cf. Lakatos, 1976).

Une autre contribution du contre-exemple et particulièrement de la fonction de Weierstrass a été d'amener les mathématiciens à vouloir expliciter en toute rigueur les fondements de l'analyse. Les mathématiciens qui avaient recours à l'intuition ont trouvé dans cette fonction un défi et une remise en cause de certains raisonnements. Le contre-exemple a donc eu pour conséquence le retour sur les fondements, mais il a aussi soulevé l'indignation des mathématiciens. Hermite (1822-1901) dans une lettre adressée à Stieltjes écrivait : « *Je me détourne avec effroi et horreur, de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivées* » (cf. Colette, 1979).

3. Le contre-exemple dans l'enseignement

Dans une classe de mathématiques, où régit un enseignement classique, le contre-exemple n'a pas le même statut que dans la communauté des mathématiciens. Il est généralement produit par l'enseignant à l'attention des étudiants pour signaler ou prévenir des erreurs courantes ou des défauts conceptuels. Il apparaît aussi comme un moyen de précision sur le rôle des hypothèses d'une proposition ou d'un théorème. Il est généralement perçu par les étudiants comme une catastrophe signalant qu'il faut changer de voie dans la résolution du problème. En outre, l'utilisation du contre-exemple, en tant qu'outil pour invalider un énoncé que produit l'étudiant, semble être assez rare, sinon inexistante. Dans son expérimentation, Hitt a constaté que les constructions de contre-exemples représentaient les exercices les plus difficiles. Cette difficulté est selon lui due entre autres à l'enseignement des mathématiques qui se limite à enseigner des algorithmes et à un niveau moindre à faire des démonstrations (cf. Hitt, 1998). D'autre part, dans l'enseignement classique *la vérité en classe est institutionnelle, ce sont le maître et le livre qui l'incarnent* (cf. Legrand, 1988). De ce fait, la gestion du vrai et du faux n'est pas à la charge de l'élève. La phase de conclusion est alors une *phase d'évaluation où la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel...Ce jugement n'appelle pas de réflexion de la part de l'élève au sujet de la validité de sa procédure ; il sait tout de suite si elle a abouti ou non. Il n'a plus rien à faire concernant la validité* (cf. Margolinas, 1993).

En se référant à la communauté des mathématiciens, Lakatos dans « preuves et réfutations » (cf. Lakatos, 1976), présente un modèle de la logique de la découverte et de l'élaboration des concepts en mathématiques. Le moteur du processus des preuves et réfutations est une dialectique articulant des phases de proposition de conjectures pour répondre à un problème ouvert, des phases de critique des conjectures à l'aide de contre-exemples, et des phases de dépassement de ces critiques. Lakatos différencie les conséquences d'un contre-exemple en vue d'un tel dépassement. Il peut rejaillir sur la conjecture, sur la preuve ou sur les connaissances ou leurs fondements rationnels. Il peut aussi avoir comme conséquence la critique et le rejet du contre-exemple lui-même.

Dans le débat scientifique que propose Marc Legrand, le contre-exemple apparaît comme un outil puissant pour réfuter une conjecture. L'erreur n'est plus alors considérée comme une faute dans l'apprentissage des mathématiques ; l'introduction de conjectures

fausses accompagnées en général d'un contre-exemple est non seulement utilisée dans la construction du cours, mais figure aussi dans les prises de notes des étudiants. Notons que dans ce débat, ce sont les étudiants qui produisent les contre-exemples pour réfuter une conjecture proposée par leurs pairs. Une séance spéciale est proposée aux étudiants pour leur fournir les moyens de réfuter un énoncé en explicitant la règle suivante : « *En mathématiques, un énoncé est vrai si et seulement s'il n'a pas de contre-exemples* » (cf. Legrand, 1990).

Cette même règle a été utilisée par R. Duvert (cf. Duvert, 1996) au collège pour montrer la nécessité de la démonstration. À ce propos, il fait d'ailleurs remarquer que c'est *le caractère fastidieux de la recherche de toutes les possibilités de contre-exemples qui peut faire saisir l'utilité de la démonstration au sens classique du terme*.

Le rôle clé joué par le contre-exemple dans le développement de l'analyse mathématique ainsi que dans l'élaboration du savoir mathématique chez les apprenants (particulièrement lorsqu'il est à leur charge) montre l'importance de la production des contre-exemples et incite à faire exploiter cette activité chez les étudiants.

4. Stratégies des étudiants en situation de production de (contre-) exemples

A priori, si on regarde la production de contre-exemples du seul point de vue logique, on peut n'y voir qu'une activité trop simple pour présenter un véritable intérêt. En revanche, lorsqu'il s'agit effectivement de fournir une réponse négative à une conjecture mathématique, la difficulté réside dans l'obtention d'un élément ayant des propriétés spécifiées. Dans notre expérimentation, l'objet à trouver dans l'activité de production qui nous intéresse, est une fonction réelle de variable réelle. Cette activité peut renvoyer à plusieurs types de constructions, entre autres :

- 1) des fonctions de référence [Réf], ou une construction à partir d'opérations sur les fonctions de référence usuelles [Op-réf],
- 2) une mise en œuvre de fonctions caractéristiques de parties de l'ensemble des nombres réels [Carac],
- 3) une construction graphique [Graph],
- 4) des procédés dont on prend en compte l'objet limite qui en résulte (exemple : courbe de Péano).

La recherche de fonctions satisfaisant à des contraintes données nous fournit donc un cadre d'activités fort riche. Les trois premiers types de production relèvent de méthodes classiques pour les mathématiciens qui sont susceptibles d'enseignement, alors que le quatrième type nécessite une recherche assez complexe qui ne peut être conduite dans un temps limité. Par conséquent, nous avons choisi pour notre expérimentation de solliciter auprès des étudiants seulement les trois premiers types de production. Nous donnons ici une partie des exercices qui ont été proposés aux étudiants.

4.1. Partie 1 du questionnaire

4.1.1. Donner 2 exemples de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante ayant une dérivée nulle en un point. [Réf, Op-réf, Graph]

4.1.2. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui n'est monotone sur aucun intervalle. [Carac]

4.1.3. Donner une fonction qui admet une asymptote d'équation $y = 2x - 1$. [Op-réf, Graph]

4.1.4. Donner un exemple de fonction continue en 0, non continue en tout point de $\mathbb{R} - \{0\}$ [Carac]

4.2. Partie 6 du questionnaire

- 4.2.1. Donner un contre-exemple pour montrer que la proposition est fausse : « Toute fonction continue sur R , bornée, admet une limite finie lorsque x tend vers l'infini ».** [Réf, Graph]
- 4.2.1'. L'observateur demande un autre contre-exemple à la même proposition.** [Op-réf, Graph]
- 4.2.2. Donner un contre-exemple pour montrer que la proposition est fausse : « Si f admet une limite à droite lorsque x tend vers x_0 , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est monotone sur $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ ».** [Op-réf, Carac, Graph]
- 4.2.3. Donner un contre-exemple pour montrer que la proposition est fausse : « Soit f une fonction dérivable sur R . Si f est strictement croissante sur R , alors $\{x \in R \mid f'(x) = 0\}$ est fini ».** [Op-réf, Graph]

Pour notre expérimentation, 14 étudiants ont travaillé en binômes sur l'ensemble du questionnaire durant près de six heures réparties en deux séances de 3 heures. En début de séance, l'observateur fournit aux deux membres du binôme une seule feuille de papier, pour éviter un travail individuel. La confrontation des idées permet d'explicitier certaines procédures ou d'expliquer certaines décisions, qui n'auraient pas été mises en évidence dans un travail individuel (cf. Balacheff, 1988).

Pour obtenir un texte écrit reproduisant en plus du dialogue toute la production des deux membres du binôme, nous avons utilisé trois recueils :

- l'enregistrement sonore de la séance de travail des étudiants,
- le recueil des productions écrites des étudiants,
- la prise de notes de l'expérimentateur.

Nous avons, par ailleurs, procédé à un codage selon 4 variables, décrivant à la fois le type d'activité, le mode d'expression, le contenu et la correction relatifs à chaque unité de signification. Une unité de signification représente soit une phrase, soit un tableau de variation ou encore un graphe.

Pour analyser les corpus, il était donc a priori tout à fait justifié de recourir à une méthode d'analyse factorielle, et particulièrement à l'analyse factorielle de correspondances multiples (AFCM), qui est parfaitement adaptée au traitement d'un tel type de tableau de données (cf. Moretti, 1992). Nous avons ainsi procédé à l'analyse factorielle AFCM de manière séparée pour chaque corpus des binômes.

Pour l'interprétation, nous nous sommes limités au premier plan factoriel. En effet, ce plan représentait à lui seul, dans chaque analyse, largement les deux tiers de la dispersion globale de l'ensemble des variables actives. Par ailleurs, l'interprétation des axes de ce plan factoriel a débouché *a posteriori* sur les stratégies des étudiants, et par conséquent elle a permis l'identification des modalités des variables (éléments pertinents) qui caractérisent les démarches des étudiants.

Le premier axe s'interprète pour chaque binôme comme celui de stratégies globales. En effet, les modalités des variables qui ont fortement contribué à la construction de cet axe, ainsi que le retour aux corpus, ont permis de caractériser plusieurs procédures d'étudiants qui se réfèrent toutes à des conditions qui ne se limitent pas à celles de l'énoncé.

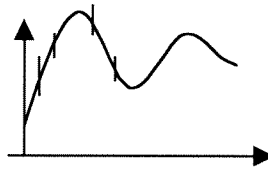
Le deuxième axe fait apparaître des stratégies que nous avons qualifiées de locales, car elles font référence dans ce cas-là à une condition extraite directement de l'énoncé.

Pour évaluer la portée de ces analyses quantitatives, nous avons effectué des analyses qualitatives. Le retour aux corpus a fait apparaître plusieurs types de procédures relatives aux

stratégies globales et locales (cf. Benbachir et Zaki, 2002). Nous donnons ici deux exemples illustrant des stratégies globales et un troisième exemple illustrant une stratégie locale :

Exemple 1 (4.1.2)

B31. : Si tu prends une fonction



Sur cet intervalle, elle est strictement croissante, et sur cet intervalle, elle est strictement décroissante... Il faut trouver une fonction qui ne peut jamais être comme ça ! Impossible ! attends.

$$\text{La fonction } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Exemple 2 (4.1.3)

B41 : $\lim f(x)/x = 2$ et $\lim f(x) - 2x = -1$. Posons $g(x) = f(x) - 2x$. Il faut que $\lim g(x) = -1$. On choisit une fonction qui tend vers -1 lorsque x tend vers $+\infty$.

B41 : $e^{1/x}$... lorsque x tend vers $+\infty$, $1/x$ tend vers $0+$ et $e^{1/x}$ tend vers 1 . Prenons $g(x) = -e^{1/x}$ donc $f(x) = g(x) + 2x$.

Dans le premier exemple, la fonction est recherchée en éliminant l'ensemble des fonctions qui 'admettent un graphe' et dans le second exemple il y a une reformulation de l'énoncé en le simplifiant et en réduisant le nombre de conditions que doit vérifier la fonction recherchée. Dans ces deux exemples, la stratégie engagée est globale parce que les conditions que s'imposent les étudiants ne se réduisent pas à celles de l'énoncé.

Exemple 3 (4.2.1)

$$B11 : f(x) = 1/q \quad x \in \mathbb{Q}$$

B12 : si tu considères $1/q$; il se peut qu'il soit....on prend $f = \text{cste}$. continue sur $\mathbb{R}$, bornée, mais elle admet une limite

B11 : chx

B12 : chx n'est pas bornée

[...]

$$B11 : f(x) = \frac{1}{x^3} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ = 0 \quad x=0$$

B12 : mais f n'est pas continue en 0

[...]

$$B11 : x - [x] \quad [x] \leq x < [x] + 1$$

B12 : c'est toujours compris entre 0 et 1 ; la limite est finie.... c'est bornée mais admet une limite finie

B11 : lorsque x tend vers ∞ , ça n'admet pas de limite... bornée ?

B12 : c'est bornée, c'est compris entre 0 et 1 et n'admet pas de limite. Mais problème de continuité

Dans cet exemple, la stratégie locale n'amène pas à une bonne production, la recherche se fait en se focalisant sur une condition imposée par l'énoncé.

La caractérisation de ces stratégies a servi à l'élaboration de profils des binômes. En tenant compte de la réussite ou l'échec aux exercices proposés, ces profils nous ont permis de conclure que les stratégies globales contribuent généralement positivement à la découverte de la solution et que les stratégies locales contribuent généralement à l'avancement de la recherche du problème si elles sont accompagnées de stratégies globales et qu'elles sont vouées à l'échec dans le cas contraire (*ibid*).

5. Conclusion

5.1. Contre-exemples et apprentissage

Les observations menées dans le cadre de cette recherche permettent d'avancer l'hypothèse selon laquelle la construction d'exemples et de contre-exemples conduit à une appropriation des fonctions de manière assez fine, et certainement plus riche que celle qui résulte de situations d'exercices habituels. La construction conduit à élargir le champ des fonctions que les étudiants connaissent. Le fait de disposer d'un stock de fonctions variées peut éviter des erreurs de raisonnement. Autrement dit, les raisonnements produits par un étudiant vont être tributaires du stock des objets "fonctions" dont il dispose (cf. Richard, 1990). Dans notre introduction nous avons noté que Houël récusait les contre-exemples construits par Darboux parce qu'il considérait qu'il n'avait pas ces fonctions en vue. D'ailleurs, chez les étudiants observés, nous avons aussi noté le fait que la disponibilité de certaines fonctions pose plus de difficultés que leur acceptabilité.

Par ailleurs, les contre-exemples alimentent et enrichissent le concept de fonction lui-même ainsi que les concepts d'analyse qui lui sont associés. Ils provoquent des besoins de précisions qui conduisent à énoncer des définitions et à formuler des conditions restrictives nécessaires à la validité des résultats.

5.2. Contre-exemples et enseignement

Pour l'enseignement au niveau des premières années universitaires, nous avons en vue de doter les étudiants d'une panoplie de traitements, permettant entre autres, le recours personnel au contre-exemple. En particulier, il s'agit que l'enseignant ou les documents disponibles ne soient pas les seules références de l'étudiant en quête de vérité mathématique, mais qu'il dispose lui-même d'un lot de traitements-types variés pour éprouver cette vérité.

Nous suggérons que, parmi les activités d'enseignement, on propose aux étudiants un travail en groupes, sur la production de contre-exemples à des propositions fausses qui sont des sources d'erreurs fréquentes. En appui de ce travail, l'enseignant a pour tâches de relever *les procédures, essais, erreurs, réussite ... des élèves, [...]* Ce relevé n'est en aucun cas une simple énumération ; le professeur doit pouvoir classer les productions des élèves, et les mettre en correspondance avec des connaissances, des savoirs ... ou au contraire y reconnaître un (des) élève(s) aux prises avec une ignorance institutionnelle. (cf. Bloch, 1999). Le professeur, en incitant les élèves à produire des contre-exemples vis-à-vis d'erreurs commises, devrait *mettre en évidence des conflits entre des interprétations contradictoires des élèves* et les aider *au travail de collaboration dans les groupes* (cf. Sensevy, 1998). L'utilité d'un tel conflit pour l'apprentissage a été établie sous réserve que certaines conditions soient vérifiées ; Hasemann précise ces conditions et parle alors d'un type de conflit qu'il qualifie d'interne et conceptuel : celui qui *découle de l'apparition simultanée dans l'esprit d'un individu d'aspects du savoir différents et antagoniques, qui relèvent de schèmes ou de sous-systèmes de la pensée distincts* (cf. Hasemann, 1988). Un autre type de conflit est

qualifié par Hasemann d'interne-externe : celui qui *est déclenché par la confrontation de perceptions actuelles avec des expériences passées (ibid)*. Même si c'est un tel conflit interne-externe qui est provoqué par l'irruption d'un contre-exemple donné, il convient de noter qu'un second conflit interne et conceptuel, favorable à un processus d'apprentissage, risque d'en résulter.

Le travail en groupe peut favoriser la construction de contre-exemples par un enseignement de type « métaconnaissance » (cf. Robert, 1988) des différentes stratégies que nous avons relevées dans cette recherche et qui sont favorables à une production quantitativement abondante et qualitativement correcte.

Notons enfin que, si un étudiant à l'université, travaillant isolément, a généralement un registre préférentiel assez stable, le travail en groupe pourrait modifier la situation en amenant une prise en compte des diversités des registres (*ibid*).

BIBLIOGRAPHIE

- BALACHEFF N. [1988], *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*, Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble **84**, 155, 156.
- BENBACHIR A. & ZAKI M. [2002], Production d'exemples et de contre-exemples en analyse – Etude de cas en première année d'université, *Educational Studies in Mathematics* **47** n°3, (à paraître).
- BLOCH I. [1999], L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique, *Recherche en Didactique des Mathématiques* **19/3**, 135-194.
- COLETTE J.P. [1979], *Histoire des mathématiques*, Ed. Vuibert / ERPI Duvert, 1996.
- GISPERT H. [1982], *Camille Jordan et les fondements de l'analyse*, Thèse. Publications mathématiques d'Orsay, Orsay, 82.
- GLAESER G. [1971], *Mathématiques pour l'élève-professeur*, formation des enseignants, Paris, Hermann, 108.
- HASEMANN K. [1988], Conceptions 'alternatives' des élèves, conflits conceptuels et leur importance pour les processus d'apprentissage des mathématiques in *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 173-179, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- HITT H. [1998], Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction, *Annales de didactique et de sciences cognitives* **6**, 7-26, IREM de Strasbourg.
- LAKATOS I. [1976], *Proofs and refutations*, the Logic of Mathematical Discovery, Cambridge University Press, trad. Franç., Preuves et réfutations. Ed. Hermann, [1985], 167,171.
- LEGRAND M. [1988], Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique : le débat scientifique en situation d'enseignement, in *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* 53-66, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- LEGRAND M. [1990], « Circuit » ou les règles du débat scientifique, *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, commission INTER-IREM université.
- MARGOLINAS C. [1993], *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématique*, Ed. La Pensée Sauvage, 30,31.
- MORETTI M.T. [1992], *L'exploitation des analyses factorielles en didactique des mathématiques*, Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 50.
- RICHARD J.F. [1990], *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Ed. Armand Collin, 203.
- ROBERT A. [1988], Première année d'enseignement en DEUG scientifique : une démarche, in *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 173-179, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- SENSEVY G [1998], *Institutions didactiques*, PUF L'éducateur, Paris.
- YOUSCHKEVITCH A.P. [1981], Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle, Traduction française dans *Fragments d'histoire des mathématiques*, brochure *APMEP* **41**.

Amina Benbachir et Moncef Zaki
 Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques
 Département de Mathématiques et Informatique
 Faculté des Sciences Dhar El Mehraz.
 B.P. 1796. Fès – Atlas. Maroc.
 Amina.benbachir@caramail.com
 Zaki.moncef@caramail.com