

LE JEU ENTRE POINT DE VUE LOCAL ET POINT DE VUE GLOBAL EN ANALYSE : UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE À VISÉE DIAGNOSTIQUE AU NIVEAU PREMIÈRE

Résumé. Cet article contient des éléments caractéristiques de notre recherche sur l'introduction à l'analyse au niveau de l'enseignement secondaire. Parmi les diverses facettes de l'entrée dans ce champ des mathématiques, nous avons en particulier étudié l'articulation entre point de vue global et point de vue local sur les objets fonctionnels (ce que nous avons appelé le 'jeu global/local'). L'étude est réalisée via la construction d'une ingénierie didactique à visée diagnostique dans l'environnement de calculatrices graphiques et symboliques. L'analyse des trois expérimentations menées en Italie met en évidence que l'introduction à l'Analyse via le jeu global/local est faisable et permet un travail significatif et riche pour les élèves.

Introduction

Notre recherche étudie l'entrée dans le champ de l'Analyse au niveau de l'enseignement secondaire. Les recherches conduites jusqu'à présent ont bien mis en évidence les difficultés des élèves mais aussi des étudiants dans l'apprentissage des concepts de l'Analyse. Dans un article de synthèse, M. Artigue (1996) distingue trois catégories principales de difficultés, celles liées respectivement à la complexité des objets de base de l'Analyse que sont les nombres réels et les fonctions, et au fait que ces objets sont en construction lorsque débute l'enseignement de ce champ conceptuel, celles liées à la conceptualisation de la notion clef de ce champ : la notion de limite et à sa formalisation, enfin celles liées aux ruptures nécessaires par rapport aux modes de pensée et de travail familiers aux élèves dans le domaine algébrique et aux spécificités qu'a le fonctionnement en Analyse sur les nombreux objets communs à ces deux domaines.

La plupart des recherches conduites jusqu'ici se sont surtout centrées sur les deux premières catégories de difficultés. Les difficultés classées dans la troisième catégorie n'ont pas fait quant à elles l'objet de recherches spécifiques, même si elles apparaissent de façon transversale dans de nombreux travaux. Elles concernent plus globalement les phénomènes liés à l'entrée dans le nouveau champ de l'Analyse, une entrée qui nécessite des changements dans les modes de pensée, de raisonnement, dans les techniques en jeu dans la résolution d'exercices et de problèmes. Notre recherche s'intéresse, elle, spécifiquement à l'étude de ces changements et aux reconstructions cognitives que ces changements impliquent. Elle s'inscrit donc dans une perspective globale d'étude de la transition¹ Algèbre / Analyse, et se situe plus particulièrement au niveau de l'enseignement secondaire, au moment où cette transition commence à se mettre en place.

1. Diverses facettes de la transition Algèbre / Analyse

L'étude de cette transition peut être faite selon des entrées diverses, chacune pointant l'attention sur des aspects spécifiques de l'enseignement et de l'apprentissage de l'Analyse. Nous avons, dans notre recherche, envisagé quatre entrées principales que nous avons qualifiées respectivement d'épistémologique, de symbolique, d'institutionnelle et de mathématique. Elles nous ont permis d'organiser les apports de différentes recherches qui,

¹ Le mot « transition » que nous utilisons ici ne veut pas signifier que la pensée « analytique » en tant que pensée propre au champ de l'analyse va se substituer à la pensée algébrique, mais que l'entrée dans ce nouveau domaine va conduire à la fois à une réorganisation nécessaire de la pensée algébrique.

tout en n'étant pas centrées généralement sur la transition, offraient des perspectives intéressantes et complémentaires pour approcher sa complexité. Nous présenterons, brièvement dans ce qui suit, cette phase préliminaire de notre travail, en nous centrant sur une ou deux recherches pour illustrer les apports relatifs à chaque entrée. L'étude transversale de ces entrées nous a permis de mettre en évidence un aspect de la transition que nous avons plus particulièrement développé dans notre recherche.

Pour l'entrée épistémologique, nous nous centrons ainsi sur les travaux de Legrand (1993) cherchant à identifier des caractéristiques de la pensée en Analyse, en les liant au raisonnement en jeu dans d'autres domaines déjà rencontrés par les élèves (comme l'algèbre et la géométrie). À travers l'analyse des différentes composantes envisagées (comme par exemple, le rôle dominant joué par les processus infinis par rapport aux processus finis, le détour par l'infini pour traiter des problèmes ayant une formulation finie), l'auteur souligne l'importance du jeu de majorations et de minorations, qui implique un travail nouveau avec des objets (relation d'ordre, inégalités, etc.) déjà rencontrés mais qui subitement deviennent des objets essentiels et sont gérés différemment. Il montre aussi que ce jeu de majorations et de minorations s'inscrit plus globalement dans un jeu d'approximation qui a ses règles propres. Même si Legrand identifie différentes caractéristiques de ce nouveau jeu (par exemple en ce qui concerne l'égalité), il laisse largement ouverte la question de la gestion didactique de l'entrée progressive des élèves et étudiants dans ses différentes facettes.

Des recherches conduites sur le rôle du symbolisme dans l'activité en Analyse comme celles de (Gray & Tall, 1992), (Maurel & Sackur, 2001) nous semblent bien illustrer les apports possibles de l'entrée symbolique par la façon dont elles mettent en évidence certaines différences de caractère et de gestion entre le symbolisme utilisé en Analyse et les symbolismes utilisés antérieurement par les élèves, en arithmétique ou en algèbre. Par exemple, l'analyse de la gestion du symbolisme lié aux développements limités à l'université² par Maurel et Sackur montre, nous semble-t-il, que l'utilisation d'un symbolisme, en apparence de nature algébrique comme le sont les notations de Landau en $o(x)$, peut renforcer, au moins dans un premier temps, les difficultés liées à la gestion de la négligeabilité. L'économie de calcul, mais aussi de pensée, apportée par l'utilisation du symbole $o(x)$ ne devient effective que si l'étudiant n'aplatissant pas abusivement ce symbolisme sur son apparence algébrique, est capable de lui restituer, en cas de besoin, sa dimension analytique cachée. La question est alors de savoir s'il est possible de « sensibiliser » au nouveau symbolisme, et à tout ce qu'il implique, les élèves du secondaire.

L'entrée institutionnelle nous permet, elle, d'identifier, parmi les difficultés envisagées par la recherche didactique lors de l'introduction à l'Analyse au lycée, celles qui résistent encore à l'université et de comparer la gestion qu'en font les deux types d'institutions. Les recherches que nous avons considérées (notamment celle de F. Praslon (2000) sur la transition Terminale S / DEUG Sciences par rapport au concept de dérivée et notre travail de DEA sur les rapports aux représentations graphiques dans la résolution de problèmes à l'université³) confirment ainsi le fait que les étudiants, dans leur entrée progressive dans le champ de l'Analyse, doivent faire face à de nombreuses reconstructions, la plupart étant cependant laissées entièrement à leur charge. Une reconstruction fondamentale que les recherches citées mettent en évidence tient à l'articulation entre aspects globaux et aspects locaux, fondamentale en Analyse. Elles montrent aussi la faiblesse de sa gestion didactique, les ruptures existant entre secondaire et supérieur, nous incitant à nous interroger sur la viabilité d'une gestion didactique explicite et progressive de cette articulation dès le début de l'enseignement de l'Analyse.

² DEUG MASS-MIAS 1^{ère} année.

³ M. Maschietto (2001).

L'entrée qualifiée de « mathématique » renvoie à l'étude des pratiques des mathématiciens, en Analyse, mais aussi plus globalement dans le domaine qualifié d'« Advanced Mathematical Thinking ». Pour cette entrée, des recherches comme celles de Robert (1998), Sfard (1994) et Praslon (1994) nous semblent particulièrement intéressantes par l'accent mis sur des caractéristiques importantes de la pensée mathématique avancée, parmi lesquelles nous trouvons l'autonomie et la flexibilité. Les recherches menées sur l'enseignement au lycée et à l'université montrent que la pensée des élèves et des étudiants est généralement très peu flexible. Pourtant, même si les pratiques attendues ne sont pas celles des mathématiciens, le succès des étudiants dans les cursus universitaires est lié à la capacité d'aller au-delà des simples applications. Et, comme le montrent les recherches citées, des formes de flexibilité qui, dans l'enseignement secondaire, restent étroitement pilotées par l'enseignant, passent brutalement dans l'enseignement supérieur sous la responsabilité des élèves. Ceci conduit à s'interroger sur la possibilité de mettre les élèves du secondaire dans des situations sollicitant ces aspects de la pensée mathématique et sur les situations à proposer pour un tel travail.

Ces différentes entrées nous ont conduite à nous centrer sur l'étude d'un aspect de la transition Algèbre/Analyse : l'articulation entre global et local. Pour tenter de répondre aux questions soulevées, il nous a fallu dans la recherche, analyser plus précisément ce que signifiait cette articulation entre local et global, et essayer d'identifier les reconstructions que sa mise en place pouvait nécessiter.

1.1. Le jeu global/local

Le rapport aux objets fonctionnels est, lorsque débute l'enseignement de l'Analyse, un rapport combinant deux points de vue : un point de vue ponctuel et un point de vue global, comme cela a été mis en évidence par Duval (1995). Les tableaux de valeurs, les calculs numériques mettent en jeu le caractère ponctuel, le repérage de formes, tant dans le registre algébrique que graphique, le repérage de fonctions prototypes, de familles, le passage des fonctions prototypes à des fonctions quelconques de la même famille, mettent en jeu le caractère global. Les propriétés de croissance, décroissance sur un intervalle, de périodicité, travaillées dans la première rencontre avec ces objets sont aussi des propriétés globales. L'entrée dans le champ de l'analyse requiert un enrichissement de ces deux points de vue par une localisation du regard. On localise le regard au voisinage d'un point, à distance finie ou infinie, et de nouvelles propriétés apparaissent puis deviennent centrales. On prend ensuite conscience du fait que ce regard local sur l'objet peut à son tour nous donner accès à des propriétés globales de l'objet, voire permettre de le reconstituer dans sa totalité ; l'articulation s'inscrit alors dans une dialectique entre points de vue local et global.

L'évolution nécessaire du rapport à la linéarité illustre de façon paradigmatique ce jeu et son caractère dialectique. Pour l'élève qui entre dans le champ de l'Analyse, la linéarité est un phénomène familier et global, attaché à la proportionnalité. En Analyse, la linéarité devient un phénomène local qui fonde la notion de dérivabilité. Mais la connaissance du signe de la dérivée sur un intervalle donne accès à des propriétés globales : croissance et décroissance, et ultérieurement la rencontre avec les équations différentielles et les primitives permet de montrer qu'une connaissance locale peut permettre, sous certaines conditions, de récupérer l'objet global.

Le jeu local/global concerne les divers registres sémiotiques (Duval, 1995) qui servent à représenter et travailler les objets fonctionnels. Il s'exprime aussi dans différents cadres (Douady, 1986). Dans le cadre géométrique par exemple, il impose une reconstruction du rapport à la droite tangente à une courbe qui d'objet global représenté paradigmatiquement par la tangente au cercle et pensé en termes de position par rapport au cercle et d'intersection

doit devenir un objet local intégrant l'idée d'approximation (Castela, 1995). Dans un cadre cinématique, il est impliqué dans les rapports entre vitesse moyenne et vitesse instantanée. Ce jeu peut donc être abordé de façons diverses : nous avons choisi quant à nous une entrée graphique, en cherchant à exploiter les potentialités offertes par les calculatrices actuelles. Mais son explicitation numérique et algébrique nous conduira à des raisonnements en terme d'ordres des grandeurs et de négligeabilité.

2. Les hypothèses de travail

Les recherches considérées sur l'étude de la transition Algèbre / Analyse nous amènent à prendre en compte une dimension particulière de cette transition : la mise en place du jeu global / local. Nous faisons l'hypothèse que cette dimension joue un rôle essentiel dans l'entrée dans la pensée en Analyse, qu'elle va s'inscrire au fil de l'entrée dans ce champ dans différents niveaux de conceptualisation mais qu'un premier niveau de conceptualisation devrait pouvoir se développer dans l'enseignement secondaire. Notre recherche se propose d'étudier la possibilité de commencer à faire vivre ce jeu dès le niveau de la classe Première S, où l'enseignement de l'Analyse débute institutionnellement, en s'appuyant sur la localisation du rapport à la linéarité mis en jeu dans la notion de dérivée, centrale à ce niveau d'enseignement. Notre ambition didactique est construire une ingénierie didactique viable dans l'enseignement secondaire pour mettre en place ce jeu.

Pour la construction de notre ingénierie, notre hypothèse de travail est que les calculatrices graphiques et formelles, par les commandes de zoom qu'elles fournissent, peuvent soutenir la localisation nécessaire du regard. La prise en compte d'études cognitives⁴ qui soulignent le rôle et la médiation de certains gestes dans la conceptualisation, l'importance des aller et retour entre les niveaux perceptif et mathématique, ainsi que du caractère dynamique de la situation de travail, nous induit à faire une autre hypothèse. D'après celle-ci, le recours aux calculatrices peut aider à mettre en relation les caractéristiques de cette localisation perceptives et dynamiques d'une part, mathématiques d'autre part.

3. L'ingénierie didactique et son expérimentation

Nous avons construit une ingénierie didactique (Brousseau, 1998) à caractère diagnostique pour mettre en place le jeu global / local et l'observer en classe. L'expérimentation a été effectuée dans des classes italiennes⁵ (correspondant au niveau de la Première S) en mai 2000 (exp.A) et mai 2001 (exp.B et exp.C). Nous avons travaillé les 6 séances prévues de l'ingénierie la première année et les trois premières seulement la deuxième année. L'enseignement de l'Analyse débute en Italie presque à la fin de l'année scolaire, au moment où les élèves et les enseignants sont très sollicités (devoirs surveillés, etc.). C'est pourquoi, la deuxième année, les enseignants n'ont pu consacrer à l'ingénierie plus de trois séances.

4 Quelques références bibliographiques :

Lakoff G. & Núñez R., 2000, *Where Mathematics Comes From : How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*, New York : Basic Books.

Núñez R. 2000, *Mathematical Idea analysis : What embodied cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics*, Proceedings of PME XXIV, Japon, Vol I, 3-22.

Longo, G. (1998). *The mathematical continuum, from intuition to logic*, Naturalizing Phenomenology: issues in contemporary Phenomenology and Cognitive Sciences, J. Petitot et al. (eds) Stanford U.P.

Longo G, Petitot J, Teissier B., 'Géométrie et Cognition', Projet de Groupe de Travail, <http://www.dmi.ens.fr/users/longo/geocogni.html>.

5 Il s'agit de classes suivant le programme de mathématiques du Plan National Informatique (PNI) de 1996.

Chaque séance était constituée de deux phases : une phase de travail en groupe (deux / trois élèves par groupes) et une phase de travail collectif de mise en commun gérée par l'enseignant. Nous avons effectué pour chaque séance une analyse a priori qui a servi de base au travail de mise au point et de négociation de l'ingénierie avec les enseignants impliqués dans l'expérimentation. Ceci a aussi permis d'insérer ces séances dans la progression mathématique de la classe, en les intégrant le mieux possible dans la culture de la classe. L'expérimentation a fait l'objet d'une évaluation finale au moyen d'un devoir surveillé et d'un questionnaire.

Les calculatrices (TI-89) ont été fournies aux élèves de deux classes pour mener à bien l'ingénierie tandis qu'une classe travaillait avec les calculatrices (TI-92) depuis 2 ans, parce qu'elle participait à un projet national sur l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques.

Pour chaque séance, nous avons filmé un groupe d'élèves pendant leur travail et ensuite la phase collective. D'autres groupes d'élèves ont été observés par des étudiants préparant leur mémoire de maîtrise en didactique des mathématiques.

3.1. Les séances et leur analyse

Nous présentons les éléments caractéristiques de notre ingénierie, en nous limitant aux trois premières séances. Nous rentrons dans les détails de deux premières séances par des extraits de protocoles d'élèves et de discussion collective. Ces extraits sont choisis pour montrer la « marge de manœuvre » des élèves dans le travail proposé d'une part, la gestion de la situation ainsi que les aspects pris en charge par l'enseignant d'autre part.

La première séance a pour objectif de provoquer et d'étudier la production par les élèves du phénomène de linéarisation locale d'une fonction au voisinage d'un point où elle est dérivable, au niveau perceptif, en utilisant comme indiqué plus haut la dynamique des zooms. Ce phénomène sera désigné dans la suite par l'expression de « micro-linéarité ».

La deuxième séance a pour objectif d'aboutir à une première mathématisation du phénomène. Il s'agit à la fois de s'appuyer sur l'invariant perceptif construit mais aussi de le questionner d'un point de vue mathématique pour faire de la notion de micro-linéarité une notion non seulement perceptive mais aussi opérationnelle. Pour motiver cette mathématisation et, en même temps faire évoluer le rapport à la perception, on cherche à attirer l'attention de l'élève sur le fait que le processus de zoom à lui seul ne permet pas de caractériser l'objet droit qui en est l'aboutissement, que cet objet est un objet qu'il va falloir mathématiquement construire. Les rapports à l'objet tangente commencent ainsi à être reconstruits.

La troisième séance permet de revenir sur la démarche qui a amené à la nouvelle détermination de la droite tangente à la courbe représentative d'une fonction et de travailler à la fois sur sa reconstruction et sur le nouveau calcul qui se met en place. La discussion collective permet à l'enseignant de mettre en place des propriétés du nouveau calcul et de souligner les propriétés du nouvel objet « tangente ».

3.1.1. La première séance

Travail en groupe

L'exploration d'un ensemble de courbes représentatives de fonctions choisies, au voisinage de points choisis, est proposée à l'aide des commandes de zoom de la calculatrice et est partiellement guidée par une fiche de travail. Mais la fiche de travail ne fixe pas les conditions d'arrêt de l'exploration. Il s'agit en effet d'étudier ce qui va être repéré comme phénomène intéressant par les élèves, d'analyser le discours et les gestes qui accompagneront ce repérage, les discussions qui accompagneront la prise de décision d'arrêt des explorations

et les critères qui seront plus ou moins explicitement évoqués. Dans cette partie du travail, l'enseignant prend en charge le bas niveau d'instrumentation de la calculatrice.

La classe est partagée en deux groupes qui travaillent sur les mêmes fonctions mais en des points différents. Une des fonctions est affine. Deux ne sont pas dérivables en un des points considérés : une présente un point anguleux, l'autre est la fonction :

$$x \rightarrow \begin{cases} 4+x\sin 1/x & \text{Si } x \neq 0 \\ 4 & \text{Si } x=0 \end{cases}$$

pour laquelle, au point $x = 0$, il n'existe ni dérivée à droite, ni dérivée à gauche.

Nous présentons ci-après quelques extraits du corpus relatif à un groupe d'élèves (exp.A) accompagnés de quelques commentaires. Ils illustrent bien, nous semble-t-il, la dynamique possible d'une telle situation dans la phase de recherche en groupes, l'identification du phénomène et les questionnements qu'il est susceptible de provoquer.

Première étape

Après avoir lu la consigne, les élèves (CF, CA et GL) considèrent $y_1(x) = x^3 - 7x - 2$. La représentation donnée par ZoomStd (fig.1) au démarrage de l'exploration, montre des caractéristiques des représentations graphiques que les élèves connaissent déjà : axes des coordonnées, échelles des axes, tracé d'une fonction régulière.

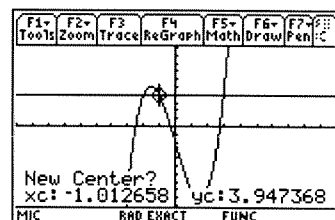


fig. 1

Deuxième étape

La démarche des agrandissements commence. Elle est au début guidée par la fiche, qui demande d'effectuer deux zooms et de représenter l'écran de la calculatrice sur une feuille donnée.

23. CA : «Fais deux Zooms ... Fais ZoomIn !» Après deux ZoomIn successifs autour du point choisi, ils obtiennent l'écran de la fig.2	La transition vers un point de vue local s'appuie bien sur des gestes nouveaux pour les élèves. Ces gestes stimulent une dynamique nouvelle : celle d'« entrer dans le graphique ».
24. GL : «Dessine la représentation graphique que nous avons obtenue» CF représente une droite sur la feuille.	Le dessin de CF dépend de son interprétation de l'écran de la calculatrice. Il entraîne une objection de CA sans doute liée au fait que droit et courbe réfèrent à des catégories perceptives différentes et qu'un zoom, à lui seul, ne peut, à ses yeux, suffire à produire un changement de catégorie.
25. CA : «qu'est-ce cette ligne ? Mais elle n'est pas droite !»	

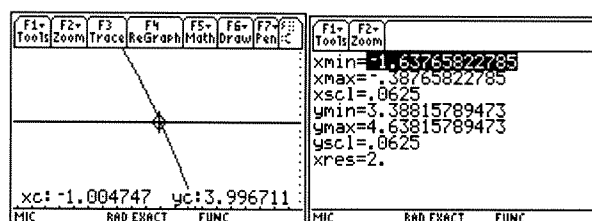


fig. 2

Troisième étape

L'exploration continue sous la gestion du groupe, qui doit décider quand l'arrêter et représenter l'écran final sur la feuille.

26. GL : «oui, cela semble devenir une droite ; elle devient de plus en plus semblable à une droite ! Elle tend à devenir une droite» <i>Après l'intervention #26, GL fait encore trois ZoomIn. L'exploration s'arrête et l'écran suivant est reproduit sur la feuille par CF.</i> <i>L'exploration de la première représentation graphique s'arrête sur l'écran de la fig.3, lequel est reproduit sur la feuille par CF.</i>	L'exploration continue avec un autre ZoomIn et renforce la prise de conscience perceptive du phénomène. GL, qui manipule la calculatrice depuis le début de l'activité, la formule dans un langage dynamique qui marque le rapprochement progressif avec le droit tout en maintenant la distance entre les catégories. Notre hypothèse que les élèves arrêteront spontanément l'exploration lorsqu'une stabilité leur apparaîtra dans les représentations affichées par la calculatrice se trouve ici confirmée.
--	--

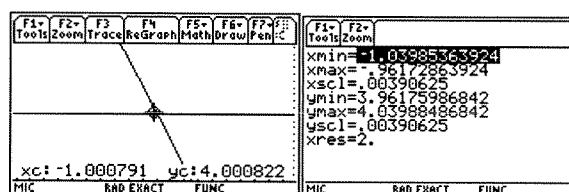


fig. 3

Dans les explorations qui suivent, les échanges entre les élèves du même groupe montrent d'une part que la linéarité locale n'est pas encore un critère d'arrêt fort, d'autre part que la répartition du travail entre les élèves influence leur perception de la localisation du regard. Par exemple, l'élève qui manipule la calculatrice, enchaîne les zooms sans se préoccuper de contrôler ce processus lorsque la fiche ne guide plus l'exploration, l'élève qui doit dessiner met en avant la perte de canons de représentation (notamment les axes coordonnés, l'origine) mais aussi une certaine ambiguïté de la consigne donnée (« dessiner ce qui apparaît à l'écran de la calculatrice »). Cette dernière requête semble imposer un traitement différent du registre graphique.

L'exploration d'une fonction non dérivable au point choisi met en évidence l'évolution du critère d'arrêt pour GL.

43. CF : «Ah, il y a un fossé !», <i>il dessine ensuite la courbe de la fenêtre standard.</i> 44. CA : «Agrandis-le », <i>il s'adresse à GL.</i> 45. CA : «Dessine ce truc-ci », <i>il s'adresse à CF.</i> <i>Après quelques zooms.</i> 46. GL : «Mais, cela ne devient jamais une droite ... Excuse-moi, quel était le point ?», <i>il obtient la figure 5 ci-dessus.</i> 47. CA : «reviens en arrière et recommence».	La représentation de la courbe dans la fenêtre standard présente une allure étrange pour CF, qui l'associe à un fossé (fig.4 ci-dessus). L'intervention #44 semble confirmer l'appropriation du jeu des zooms (cf. #31). L'obtention d'une droite est bien le critère d'arrêt de l'exploration (#46). Ne réussissant pas à l'obtenir, les élèves pensent d'abord avoir commis une erreur dans la manipulation. L'invariant est donc semble-t-il, déjà bien installé.
---	---

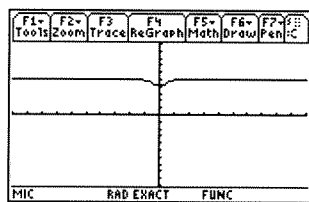


fig. 4

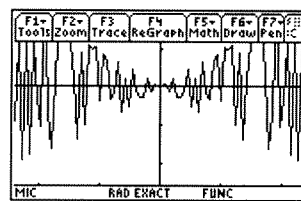


fig. 5

Discussion collective

Dans cette phase, l'enseignant recueille les résultats des explorations et porte l'attention sur le phénomène rencontré et son caractère local. La comparaison du travail des groupes permet de montrer en effet que toutes les fonctions n'ont pas nécessairement le même comportement par zooms successifs. Par exemple, on voit que la fonction explorée ci-dessous (ref. fig.4), a un comportement standard en d'autres points. Un autre élément important de cette phase collective est la proposition faite aux élèves d'introduire un terme pour traduire ce phénomène. Dans l'expérimentation dont le protocole ci-dessus est issu (exp.A), le terme⁶ choisi est « *zoomata lineare* ».

Dans les expérimentations, l'analyse des discussions souligne le fait que presque tous les élèves restent à un niveau perceptif à la fin de cette première séance. A ce niveau perceptif, ils ne distinguent pas nécessairement le fait d'obtenir « quelque chose de droit », comme c'est le cas du point anguleux (deux demi-droites), du fait d'obtenir une droite à l'écran de la calculatrice. Ceci est l'enjeu de la deuxième séance.

3.1.2. La deuxième séance

Travail en groupe

La consigne donnée à chaque groupe est : étant donnée une fonction, vérifier si elle est « micro-linéaire » au point choisi et trouver l'équation de la droite qui apparaît à l'écran de la calculatrice. On fait l'hypothèse que les élèves vont avoir des fenêtres d'arrêt différentes et partiront de données liées à cette fenêtre pour déterminer l'équation de la droite tracée.

Le choix de la fonction dépend de la classe concernée par l'expérimentation. Pour la première classe (expérimentation 2000), nous avons choisi⁷ la fonction $f(x) = x^2$ (à explorer au voisinage de $x = 2,5$), tandis que pour les deux autres (expérimentations 2001) nous avons choisi la fonction $f(x) = x^3/5$ (à explorer au voisinage de $x = 2$). Ce choix a été fait pour rendre difficile voire impossible (avec les connaissances des élèves à ce niveau) une démarche algébrique de résolution, sachant que les élèves avaient repris l'étude de la fonction $f(x) = x^2$ peu de temps avant le début de l'expérimentation. En général, les élèves italiens de ce niveau ont déjà étudié les tangentes aux coniques et savent par exemple déterminer algébriquement l'équation de la tangente en un point à une parabole à partir de son équation. Ce travail algébrique basé sur la recherche d'une racine double à une équation polynomiale ne met en rien en jeu la pensée d'approximation qui est visée ici. C'est dans un second temps que les deux points de vue sur l'objet tangente seront connectés.

Comme pour la première séance, nous donnons ci-après quelques extraits commentés du fonctionnement d'un groupe d'élèves (exp.B), où l'on voit le poids de la pensée algébrique dans le conflit entre la conception de la tangente liée à l'interprétation du résultat de l'exploration effectuée et la démarche algébrique qui en est induite pour la détermination de l'équation.

⁶ Nous avons gardé le terme en italien.

⁷ En accord avec l'enseignant de la classe.

<i>Les élèves (C et R) ont répondu à la première question de la fiche, qui demandait la vérification de la propriété de 'micro-linéarité' en un point choisi. Ils abordent ensuite la détermination de l'équation de la droite.</i> 22. C : «c'est la tangente, donc », <i>il s'adresse à R.</i> 25. C : «maintenant, système avec la courbe». 26. R : (...) <i>il continue à lire la consigne</i> «(...) Mais il n'y a pas écrit de faire un système ». 27. C : «nous devons trouver la tangente». 39. C : «comment fait-on le delta égal à zéro quand x est à la puissance trois ? ». 42. R : «attends une seconde. Je pensais au coefficient directeur. Même si elle est tangente ici», <i>il indique un point sur l'écran de la calculatrice avec son doigt</i>, «elle la rencontre ensuite en bas», <i>il continue sur la feuille, où la courbe a été tracée, à suivre la trace de la droite avec son doigt et après avec son stylo.</i> 43. C : «et tu dis qu'il n'existe pas de tangente ?».	C a tout de suite identifié la droite obtenue par zooms avec la tangente à la courbe, sans justifier sa conclusion à son camarade. Celle-ci lui permet de démarrer la démarche algébrique. Il écrit l'équation d'une droite passant par un point choisi et de coefficient directeur connu avec l'accord de son camarade. R porte l'attention sur la requête de justification des choix effectués présente dans la fiche et sur le fait que celle-ci ne contient pas de validation de la démarche qu'ils sont en train d'envisager. Avec cette remarque (#26), R semble avoir des réserves sur la caractérisation de la droite obtenue comme «Tangente», tandis que C est convaincu de la justesse de son interprétation (#27). Après avoir précisé que la détermination de la droite tangente est équivalente à la détermination du coefficient directeur de cette droite, la mise en œuvre de la démarche algébrique pose le problème prévu dans l'analyse a priori (#39). L'impossibilité pour ces élèves de suivre la démarche algébrique met en évidence leur conception de la tangente (#42) et pose la question de l'existence de la tangente, même si celle-ci semble exister au vu de la représentation graphique (#43). Dans la recherche de l'équation, des moments de silence s'alternent avec des phases de calcul n'aboutissant à rien de significatif. C arrive à la conclusion qu'il est impossible de déterminer cette équation.
--	---

59. R : «si tu veux, tu peux choisir un point ici et un point là », <i>il indique deux points sur l'écran de la calculatrice, un point au-dessus de la droite horizontale $y=8/5$ et un point au-dessous, « et calculer ensuite une droite».</i> <i>R déplace toujours le curseur sur l'écran de la calculatrice pour voir affichées les coordonnées des points qui pourraient être choisis.</i>	La situation de blocage se termine lorsque R revient à la représentation graphique de la calculatrice, et commence à travailler au niveau graphique, en déplaçant par exemple le curseur dans l'écran affiché. Ceci semble lui donner l'idée verbalisée dans l'intervention #59. Cette démarche n'aboutit pas, parce que R envisage des calculs trop complexes à faire. L'observateur intervient alors pour rappeler la disponibilité de la commande Trace⁸ de la calculatrice.
65. R : «alors ! Faisons cela !». 66. C : «nous en avons déjà un (point). L'autre choisissons-le». <i>Après avoir effectué les calculs, les élèves vérifient l'équation trouvée en faisant tracer la droite. Le test étant négatif, ils changent la valeur du coefficient directeur et refont le test graphiquement.</i>	L'intervention de l'observateur débloque la situation (#65), parce qu'elle confirme la démarche de R. Le passage à la fenêtre standard souligne une autre fois la conception globale de la tangente. Les élèves travaillent ici au niveau perceptif pour le changement de la valeur du coefficient directeur.
98. C : «parfait !» 99. R : «parfait ? pas du tout ! Elle doit être tangente en ce point-ci», <i>il indique le point fixé sur l'écran avec son doigt, «est-ce que tu vois qu'elle est tangente ailleurs ?»</i>	
137. R : «nous l'avons déjà fait auparavant et nous nous sommes trompés, parce que nous avons choisi le point dehors». <i>Une équation de droite satisfaisante est enfin trouvée, après quelques erreurs de calcul.</i>	La deuxième droite n'étant toujours pas tangente, R suggère de revenir à la fenêtre agrandie, obtenue par les zooms (dans la fiche, ils devaient noter ses dimensions) et il essaie d'expliquer les erreurs faites (#137). Pour lui, les points choisis n'étaient pas pris dans la fenêtre qui permis de vérifier la propriété de micro-linéarité. Ceci semble traduire une certaine localisation du regard.

Discussion collective

Dans cette phase, l'enseignante recueille au tableau les équations des droites obtenues par les élèves et en représente quelques-unes dans la fenêtre agrandie de la calculatrice qui lui a servi à contrôler la micro-linéarité. C'est de leur comparaison collective que peut naître l'idée de créer un objet idéal transcendant ces différentes réalités, un objet qui sera ensuite caractérisé en termes de qualité d'approximation (ce que la calculatrice ne peut donner directement à voir). L'enseignante a alors à gérer le conflit entre le caractère perceptif de la tangente, le fait que la tangente a une caractérisation précise pour les élèves et la présence d'autres droites candidates à l'être. C'est à ce moment qu'il faut préciser ce que l'on a obtenu en dehors du registre graphique.

La discussion sert à attirer l'attention sur les coefficients directeurs des droites et sur la caractéristique de celles-ci d'approximer la courbe autour du point choisi. La première idée

⁸ Elle permet d'encre le curseur à la courbe ; de cette façon, on peut lire directement les coordonnées des points de la courbe suivant le déplacement du curseur.

qui s'installe est celle de proximité numérique entre les diverses valeurs des coefficients directeurs. Le point-clef est l'introduction, par l'enseignant, d'un symbole, h , pour désigner le deuxième point utilisé pour déterminer l'équation de la droite, ce qui permet en même temps de rendre compte de tous les choix simultanément (le coefficient directeur est écrit sous la forme $2 + h$). La nature de h et les valeurs qu'il peut assumer sont données par l'activité en groupe et la première partie de la discussion collective.

Nous présentons ci-dessous deux extraits des discussions (exp.B) : le premier extrait concerne la présentation de la démarche du groupe, observé ci-dessus, à la classe, le deuxième extrait contient une partie de la discussion gérée par l'enseignant (Ens) sur la nature de h (d'autres élèves que C et R figurent comme A1, A2, A3 et A4).

C66. Ens : «Comment avez-vous fait ?» C67. R : «Nous avons pris, approximé... C'est-à-dire nous avons pris deux valeurs de la droite». C68. Ens : «De quoi ? ». C69. C : «De l'équation de la... nous avons considéré la <i>zoomata lineare</i> de la ... » C70. Ens : «Ici ? », <i>elle indique sur la représentation graphique de la fonction</i> C71. C : «C'est exact ! Et ensuite nous nous sommes déplacés sur la fonction... C'est-à-dire sur le petit morceau de droite nous avons pris une valeur très proche de... » <i>La discussion continue sur la recherche de la meilleure approximation de la courbe et la distinction entre droite et courbe.</i>	L'intervention de C (#69 et 71) résume la discussion et les essais faits pendant le travail en groupe pour le choix du deuxième point. Ces interventions de R et C permettent à l'enseignant de valider la démarche de détermination de la droite et de porter l'attention sur le choix du point.
C163. T : «Nous avons trouvé un point avec une valeur d'abscisse un peu plus grande que 2». C164. Ens : «Alors, nous avons considéré quelque chose en plus. En partant de x égale 2, la deuxième fois nous avons écrit x égale 2 plus combien ?» C165. T : «0,001» (...) C167. F : «Mais le mieux, ce serait encore moins (<i>la valeur proposée 0.001</i>)» (...) C172. Ens : «Appelons-le h ? (2) plus un petit morceau, c'est bien», <i>elle écrit au tableau $x=2+h$ « Comment doit-il être ce morceau ? »</i> <i>La séance termine avec l'écriture de l'expression du coefficient directeur, qui est ensuite transformée et simplifiée.</i>	La partie de la discussion concernant l'introduction du symbole h commence. Il semble qu'il y a une idée d'ordre de grandeur encore floue cachée derrière les interventions des élèves. Les termes utilisés pour désigner h sont par exemple 'très petit' et 'le plus petit possible'.

<i>La séance suivante commence avec le calcul du coefficient directeur avec h. Celui-ci s'appuie sur les expériences faites avec les zooms. Après la simplification par h, l'expression $\frac{h^2+6h+12}{5}$ est ainsi traitée :</i> C29. C : «h^2 devient négligeable, parce qu'il est très petit». C32. Ens : «(...)». C dit que h^2 devient négligeable et donc il reste » <i>elle écrit au tableau $\frac{6h+12}{5}$.</i> C35. A1 : «oui, oui» C36. A2 : «si h est négligeable, $6h$ l'est aussi». C37. A1 : «Eh, oui». C41. A3 : «il reste douze cinquième». C43. A4 : «si nous enlevons encore h il reste douze cinquième, qui est le coefficient directeur normal d'une droite». <i>La discussion continue, dans le but de commencer à reconstruire avec la valeur obtenue le rapport à la droite tangente à la courbe.</i>	Cette partie de protocole montre, selon nous, comment le passage au nouveau calcul sur h est délicat. Il faut lui donner un sens par rapport aux manipulations algébriques utilisées pour la transformation de l'expression, par rapport aux activités précédentes et par rapport à la nouvelle idée de négligeabilité qui se met en place. On voit ici que les raisonnements spontanés des élèves sont portés plutôt par une idée de négligeabilité absolue (une quantité est qualifiée de négligeable en soi) (#C29), même si la suppression des termes négligeables obéit à un ordre qui respecte les ordres de grandeurs relatifs (d'abord les h^2 et ensuite les h) (aussi #C42) et un contrôle pragmatique de la fin du calcul lié au fait qu'il n'y a plus de quantité négligeable, juste des nombres ordinaires (#C43), à rapprocher des critères utilisés au début du développement du calcul infinitésimal.
---	---

3.1.3. La troisième séance

Dans la troisième séance, les élèves travaillent sur une fiche qui leur permet de réinvestir ce qui a été fait dans la séance précédente, mais aussi de rencontrer des situations de calculs différentes du premier cas.

3.2. L'ingénierie et l'enseignement de l'Analyse en Italie

Comme nous l'avons précisé dans la présentation de notre ingénierie, les séances ont été construites et ensuite négociées avec les enseignants des classes concernées. Ceci a été fait à la fois pour impliquer les enseignants et pour insérer notre ingénierie dans le programme des classes. Cette ingénierie présente une approche de l'Analyse qui est d'une certaine manière nouvelle dans la culture mathématique du lycée scientifique en Italie. Le programme d'Analyse du lycée (filière scientifique) se caractérise en effet par une approche plutôt formelle, qui prévoit par exemple la définition de limite en termes de ε et δ ainsi que des exercices de détermination et contrôle de limites en utilisant cette définition. Le programme d'Analyse de Première S (programme PNI) prévoit l'étude des limites des suites numériques et des fonctions réelles d'une variable réelle, de la continuité et de la dérivée d'une fonction, des théorèmes de Rolle, des valeurs intermédiaires, de l'Hôpital. Tout cela a pour but l'étude et la représentation graphique de fonctions. Dans la pratique, l'enseignement de l'Analyse commence en fin de première (au mois de mai) et se limite souvent aux concepts de limite et de dérivée.

Nos expérimentations ont représenté une expérience forte pour les élèves et pour les enseignants. Les élèves ont été confrontés à des méthodes de travail en dehors de leur pratique mathématique usuelle (travail en groupe et discussion collective). L'introduction de la calculatrice a contribué à différencier les séances proposées de celles habituelles de

mathématiques. Le questionnaire que nous avons fait passer à la fin de l'expérience montre qu'elle a été prégnante pour ces élèves, comme l'attestent les quelques réponses ci-dessous :

- Cela a été une expérience intéressante parce qu'elle nous a permis d'aborder un thème des mathématiques de façon non classique (c'est-à-dire par le manuel ou un cours 'au tableau') mais avec des moyens d'avant-garde (TI-92, rétroprojecteur).
- Le travail est intéressant parce qu'il sollicite la curiosité d'aller s'occuper des points d'une courbe sans leur laisser d'intimité.
- Je me suis senti concerné par l'ensemble de ce travail, j'ai travaillé très sérieusement.
- La calculatrice a été notre loupe d'agrandissement. Elle a été indispensable pour aller chercher les '*micro-linearizzazioni*', sans elle le travail ne pouvait pas être proposé.

Les enseignants quant à eux ont été poussés à penser autrement l'introduction de l'Analyse et obligés de prendre en compte certains aspects, notamment le jeu global/local, qu'une approche plus traditionnelle ne mettait pas en avant. Ils se sont beaucoup engagés dans ce travail et, selon eux, en ont tiré des idées pour continuer leur travail en Analyse après l'expérimentation (surtout les enseignantes des expérimentations menées en 2001).

Conclusion

Dans cette recherche, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'entrée dans le champ de l'Analyse au lycée selon une optique de reconstruction de rapports aux objets mathématiques. Parmi les éléments caractérisant ce champ des mathématiques, nous nous sommes centrés sur l'étude du jeu global/local et ses possibilités de gestion didactique au niveau de l'enseignement secondaire. Ceci a abouti à la construction d'une ingénierie didactique à caractère diagnostique, expérimentée en Italie, visant la mise en place de ce jeu. L'analyse de cette ingénierie doit prendre bien sûr en compte les contraintes institutionnelles des expérimentations, qui réduisent nécessairement sa portée. Son intégration dans un processus d'enseignement n'allait pas de soi et le nombre de séances négociables était trop réduit pour aller au-delà d'une première rencontre avec un jeu complexe comme le jeu global/local. Malgré ces limites, l'analyse des protocoles faite jusqu'à présent nous apporte des éléments intéressants. Dans la première séance de l'ingénierie, les diverses explorations des fonctions ainsi que la discussion collective mettent en évidence la constitution d'un invariant perceptif qui représente le critère d'arrêt via la dynamique des zooms. Le langage construit autour de cet invariant représente un élément important : par exemple le terme « *zoomata lineare* » créé par les élèves condense en une expression les expériences vécues et le double ancrage dans la linéarité et le local. Les discussions et les difficultés rencontrées par les élèves lors de la deuxième séance, montrent que la mathématisation de cet invariant perceptif ne va pas de soi. Elle demande aux élèves de dépasser les techniques algébriques qui sont pour eux associées à la détermination de tangentes à une courbe, pour mettre en place des techniques s'appuyant sur la notion d'ordre de grandeur. C'est via ces techniques où le raisonnement et les calculs sur les ordres de grandeur s'intègrent au calcul algébrique, que la notion de micro-linéarité devient opérationnelle pour le travail mathématique. Autant la première séance semble facile à gérer, autant la seconde est plus délicate. La première peut fonctionner suivant un schéma essentiellement a-didactique, ce n'est plus le cas de la seconde, dans laquelle l'enseignant joue un rôle essentiel pour mettre en place le nouveau calcul et unifier à travers lui les diverses expériences des groupes d'élèves.

Les expérimentations menées semblent montrer que le jeu global/local peut être initié dans le cadre graphique et algébrique de façon dialectique entre ces deux cadres dans l'enseignement secondaire. Dans sa mise en place, la notion de micro-linéarité apparaît porteuse, parce qu'elle est attachée à une image graphique précise et permet de développer un langage lui aussi spécifique avec l'appui duquel les conceptions des élèves vont pouvoir évoluer. De notre point de vue, il s'agit de faire vivre ce jeu le plus possible pour permettre à cette évolution de se mettre en place. La calculatrice semble être pour cela un médiateur efficace. Elle joue un rôle fondamental dans notre ingénierie : elle soutient le passage entre global et local au niveau graphique puis sert à créer le besoin d'une mathématisation du phénomène observé.

Cette recherche est encore en cours. Elle prévoit une nouvelle expérimentation dans une classe de l'enseignant de l'exp. C, où l'on essaiera de donner plus de place au travail avec les ordres de grandeur.

BIBLIOGRAPHIE

- ARTIGUE M. [1996], L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques, J.A.Dorta, Diaz et alii (eds), *La Universidad de La Laguna*, Tenerife, 27-53.
- BROUSSEAU G. [1998], *Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.
- CASTELA C. [1995], Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15** (1), 7-47.
- DOUADY R. [1986], Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7** (2), 5-31.
- DUVAL R. [1995], *Sémiosis et pensée humaine*, Bern : Peter Lang.
- GRAY E. & TALL D. [1992], Success and Failure in Mathematics : Procept and Procedure. Secondary Mathematics, *Workshop on Mathematics Education and Computers*, Taipei National University, 216-221.
- LEGRAND M. [1993], Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse, *Repères IREM*, **10**, 123-159.
- MASCHIETTO M. [2001], Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **21** (1.2).
- MAUREL M. & SACKUR C. [2001], Le symbolisme de l'algèbre dans l'approche de l'analyse, *Actes SFIDA16*, IREM de Nice.
- PRASLON F. [1994], *Analyse de l'aspect méta dans un enseignement de DEUG A concernant le concept de dérivée. Étude des effets sur l'apprentissage*, Mémoire de DEA, Université Paris 7.
- PRASLON F. [2000], *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/ DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.
- ROBERT A. [1998], Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18** (2), 139-190.
- SFARD A. [1994], Reification as the birth of metaphor, in *For the Learning of Mathematics*, **14**, 1.

Michela Maschietto
 Università degli studi di Torino
 Dipartimento di Matematica
 Via Carlo Alberto, 10
 10123 - Torino - Italie
 ou
 Équipe DIDIREM
 Université Denis Diderot
 2, place Jussieu
 Case 7018, 75251 PARIS Cedex 05
maschietto@dm.unito.it