

CONTINUITÉ ET DISCONTINUITÉ UNE ACTIVITÉ AVEC DES ENSEIGNANTS EN FORMATION

Résumé. L'article traite des concepts de continuité et de discontinuité d'une fonction. Ce travail a été mené avec des stagiaires en formation. L'examen et l'analyse des définitions relatives au concept mathématique de fonction continue dans les livres d'analyse, nous ont conduit à donner 'notre' définition de la discontinuité.

Introduction

Le problème de continuité d'une fonction est traité en Italie dans le cours d'Analyse (qui d'habitude au lycée est proposé en cinquième et dernière année). Ce concept est, en général, introduit après celui de limite. Il est en revanche utilisé implicitement dans beaucoup de cas. Par exemple, l'introduction des nombres réels et la représentation des courbes dans un plan cartésien. Par ailleurs, dans l'introduction intuitive du concept de limite beaucoup de textes utilisent implicitement, la continuité pour «justifier» la définition de la limite.

Le problème, à mon avis, réside dans une relation-séparation entre le concept de continuité dans un sens global et le concept dans un sens local.

Le travail proposé est le fruit d'une activité, établie sous forme de réflexion, dans un laboratoire de didactique¹ des Mathématiques de l'Ecole de Spécialisation pour l'Enseignement Secondaire (SSIS) de l'Université de Parme. L'objectif principal dans ce sens, au-delà du document spécifique, était celui d'induire «une attitude» vers les approches possibles par rapport à un sujet². Cet objectif constitue l'axe principal de la recherche dans tout le laboratoire.

Le groupe avec lequel nous avons travaillé est constitué de 17 personnes en formation (15 présents) avec des Maîtrises en mathématiques, physique, profession d'ingénieur, tous avec des expériences (plus ou moins significatives) dans l'enseignement.

1. Orientation de l'activité

Comme activité introductive à celle-ci, on avait proposé précédemment une activité sur le concept et sur le sens d'une définition mathématique dont nous avons précisé la structure. En général une définition se présente comme une implication, où l'antécédent est formé par les propriétés qui indiquent l'entité à définir (posé comme conséquence). En fait, il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante (si et seulement si), où l'autre implication est implicite sur le plan syntaxique, tandis que sur le plan sémantique elle est explicitée à travers la caractérisation de l'entité à définir à travers les conditions posées. Cette précision peut être 'lue' aussi d'une autre manière ; si avec A nous indiquons le concept à définir et avec B les propriétés qui le définissent, la structure de la définition est du type $B \Rightarrow A$; mais il est aussi

¹ A l'intérieur de la SSIS le l'objectif du laboratoire (Aire 3) est celui de favoriser les projets et la réalisation d'activités didactiques utilisables pendant le stage ou, plus généralement, d'un point de vue méthodologique, dans la future carrière des enseignants.

² Dans le décret (instituteur des SSIS) MURST 26/5/98 qu'on clarifie comme dans la formation initiale de l'enseignant l'attitude du chercheur est importante : «... posséder des connaissances adéquates dans le domaine des secteurs disciplinaires de sa compétence, avec également des références aux aspects historiques et épistémologiques ; [...] continuer à développer et approfondir ses connaissances et ses compétences professionnelles, avec une attention pour les acquisitions scientifiques ; rendre significatives, systématiques, complexes et motivantes les activités didactiques à travers un projet curriculaire flexible qui inclut les décisions par rapport aux objectifs, aires de connaissance, méthodes didactiques ; [...]»

opportun, dans la pratique didactique, de mettre en évidence comment les entités qui ne vérifient pas les propriétés B ne sont pas de type A , c'est à dire $\neg B \Rightarrow \neg A$; dans une logique classique la conjonction des deux propositions porte justement à la double implication dans la définition.

Par exemple si je définis un parallélogramme comme un quadrilatère avec les côtés opposés parallèles, je suis en train de dire que :

Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles **alors** c'est un parallélogramme.

Ceci à priori n'exclut pas que je puisse appeler parallélogramme aussi d'autres objets (par exemple cela n'exclut pas que les trapèzes soient des parallélogrammes, vu que l'antécédent de la proposition serait faux et rendrait vraie la proposition même en n'excluant pas, s'agissant d'une définition, que la conséquence soit vraie).

Sur le plan didactique, on dessine, dans ce cas un trapèze pour dire que ce n'est pas un parallélogramme, c'est-à-dire :

Si c'est un quadrilatère, il **n'a pas** ses côtés opposés parallèles **alors** ce **n'est pas** un parallélogramme.

En substance on veut que les parallélogrammes soient tous et seulement tous les quadrilatères avec les côtés opposés parallèles.

En revenant sur l'activité de la continuité, on a distribué aux personnes en spécialisation des textes de lycées scientifiques et des textes universitaires et on leur a demandé de donner une formalisation logique schématique des définitions comme elles étaient présentées. Avec «logique schématique», on entendait une schématisation qui tienne compte de la structure générale de la définition d'un point de vue propositionnel. Les buts de cette première partie étaient essentiellement deux :

- 1) faire remarquer que les définitions ne sont pas toutes du même type,
- 2) faire trouver la structure logique d'une définition.

Si le premier objectif a été facilement atteint, certains ont rencontré des difficultés dans le second cas, ceci montrant le peu de familiarité, même de la part des étudiants avec une Maîtrise de mathématiques, avec les outils de la logique.

2. Les définitions trouvées

Avant d'analyser les définitions de fonctions continues tirées des livres d'analyse considérés (la référence entre parenthèses carrées renvoie au texte indiqué en bibliographie), nous citons quelques définitions tirées de livres universitaires.

Avant tout, pour parler de fonctions continues, il faut considérer une fonction définie sur un ensemble X à valeurs dans un ensemble X' dotés de structures topologiques. Pour notre étude, nous avons traité des fonctions réelles définies sur des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ avec la topologie ordinaire sur $\mathbf{R}$.

[CTV] Soit X et X' deux espaces topologiques et soit $f: X \rightarrow X'$ une application de X dans X' . Nous dirons que f est une application continue si l'image réciproque $f^{-1}(A')$ de chaque A' ouvert de X' est un ouvert de X [page 21].

Après dans le même texte [page 22], on donne une proposition où on démontre qu'une fonction entre espaces topologiques est continue si et seulement si l'image réciproque d'un fermé est un fermé. Dans cette définition, la «topologie ordinaire», définie par exemple avec les intervalles, joue un rôle décisif, dans le sens de la continuité de $\mathbf{R}$.

[P] Soit E, F deux espaces topologiques et soit $f: E \rightarrow F$ une application. L'application f est dite continue en $x_0 \in E$ si, pour chaque voisinage V de $y_0 = f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$. Ce qui équivaut à dire : pour chaque voisinage V de y_0 $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0 , [page 113].

[AB] Si $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ (l'écriture est pour " f est une fonction de A dans $\mathbf{R}$ "), on dit que f est continue en x^* si³

$$\forall U \in \mathcal{F}_{f(x^*)} \exists V \in \mathcal{F}_{x^*} \forall x \in A \cap V f(x) \in U, \text{ [page 281].}$$

Par la suite [page 282] dans le même texte on démontre une proposition où on affirme que la définition de la continuité équivaut à trois autres :

- a) $\forall U \in \mathcal{F}_{f(x^*)} \exists V \in \mathcal{F}_{x^*} f(A \cap V) \subset U$;
- b) l'image réciproque d'un voisinage de $f(x^*)$ est un voisinage de x^* ;
- c) c1) x^* est un point isolé de A ou bien
c2) $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$.

3. Observations sur le concept de continuité

Les trois définitions précédentes n'indiquent pas toutes 'la même chose'. En particulier, [P] et [AB], tirées de textes d'Analyse, se réfèrent à des conditions locales (l'extension de la continuité à un sous-ensemble du domaine est donnée par la continuité en chaque point du sous-ensemble) tandis que [CTV], prise d'un texte de Topologie, se réfère à des conditions globales. Le concept de continuité de manière globale est repris dans [N] où on ne l'oppose pas tellement à celui de discontinuité mais à celui de discret. [N], en ce sens, se réfère clairement au concept de continuité qui caractérise les nombres réels et qui se retrouve ensuite dans les différents domaines qui utilisent un tel ensemble numérique comme modèle⁴.

Dans la didactique italienne, surtout au niveau du collège, la condition de continuité est donnée au niveau local, et comporte peu de problèmes de signification. Il n'y a pas de doute en effet que de cette manière on tend à perdre non seulement le concept global de continuité, mais aussi, avec celui-ci, le sens intuitif de la continuité. Il n'y pas de doute également que de cette manière on donne un instrument opératif maniable pour traiter le concept de continuité et ceci constitue une bonne motivation de caractère didactique.

L'analyse de la définition de continuité que l'on trouve dans la plus grande partie des textes de lycée, a montré qu'elle est déductible de la forme équivalente c2 à celle proposée par [AB] (c'est-à-dire l'égalité entre la limite et la valeur de la fonction calculée au point x^*). C'est ici, cependant que, l'analyse faite par les étudiants en spécialisation a mis en évidence toutes les différences qui amènent ensuite au concept de discontinuité.

Les conditions explicitées par c2 sont trois :

- a) que la fonction soit définie en x^* ,
- b) que x^* soit un point d'accumulation,
- c) que $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$

En indiquant avec :

- C : la fonction f est continue en x^* ,
- D : $x^* \in D_f$,
- A : $x^* \in D(D_f)$,
- L : $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$.

³ Avec $\mathcal{F}_x$ nous dénoterons la famille des voisinages de x .

⁴ Le problème de l'usage de "continu" quand on parle de 'fonctions' et quand on parle de 'nombres réels' est traité en [L].

la définition de la continuité formalisée par les étudiants en formation peut être exprimée par les différentes propositions⁵

$$(1) \quad C \Leftrightarrow (D \wedge A \wedge L) \quad (\text{voir [BM], [CGV], [CM], [DBM], [PMA], [VB], [ZS]})$$

Ou bien

$$(2) \quad C \Leftrightarrow (D \wedge A \Rightarrow L) \quad (\text{voir [AMP], [B], [C], [CBM], [OCT]})$$

Dans [B], la définition est de la forme

$$(3) D \wedge A \Rightarrow (C \Leftrightarrow L) ;$$

Dans ce cas, le fait que la condition de continuité dépende seulement de la limite pour les valeurs du domaine, même si elles sont d'accumulation, semble explicite. Cela vaut la peine d'observer que, si on suppose C vrai, la (2) et la (3) sont équivalentes.

Les structures logiques précédentes méritent quelques observations, surtout par rapport à (2).

L'implication qui y apparaît est à comprendre, dans le sens logique, de manière classique. Si du reste, il en était ainsi, une fonction serait continue même en des points isolés (et ceci n'est pas perçu comme problème), mais aussi en des points qui n'appartiennent pas au domaine : ceci serait, par contre un problème ! Les antécédents de l'implication semblent donc être plus des prémisses (hypotheses) que des antécédents au sens strict. Ce que cependant les étudiants en formation ont mis immédiatement en relief est que les conditions (1) et (2) ne sont pas équivalentes, chose encore plus évidente si on passe aux propositions (équivalentes respectivement à (1) et (2) dans la logique classique), mais aussi aux formules qui peuvent mieux faire comprendre le rôle des antécédents dans (2)).

$$(1') \quad \neg C \Leftrightarrow (\neg D \vee \neg A \vee \neg L)$$

ou bien

$$(2') \quad \neg C \Leftrightarrow (D \wedge A \wedge \neg L)$$

Dans (1) et (1') en particulier les trois conditions qui caractérisent la continuité sont mises sur le même plan (ceci étant mis en relief par la conjonction) ; il est suffisant donc qu'une des trois ne soit pas vérifiée pour parler de fonction non continue en un point.

L'analyse des définitions sous cette forme a permis de faire émerger avec les étudiants une série de questions qui ont été à la base du travail qui a suivi :

Fonction non continue équivaut à discontinue (évidemment toujours de manière ponctuelle) ? Par rapport à la condition (1'), pas de manière 'classique' : pour une fonction de domaine $] -5; 0[\cup] 0; 5[$, qui se poserait le problème par exemple d'établir la discontinuité en 10 ? Selon la classification de la didactique usuelle (I, II III espèce) dans quelle catégorie cela rentrerait-il ? Pas seulement ; en un point isolé, selon cette définition, une fonction ne serait pas continue.

Par contre la (2') demande qu'on puisse parler de fonction non continue seulement en des points du domaine et d'accumulation pour celui-ci même⁶.

Comment procéder donc ? Et surtout quel 'poids' donner aux conditions qui définissent la continuité ?

En premier lieu, on a demandé aux étudiants combien opteraient, pour la notion de continuité discontinuité, le point appartenant au domaine de la fonction ou pour des points n'appartenant pas au domaine. Sur 15 présents, 4 limitent le concept de discontinuité à des

⁵ Quelques-unes de ces propositions ont été tirées des manuels sur la condition de discontinuité (négation de la continuité).

⁶ [CBM] à la page 64 parle de la discontinuité et il met en évidence en note comment il est impossible de parler de discontinuité (vue comme négation de la continuité) quand le nombre n'appartient pas au domaine de la fonction. Selon les auteurs c'est le choix fait dans *bonne part des manuels d'Analyse les plus modernes*.

points du domaine, 11 à des points n'appartenant pas au domaine. Cela montre que le concept de discontinuité coïncide avec la négation de la continuité.

À partir de ces considérations, le problème qu'on s'est posé est pourquoi il peut être important (si ça l'est) d'établir 'quelque chose' de relatif aux points qui n'appartiennent pas au domaine d'une fonction. Il est clair que ce 'quelque chose' (appelons-le de manière générique information) peut être établi pour les points d'accumulation ; c'est-à-dire l'information est locale.

Comme évoqué, dans la didactique usuelle, généralement on part du concept de limite (dont l'introduction intuitive utilise les continuités des fonctions) pour arriver à la continuité (dans des termes formels, mais après !). Un parcours inverse probablement serait intuitif (il est clair que quand on parle de continuité intuitive on l'entend dans un sens global) pour arriver ensuite à justifier la limite comme 'rétablissement' des continuités (quand c'est possible par exemple pour le troisième espèce) ou pour la classification des points dans lesquels une telle continuité n'est pas à établir ; nous parlerons dans ce cas de discontinuité (I et II espèce)⁷. Ce type de parcours a amené à critiquer les formulations canoniques de la discontinuité : dans la (1') les trois conditions n'ont pas le même poids ; en particulier on ne contemple pas le cas que x_0 doit être un point d'accumulation ; dans la (2') on parlerait seulement de discontinuité aux points du domaine. Cette dernière, évidemment, pourrait être un choix (voir par exemple les réponses des quatre en formation), mais si le problème est de 'rétablir' (où c'est possible) la continuité, comment faire pour savoir, à priori, en quels points ? Comment interpréter un résultat qui n'amène pas au but ?

4. Une définition de discontinuité

La conclusion à laquelle on est arrivé est que la discontinuité est, en un certain sens 'autre chose' par rapport à la continuité. Elle a été vue comme une continuité qui 'parfois' se traduit en acte et en ce sens peut servir à comprendre mieux la continuité (ponctuelle). Une fois niée l'opportunité de la considérer comme une négation de la continuité, on s'est occupé de lui donner une définition propre.

Il a donc été demandé aux étudiants de proposer une définition de la discontinuité d'une fonction en une valeur x_0 . L'aspect intéressant de cette phase a été justement l'idée qu'on donne, dans ce contexte, une définition autonome d'un concept mathématique. Les résultats obtenus peuvent être résumés comme suit (on parle toujours de 15 personnes en formation) :

14 ont demandé comme hypothèse que x_0 soit un point d'accumulation pour le domaine de la fonction.

Pour les conditions successives de discontinuité :

9 (par rapport aux 11 qui se sont 'déclarés') ont mis parmi les conditions que x_0 n'appartienne pas au domaine ;

Tous ont posé comme condition que les limites droite et gauche ne coïncident pas ou bien qu'il n'existe pas de limite ;

12 qu'au moins une des deux limites soit infinie ;

8 que, dans le cas où la fonction est définie en x_0 , la valeur de la limite soit finie mais différente de $f(x_0)$. À ce propos un étudiant a introduit la définition de «fonction alternée» en x_0 :

⁷ La classification des discontinuités n'est pas estimée significative par tous les manuels. Ceci est un exemple de confusion entre les **objectifs** et les **opportunités**. Un objectif significatif est celui de **redéfinir** d'une façon continue une fonction en un point. Si cet objectif ne se réalise pas, **une opportunité** est celle de classer les résultats obtenus, en les appelant d'une façon ou d'une autre.

Étant donné une fonction $y=f(x)$ de A dans $\mathbf{R}$ nous dirons qu'elle est alternée en $x_0 \in D(D_f) \cap D_f$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbf{R}$.

Selon cette définition, si la fonction est continue en x_0 alors elle est aussi alternée, tandis que le contraire n'est pas valable. Cette implication justifie, selon l'étudiant, le nom donné, tiré du concept courant : un courant continu peut être vu comme un courant alterné de fréquence nulle, tandis qu'un courant alterné n'est en général pas continu.

Cela vaut la peine de reprendre le concept de fonction.

Enfin on observe que certains ont donné la définition par rapport à la classification classique des discontinuités, en confondant l'exigence de la définition avec le problème (suivant) de la classification.

Dans la suite de la discussion, on a mis en évidence comment certaines de ces conditions étaient à déduire des autres ce qui a justifié l'omission de conditions de la part de certains étudiants. En particulier on a observé que la condition que la limite soit infinie est un cas particulier où la valeur n'appartienne pas au domaine et où la limite est différente de $f(x_0)$. De même, la condition que la limite n'existe pas englobe aussi celle de la non coïncidence des limites droite et gauche.

Une fois fixé x_0 avec comme condition dont il faut tenir compte que soit un point d'accumulation pour le domaine de la fonction, on a discuté si une telle condition, dans un sens logique, était à donner comme antécédent d'une implication ou avec une conjonction. Pour éviter l'ambiguïté logique (dans une optique classique) de l'implication, on a opté pour la conjonction. On est donc arrivé à la définition suivante :

Définition. Étant donnée la fonction $y=f(x)$ et étant donné $x_0 \in D(D_f) \cap \mathbf{R}$ nous dirons que la fonction est discontinue en x_0 si

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ n'existe pas}$$

ou bien,

$$(2) x_0 \notin D_f,$$

ou bien,

$$(3) x_0 \in D_f \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Symboliquement si on désigne par :

Dis : fonction discontinue en x_0 .

D : $x_0 \in D_f$.

A : $x_0 \in D(D_f)$.

L : la limite existe.

L_f : la limite L_f existe et est finie.

la définition précédente deviendrait

$$\text{Dis} \Leftrightarrow (A \wedge (\neg D \vee (\neg L) \vee (D \wedge L_f \neq f(x_0))))$$

C'est le moment de rappeler que si on remplace la première conjonction par une implication, on ne doit pas l'entendre selon la logique classique mais comme hypothèse qui doit être vérifiée pour pouvoir parler de discontinuité.

Évidemment, la condition posée est peu opérative ; sa finalité formelle est liée au fait de l'opposer aux formalisations précédentes pour en mettre en évidence les différences substantielles. En outre, il faut souligner que dans les conditions posées les classifications des discontinuités sont récupérables comme d'habitude elles sont présentées dans la pratique didactique.

On peut enfin présenter quelques exemples de fonctions discontinues selon la définition proposée :

- a) la fonction de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbf{R}$, $y=1/x$ est discontinue en $x_0=0$ par (2),
- b) la fonction de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, $y = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 2 \\ 2x+3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ est discontinue en 2 par (1),
- c) la fonction de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0 par (3).

Comme un étudiant l'a fait remarquer, détacher la définition de la discontinuité de celle de continuité pouvait créer quelque problème au point de vue intuitif ; c'est pour cela qu'on a pensé que cette activité devait être accompagnée sur le plan didactique par de nombreux exemples surtout graphiques.

Il faut enfin souligner le scepticisme d'une étudiante sur tout le parcours, car selon elle, on avait mis en évidence seulement une condition, en la privilégiant par rapport à d'autres. À ce sujet on lui a fait observer que ceci est évident dans la pratique normale, mais que certains choix avaient été faits (comme parler de discontinuité en des valeurs qui n'appartiennent pas au domaine) de manière non unanime.

5. Conclusion

Les conclusions sur ce travail peuvent être sur deux fronts : le problème (didactique) du rapport continuité-discontinuité et comment la question a été affrontée dans le laboratoire.

Partons du rapport continuité-discontinuité. S'il est vrai que la condition de continuité est 'culturellement intuitive', ceci justifie la difficulté de l'introduction des discontinuités, vues justement comme 'accidents'. La même expression de 'fonction à traits' fait que la possibilité non immédiate de 'souder' les pièces d'une fonction lui donne un permis d'anomalie. Si c'est ainsi, il devient compréhensible, dans la didactique, de se 'préoccuper' des discontinuités de troisième type beaucoup moins que des autres, si ce n'est dans l'optique de donner un nom aux cas, si nous pouvons dire, irrécupérables. En effet si ce n'était pas pour cette exigence, cela pourrait sembler peu significatif de se préoccuper de discontinuité en des points n'appartenant pas au domaine ; tout ceci évidemment dans l'optique que la discontinuité soit la négation de la continuité et pas 'autre chose'. Souligner cet aspect de la didactique n'est pas opportun pour éviter des ambiguïtés dangereuses.

En ce qui concerne l'activité de laboratoire, comme on l'a dit, celle-ci s'insérerait dans un parcours général dans lequel on tendait à montrer la signification à donner à une définition et comment les choix (mathématiques) dans ce sens conditionnent les propriétés de l'entité définie. Le parcours qui, partant de la discussion de données canoniques, nous a amené à 'notre' définition a servi à illustrer comment d'un côté la présentation des concepts dans les livres peut être vue de manière critique et comment, d'autre part, on peut 'oser' le parcours de voies alternatives qui ont des objectifs didactiques précis.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] GROUPE AHA [1999], *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles.
- [AB] Acerbi BUTTAZZO [1997], *Primo corso di Analisi matematica*, Pitagora.
- [CTV] Checcucci Tognoli VESENTINI [1972], *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli.
- [L] A. LEONELLI [1990], *Continuità e connessione*, Archimede, Novembre.
- [LAC&A] CEAUSHU Leozun Amit, ecc. [2000], *Pratique en classe ou formation intellectuelle. Appréhension différente entre enseignants et enseignés dans la formation permanente*, in *Cultural diversity in mathematics (education)* : CIAEM 51, Horwood Publishing.
- [N] NORDON [8-13 Juillet 1995], *Le continu quand il n'était qu'attribut*, Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques – Besançon.
- [P] PRODI [1970], *Analisi matematica*, Boringhieri.

Textes de lycées scientifiques

- [AMP] Andreini Manara Prestipino [1999], *Matematica controllo per i programmi sperimentali*, McGraw Hill, 158.
- [B] Bagni [1996], *Corso di Matematica 3*, Zanichelli, 1371.
- [BM] Battelli Moretti [1992], *Corso di matematica sperimentale e laboratorio*, Le Monnier, 184.
- [C] Cedrazzi [1985], *Analisi Matematica*, Zanichelli, 79.
- [CBM] Cateni Bernardi Maracchia [1987], *Analisi matematica*, Le Monnier, 63.
- [CGV] Castelnuovo Gori Giorni Valenti [1988], *Elementi di analisi matematica*, La Nuova Italia, 85.
- [CM] Ciolli Michelassi [2000], *Corso di matematica 3*, Principato, 44.
- [DBM] Doderò, Barboncini, Manfredi [1991], *Elementi di Matematica 5*, Ghisetti e Corvi, 101 e 115.
- [OCT] Oriolo Coda Testa [1996], *Matematica*, Bruno Mondatori, 144.
- [PMA] Progetto Matematica Archimede [1999], *I matemoduli F*, Archimede edizioni, 52.
- [VB] Venè M., Betti F. (a cura di) [1998], *Matematica*, Sansoni, 30.
- [ZS] Zwirner, Scaglianti [1998], *Analisi Infinitesimale*, CEDAM, 94.

Achille Maffini
 Lycée scientifique G. Falcone- Asola (MN)
 Unité locale de recherche en Didactique des Mathématiques de l'Université de Parme
 Università degli Studi di Parma
 Dipartimento di Matematica
 Via M. D'Azeglio, 8
 43100 Parma (Italia)
 a.maffini@inwind.it