

APPROCHE INTUITIVE DU CONCEPT DE LIMITE

Résumé. Plusieurs recherches au niveau international ont relevé de nombreuses difficultés et obstacles liés au concept de limite. Ces difficultés se situent à l'intersection de plusieurs niveaux : didactique, cognitif et méta-cognitif. En particulier la construction de ce concept exige un long travail didactique qui, en s'appuyant sur les intuitions les plus spontanées et immédiates, puisse les faire évoluer graduellement. Élément essentiel de cette évolution est la prise en compte et mise en discussion des convictions propres aux élèves.

L'approximation constitue selon nous une ressource précieuse pour une première rencontre avec l'infini potentiel, qui s'avère un passage crucial vers l'infini actuel impliqué dans la notion de limite. Cet article présente deux activités qui sont fondées sur cette ressource et qui ont l'objectif de faire émerger et de mettre en doute certaines convictions présentes chez les élèves.

1. Introduction

L'enseignement de l'analyse en Italie est présent dans tous les curricula (17-18 ans). Pourtant les concepts de limite, dérivée et intégrale, sont introduits de façon plutôt formelle, avec beaucoup de détails techniques et de démonstrations de théorèmes. Leurs applications se limitent aux exercices de routine avec la conséquence d'un apprentissage souvent mécanique et superficiel (Furinghetti et Paola (1991)).

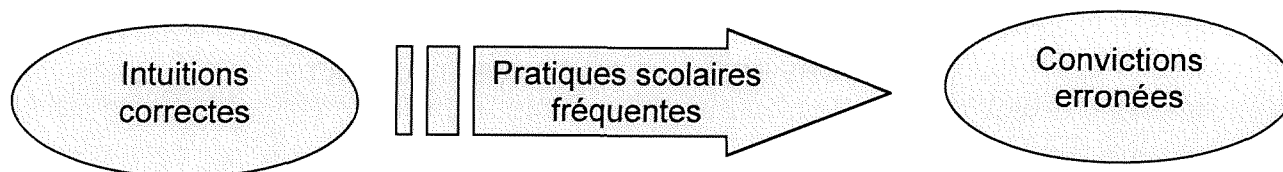
Plusieurs recherches au niveau international ont relevé de nombreuses difficultés et obstacles liés au concept de limite :

- d'ordre épistémologique (Brousseau (1998), Sierpiska (1985)), dus à des raisons internes aux mathématiques mêmes,
- d'ordre didactique (Artigue (1998), Brousseau (1998), CREM (1995), Groupe aha (1999)), dus aux pratiques d'enseignement peu efficaces,
- d'ordre cognitif (Cornu (1991), Dubinsky (1991), Sfard (1992), Tall & Vinner (1981), Tall (1996)), dus aux processus d'abstraction et de conceptualisation impliqués, d'ordre méta-cognitif (Zan (2001, 2002)), dus à l'ensemble des attitudes qu'adoptent les élèves dans leur rapport au savoir mathématique. Notre recherche se focalise sur l'interaction entre ces trois derniers aspects (didactique, cognitif et méta-cognitif), qui évidemment s'influencent réciproquement.

D'autres caractéristiques saillantes marquent et fondent l'activité de notre groupe :

- la verticalité, c'est-à-dire que tous les niveaux scolaires y sont représentés, tant chez les élèves que chez les membres du groupe,
- la prééminence accordée aux intuitions des élèves,
- la nécessité d'une familiarisation précoce avec l'infini.

En particulier, dans ces dernières années, nous avons conçu et réalisé une séquence d'activités diagnostiques des intuitions primaires des étudiants, autour de l'idée de limite. Celles-ci montrent, d'une part, l'existence d'intuitions propices chez les élèves les plus jeunes, d'autre part, le manque d'évolutions significatives au cours du parcours scolaire (Dallanocce et al. (2000), Alberti et al. (2001)). La pratique didactique, avec son insistance sur les techniques et sa formalisation précoce, semble ignorer ces idées naïves et générer parfois des convictions erronées :

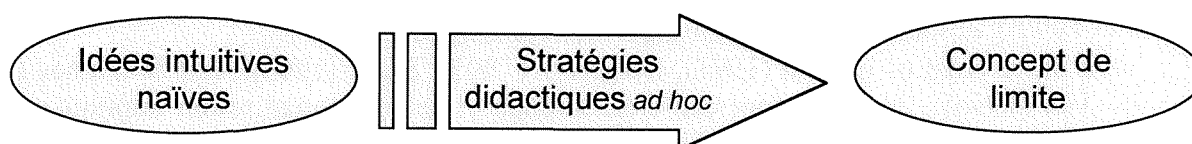


2. Notre proposition

Nous faisons l'hypothèse que les concepts complexes comme celui de limite ne peuvent être vraiment compris qu'après un long travail didactique. Celui-ci doit s'appuyer sur les intuitions les plus spontanées et immédiates pour pouvoir engendrer chez l'élève un cadre cohérent et solide d'images mentales. Il est alors nécessaire de conduire des activités d'explicitation et d'orientation des idées intuitives, pour qu'elles puissent évoluer graduellement. La formation des concepts pourra, ainsi, suivre le passage naturel du concret à l'abstrait. La formalisation ne serait ainsi plus vécue comme artificielle, mais, apparaîtrait comme une exigence fondamentale, dont les élèves mêmes percevront la nécessité : *"il est intéressant de construire l'analyse en termes d'objets mentaux jusqu'au moment où l'on perçoit que ceux-ci ne suffisent pas et où on peut comprendre les raisons qui imposent la formalisation en ε et δ "* (CREM (1995)).

Nous sommes aussi conscients que cette évolution n'est pas vraiment facile et naturelle, et que, souvent, de véritables conflits se vérifient entre les intuitions « naïves » et les concepts mathématiques en train d'être formés. Dans ce processus, on ne peut pas ignorer l'aspect méta-cognitif : les attitudes négatives envers soi-même ou envers les mathématiques risquent de devenir des obstacles supplémentaires pour l'apprentissage.

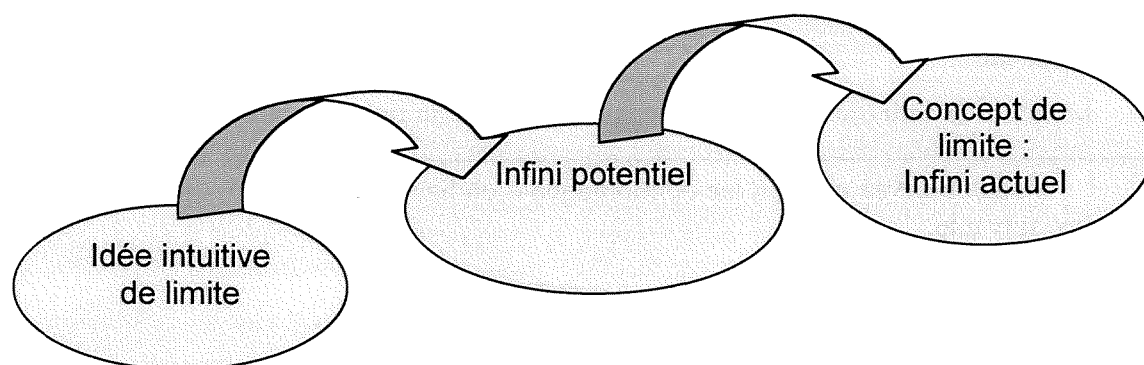
Il devient donc nécessaire de mettre au point des stratégies didactiques qui favorisent, d'un côté, le processus de conceptualisation et, de l'autre, la prise de conscience du « monde intérieur » d'idées, de convictions et de craintes.



Le travail de l'enseignant, doit, selon nous, se situer à trois niveaux différents :

- au niveau des contenus mathématiques, en saisissant les occasions, les plus favorables, présentes dans tous les programmes scolaires,
- au niveau méthodologique, en créant des situations d'apprentissage riches de sens qui permettent de fixer l'attention sur la stratégie (processus) plutôt que sur le résultat (produit),
- au niveau méta-cognitif, en permettant aux élèves d'explicitier et discuter leurs croyances implicites.

En ce qui concerne le premier niveau, pour construire le concept de limite, qui implique le recours à l'infini actuel, nous croyons essentiel le passage à travers l'infini potentiel.



Dans ce papier, nous présenterons des activités sur le thème de l'approximation qui peuvent réaliser le premier de ces passages.

Un autre terrain que nous avons reconnu riche de possibilités, aussi pour la perspective du deuxième passage, est celui des suites géométriques (Grugnetti et Rizza (2002)).

3. L'approximation

Comme nous venons de le dire dans le paragraphe précédent, l'approximation, en tant qu'idée de rapprochement toujours améliorable et contrôlable vers une limite théorique, constitue selon nous une ressource précieuse pour un premier contact avec l'infini potentiel.

D'autre part, comme le montrent Alberti et al. (2001) au fur et à mesure que l'élève avance dans sa scolarité, l'approximation semble perdre de sa légitimité et devenir quelque chose d'étranger, presque un empêchement au développement de l'activité mathématique. Les stratégies de résolution « empiriques » sont progressivement négligées en faveur de techniques de calcul de plus en plus sophistiquées. La pratique scolaire, avec son contrat implicite, contribue à renforcer chez les élèves la conviction que pour résoudre chaque problème il faut explicitement utiliser de la mathématique « véritable » ; en particulier,

1. au niveau des stratégies : chaque problème doit se résoudre par une formule ou un algorithme (Conv 1),
2. au niveau des résultats : chaque problème doit générer un « beau » résultat, exprimé par un nombre entier ou avec peu de chiffres décimaux (Conv 2).

Dans l'école italienne, on ne souligne pas suffisamment le fait que, en réalité, beaucoup de problèmes ne vérifient pas les conditions 1 et 2 et que les méthodes d'approximation constituent un aspect essentiel des mathématiques. En particulier l'analyse, en tant que moyen de modélisation du monde réel, ne peut pas ignorer les problèmes d'approximation qui surgissent de chaque opération de mesure. Même la définition ϵ - δ de limite peut être interprétée en termes d'approximation : on établit d'abord l'erreur qu'on est disposé à accepter (ϵ) et par conséquent on choisit une stratégie (δ) qui permet de ne pas dépasser tel seuil de tolérance.

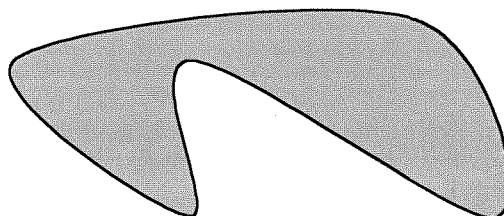
Nous montrons ici deux activités qui permettent, d'un côté, d'explicitier les convictions des élèves (Conv 1 et Conv 2), de l'autre, de rendre à l'approximation en mathématiques son statut de dignité et de pertinence.

Les activités ont été proposées à différents niveaux scolaires. Après une présentation générale des résultats, nous nous focaliserons sur la situation d'une classe de seconde (16 ans), où nous avons réalisé une discussion collective, et dont nous avons analysé plus en détail les réponses des élèves.

4. Le petit lac

La première activité a été proposée aux élèves, par la fiche suivante :

Vous observez un petit lac de montagne d'en haut et vous le dessinez en obtenant la figure suivante.



Qu 1 : Peut-on mesurer l'aire de la figure grise ?

Qu 2 : Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

4.1. Analyse a priori

Il s'agit d'une situation problématique, concernant la détermination de l'aire d'une figure irrégulière, assez rare dans l'école italienne, surtout au niveau secondaire où l'attention est au contraire consacrée avant tout au calcul d'aires de figures typiques (polygones et cercles), tandis que les méthodes empiriques de l'école primaire sont progressivement abandonnées.

Avec ce problème, nous envisageons de vérifier si les élèves :

- admettent la possibilité de calculer l'aire d'une figure irrégulière,
- sont disposés à utiliser des méthodes empiriques au lieu de règles et formules,
- prennent conscience de l'approximation nécessaire pour la mesure.

Ce problème est particulièrement indiqué pour présenter le thème de l'approximation, profitant du conflit qu'il provoque entre l'intuition que l'aire existe et l'impossibilité de la calculer exactement. De plus, en tant que problème de mesure, il favorise :

- le passage graduel des techniques opérationnelles à des constructions théoriques de plus en plus avancées,
- la maîtrise contemporaine de différents registres (graphique et numérique),
- la transposition en classe du développement historique du calcul infinitésimal.

L'emploi « vertical » de ce type d'activités, c'est-à-dire à tous les niveaux scolaires, avec, évidemment, des nuances et des possibilités d'approfondissement différentes, est, selon nous, très important.

4.2. Analyse a posteriori

L'activité a été proposée dans 15 classes, Nous montrons ici les résultats de 4 d'entre elles.

Le tableau suivant (Tableau 1) indique pour chaque classe, les pourcentages¹ des réponses positives, des réponses négatives et des élèves qui ne répondent pas à la première question (Qu 1) :

QUESTION 1

Classe	Age	Nombre	% oui	% non	% n. r.
Cl 1	9	19	0	100	0
Cl 2	13	22	9	82	9
Cl 3	14	22	59	41	0
Cl 4	16	12	67	17	17

Tableau 1

Nous pouvons remarquer que les réponses positives (« On peut mesurer l'aire de la figure ») augmentent avec l'âge, tandis que celles qui sont négatives diminuent. Les résultats semblent indiquer une bonne influence de l'enseignement sur la construction du concept d'aire. Mais nous montrerons, par l'analyse des réponses à la deuxième question (Qu 2) (Tableaux 2 et 3), que, même si l'existence de l'aire est affirmée, beaucoup d'élèves n'indiquent pas une stratégie de mesure ou choisissent des voies erronées. Les convictions des élèves semblent ici s'opposer à l'acceptation des méthodes de résolution approchées, nécessaires pour la résolution effective du problème.

4.2.1. « L'aire ne peut pas être mesurée car... »

Les justifications du « non » ont été classées par rapport aux arguments mathématiques utilisés.

Selon les élèves, on ne peut pas mesurer l'aire car :

- N1 la figure est courbe, est irrégulière, n'est pas régulière ... (description exclusivement qualitative),
- N2 la figure n'a pas de côtés, qu'on peut mesurer... (description avec introduction d'aspects quantitatifs),
- N3 la figure n'est pas un polygone, n'est pas un cercle... (impossibilité de se ramener à des figures connues),
- N4 il n'y a pas de formules pour cette aire... (absence de formules spécifiques),
- N5 Autres réponses (aucune justification ou réponses non pertinentes).

QUESTION D2 : « non »

Classe	N1 (%)	N2 (%)	N3 (%)	N4 (%)	N5 (%)
Cl 1	53	11	5	0	32
Cl 2	27	23	23	0	9
Cl 3	14	14	5	9	0
Cl 4	8	0	0	8	0

Tableau 2

¹ Le calcul de pourcentages sur des effectifs aussi faibles n'a pas beaucoup de sens d'un point de vue statistique, il n'est indiqué ici que pour faciliter la lecture comparative des différentes lignes de ce tableau et des suivants.

Nous remarquons que, chez les élèves les plus jeunes (9 ans), les justifications qualitatives (N1) sont les plus nombreuses : Anna : « [L'aire ne peut pas être mesurée car la figure] a des vagues » ; Martina : « [L'aire ne peut pas être mesurée car la figure] est courbe ».

Certaines caractéristiques non pertinentes sont aussi invoquées et classées dans les réponses (N5). Sara : « [L'aire de la figure grise ne peut pas être mesurée car] les couleurs ne se mesurent pas ».

Dans la classe Cl 2 (13 ans), le recours à des figures connues (N3), en particulier au cercle, dont les élèves viennent d'étudier l'aire, devient plus évident. Samuele : « [L'aire de la figure ne peut pas être mesurée car] les points ne sont pas à égale distance du centre et ils n'ont pas de rayons ou de diamètres ».

Chez les élèves plus âgés (14 et 16 ans) les justifications deviennent de plus en plus « mathématiques » : l'impossibilité, de résoudre le problème, est attribuée aussi à l'absence de formules (N4). Elena : « Selon moi, l'aire de la figure grise ne peut pas se mesurer parce qu'il n'existe aucune formule mathématique pour la calculer ».

4.2.3. « L'aire peut être mesurée car... »

Les justifications du « oui » ont été classées par rapport au degré d'explication de la stratégie de mesure à adopter.

Selon certains élèves, on peut mesurer l'aire mais...

O1 je ne sais pas comment, je n'ai pas les outils nécessaires...,

O2 il n'y a pas de formules....

D'autres élèves affirment qu'on peut mesurer l'aire car...,

O3 on peut transformer la figure en un polygone de la même aire...,

O4 on peut découper la figure en polygones ou la quadriller...,

O5 Autres stratégies.

QUESTION 2 : « oui »

Classe	O1 (%)	O2 (%)	O3 (%)	O4 (%)	O5 (%)
Cl 1	0	0	0	0	0
Cl 2	0	0	5	5	0
Cl 3	9	5	9	32	5
Cl 4	17	17	0	33	0

Tableau 3

Il y a un bon pourcentage d'élèves qui déclarent ne pas savoir calculer l'aire (O1, O2) parce qu'ils n'ont pas les outils ou les formules nécessaires. Même si l'existence de l'aire est admise, on retrouve ici des argumentations semblables à celles de la table précédente ; en particulier, on évoque la nécessité de formules, dont on ne dispose pas : Federica (16 ans) « Oui, mais je ne sais pas avec quelles formules on peut trouver l'aire ».

La première tentative effective de résolution du problème est celle de transformer la figure en un polygone de même aire (O3), sans considérer que l'égalité des périmètres n'implique pas celle des aires. Valentina (14 ans) : « Selon moi oui, [on peut mesurer l'aire], avec un procédé un peu long. On doit contourner la figure avec un fil aussi long que le contour. Puis, on dispose le fil de façon à former un rectangle et on calcule l'aire avec la formule $b \cdot h$ ».

Les réponses correctes font recours à des découpages en polygones ou à quadrillages (O4). Cependant on n'admet pas toujours explicitement que la méthode suivie produit une approximation. Même ceux qui le font, semblent lui attribuer une connotation négative, témoignée par l'emploi du terme « approximatif », au lieu d'« approché ». Leonardo (16 ans) :

« Peut-être que oui. En dessinant un treillis avec de très petits carrés, on pourrait peut-être avoir une idée approximative ». L'idée dynamique d'itération et d'approchement de plus en plus améliorée n'est présente dans aucune réponse.

Pour conclure l'analyse du tableau 3, nous soulignons que le pourcentage de la réponse O5 (5%) ne concerne qu'une seule réponse ; il s'agit d'une méthode « physique » proposée par un élève de 14 ans, Christopher. Il écrit : « Selon moi oui, [on peut mesurer l'aire] en découpant la figure et en la pesant ; après avoir obtenu le poids (la masse), la densité et ensuite obtenir le volume. Puis on doit calculer l'aire ».

4.3. Discussion

Dans une classe de seconde (indiquée par Cl 4 dans les tableaux 1,2,3 précédents), nous avons discuté, avec les élèves, de leurs réponses. Notre objectif était d'enquêter sur les convictions des élèves, en particulier à propos de la nécessité de formules (Conv 1) et de la nature du résultat attendu (Conv 2), et, par conséquent, de faire émerger les résistances à reconnaître la légitimité de l'approximation.

Nous avons, avant tout, comparé les réponses différentes et, assez tôt, la classe est arrivée à l'accord sur la stratégie du quadrillage. Cependant quelques élèves ont émis des doutes à propos de la légitimité de la méthode : celle-ci n'était pas « précise » ou elle n'était pas « juste ». Nous avons, alors, demandé à la classe de donner une définition de ce qu'ils entendaient pour « mesurer d'une façon précise ». Pour les élèves cela a le double sens de :

1. couvrir toute la figure (Déf 1),
2. trouver comme résultat un nombre entier ou décimal, avec un nombre fini de décimales (Déf 2, celle-ci renvoie à la conviction Conv 2 du « beau » résultat)

Il semble exister pour les élèves un lien très fort entre ces deux définitions. Tout le monde est sûr que, par exemple, la mesure de l'aire d'un rectangle est précise dans le double sens de Déf 1 et Déf 2 ; d'ailleurs, cette certitude émerge en lien étroit avec la conviction Conv 1, de l'existence d'une formule. Le rapport entre les deux convictions Conv 1 et Conv 2 semble donc être celui d'une double implication :

$$\text{Conv 1} \Leftrightarrow \text{Conv 2}$$

Au contraire, dans le cas du petit lac, aucune des deux convictions ne semble être viable et la classe est désorientée face à l'impossibilité de « mesurer d'une façon précise ».

Ensuite la classe s'est posée le problème de « comment améliorer la précision ». Les stratégies proposées par les élèves ont été les suivantes :

- avec des carrés plus petits,
- avec d'autres polygones (des triangles, par exemple, qui semblent mieux suivre le contour de la figure).

L'intervention de l'enseignant a été nécessaire pour suggérer l'idée d'itération impliquée dans la première stratégie. Les élèves n'étaient pas tout à fait convaincus que le problème pouvait avoir plusieurs résultats (approchés), de plus en plus précis.

Ce qui était décidément déstabilisant était la possibilité effective de trouver un résultat « précis » à la fin du processus d'itération. L'avancement progressif semble produire toujours de nouveaux décimaux. Ce constat fait apparaître une conception inattendue : pour une élève, Federica, (Cl 3) il est impossible d'arriver au résultat parce que « les nombres ne peuvent pas être arrêtés » : elle est sûre que la mesure « exacte » est irrationnelle et qu'elle ne peut jamais être atteinte avec des approximations rationnelles.

En conclusion, le problème posé a certainement permis une certaine explicitation et remise en question des systèmes de convictions des élèves. Après la discussion, que nous considérons comme partie essentielle de l'activité, nous pouvons distinguer entre :

1. les convictions erronées qui résistent :
 - le problème posé n'est pas un véritable problème de mathématiques parce qu'on ne trouve pas un résultat « précis »,
 - vu qu'on ne peut pas le trouver, probablement le résultat « précis » n'existe pas,
 - les approximations ne sont pas de véritables résultats car :
 - i. il est impossible de choisir la meilleure, parmi elles, et il est difficile de les comparer,
 - ii. il n'existe pas une formule qui garantit un résultat exact exprimé avec un « beau » nombre (donc la validité du système $\text{Conv } 1 \Leftrightarrow \text{Conv } 2$).
2. les convictions correctes en train d'être construites :
 - beaucoup de problèmes exigent l'approximation, l'opération de mesure approchée ne donne pas un résultat unique,
 - la précision est toujours améliorable.

5. Le « jeu » de la cible

5.1. Description de l'activité

1. Les élèves et l'enseignant disposent d'une feuille blanche A4. L'enseignant dessine un point sur sa feuille et il donne les règles du jeu suivantes :
 - a. le vainqueur est celui qui saura dessiner sur son papier un point exactement à la même place que celui de l'enseignant,
 - b. pour déterminer opérationnellement le vainqueur, on pose la feuille de chaque élève sur celle de l'enseignant : Les deux points doivent coïncider exactement.
2. Les élèves jouent,
3. l'enseignant, sur un transparent, reporte le nuage des points, avec le numéro de l'élève relatif. Après avoir constaté que personne n'a touché le point, l'enseignant négocie un nouveau système de règles : il est demandé aux élèves de décider, respectivement, comment choisir le/les gagnants et comment le/les désigner opérationnellement. La définition de ce nouveau système de règles est à faire « à l'aveuglette », c'est-à-dire sans montrer le résultat collectif obtenu. On s'attend à construire une sorte de classement auquel est associée une suite de circonférences concentriques, comme dans le cas d'une cible,
4. l'enseignant dévoile le nuage des points avec l'ensemble des circonférences concentriques établi par la classe,
5. avec les nouvelles règles, les élèves jouent de nouveau,
6. l'enseignant demande s'il faut redéfinir les rayons des circonférences,
7. éventuellement les élèves jouent une troisième fois,
8. l'activité se conclut avec la consigne de rédiger individuellement la réponse à la question suivante : « À la lumière de ce qui s'est passé aujourd'hui, pourquoi peut-on accepter un résultat qui n'est pas exact ? Quand ? ».

5.2. Analyse a priori

5.2.1. Pourquoi un « jeu » ?

La présence des guillemets dans le titre est due au fait que, même si cette activité se présente sous la forme d'un jeu, nous sommes conscients que nous ne pouvons pas la considérer comme un véritable jeu au sens de la vaste littérature consacrée à cet argument.

Cependant, notre but didactique et de recherche se situe entre connaissances et méta-connaissances de l'élève. Il ne veut pas prendre en compte, en fait, seulement les connaissances mathématiques que l'élève possède, ou qu'il est appelé à posséder, mais aussi, les connaissances « individuelles et subjectives », que l'élève a sur soi-même, sur l'environnement et les mathématiques. Comme R. Zan (2002), nous avons justement appelé ces connaissances : « convictions ». Vu leur structure quasi-logique et leur organisation en grappes isolées, la modalité de « jeu » nous est, alors, par là plus favorable pour les révéler et pour mettre en doute leur domaine effectif de validité.

Même si cette activité ne peut non plus pas être considérée comme une situation véritablement adidactique, elle fait pourtant vivre des phases d'action, de validation, de formulation et d'institutionnalisation. En plus, elle assure une certaine dévolution du problème et permet la création de certains moments adidactiques.

5.2.2. Pourquoi ce « jeu » ?

La première hypothèse qui soutient le choix de cette activité est qu'il existe une forte analogie entre « possibilité de déterminer exactement une mesure » et « possibilité de déterminer exactement un point du plan ».

La deuxième hypothèse, que nous faisons, est que cette relation d'analogie étroite subsiste aussi au niveau des systèmes de convictions associées.

En travaillant, alors, sur les convictions inhérentes à la nature du jeu, (« le vainqueur est celui qui touche exactement le point, ou personne »), nous nous attendons à ce que, par prégnance analogique, il soit possible de conditionner et de modifier les croyances relatives à la mesure en mathématique (« soit la mesure peut être déterminée exactement, soit elle n'existe pas »).

5.2.3. Objectifs locaux

L'activité se propose d'agir à deux niveaux :

- déstabiliser la certitude de pouvoir toujours déterminer exactement une mesure. Ceci permet la remise en question de la puissance exclusive et exhaustive des formules, seules susceptibles de donner lieu à un résultat acceptable,
- discuter et légitimer un nouveau système de règles. Ceci permet de déplacer l'axe de l'attention de l'existence, ou non, d'un résultat (et d'une mesure) exact, et donc acceptable, à la qualité de l'approximation opérée.

5.2.4. Stratégies résolutives possibles

S1 : Jouer par hasard,

S2 : Jouer, en estimant la distance absolue de son propre point à celui de l'enseignant,

S3 : Jouer, en prenant en compte :

- la position de son propre point par rapport aux autres points,
- la suite de circonférences concentriques établies.

Il faut souligner que le passage d'une stratégie de type S2 à une stratégie de type S3, marque le passage d'une vision statique à une vision dynamique de l'approximation. Ce passage est favorisé, même s'il n'est pas obligé, par la répétition du jeu et par les discussions collectives qui concernent les fourchettes de tolérance admissibles.

Utiliser la stratégie S2 signifie adopter encore une vision de l'approximation comme une « opération rudimentaire de mesure » qu'on fait une seule fois. En revanche, utiliser S3, implique la prise de conscience, d'une part, de la suite des points convergents vers le point de l'enseignant, d'autre part, d'un processus itératif. L'approximation assume, alors, le caractère « dynamique » de procédé de mesure toujours améliorable.

5.2.5. Milieu et contrat didactique

Pour déstabiliser la conviction selon laquelle « il existe un et un seul vainqueur », nous l'avons supposée vraie (démonstration par l'absurde !) et l'avons désignée comme règle fondamentale du jeu.

Le résultat négatif de la première partie, avec ce premier système de règles, se révèle alors comme élément d'invalidation forte du système de convictions associées. La conviction d'un seul vainqueur ne résiste pas face à la rétroaction du milieu. Les règles fixées par l'enseignant engendrent un conflit, une rupture du contrat, et ouvrent la négociation d'un nouveau système de règles. Cette négociation se révèle significative pour un autre aspect : décider de la modalité à adopter pour définir des vainqueurs crée une ambiance favorable pour que le passage de la stratégie S2 à la stratégie S3 se fasse. En particulier la discussion sur l'utilisation du compas plutôt que de la règle graduée favorise la construction consciente d'une suite de circonférences de rayon toujours inférieur.

5.3. Analyse a posteriori

Nous avons proposé cette activité à 7 classes d'élèves de 13/14 ans et à des classes d'élèves de 17/18 ans.

Dans toutes les classes, le déroulement de l'activité a été presque pareil : après avoir joué la première fois, et avoir constaté l'inadéquation du premier système de règles, les élèves ont proposé comme vainqueur « celui qui est arrivé le plus près ».

Par contre, le problème de comment déterminer de façon opérationnelle le vainqueur a été difficile à surmonter. Le recours au compas n'a pas été immédiat, ainsi que l'admission de la possibilité de plusieurs vainqueurs.

Dans une classe de 14/15 ans, avant même de jouer pour la première fois, les élèves ont déclaré qu'il n'y aurait sûrement pas de vainqueur. L'activité s'est alors configurée comme moment de validation, plutôt que de conflit.

Dans d'autres classes (cinquième et première), nous avons observé des phénomènes d'interférence avec d'autres domaines des mathématiques (probabilité, théorie des erreurs en physique). Le lien analogique entre les deux activités (le petit lac et la cible) a été discuté de façon approfondie seulement dans une classe de seconde et il s'est révélé explicite seulement après le travail de médiation de l'enseignant.

6. Conclusions

L'activité du petit lac a permis de faire émerger certaines convictions, supposées présentes chez les élèves, probablement dues à la pratique didactique et d'en dévoiler d'autres, imprévues (Federica, Cl 3).

L'activité de la cible a permis de mettre en doute certaines de ces convictions, en plongeant les élèves dans un contexte problématique riche et inusuel. Les deux activités, ensemble, ont conduit les élèves à accepter la nécessité de l'approximation et sa légitimité en mathématiques.

Pourtant ces activités n'ont pas encore réussi à associer une valeur positive à l'approximation et à lui rendre son véritable statut mathématique ; les élèves n'ont saisi que partiellement l'approximation comme procédé.

Dans une prospective visée et par les résultats de notre recherche, nous espérons déstabiliser et corriger les convictions qui résistent encore. En particulier, Nous souhaitons miner la croyance que pour chaque problème existe toujours une formule (Conv 1) et un « beau » résultat (Conv 2) *vice-versa* (Conv 1 $\Leftrightarrow$ Conv 2). À ce propos, nous sommes maintenant en train de tester des activités concernant l'aire de rectangles où le rapport parmi les côtés est un nombre irrationnel.

Nous voudrions aussi avancer sur le terrain de l'approximation : il nous reste encore à achever le passage d'une vision statique à une vision dynamique de l'approximation, c'est à dire du concept de « résultat approché » à celui de « suite d'approximations » qui conduit à une limite. Nous poursuivrons ces objectifs par la conception et la mise en place d'autres activités de la même typologie que celle du « jeu » de la cible.

BIBLIOGRAPHIE

- ALBERTI N., ANDRIANI M. F., BEDULLI M., DALLANOCE S., FALCADE R., FOGLIA S., GREGORI S., GRUGNETTI L., MARCHINI C., MOLINARI F., PEZZI F., RIZZA A. & C. VALENTI [2001], Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite, *Riv. Mat. Univ. Parma*, (6) 3*, 1-21.
- ARTIGUE M. [1998], L'évolution des problématique en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18 (2), 231-262.
- BROUSSEAU G. [1998], *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage ed.
- Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) [1995], *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM.
- Cornu B. [1991], Limits, *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (ed.), Kluwer Academic Publisher, 153-166.
- DALLANOCE S., GRUGNETTI L., MOLINARI F., RIZZA A. & AL. [2000], A cognitive co-operation across different sectors of education, en Ahmed, Kraemer, Williams (eds.) *Proceedings of CIEAEM 51*, Chichester, Horwood Publishing, 297-303.
- DUBINSKY E. [1991], Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical thinking*, 95-126, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- DUVAL R. [1993], Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Sciences Cognitives et Didactique* 5, IREM de Strasbourg.
- FISCHBEIN E. [1973], Intuition, structure and heuristic methods in teaching Mathematics in A.G. Howson (ed) *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press.
- FISCHBEIN E. [1987], *Intuition in Science and Mathematics*, D. Reidel Publishing Company.
- FURINGHETTI F. & PAOLA D. [1991], The construction of a didactic itinerary of calculus starting from students concept images (ages 16 –19), *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 22 n. 5, 719-729.
- GILBERT T. & N. ROUCHE [2001], *La notion d'infini*, Normandie Roto Impression s.a.
- GROUPE AHA [1999], *Vers l'infini pas à pas (approche heuristique de l'analyse)*, DeBoeck, Wesmael Bruxelles.
- GRUGNETTI L., RIZZA A. & AL. [2002], Piccole intuizioni crescono : alcune attività per sviluppare idee intuitive a livello di scuola dell'obbligo en Malara N.A., Marchini C., Navarra G., Tortora R. (eds.), *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora editrice, Bologna.
- MARCHINI C. [1999], Il problema dell'area, *L'Educazione Matematica*, anno XX-serie VI.1, 27-48.
- SFARD A. [1992], On the dual nature of mathematical conceptions: reflexions on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational studies in mathematics*, Kluwer Academic Publisher, Netherlands 22, 1-36.
- SIERPINSKA A. [1985], Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble 6(1), 5-67.
- TALL D., VINNER S. [1981], Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational studies in mathematics* 12(2), 151-169.

- TALL D. [1996], Fonctions and Calculus, in A. J. Bishop et al. (eds), *International Handbook of Research in mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 289-325.
- ZAN R. [2001], Metacognizione e difficoltà in matematica, *La matematica e la sua didattica* **2**.
- ZAN R. [2002], Verso una teoria per le difficoltà in matematica, *Seminario Nazionale Italiano di Didattica della Matematica 2002*, Pisa.

Rossana Falcade et Angela Rizza
Università degli studi di Parma
Dipartimento di matematica
Unità locale di ricerca
Via D'Azeglio, 85
I - 43100 Parma
Rossana.Falcade@unipr.it
Angela.Rizza@unipr.it