

INTRODUCTION DU CONCEPT DE LIMITE À L'AIDE DES NOMBRES HYPERRÉELS

Résumé. Ayant une assez longue expérience dans l'enseignement des mathématiques à des étudiants inscrits dans une première année universitaire dans une Faculté d'Economie, nous proposons une présentation de l'analyse développée dans le cadre des nombres hyperréels qui forment un champ étendant celui des nombres réels. A l'instar de plusieurs pédagogues, tels Keisler et Pétry, nous ne décrivons pas à nos étudiants la construction robinsonienne des hyperréels, mais nous nous contentons de faire admettre leur existence au moyen de nombreuses représentations graphiques (réalisées à l'aide du logiciel *Mathematica*).

Pour de futurs économistes, cette approche semble correspondre fort bien à leurs besoins, par exemple en expliquant parfaitement le passage d'un modèle économique discret à son homologue continu. Au surplus, elle permet d'insister davantage sur les concepts théoriques de base de l'analyse ainsi que sur les raisonnements mathématiques : par exemple, elle élimine des difficultés techniques liées à la présentation classique, notamment en réduisant l'importance des quantificateurs dans la définition d'une limite.

1. Avant-propos

Depuis de nombreuses années, je suis responsable de la formation mathématique des économistes et des gestionnaires formés à l'Université de Liège et au Centre Universitaire de Luxembourg. Les étudiants qui suivent mes cours sont nombreux (environ 300 en première année). Ils forment un public fort hétérogène ; en effet, les futurs ingénieurs de gestion (5 années d'études) ont opté majoritairement pour un programme fort (au moins 6, et même souvent 8 périodes hebdomadaires) de mathématiques lors de leur dernière année du secondaire, tandis que les futurs licenciés (4 années d'études) proviennent principalement de sections comportant un programme moyen (avec 4 périodes hebdomadaires) de mathématiques. Enfin, mes étudiants ne souhaitent nullement devenir des mathématiciens professionnels : ils se sont inscrits dans des études universitaires qui comprennent inévitablement des mathématiques, mais ces dernières doivent, à leurs yeux, être avant tout utiles.

En fonction de ces caractéristiques de mon auditoire, l'objectif de mes cours en première année est triple. Je souhaite avant tout remettre tout le monde à niveau, en permettant notamment à ceux qui ont reçu préalablement une formation plus réduite en mathématiques d'acquérir des bases solides pour être capables de suivre ultérieurement des cours plus spécialisés dans des matières quantitatives. Ensuite, je désire présenter des cours adaptés à mes étudiants : je veux être fort pragmatique et montrer l'utilité réelle des mathématiques en économie et en gestion. Enfin, j'espère rendre mes cours non seulement utiles, mais aussi formateurs : j'attache beaucoup d'importance à un apprentissage progressif de la modélisation mathématique, ce qui me semble constituer un objectif primordial ... mais fort difficile.

C'est dans ce contexte particulier qu'est organisé mon cours de calcul différentiel et intégral qui porte exclusivement sur l'analyse des fonctions à une variable réelle. Cet enseignement se donne lors du second semestre de l'année académique et est précédé, en début d'année, par un cours de mathématiques discrètes qui comprend un apprentissage individuel (sur ordinateur) au logiciel *Mathematica* et dans lequel sont notamment rappelées les propriétés algébriques principales et les applications des fonctions élémentaires.

Les étudiants qui suivent mon cours de calcul différentiel et intégral ont dès lors un certain bagage mathématique derrière eux. En particulier, il convient de signaler qu'ils ont déjà tous reçu dans le secondaire un enseignement sur la notion de limite : d'après les

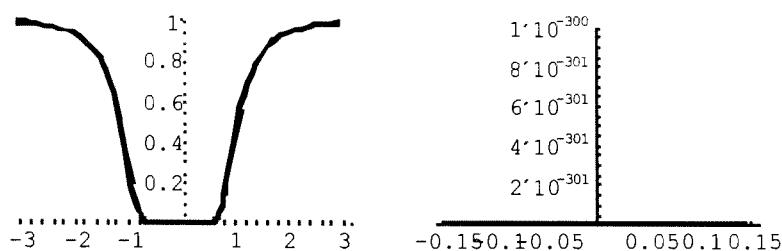
programmes, les matières vues dans ce domaine sont *les définitions des limites en ε, η ; limites en un point, finies et infinies ; limites en $+\infty$ et $-\infty$; limite à gauche et limite à droite ; asymptotes ; limites de fonctions trigonométriques de base, rationnelles et irrationnelles ; règles de calcul des limites ; cas d'indétermination* ; les mêmes documents officiels donnent les conseils méthodologiques suivants : *la notion de limite sera interprétée à partir des graphiques et des suites ... Les démonstrations ne sont pas au programme. On discutera en termes d'exemples et de contre-exemples de la pertinence des hypothèses.*

En résumé, je dois enseigner, à des futurs praticiens ayant un savoir-faire fort variable en mathématiques, le concept de limite déjà vu dans le secondaire, mais de façon superficielle. Jusqu'à la fin du siècle dernier, je me contentais d'approfondir l'approche vue dans le secondaire, c'est-à-dire à partir de la définition en ε, η . Je dois avouer que le formalisme des raisonnements semblait constituer un obstacle infranchissable pour beaucoup de mes élèves, notamment en raison de l'usage massif des quantificateurs et du rôle joué par les "fameux" ε, η . C'est pourquoi, je recherchais une présentation à la fois fort intuitive, pragmatique, simple et néanmoins rigoureuse. Il y a trois ans, j'ai essayé d'adapter pour mes étudiants l'approche par l'analyse non-standard, en évitant toutefois de faire référence aux délicats problèmes de logique qui sous-tendent cette théorie ; à trois reprises, j'ai présenté des versions de plus en plus affinées à mes étudiants de la seconde année (qui avaient donc reçu l'année précédente un enseignement "classique") et j'ai étudié leurs réactions. Puis, ayant eu entre-temps connaissance des travaux de l'équipe alsacienne de Lutz-Makhlouf et Meyer sur les ordres de grandeur, j'ai décidé au début de cette année académique d'introduire en première année le concept de limite à partir des nombres hyperréels. Je vais, dans les lignes qui suivent, montrer brièvement comment j'introduis désormais cette matière lors de mes cours.

2. Introduction des nombres hyperréels

Au début du cours, les étudiants sont invités à s'interroger sur la nature des nombres qu'ils connaissent et, tout particulièrement, de se demander quels nombres sont réellement utiles. Bien entendu, ils savent que la réponse à cette question dépend de la complexité du problème considéré ; c'est pourquoi, au cours de leur apprentissage, ils ont fait connaissance successivement avec les entiers naturels, puis les entiers relatifs, les rationnels et les irrationnels. Au fur et à mesure des besoins, l'éventail des nombres considérés a donc été progressivement élargi, toujours avec le souci de conserver les propriétés algébriques initiales et tout en étendant leur champ d'application de manière à pouvoir modéliser des situations nouvelles. Au total, on en est arrivé à travailler au sein de l'ensemble des nombres réels, qui inclut les autres nombres connus (à l'exclusion des nombres complexes, bien entendu), parce qu'il est en bijection avec l'ensemble des points d'un axe orienté : à tout point d'une droite correspond un et un seul nombre réel, et réciproquement.

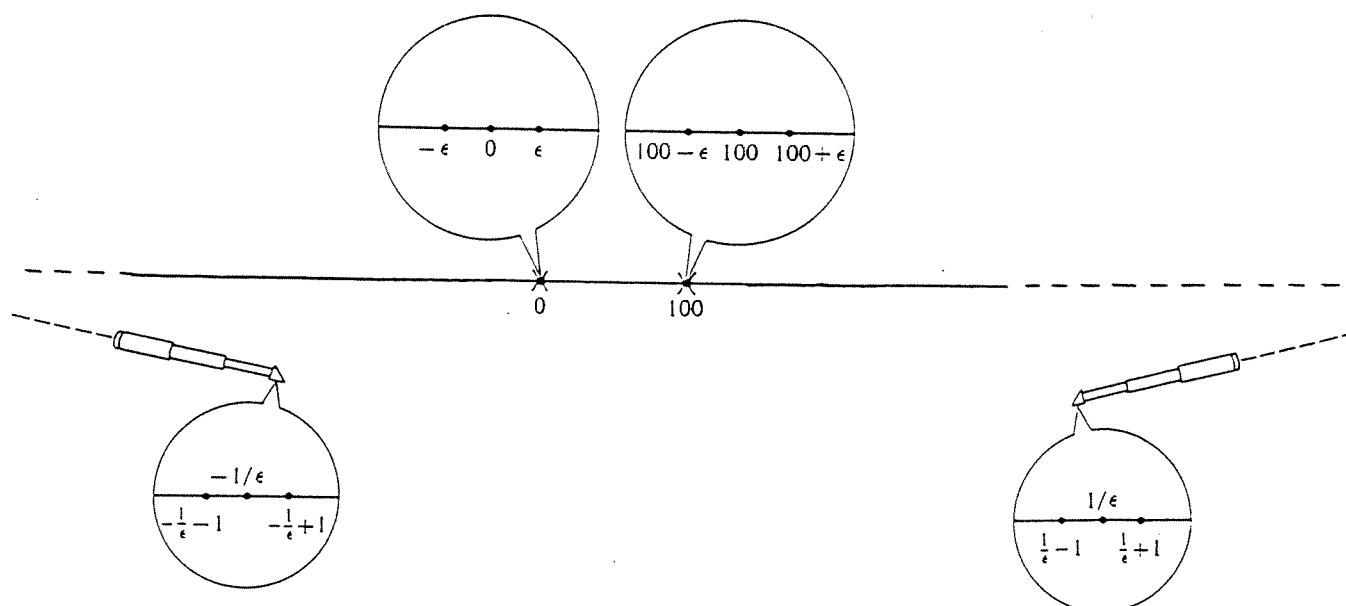
Après ces rappels élémentaires, nous suggérons l'idée que le cadre des nombres réels n'est pas suffisant pour présenter simplement et rigoureusement les concepts de base de l'analyse mathématique. À cet effet, nous montrons plusieurs figures, réalisées à l'aide de *Mathematica*, semblables à celles-ci qui sont relatives au graphique de la fonction $e^{-\frac{1}{x^4}}$ représentée sur deux intervalles contenant 0 :



De tels dessins suggèrent la présence de « nombres » positifs (car la fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives) qui sont « aussi petits que l'on veut », c'est-à-dire, intuitivement, plus petits que tout réel positif fixé. Or, on peut démontrer que le seul nombre réel non négatif inférieur à tout réel positif donné ne peut être que 0. C'est pourquoi, il convient d'admettre l'existence de nouveaux « nombres » qualifiés d'*infinitement petits* et qui peuvent être positifs ou négatifs (ainsi que le suggère l'opposé de la fonction représentée ci-dessus) : il s'agit des « nombres », appelés *non-standard*, non nuls qui, en valeur absolue, sont inférieurs à tout réel positif. Bien entendu, ces infinitement petits ne sont pas des réels, et ne correspondent dès lors pas à des points de la droite numérique classique ; on peut toutefois les imaginer situés dans le *halo* de 0 et visibles au travers un « microscope infinitement puissant » pointé sur l'origine de l'axe réel. En déplaçant ce microscope pour le pointer sur un réel r non nul, on apercevrait dans l'oculaire d'autres « nombres » non-standard, de la forme $r + \varepsilon$, avec ε infinitement petit ; ainsi, tout réel x possède un halo composé d'un seul réel, à savoir x lui-même, et d'une infinité de nombres non-standard : tout élément y du halo de x est de la forme $x + \varepsilon$: on dit que y est *infinitement proche* de x , ce qui se note $x \approx y$.

Par ailleurs, il n'existe évidemment aucun nombre réel plus grand que tout réel positif, mais en prenant l'inverse des nombres infinitement petits, on introduit de nouveaux nombres non-standard, les *infinitement grands*, qui sont des nombres dont la valeur absolue dépasse tout réel. Ces derniers pourraient être vus au travers un « télescope infinitement puissant » dirigé vers l'extrême-droite (pour les infinitement grands positifs) ou vers l'extrême-gauche (pour les infinitement grands négatifs) de la droite numérique réelle.

La collection de tous les nombres réels et des nombres non-standard définis ci-dessus constitue une extension de $\mathbf{R}$: elle se note $\overline{\mathbf{R}}$ et ses éléments sont appelés les nombres *hyperréels*. Une image suggestive peut en être donnée en partant de la droite numérique classique, en ajoutant à chaque réel r un halo composé de tous les hyperréels infinitement proches de r et visibles grâce à un microscope imaginaire, plus tout à droite (resp. gauche) de l'axe réel la collection des hyperréels infinitement grands positifs (resp. négatifs) qui sont visibles au moyen d'un télescope fictif.

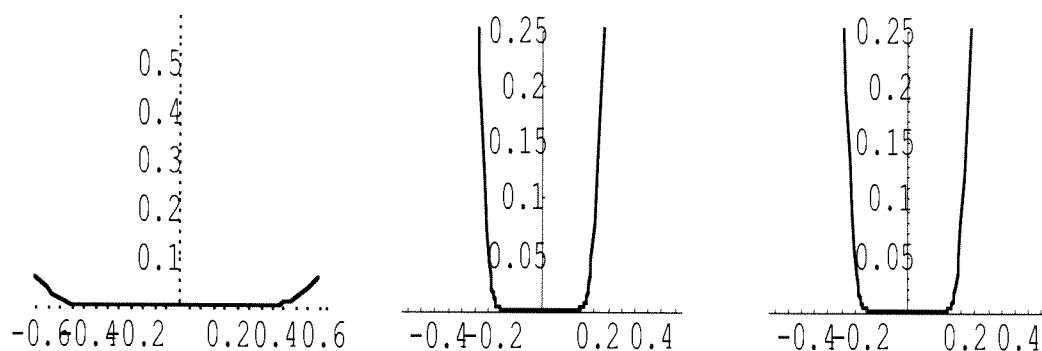


En résumé, la collection $\bar{\mathbf{R}}$ de tous les nombres hyperréels comprend différentes catégories : les *limités* qui comprennent les infiniment proches de 0 et les *appréciables* (qui sont les hyperréels infiniment proches d'un réel non nul), et les *non-limités* (ou infiniment grands) ; le tableau suivant récapitule tous les cas possibles (en introduisant des abréviations utiles) :

Hyperréels					
	Limités (lmt)		Non limités ou Infiniment grands (ig)		
	Inf. pr. zéro (iprz ; $x \approx 0$)	Appréciables (appr ; $x \approx r \neq 0$)	Négatifs	Positifs	
Réels	Zéro (0)	Réels non nuls ($r \neq 0$)	Infiniment grands négatifs (ign)	Infiniment grands positifs (igp)	Nombres non standard
	Infini. petits (ip : ipn ou ipp)	Non st. inf. pr. de réels non nuls ($x - r \approx 0$, $x \neq r$)			

3. Propriétés des nombres hyperréels

Les propriétés algébriques de $\mathbf{R}$ sont conservées mais "étendues" à $\bar{\mathbf{R}}$, de la même manière que, dans d'autres circonstances bien connues de mes élèves, on plonge $\mathbf{R}$ dans l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Ainsi, la collection $\bar{\mathbf{R}}$ de tous les nombres standard ou non est ordonnée en prolongeant l'ordre des réels standard de manière à respecter les règles « naturelles » suivantes : tout nombre compris entre deux ip (resp. lmt) est un ip (resp. lmt), tout lmt est inférieur à tout igp et supérieur à tout ign, tout nombre supérieur (resp. inférieur) à un igp (resp. un ign) est un igp (resp. ign). De plus, quelques règles arithmétiques additionnelles vont être définies sur $\bar{\mathbf{R}}$. Ces dernières, qui sont parfois attribuées à Leibniz qui les avaient formulées dans les grandes lignes et avec la rigueur et le langage de son époque, sont intuitivement fort "naturelles" et peuvent être démontrées [Boffa-Petry]. Nous allons toutefois nous contenter de les citer sous forme de tableaux faciles à lire, mais auparavant nous allons en suggérer une à l'aide de figures tracées à l'aide du logiciel *Mathematica*, toutes les autres règles de Leibniz pouvant être illustrées semblablement. Les figures ci-dessous illustrent la règle selon laquelle la somme de deux infiniment petits est infiniment petite.



3.1. Règles pour l'opposé et l'inverse d'un hyperréel (un signe – signifiant que l'expression en question n'est pas définie)

x	ign	appr < 0	ipn	0	ipp	appr > 0	igp
$-x$	igp	appr > 0	ipp	0	ipn	appr < 0	ign
$\frac{1}{x}$	ipn	appr < 0	ign	-	igp	appr > 0	ipp

3.2. Règles relatives à l'addition (un signe ? correspondant à une indétermination)

$x + y$	ign	appr	iprz	igp
ign	ign	ign	ign	?
appr	ign	lmt	appr	igp
iprz	ign	appr	iprz	igp
igp	?	igp	igp	igp

3.3. Règles relatives à la multiplication

$x \times y$	ig	appr	ip	0
ig	ig	ig	?	0
appr	ig	appr	ip	0
ip	?	ip	ip	0
0	0	0	0	0

Il convient encore d'énoncer les règles algébriques concernant la *partie standard* d'un hyperréel limité x : il s'agit de l'unique réel, noté $st(x)$, qui est infiniment proche de x ; ces règles sont "attendues" puisque l'on a, pour des nombres non standard a et b limités,

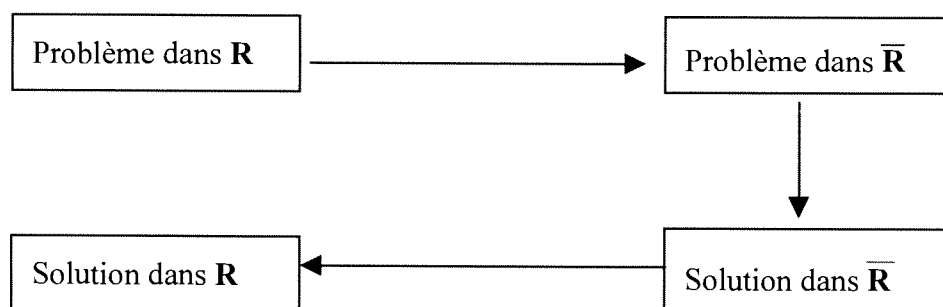
$st(a+b) = st(a)+st(b)$, $st(a-b) = st(a)-st(b)$, $st(ab) = st(a)st(b)$, $st(a/b) = st(a)/st(b)$ lorsque $st(b) \neq 0$; de plus, $st(a) < st(b)$ entraîne $a < b$, mais $a < b$ entraîne $st(a) \leq st(b)$. Attirons l'attention sur la possibilité de trouver deux nombres (non standard) a et b tels que $a < b$ avec $st(a) = st(b)$, ainsi qu'en attestent de nombreux exemples, dont celui d'un infiniment petit positif dont la partie standard est nulle.

4. Enoncé intuitif du principe fondamental de l'Analyse Non-Standard

L'idée de base est que toute "propriété standard", c'est-à-dire portant sur des réels standard, peut être étendue de façon naturelle et unique à $\bar{\mathbf{R}}$; inversement, la restriction à $\mathbf{R}$ de cette propriété dans $\bar{\mathbf{R}}$ redonne inévitablement la propriété standard initiale.

Bien sûr, seules les propriétés des réels standard sont intéressantes car, comme l'ont écrit A. Deledicq et M. Diener, *les objets non standard sont des objets soit inaccessibles parce que trop lointains, soit imperceptibles parce que trop petits, soit imperceptiblement proches d'un objet standard qui en serait "l'ombre"; les objets standard sont alors les objets observables sur lesquels on peut "expérimenter"; de même une propriété standard est une propriété que l'on peut vérifier expérimentalement* [Gaud – Guichard – Sicre - Chrétien, p. 83].

Néanmoins, il est intéressant d'effectuer un détour par $\bar{\mathbf{R}}$ au sein duquel il est plus facile de travailler. La démarche suivie est bien connue en didactique théorique puisqu'elle consiste en une transposition précédant une dé-transposition du problème [Antibi-Brousseau] ; elle peut être visualisée par le schéma suivant :



L'intérêt de ce passage par $\bar{\mathbf{R}}$ avant de retourner vers $\mathbf{R}$ peut sembler artificiel, mais il s'avère extrêmement efficace car les propriétés non standard sont souvent très intuitives et, surtout, sont beaucoup plus simples à formuler et à vérifier dans $\bar{\mathbf{R}}$ que dans $\mathbf{R}$.

Il convient de remarquer qu'un semblable détour n'est pas rare en mathématiques : par exemple, des propriétés de géométrie plane se prouvent plus aisément en plongeant les figures considérées dans l'espace à trois dimensions, ou encore des propriétés algébriques de polynômes à variables réelles s'obtiennent plus facilement en évoluant dans le champ des complexes.

Le principe ébauché ci-dessus s'adapte aux fonctions numériques réelles : une fonction $f: \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, qui possède une propriété $\mathbf{P}$ dans $\mathbf{D}$ peut être prolongée par une et une seule fonction

$$\bar{f}: \bar{\mathbf{D}} \subset \bar{\mathbf{R}} \rightarrow \bar{\mathbf{R}},$$

qui possède également la propriété $\mathbf{P}$ dans $\bar{\mathbf{D}}$ qui est "l'extension naturelle" de $\mathbf{D}$ dans $\bar{\mathbf{R}}$; inversement, la restriction de $\bar{f}$ à $\mathbf{D}$ redonne f ; on a donc, pour tout x de $\bar{\mathbf{D}}$

$$\bar{f}(\text{st}(x)) = f(\text{st}(x)).$$

Mais, il ne faut pas oublier que seules les valeurs standard sont observables et dès lors intéressantes. Dans la suite, nous ne ferons aucune distinction entre f et $\bar{f}$.

Par exemple, les fonctions "sinus" et "cosinus" sont étendues pour être définies sur $\bar{\mathbf{R}}$ et l'on a, pour tous hyperréels x et y , l'égalité $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$. Par ailleurs, on peut introduire la fonction $f(x) = [x]$ qui, à tout hyperréel x positif, associe le plus grand entier

inférieur ou égal à x : cette fonction donne naissance à des entiers non-standard infiniment grands qui vont jouer ultérieurement un rôle important, principalement dans l'étude des suites et des séries [MCKinzie – Tuckey].

5. La notion de limite

Soient a et b deux réels standard quelconques et f une fonction dont on ne prendra évidemment les valeurs qu'en des points appartenant à son domaine de définition ¹.

On introduit la définition principale suivante qui est formulée dans $\overline{\mathbf{R}}$ et correspond à l'image mentale de la notion de limite, à savoir que $f(x)$ se rapproche imperceptiblement de b lorsque x s'approche suffisamment de a :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$ pour tout nombre x infiniment proche mais différent de a (ou, de façon équivalente, pour tout hyperréel x tel que $x - a$ est un infiniment petit), $f(x)$ est infiniment proche de b .

Remarquons que les nombres x considérés sont forcément non standard et que la fonction f peut ne pas être définie en a ; par exemple, en reprenant un exemple déjà traité intuitivement, on a $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^4}} = 0$.

Les autres définitions relatives aux limites finies s'introduisent aussi simplement ; elles sont faciles à interpréter et à illustrer à l'aide de fonctions élémentaires classiques :

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ pour tout nombre x tel que $x - a$ est un infiniment petit positif, $f(x)$ est infiniment proche de b ,
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ pour tout nombre x tel que $x - a$ est un infiniment petit négatif, $f(x)$ est infiniment proche de b ,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ pour tout nombre x positif et infiniment grand, $f(x)$ est infiniment proche de b ,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ pour tout nombre x négatif et infiniment grand, $f(x)$ est infiniment proche de b .

On définit de la même manière les « limites infinies » : on dit que, dans chacun des cinq cas considérés ci-dessus (à savoir $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty$), la fonction f *diverge* ou *tend vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque, pour tous les hyperréels x adéquats, $f(x)$ est infiniment grand positif (resp. négatif).

Le lecteur est invité à illustrer toutes ces définitions par des exemples concrets, construits au moyen de fonctions élémentaires classiques et traités, par exemple, à l'aide du logiciel *Mathematica*.

¹ Cette convention ne sera plus rappelée par la suite.

6. Prolongements

Les propriétés des limites sont essentiellement standard, mais la formulation non standard des définitions permet de travailler dans $\overline{\mathbf{R}}$ où les raisonnements sont aisés, courts et limpides. Toutes les propriétés classiques des limites se démontrent par des raisonnements fort intuitifs sans complication d'ordre technique provenant de quantificateurs présents dans la définition classique, ni de majorations qui semblent quelquefois artificielles. En guise d'unique exemple, démontrons que la limite d'un produit est le produit des limites. Supposons que lorsque x tend vers a , $f(x)$ possède b pour limite et $g(x)$ possède b' comme limite. Pour tout hyperréel x tel que $x - a$ est un infiniment petit, $f(x) \approx b$ et $g(x) \approx b'$, d'où

$$[f(x) g(x)] - b b' = [f(x) - b] g(x) + [g(x) - b'] b$$

est, d'après les règles de Leibniz, infiniment petit, car $f(x) - b \approx 0$, $g(x) - b' \approx 0$, $g(x)$ et b sont limités, tandis que le produit d'un limité et d'un infiniment petit est lui-même infiniment petit. Cette présentation sera avantageusement comparée à la preuve classique en terme de $\varepsilon - \eta$.

Une fois la notion de limite introduite et ses propriétés démontrées, la suite du cours de calcul différentiel et intégral peut se poursuivre de manière « classique », avec seulement quelques aménagements de vocabulaire. Ainsi, la notion de continuité est particulièrement aisée à présenter dans cette théorie : une fonction f est dite continue en a si, pour tout hyperréel x infiniment proche de a , $f(x)$ est infiniment proche de $f(a)$: cette formulation rejoint l'idée intuitive fondamentale liée à cette notion. Une fonction f est dérivable en a si, pour tout hyperréel ε infiniment petit, le quotient $\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ est limité et indépendant de ε : sa partie standard vaut alors le nombre dérivé $f'(a)$. La notion d'intégrale définie d'une fonction f s'obtient aisément à partir de celle d'une fonction étagée partout infiniment proche de f , l'intégrale d'une fonction étagée φ étant facile à introduire puisqu'il s'agit de la somme des produits des valeurs de φ par les longueurs des différents sous-intervalles intervenant dans la définition de φ [I.R.E.M. de Picardie].

7. En guise de conclusion

Bien que cette présentation de l'analyse soit, pour moi, toute récente, je peux avancer qu'elle semble parfaitement bien adaptée à nos étudiants. En effet, elle insiste sur les idées fondamentales de l'analyse tout en restant fort intuitive et sans formalisme abstrait. De plus, l'introduction de la limite à l'aide des nombres infiniment petits me semble parfaitement bien adaptée pour des futurs économistes et gestionnaires qui sont souvent amenés à passer d'un modèle discret à un modèle continu : le recours aux ordres de grandeurs rend cette transition automatique et naturelle. D'ailleurs, les économistes utilisent de plus en plus en plus l'analyse non-standard dans leurs travaux de recherches [Handbook ; van den Berg ; Hildenbrand – Sonnenschein].

Bien entendu, ce cours devra être amélioré et il conviendra d'analyser les avantages et inconvénients de cette présentation, ainsi que de la comparer avec des approches similaires [Lutz – Makhlouf – Meyer].

BIBLIOGRAPHIE

- ANTIBI A. & BROUSSEAU G. [2000], La dé-transposition des connaissances scolaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **20**, n° 1, 7-40.
- BAIR J. [1993], *Mathématiques générales à l'usage des sciences économiques, de gestion et A.E.S.*, De Boeck Université, Bruxelles.
- BAIR J. & HAESBROECK G. [2001], *Mathématiques générales avec Mathematica*, dossier de l'IREM de Liège-Luxembourg, Liège.
- BOFFA M. & PÉTRY A. [1993], Des naturels non standard à l'analyse non standard, une introduction, *Mathématique et Pédagogie*, **94**, 39-54.
- DELEDICQ A. & DIENER M. [1989], *Leçons de calcul infinitésimal*, A. Colin, Paris.
- DIENER M. [1988], Enseigner l'analyse avec des ordres de grandeur, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **5**, 19-37.
- DIENER F. & DIENER M. [1995], *Nonstandard Analysis in Practice*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.
- DIENER F. & REEB G. [1989], *Analyse Non Standard*, Hermann Editeurs des Sciences et des Arts, Paris.
- GAUD D., GUICHARD J., SICRE J.P. & CHRÉTIEN C. [1998], *Des tangentes aux infiniment petits*, Dossier de l'IREM de Poitiers.
- GAUTHERON V. [1998], Enseigner les débuts de l'analyse en utilisant des infinitésimaux, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **5**, 39-44.
- GAUTHERON V. & ISAMBERT E. [1996], Lire l'analyse non standard, in *Non Standard Analysis, Belgian Mathematical Society*, 29-49.
- GILBERT T. [1992], Qu'est-ce que l'analyse non standard ?, *Mathématique et Pédagogie*, **89**, 51-67.
- HILDENBRAND W. & SONNENSCHIN H. [1991], *Handbook of Mathematical Economics IV*, Chapter 39 Non-Standard Analysis with Applications to Economics, North-Holland.
- I.R.E.M. DE PICARDIE [2001], *Analyse en termes d'ordres de grandeurs : de l'intuition aux concepts*, I.R.E.M. de Strasbourg, 88 pages.
- KEISLER H.J. [1976], *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmid.
- MCKINZIE M. & TUCKEY V. [2001], Higher Trigonometry, Hyperreal Numbers and Euler's Analysis of Infinites, *Mathematics Magazine* **74**, n° 5, 339-368.
- LUTZ R., MAKHLOUF A. & MEYER E. [1996], *Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : les réels dévoilés*, Publication de l'A.P.M.E.P. **103**, Paris.
- PÉTRY A. [1995], Introduction à l'analyse non standard ou la redécouverte des infiniment petits, in « *Les bases scientifiques de l'étude du milieu* », par Aghion J. – Depireux J., CSIPWIC, Liège.
- PÉTRY A. [1996], Balade en analyse non standard sur les traces de A. Robinson, in *Non Standard Analysis, Belgian Mathematical Society*, 1-28.
- PÉTRY A. [1998], Enseigner l'Analyse sur base des méthodes non standard, deux aspects : microscope et ensembles internes, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **5**, 45-62.
- ROBERT A. [1985], *Analyse Non Standard*, Presses Polytechniques Romandes.
- ROBINSON A. [1966], *Non-standard analysis*, North-Holland Pub. Comp., Amsterdam.
- VAN DEN BERG I. [2000], *Principles of Infinitesimal Stochastic and Financial Analysis*, World Scientific Pub.

Jacques Bair,
 Université de Liège,
 Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales,
 7 Boulevard du Rectorat,
 B31,
 4000 Liège, Belgique
 J.Bair@ulg.ac.be.