

CATHERINE CRONCIN, BRIGITTE JAUFFRET, ABDENACER MAKHLOUF,
NICOLE NICOLAI et CLAUDE SERRIS

SUR L'APPROCHE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR ABSOLU DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Résumé. L'objectif de notre atelier est de présenter, à partir d'une série d'activités, les concepts de l'Analyse (limites, dérivées, intégrales). L'approche est fondée sur l'usage de notions d'ordres de grandeur absolus (nombres très grands, modérés ou très petits) issues d'un travail de réflexion mené dans les années 90 par E.Meyer, A.Makhlouf et R. Lutz et publié dans la brochure 103 de l'APMEP. L'adaptation pédagogique a été menée et expérimentée par des enseignants du groupe GROG en Alsace et en Picardie.

1. Le cadre logique

L'introduction des ordres de grandeur peut s'obtenir en se plaçant dans le cadre de la théorie des ensembles et en introduisant le prédicat unaire « explicité » avec les axiomes suivants :

- A1. 1 est explicité.
- A2. Si $x \in \mathbb{N}$ est explicité, alors tout $y < x$ l'est aussi.
- A3. Si x et y sont des entiers explicités, alors $x + y$, xy et x^y sont explicités.
- A4. Il existe un $x \in \mathbb{N}$ qui n'est pas explicité.

Définition

Un entier non explicité est dit très grand.

Définition des ordres de grandeur des nombres réels

- 1. Un nombre réel est très grand positif (resp. négatif) si sa partie entière (resp. l'opposé de sa partie entière) est très grande.
- 2. Un réel x est très petit (noté tp) si $x=0$ ou $1/|x|$ est un très grand positif.
- 3. Un réel x est modéré si $|x|$ n'est pas un très grand positif. Ceci est équivalent à $\lfloor |x| \rfloor$ est un entier explicité.
- 4. x est explicité s'il est bien défini dans la théorie des ensembles.

Règles de Leibniz

modéré+modéré = modéré
tp + tp = tp

modéré $\times$ modéré = modéré
tp $\times$ modéré = tp

2. Vers un équivalent de la notion de limite externe aux mathématiques classiques

Il s'agit d'introduire les ordres de grandeurs dans l'ensemble des entiers et des réels, ce qui est une bonne occasion pour parfaire la présentation de ces ensembles avec les élèves. Ensuite, grâce à une analyse rigoureuse sur les nombres, évaluer une expression numérique à un très petit près, ce qui prépare le terrain à l'Analyse sur les fonctions.

2.1. Ecriture décimale des nombres très petits

- a) Quelle est la 1 000 000 000^{ème} décimale d'un nombre très petit ?
- b) Que dire des décimales d'un réel très petit ?

2.2. Ordres de grandeur : très petit, modéré ou très grand ?

- Préciser l'ordre de grandeur des nombres 1^3 , $1^{100\,000\,000}$, où ∞ est un entier très grand.
- Même question pour 2^3 , $2^{100\,000\,000}$, 2^∞

2.3. Nombres très proches

Deux nombres réels sont dits **très proches** si leur différence est très petite, c'est-à-dire, si elle est nulle ou si la valeur absolue de son inverse est très grande. On note $x \approx y$.

- Soient a, a', b, b' des nombres réels tels que $a \approx a'$ et $b \approx b'$. A-t-on $ab \approx a'b'$?
- Soient a et b deux réels non nuls tels que $a \approx b$. A-t-on $\frac{1}{a} \approx \frac{1}{b}$.
- Soit h un réel très petit. Démontrer que $\sqrt{1+h} \approx 1$
- Donner l'ordre de grandeur de chacun des nombres suivants. Si le nombre est modéré, préciser le réel explicité très proche :

$$\frac{h}{h^2+5h} \text{ avec } h \text{ tp}, \quad \frac{2\omega+1}{\omega+3} \text{ avec } \omega \text{ tg}, \quad \frac{3a+1}{a-2} \text{ avec } a \approx 2; a \neq 2, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{h}\right) \text{ avec } h \text{ tp}.$$

L'introduction des ordres de grandeur amène à des discussions approfondies sur les nombres et permet de donner très naturellement la définition de la limite suivante :

Définition

Soit f une fonction explicitée $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \approx 0 \text{ alors } f(x) \approx 0$

3. Dérivation

3.1. Vitesse instantanée

Un mobile en chute libre suit approximativement la loi $D(t)=5t^2$ (distance parcourue $D(t)$ en mètres, temps t en secondes).

On sait calculer la vitesse moyenne sur un intervalle de temps Δt . On peut ainsi déterminer cette vitesse moyenne sur des intervalles de temps d'une seconde, entre $t=0$ et $t=1$, puis $t=1$ et $t=2$, etc.

On conçoit ainsi que la vitesse du mobile n'est pas constante : elle varie avec t . On se fixe comme but de déterminer la vitesse atteinte à l'instant $t=10$. Comment parvient-on à définir ce nombre à l'aide des notions liées aux ordres de grandeur ?

3.2. Tangente à une courbe

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x)= 4x - x^2$. Soit A le point d'abscisse 1 de $\mathbf{P}$, représentation graphique de f . Soit M le point d'abscisse x , variable, de $\mathbf{P}$.

- Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM).
- On suppose que M varie en restant très proche de A , c'est-à-dire que $x=1+h$, avec h tp. On note alors D_h la droite (AM). Que devient alors l'expression du coefficient directeur de D_h ? Déterminer complètement l'équation réduite de D_h .
- Si l'on prend deux réels très petits h et h' , les droites D_h et $D_{h'}$ sont distinctes, avec des coefficients directeurs différents.

On considère le point de D_h et le point de $D_{h'}$ qui ont pour abscisse 1000. Calculer la différence de leurs ordonnées. Quel est l'ordre de grandeur de cette différence ?

Plus généralement, que dire de la différence des ordonnées de deux points de D_h et $D_{h'}$ qui ont la même abscisse modérée a ?

Décrire ce qui se passe « visuellement » sur un graphique pour les droites D_h . On cherche maintenant à préciser ce phénomène :

- d) Prouver que les coefficients directeurs des droites D_h sont tous très proches d'un réel explicité m . Écrire l'équation réduite de la droite ?, passant par A et de coefficient directeur m . Quel rôle joue cette droite pour le faisceau des droites D_h sur le graphique ?

3.3. Synthèse des exercices précédents

La définition du nombre dérivé d'une fonction en un point à l'aide des notions liées aux ordres de grandeur peut être formulée ainsi.

Définition.

Soit f une fonction explicitée et a un nombre explicité. Le nombre dérivée de la fonction f en a est un nombre explicité (quand il existe) très proche de l'expression $\frac{(f(a+h)-f(a))}{h}$ avec h très petit.

3.4. Dérivabilité

- Montrer que la fonction « inverse » $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbf{R}^*$, est dérivable en $x=2$, et calculer $f'(x)$.
- Montrer que la fonction « racine » $r: x \rightarrow \sqrt{x}$ pour $x \in [0; +[$ n'est pas dérivable en $x=0$.
- Montrer que par contre, la fonction « racine » est dérivable en $x=1$ et calculer $r'(1)$.

4. Aires et intégrales

4.1. Aire sous un arc de parabole

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x)=x^2$.

La représentation graphique P de f est un arc de parabole. On cherche l'aire de la portion de plan limitée par l'axe (Ox) , P , et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

Définissons une fonction en escalier ? de la façon suivante :

φ prend les mêmes valeurs que f aux abscisses

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{n}, x_2=\frac{2}{n}, x_3=\frac{3}{n}, \dots, x_{n-1}=\frac{n-1}{n}, x_n=1$$

et reste constante sur les intervalles

$$\left[0; \frac{1}{n}\right[, \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right[, \left[\frac{2}{n}; \frac{3}{n}\right[, \dots, \left[\frac{n-1}{n}; 1\right[,$$

avec n entier très grand

Nous appellerons « intégrale de φ entre a et b » le nombre noté

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1}-x_k) \text{ où } c_k=f\left(\frac{k}{n}\right)$$

- a) Prouver que, pour tout x de $[0 ; 1]$, on a $f(x) \approx \varphi(x)$.
- b) Prouver que $\int_0^1 \varphi$ est un réel modéré très proche d'un réel explicité. Quelle mesure de l'aire sous l'arc de parabole obtient-on ainsi ?

5. Prolongement

5.1. Ombre d'un nombre réel

Les questions suivantes nécessitent un axiome supplémentaire :

Tout réel modéré x est très proche d'un réel explicité (nécessairement unique) appelé son ombre, notée ${}^{\circ}x$.

- a) Prouver que cet axiome entraîne la propriété de Cauchy : Si (u_n) est une suite explicitée de nombres réels telle que pour tous entiers naturels m, n très grands on ait $u_m \approx u_n$, alors la suite est convergente.
- b) Soit une fonction explicitée f définie sur $[a ; b]$. Prouver que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (i) f est continue en tout point explicité de l'intervalle $[a ; b]$.
 - (ii) pour tous x, x' de $[a ; b]$, $x \approx x'$ implique $f(x) \approx f(x')$.

5.2. Application à l'intégration

Soit une fonction f , définie sur un intervalle $[a ; b]$.

On dit qu'elle est intégrable s'il existe un réel explicité très proche de $\int_a^b \varphi$ où φ est une fonction en escalier vérifiant pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \approx \varphi(x)$. Dans ces conditions ce réel est unique et s'appelle intégrale de f sur le segment $[a ; b]$. On le désigne par $\int_a^b f(x)dx$

Prouver que toute fonction f explicitée et continue est intégrable.

5.3. Déroulement de la séance

Les participants à l'atelier ont été disposés par groupe de 6 autour d'une table et encadrés par les animateurs. Chaque séquence est présentée à l'ensemble des participants. Ensuite les participants sont appelés à traiter les exercices individuellement avec bien sûr la possibilité de discuter entre eux et avec les animateurs. La séquence se termine par une discussion, souvent âpre, et une synthèse. Les réponses à tous ces problèmes se trouvent dans la brochure *Analyse en termes d'ordre de grandeur : de l'intuition aux concepts* (S182) de l'IREM de Strasbourg.

6. Conclusion

L'approche est très profonde et provoque une interrogation sur les mathématiques. Elle ne laisse aucune personne indifférente, car elle met le doigt sur des points très sensibles tel la distinction entre l'intuitif et le formel ainsi que la vision des nombres entiers et réels. Il est certain que la traduction formelle des notions intuitives pousse à plus de rigueur dans le raisonnement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LUTZ R., MAKHLOUF A. & MEYER E., [1996], *Fondement pour un enseignement en terme d'ordres de grandeur : les réels dévoilés*, Brochure APMEP N° 103.

[2] LUTZ R., MAKHLOUF A. & MEYER E. [1996], "L'enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : nécessité et fondement" Repère IREM.

[3] LUTZ R., MAKHLOUF A. & MEYER E. [1997], "L'enseignement de l'Analyse en l'an 2000", Bulletin vert de l'APMEP.

[4] GROG [2001], Analyse en termes d'ordre de grandeur : de l'intuition aux concepts ; IREM de Strasbourg S182.

[5] De nombreux documents sont consultables et téléchargeables à partir du site "Enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur", du serveur de l'académie de Strasbourg :

[http://www.ac-strasbourg.fr/rubrique mathématique en pédagogie](http://www.ac-strasbourg.fr/rubrique_mathématique_en_pédagogie)

ou plus directement

http://www.nt.ac-strasbourg.fr/microsites/maths_01/index.htm

Catherine Roncin
5 rue du Marais
60700 Saint-Martin-Longueau
catherine.roncin@ac-amiens.fr

Brigitte Jauffret,
8 rue Ambroise Paré
60180 Nogent-sur-Oise
brigitte.jauffret@ac-amiens.fr

Abdenacer Makhlouf
Université de Haute Alsace
Faculté des Sciences et Techniques
4, rue des frères Lumière
68093 Mulhouse cedex
N.Makhlouf@uha.fr

Nicole Nicolai,
4 rue Placeaux
60550 Verneuil-en-Halatte
n.nicolai@wanadoo.fr

Claude Serris
3 rue La Rochefoucault
60180 Nogent-sur-Oise
claud.serris@ac-amiens.fr