NOTRE COUVERTURE

Une esquisse cotée décomposable modulo les déplacements et un premier découpage du graphe de contraintes correspondant.

Voir l'article de Pascal SCHRECK, *Constructions géométriques, dessin industriel et informatique*, figures 4 et 13.

Editorial

Le numéro de l'OUVERT que vous avez entre les mains est un numéro de transition car son comité de rédaction s'est vu subitement privé de ses éléments moteurs.

Alain KUZNIAK, qui était directeur de la rédaction, a obtenu à la rentrée 2004 un poste de professeur à l'IUFM d'Orléans-Tours et Richard CABASSUT qui était responsable de la publication a souhaité disposer de plus de temps à consacrer à son travail de recherche. Je voudrais profiter de cette occasion pour les remercier très chaleureusement du travail accompli au comité de rédaction car ce n'est pas une tâche aisée.

En effet, le rôle de l'OUVERT est double. D'une part, ce journal devrait refléter la diversité des travaux menés au sein des IREM et en particulier de celui de Strasbourg, et permettre aux enseignants de collège et de lycée et en particulier aux membres de l'APMEP, de partager leurs expériences et, parfois, leurs préoccupations. D'autre part, il devrait faire connaître la variété des travaux menés par les chercheurs en mathématiques. Or il n'est pas facile d'obtenir que des chercheurs en mathématiques consacrent du temps à rédiger des articles qui puissent être compris par des non-spécialistes comme il n'est pas facile d'obtenir des enseignants du secondaire qu'ils trouvent le temps de rédiger des articles montrant les solutions qu'ils ont trouvées pour donner envie à leurs élèves de faire des mathématiques.

Malgré ces difficultés, la publication de l'OUVERT se poursuit depuis plus de 30 ans grâce au dévouement de nombreux collègues de l'Académie et elle va se poursuivre. Les deux prochains numéros seront des numéros thématiques : l'un traitera des TPE et sera préparé par le groupe de l'IREM qui a trouvé de nombreuses situations où interviennent des mathématiques intéressantes pour les lycéens. L'autre traitera des relations entre mathématiques et musique et contiendra les textes des conférences données lors de la journée organisée, en décembre 2004, par A. PAPADOPOULOS et X. HASCHER.

Ce numéro montre bien la double vocation de l'OUVERT. On y trouve un article présentant l'un des ateliers pour jeunes enfants préparé par un groupe de l'IREM, groupe qui comprend une professeure d'école, des enseignants de collège et des maîtres de conférences. On y trouve aussi le texte d'une conférence que Pascal SCHRECK, professeur en informatique à l'ULP, a faite dans le cadre d'une journée de l'IREM consacrée à la géométrie. Il a réussi à écrire un texte, expliquant des résultats récents en informatique, qui soit accessible à des professeurs de mathématiques et qui devrait même donner des idées d'activités réalisables dans une classe. Je le remercie de nous avoir permis d'illustrer la page de couverture de ce numéro avec des figures de son article.

Ce numéro est encore largement marqué par l'influence d'Alain KUZNIAK. Il contient un article que Ghislaine GUEUDET lui avait confié sur un logiciel expérimenté avec des étudiants de DEUG à l'université de Rennes 1. Je la remercie d'avoir patienté jusqu'à la date de parution tardive de ce numéro. Et, en guise de testament, Alain a rédigé la conférence sur les travaux de G. BROUSSEAU, qu'il a faite à la réunion de fin d'année de l'IREM, et qui a permis à ceux d'entre nous qui ignoraient tout de la théorie des situations de comprendre l'intérêt de cette approche de la didactique des mathématiques.

Nicole BOPP
Directrice de l'IREM de Strasbourg

RENFORCER LA PLACE DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES À L'UNIVERSITÉ : DÉVELOPPEMENT ET EMPLOI D'UN SUPPORT EN LIGNE

Ghislaine GUEUDET

Résumé : Dans l'enseignement des mathématiques à l'université, lors des deux premières années en particulier, la place dévolue à la résolution de problèmes par les étudiants est réduite. Est-il possible de renforcer cette place grâce à l'emploi de ressources en ligne de type « bases de problèmes » ? Nous étudions ici cette question, en présentant un cadre pour l'étude de ressources en ligne dans l'enseignement des mathématiques, et en traitant l'exemple d'un logiciel particulier. Nous analysons les choix effectués lors de son élaboration. Ce logiciel propose à l'étudiant d'accéder à des exercices choisis par mots-clés. A chaque exercice est associé un environnement comportant notamment des aides, et la solution de l'exercice. L'analyse de l'emploi du logiciel par les étudiants montre qu'en dépit des aides disponibles, les étudiants développent lors des séances sur machines une véritable activité de résolution de problèmes.

Nous présentons ici une recherche portant sur le développement et l'emploi d'un support en ligne pour l'enseignement des mathématiques à l'université. Nous allons étudier les intentions des concepteurs, le produit réalisé, et confronter ce travail a priori avec les pratiques effectives des étudiants utilisant le logiciel.

Nous souhaitons souligner d'emblée une caractéristique fondamentale du travail des concepteurs du logiciel. Elaborer un outil informatique n'était pas pour ceux-ci un objectif à part entière. Aucun des membres de l'équipe n'est un inconditionnel de l'informatique pédagogique, et il s'agissait donc surtout de se saisir d'une opportunité créée par une volonté politique de développement du recours aux nouvelles technologies pour promouvoir la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques à l'université.

Ainsi, même si les questions que nous traitons sont illustrées par l'étude d'un logiciel particulier, elles portent plus généralement sur l'emploi de supports en ligne, et même, au-delà de l'aspect informatique, sur la résolution de problèmes de mathématiques à l'université.

C'est pourquoi nous allons exposer avant tout, dans une première partie, des questions et des résultats issus de recherches concernant la résolution de problèmes.

Nous présenterons ensuite, dans la deuxième partie, une méthodologie générale pour l'étude de l'emploi de supports en ligne, de type « bases de problèmes » (nous préciserons cette terminologie). Nous aborderons les problèmes liés à la conception d'un tel logiciel dans la troisième partie, en prenant l'exemple de la base qui a été élaborée par une équipe[1] de l'université de Rennes 1. Ce logiciel s'intitule « une Base RAISonnée d'Exercices de mathématiques », et est couramment désigné par l'acronyme BRAISE, que nous utiliserons par la suite.

Dans la quatrième et dernière partie, nous étudierons les pratiques des étudiants utilisant une base de problèmes, toujours en examinant l'exemple de BRAISE. Est ce que l'emploi de cette base permet aux étudiants de développer une véritable activité de résolution de problèmes ? Quels scénarios peut-on adopter pour l'emploi d'un tel logiciel ? Nous apporterons ici des éléments de réponse à de telles questions.

1. Résolution de problèmes de mathématiques à l'université

1.1. Le fonctionnement mathématique et les types de problèmes

Notre référence principale ici est le travail de Corine Castela (2000 et 2002). Elle souligne dans (Castela 2002) l'importance du développement de recherches sur les conditions d'encadrement de l'activité de résolution de problèmes des étudiants.
En effet, ces activités conditionnent en particulier le développement par les étudiants de connaissances sur le *fonctionnement mathématique*, défini par Castela comme « l'ensemble des modes d'intervention des objets mathématiques dans les solutions de problèmes ».

Étudiant les liens entre connaissances sur le fonctionnement mathématique et pratiques de résolution, Castela montre en particulier l'importance de la construction par le sujet de *types de problèmes*. Elle attribue à cette expression un sens très large de regroupement de problèmes effectués par un sujet sur la base de critères abstraits, explicites ou explicitables.

Reconnaître qu'un problème appartient à un type donné constitue une aide à la résolution, en permettant au sujet d'identifier des ressources utilisables. Or la possibilité de construction de types de problèmes par un étudiant en mathématiques dépend notamment de la place faite par l'institution « université » à la résolution de problèmes en mathématiques. Étudier précisément cette place demanderait une recherche spécifique. Nous allons ici nous contenter du bref descriptif d'un exemple particulier.

1.2. Le cas du DEUG MIAS[2] à l'Université de Rennes 1

Nous allons considérer plus précisément le cas de l'institution « DEUG MIAS première année en France », en prenant l'exemple de l'Université Rennes 1. Quelle est la place de la résolution de problèmes dans cette institution ?

L'évaluation des étudiants aux différents modules est principalement basée sur leur capacité à résoudre des problèmes de mathématiques (mis à part quelques questions de cours, représentant entre 2 et 3 points sur un total de 20).

---

[1] La base d'exercices est consultable à l'adresse : `http://tdmath.univ-rennes1.fr`. L'équipe de conception est constituée de : Michel Coste, Ghislaine Gueudet, Françoise Guimier, Jean Houdebine, Annette Paugam, Odile Simon et Michel Viallard. La réalisation informatique a été assurée par François Dagorn.

[2] Diplôme d'études universitaires générales de Mathématiques et Informatique Appliquées aux Sciences.

Lors des cours magistraux en amphithéâtre (seulement au second semestre), les étudiants voient des démonstrations, mais n'ont pas eux-mêmes d'activité de résolution de problème. Les étudiants peuvent travailler de leur propre initiative sur des exercices, dans des livres ou sur leurs feuilles de travaux dirigés ; ils peuvent faire les devoirs à la maison, proposés par l'enseignant. Ces éléments sont extrêmement variables, suivant l'étudiant(e) et l'enseignant(e) concerné(e), nous ne pouvons pas les considérer comme caractéristiques de l'institution que nous observons.

Le lieu central, pour l'activité de résolution de problèmes, est la séance de travaux dirigés (TD), ou le cours-TD, au premier semestre de la première année.

Nous avons encadré en 2002-2003 un stage de magistère[3] portant sur le thème de la résolution de problèmes à l'université et en classes préparatoires. Lors de ce stage, trois enseignants de l'université ont été observés pendant une semaine, et un questionnaire a été posé aux étudiants des trois groupes correspondants. Il en ressort diverses observations chiffrées, dont la portée reste limitée à cause de la brièveté de l'observation ; certaines d'entre elles nous semblent néanmoins significatives. Lors d'un TD, le temps moyen consacré à un exercice est d'environ 30 mn (en première année d'université à dominante mathématiques à Rennes, il y a environ 5 heures hebdomadaires de TD au premier semestre, et 7 au second). Le temps moyen observé de recherche d'un exercice par un(e) étudiant(e) sans intervention orale de l'enseignant(e) à l'intention de l'ensemble de la classe est de 5 minutes. Par ailleurs, seulement 23% des étudiants interrogés estiment avoir bien compris les corrections des exercices données en TD.

L'activité de travail sur des exercices avec des possibilités d'aides individuelles pour l'étudiant est donc peu présente dans l'institution. La conception de logiciels proposant aux étudiants des problèmes de mathématiques accompagnés d'aides appropriées apparaît comme une piste possible d'évolution de cette situation. Cette conception, comme l'étude des pratiques des étudiants travaillant avec un tel logiciel, nécessite de développer un questionnement spécifique que nous allons présenter maintenant.

2. L'étude des bases de problèmes

Avant de nous pencher sur le cas particulier du logiciel BRAISE, il nous semble important de préciser plus généralement le type de produits logiciels auxquels nous nous intéressons, et de présenter un cadre pour l'étude de tels produits et de leur emploi.

En France, en mathématiques, plusieurs produits innovants ont été développés. Citons en deux parmi les plus significatifs : l'Université en ligne (UeL[4]), produit développé en collaboration par différentes universités réunies au sein du Réseau Universitaire des Centres d'Autoformation ; et WIMS[5], développé par Xiao Gang à l'Université de Nice, mais dont l'emploi se répand rapidement à d'autres universités et même actuellement à d'autres

[3] Les éléments que nous mentionnons ici sont issus d'un travail effectué en stage de magistère en 2002-2003 : Sylvie Le Merdy, *Place de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques en DEUG et en Prépa scientifiques,* stage encadré par Ghislaine Gueudet.

[4] Université en Ligne, `http://www.uel-pcsm.education.fr`.

[5] Web Interactive Multipurpose Server, `http://wims.unice.fr/wims`.

institutions. L'UeL est disponible en ligne ou sur CD-Rom. Sa structure est très proche de celle des enseignements traditionnels de l'université : cours, travaux dirigés en particulier. Elle est utilisée selon différents scénarios dans plusieurs universités ; son emploi a fait l'objet d'études didactiques comme (Cazes, Vandebrouk 2003). WIMS propose essentiellement des exercices (plus récemment, quelques textes de cours y ont été adjoints), qu'un enseignant peut utiliser pour construire ses propres feuilles de travaux dirigés en ligne, dans le cadre d'une « classe virtuelle » dont il va pouvoir suivre l'activité.

Nous avons de notre côté participé à une première recherche exploratoire sur BRAISE (Gueudet, Houdebine 2003), et dont les résultats rejoignent ceux exposés par les auteurs précédemment cités.

Ceci nous a conduits à développer une approche commune avec Cazes, Hersant et Vandebrouck, présentée dans (Cazes, Gueudet, Hersant, Vandebrouck 2004), approche que nous allons résumer ici.

L'emploi de supports en ligne dans l'enseignement a donné lieu à de nombreuses études, qui proposent notamment des typologies, comme par exemple (Mioduser & al. 2000).

Il est difficile cependant d'employer ces typologies pour situer les bases de problèmes, telles que nous les concevons. Il serait en effet peu significatif de les rapprocher des produits de type " drill and practice " (*entraînement et pratique*), qui proposent des exercices de mathématiques en général ciblés sur une compétence très précise, le plus souvent technique, que l'étudiant est censé acquérir par la répétition d'exercices du même type. Par ailleurs, nous ne voulons pas entrer dans la question de la distinction exercice/problème, qui peut difficilement être faite sans connaître le public auquel un énoncé est destiné. Une base de problèmes sera donc pour nous un logiciel ayant les caractéristiques suivantes :

- Ce logiciel est centré sur des exercices ou des problèmes de mathématiques ;
- Ces exercices sont organisés selon une classification qui permet à l'utilisateur d'y accéder en choisissant certains critères : niveau de difficulté, thème par exemple ;
- Chaque exercice proposé (ou au moins une majorité d'entre eux) est associé à un environnement interactif : par exemple, des aides, des outils, mais il peut s'agir aussi, si l'étudiant donne une réponse dans le logiciel, d'un message reposant sur l'interprétation de cette réponse.

Selon cette définition, un produit comme WIMS par exemple est une base de problèmes. Cependant WIMS n'a pas été conçu pour être directement utilisé par les étudiants, et on peut dire dans cette mesure que WIMS est plutôt une bibliothèque de problèmes, permettant à l'enseignant de bâtir ses propres bases de problèmes.

Au niveau du collège, le logiciel Mathenpoche[6] est une base de problèmes en ligne, qui peut être directement utilisée par les élèves, mais qui permet également aux professeurs inscrits d'élaborer leur propre base de problèmes.

Notons aussi que certains logiciels ne sont pas des bases de problèmes selon la définition donnée ci-dessus, mais possèdent des fonctionnalités permettant à l'utilisateur enseignant d'opérer une sélection de contenu qui conduit à se ramener à une telle base.

---

[6] `http://www.mathenpoche.com`, logiciel développé dans le cadre de l'association Sésamath.

Pour étudier plus précisément l'élaboration et l'emploi de tels logiciels quel que soit le niveau scolaire concerné, nous proposons en particulier d'organiser l'étude selon les trois niveaux suivants :

- *Niveau 1 : structure globale du logiciel.* — Ce niveau comprend un aspect informatique, en termes de fonctionnalités du logiciel : possibilité pour l'étudiant d'écrire une réponse qui recevra un feed-back, mais aussi suivi des étudiants pour l'enseignant par exemple. Il comporte aussi un aspect relatif à l'organisation du contenu mathématique proposé : présence de cours ou non, et si oui, articulation entre ce cours et les exercices ; modalités d'accès aux exercices : choix par mots-clés par exemple ; environnement proposé pour les exercices : possibilité d'accès à des aides, de quel type sont ces aides *etc.*
- *Niveau 2 : analyse didactique du contenu.* — Il s'agit ici, pour un thème mathématique donné, d'une part d'examiner les notions, propriétés, méthodes… présentes dans le logiciel, et d'autre part d'analyser les exercices correspondants et leur environnement.
- *Niveau 3 : scénario d'utilisation adopté.* — Ici on précise le public visé, mais aussi le nombre de séances, leur durée, les rôles respectifs de l'enseignant et de l'étudiant, les consignes données, les traces écrites prévues *etc.*

Ces trois niveaux ne sont, bien entendu, pas indépendants ; ainsi, le scénario adopté sera directement lié à la structure du logiciel. Cependant ces trois axes permettent de clarifier la présentation et l'analyse d'un dispositif. Nous allons les utiliser pour décrire les choix de conception de l'équipe BRAISE. Certains de ces choix relèvent du niveau 1, d'autres du niveau 2 ; nous séparerons ces deux cas.

3. Conception d'une base de problèmes : le cas de BRAISE

Nous résumons ici les principaux choix effectués par les concepteurs du logiciel, ainsi que les raisons de ces choix. Nous décrivons ensuite comment ces choix se sont traduits en termes de fonctionnalités du logiciel.

L'élaboration d'une base de problèmes conduit à se poser des questions qui dépassent de loin le contexte informatique. C'est le cas en particulier lorsqu'il faut choisir les aides à fournir par le logiciel à un étudiant. Ainsi nous souhaitons décrire ici les caractéristiques importantes du logiciel BRAISE, mais au-delà, présenter sur cet exemple des questions qui se posent à tout concepteur d'une base de problèmes, voire à tout enseignant travaillant sur des problèmes avec ses élèves.

3.1. Les choix de conception

Pour la structure du logiciel (Niveau 1)

- *Contribuer à la construction de types de problèmes.* — Il s'agissait de l'un des objectifs poursuivis lors de la conception du logiciel, comme nous l'avons dit ci-dessus en rappelant les résultats établis par Castela (Castela 2000). Il a conduit à plusieurs choix de structure. Tout d'abord, la possibilité d'accès aux exercices par des mots-clés comportant le niveau, mais aussi le thème et la nature de la tâche. Aux thèmes est toujours associé un texte qui permet de se faire une idée des raisons de la classification. Les natures de la tâche permettent à l'étudiant d'avoir une vue d'ensemble des tâches qui peuvent être proposées dans un chapitre donné.

- *L'interactivité, ou le paradoxe du concepteur.* — Le concepteur d'une base de problèmes est confronté à un paradoxe qui peut être interprété en termes de contrat didactique (Cazes, Gueudet, Hersant, Vandebrouck 2004). Il souhaite naturellement associer aux exercices qu'il propose un environnement riche : cours, indications, solutions… Mais plus l'environnement est riche, et plus l'activité de recherche par les étudiants risque d'être réduite. C'est un paradoxe classique du contrat didactique, dont on trouve ici une version informatique : l'enseignant doit apporter suffisamment d'éléments pour que l'étudiant s'engage dans la tâche ; mais s'il en apporte trop, l'activité de l'étudiant s'appauvrit. Deux choix principaux ont été faits dans le cas de BRAISE : donner de nombreux textes, et différents types d'aides que nous présentons dans le paragraphe suivant ; et ne pas demander à l'étudiant de taper une réponse dans le logiciel. En effet, le traitement de réponses complexes n'est pas encore possible avec les moyens informatiques disponibles. Et les réponses de type oui/non ne peuvent pas favoriser des démarches de résolution de problème. Ainsi, l'étudiant s'il travaille en autonomie est responsable de décider de la validité de sa solution, en comparant celle-ci avec la solution proposée par le logiciel.

Choix pour le contenu des exercices et leur environnement (Niveau 2)

- *Proposer des exercices variés, et non techniques.* — Afin de mettre les étudiants le plus souvent en situation d'avoir à résoudre des problèmes sans avoir une méthode toute tracée, la base ne contient pas d'exercices répétitifs. Il s'agissait en revanche d'essayer autant que possible de balayer toutes les méthodes intéressantes du chapitre. Par ailleurs, les questions pour lesquelles la réponse peut être obtenue à partir de quelques indices superficiels, et plus généralement tous les exercices de niveau technique (Robert & Rogalski 2003) ont été évités.
- *Offrir différents types d'aides.* — Pour éviter des situations de blocage devant le problème à résoudre, le logiciel comporte des aides, qui sont toutes proposées simultanément à l'étudiant.
  - ✓ La suggestion d'une procédure de résolution est une aide qui présente des inconvénients d'une part parce qu'elle peut ne pas correspondre à celle que l'étudiant envisageait d'engager, d'autre part parce qu'elle défavorise la réflexion sur la situation au profit de l'action et renforce l'idée que pour résoudre des problèmes il suffit de connaître des procédures de résolution, c'est-à-dire des techniques. Toutefois le logiciel propose pour chaque exercice des indications.
  - ✓ Une première manière d'éviter l'inconvénient cité ci-dessus est de suggérer simultanément plusieurs procédures. C'est pourquoi le logiciel comporte pour chaque exercice la liste des méthodes et techniques utilisables dans l'exercice.
  - ✓ Des recherches portant sur la résolution de problèmes (Julo 1995) ont montré qu'il est fondamental d'enrichir ou de préciser la représentation que l'étudiant se fait du problème. Dans le logiciel, ce sera le cas en particulier lorsqu'une aide graphique pourra être proposée.

3.2. Description de BRAISE

Cette base est destinée à recevoir des exercices de nombreux chapitres. Le premier chapitre qui a été réalisé est celui portant sur les suites. Un chapitre d'algèbre linéaire est en voie d'achèvement. Cependant, il n'a pas encore fait l'objet d'expérimentations ; c'est pourquoi nous allons simplement décrire ici brièvement le contenu du chapitre sur les suites (tous les chapitres suivent la même structure).

Les données

Le chapitre « suites » de BRAISE comprend 80 exercices classés en 15 thèmes (certains exercices peuvent être dans 2 thèmes). A chaque thème est associé un commentaire mentionnant les prérequis, éventuellement les exercices incontournables du thème et les thèmes connexes.

A chaque exercice est associée d'une part une liste de caractéristiques qui permettent l'accès par mots-clés :

- son niveau (facile, moyen, difficile, très difficile) ;
- le nom des thèmes auxquels il appartient, avec un commentaire pour chacun ;
- la nature de la tâche ;
- les difficultés particulières que l'étudiant peut décider d'éviter ; avec un commentaire pour chacune.

D'autre part, l'environnement de l'exercice comporte en dehors des éléments mentionnés ci-dessus les informations suivantes :

- des aides :
  - ✓ la liste des éléments de cours utilisables ; pour chacun un texte ;
  - ✓ la liste des méthodes et techniques utilisables ; pour chacune un texte ;
  - ✓ une aide graphique, pour certains exercices ;
  - ✓ une aide appelée « indications » sous la forme traditionnelle d'orientation vers une procédure ;
- des éléments de solutions ;
- des idées à retenir (une, ou au plus deux idées).

Le parcours de l'étudiant

Il s'agit ici bien entendu du parcours d'un étudiant qui travaillerait en autonomie avec la base.

Choix par mots-clés. — Après avoir choisi un chapitre, un écran propose à l'étudiant de choisir les exercices sur lesquels il veut travailler (voir en annexe la figure 1 : écran de choix par mots-clefs). Il peut choisir un niveau, un ou plusieurs thèmes. Il peut choisir la nature de la tâche. Notons à ce propos que c'est l'occasion pour l'étudiant de découvrir les tâches que l'on peut rencontrer dans un problème concernant les suites, certaines d'entre elles étant usuellement peu mises en valeur comme « accélérer la convergence ». Il peut aussi éviter certaines difficultés : par exemple il peut ne pas souhaiter rencontrer des signes sigma ou utiliser la définition de limite avec des ε. Pour chacune de ces difficultés il peut consulter un petit texte.

Accès à un exercice. — Une fois ces choix réalisés, la liste des problèmes de la base qui y correspondent apparaît, chacun étant caractérisé par un titre autant que possible évocateur du contenu de l'exercice. Il suffit de cliquer sur l'un des titres pour obtenir : l'énoncé de l'exercice, ses caractéristiques (niveau, thèmes, tâches, difficultés particulières) et avoir accès à tout l'environnement de l'exercice (voir en annexe la figure 2 : écran de présentation d'un exercice).

Travail sur l'exercice. — L'étudiant n'a aucun moyen pour entrer une réponse. Il résout l'exercice de manière traditionnelle, avec papier et crayon. Il dispose des quatre formes d'aide listées ci-dessus. Il dispose également d'un texte intitulé « éléments de solutions et résultats » ; on y trouve la description d'une « solution », mais aussi des raisons de choisir la procédure décrite. Il peut alors comparer cette solution avec celle qu'il a trouvée. L'étudiant peut enfin consulter un texte intitulé « idées à retenir » qui comporte au plus deux résultats ou méthodes d'ordre général à retenir de l'exercice. Il peut simplement comparer son travail avec les éléments de solution proposés.

4. Emploi de BRAISE par des étudiants

4.1. Quels scénarios pour quels étudiants ?

L'idée initiale des concepteurs était de permettre à des étudiants de la première année de DEUG jusqu'à l'agrégation de disposer d'une ressource leur permettant un travail autonome en dehors des enseignements traditionnels. Un tel usage de BRAISE commence à exister, en particulier certains étudiants préparant des concours de recrutement d'enseignants ont ainsi eu recours cette année au logiciel. Mais il est rapidement apparu que le travail en autonomie complète ne pouvait pas demeurer l'objectif principal, ne serait-ce que parce qu'un premier temps de travail encadré peut inciter les étudiants à se servir ensuite du logiciel en autonomie.

Pour les étudiants de DEUG en particulier, la présence d'un professeur lors de l'emploi de la base semble nécessaire. Ceci rejoint d'ailleurs les observations faites à propos de l'UeL par Cazes Vandebrouck (2003). Seuls les exercices techniques sont traités sans enseignant ; or BRAISE ne comporte aucun exercice technique. Remarquons que WIMS aussi est principalement employé lors de séances de travaux dirigés sur machines, en présence d'un enseignant.

Dans le cas de BRAISE, une telle modalité d'emploi réduit évidemment l'éventail des choix offerts aux étudiants : dans une telle utilisation, le choix des thèmes sera nécessairement restreint par l'enseignant.

Nous allons maintenant examiner plus précisément l'emploi de BRAISE avec un groupe d'étudiants de première année de DEUG.

4.2. Un exemple d'emploi en première année d'université

Durant le second semestre de l'année universitaire 2003-2004, BRAISE a été utilisé dans différents groupes d'étudiants de première année de DEUG, toujours sous forme de travaux dirigés sur machine en présence du professeur. Nous allons décrire et analyser l'une de ces expériences.

Le groupe d'étudiants a travaillé avec BRAISE pendant deux séances d'environ 1h45. Trois thèmes leur étaient proposés : suites récurrentes, méthode de Newton et théorème du point fixe. Ils avaient également comme consigne, pour le choix par mots-clés, de commencer par des exercices de niveau facile.

Le scénario prévoyait en outre deux types de traces écrites : une feuille à remplir en fin de séance, permettant de communiquer à l'enseignante des remarques et des questions ; et pour chaque séance machine un exercice à rédiger pour la séance de travaux dirigés suivante. L'énoncé de cet exercice était choisi proche de celui de l'un des exercices qui devaient nécessairement être rencontrés avec les critères imposés. Cette tâche complémentaire est importante. En effet, des expérimentations précédentes ont montré que les étudiants qui travaillent sur le logiciel ne prennent pas le temps de rédiger les exercices (remarquons que ceci n'est pas spécifique du travail sur un logiciel, c'est également le cas lors des séances de travaux dirigés classiques).

Les 21 étudiants étaient tous présents à la première séance ; 17 d'entre eux, soit un trinôme et 7 binômes, étaient présents à la séance suivante. Nous allons limiter notre étude à ces huit groupes d'étudiants qui ont suivi les deux séances. Nous donnons dans le tableau ci-dessous un résumé de l'activité de ces huit binômes durant l'intégralité des deux séances. Toutes les durées mentionnées dans le tableau sont en minutes. Dans la dernière colonne, on trouve suivant la ligne concernée un nombre total, ou une durée moyenne.

Binôme	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	Total / Moy
Nombre d'exercices abordés	3	4	4	5	4	6	4	5	35
Nombre de consultations hors séance	0	1	4	3	0	0	0	0	
Nombre de fenêtres ouvertes par heure	20	48	45	42	58	61	37	29	42,5
Temps moyen par exercice	65	44	59	37	45	27	44	36	44
Temps moyen avant consultation des aides	5	3	3	19	2	19	6	8	8
Temps moyen avant consultation des solutions	15	11	24	25	19	14	18	29	19
Nombre d'éléments de cours consultés	2	1	1	3	2	1	3	2	15
Nombre de méthodes consultées	1	1	0	1	2	1	1	2	9
Nombre de consultations de l'aide graphique	2	3	1	2	2	2	1	2	15
Nombre de consultations des indications	1	2	1	1	2	1	1	3	12
Nombre de consultations des aides	3	3	1	4	2	3	3	3	22
Nombre de consultation des solutions	2	4	3	5	2	5	4	5	30
Temps moyen de consultation des solutions	17	20	31	6	13	11	17	3	15
Nombre de consultations des idées à retenir	0	3	1	2	1	0	1	0	8
Nombre de consultations du texte du thème	1	3	3	2	1	3	0	4	17

Ce tableau permet de nombreux constats à propos de l'activité des étudiants sur le logiciel. Il est construit grâce à l'outil de suivi de l'activité des étudiants dont est muni BRAISE. Par ailleurs, nous avons proposé aux étudiants un questionnaire pour compléter les informations ci-dessus. Onze d'entre eux ont rendu le questionnaire. Les principales conclusions issues du tableau et du questionnaire sont les suivantes :

Une bonne implication des étudiants. — Ce constat provient aussi de l'observation directe des séances. Les étudiants, souvent peu actifs en séance classique, ont beaucoup travaillé durant les séances machine. Les onze étudiants qui ont rendu le questionnaire ont trouvé le dispositif intéressant, et déclaré qu'il était à reproduire si possible. Parmi eux, 6 étudiants ont déclaré s'être connectés hors des séances, pour consulter du cours, ou revoir des exercices.

Des comportements variés. — Un indicateur intéressant du comportement d'un binôme est le nombre de fenêtres ouvertes en une heure. Le nombre moyen de ces fenêtres est de 42, pour un écart-type de 14, ce qui montre que les étudiants ont des comportements très différents les uns des autres. On retrouve cette même variété dans les temps passés par exercice : 44 minutes en moyenne, mais un écart-type de 12 minutes. Il faudrait prolonger l'étude pour tenter d'établir des profils d'étudiants. Pour le moment, nous retenons simplement que le travail sur le logiciel permet des comportements variés, convenant au rythme de chacun.

Retour sur le paradoxe du concepteur : aides et solutions. — Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe précédent, le choix d'associer de nombreux textes à chaque exercice peut réduire l'activité de résolution de problèmes. Avec BRAISE, les étudiants peuvent même se contenter de lire la solution d'un exercice. Or ceci n'est pas apparu, sauf comme activité « d'occupation en fin de séance ». En effet, lorsque l'on approche de la fin de la séance, on voit certains étudiants qui se contentent de lire un énoncé puis sa solution, sans accéder à aucun des autres textes proposés. Mais en dehors de cette circonstance particulière, on peut constater que les étudiants travaillent en moyenne 8 minutes avant de consulter une aide ; et 19 minutes avant de consulter les solutions. Ils ont une véritable activité de résolution de problème, malgré les possibilités offertes par le logiciel. Même si le temps de 8 minutes avant accès à une aide peut paraître faible, il faut rappeler que lors des séances classiques, l'enseignant intervient en moyenne après 5 minutes de recherche d'un exercice. Ici ce temps moyen est plus long, mais il est surtout possible pour certains étudiants de continuer leur recherche autonome en consultant les aides beaucoup plus tard, ou pas du tout. On remarque, en lisant le tableau, un seul binôme (B6) pour lequel le temps moyen avant la consultation des solutions est inférieur au temps correspondant pour les aides. Il s'agit en fait d'un binôme qui a par deux fois en fin de séance regardé très rapidement des exercices et leurs solutions, sans consulter les aides. Mais même en incluant ce comportement spécifique, il s'écoule en moyenne 11 minutes entre la lecture des aides et celle des solutions.

Ces deux types de textes sont massivement consultés : 22 accès aux aides, 30 accès aux solutions pour 35 exercices au total (en fait 35 couples (binôme, exercice)). Il est rare que les étudiants soient persuadés de la justesse de leur propre solution au point de ne pas consulter le corrigé. Mais l'usage qui est fait de ces textes évite les défauts que l'on pouvait craindre. En particulier, on a vu que les étudiants passent en moyenne 44 minutes sur un exercice, ce qui est supérieur au temps moyen pratiqué en travaux dirigés traditionnels. Une explication de l'allongement de cette durée peut être le temps passé à comprendre la solution proposée, et à la comparer avec celle trouvée : 15 minutes en moyenne. Or cette activité semble intéressante, surtout si l'on se souvient que 77% des étudiants interrogés dans l'étude sur la résolution de problèmes déclaraient ne pas avoir bien compris la solution des exercices en sortant de travaux dirigés.

Les aides employées. — Parmi les types d'aides proposés, on aurait pu imaginer que les étudiants feraient le plus souvent appel aux indications, ou à l'aide graphique. Si cette dernière est effectivement beaucoup consultée, avec 15 accès, les cours le sont tout autant (15 accès également). Les indications sont moins utilisées (12 fois) et les méthodes seulement 9 fois. Ceci s'explique peut-être par les conditions d'expérimentation : il s'agissait des premiers exercices que ces étudiants rencontraient sur le sujet, et le cours était vu durant les deux mêmes semaines, d'où le besoin de consulter celui-ci.

Autres textes. — Les textes des thèmes ont été beaucoup consultés : 17 fois sur les 35 exercices. Toutefois ce chiffre est peu significatif, puisque la consigne a été donnée en séance de consulter le texte relatif à la méthode de Newton ; il s'agit en fait de 10 consultations spontanées. Mais la principale constatation à propos des textes autres que les aides ou la solution est plutôt négative. En effet, les idées à retenir ont été consultées seulement 8 fois pour les 35 exercices, soit dans moins d'un exercice sur quatre. Ceci peut être interprété comme une conséquence du dispositif : celui-ci restait malgré tout proche des travaux dirigés traditionnels, pour lesquels le contrat consiste à résoudre l'exercice ; la notion d'idée à retenir d'un exercice n'y a pas d'existence officielle. Cette rubrique sera peut-être plus consultée lors d'une utilisation en autonomie.

5. Conclusion

Certains des résultats de l'expérimentation menée ici sont déjà bien connus. C'est le cas, par exemple, de la motivation des étudiants travaillant sur un tel support. Des études menées dans l'enseignement secondaire (par exemple Ruthven, Henessy 2002) montrent même que des enseignants peuvent emmener leur classe travailler sur une base de problèmes essentiellement pour éviter des soucis de gestion de classe. Cependant, ce résultat prend un relief particulier ici puisque les étudiants travaillaient sur un support n'ayant aucun aspect ludique : pas d'interprétation des réponses, pas même de figures animées. Or, l'absence d'interprétation des réponses est fondamentale : c'est elle qui permet de ne pas se restreindre à des exercices techniques. Les étudiants ont certes apprécié la nouveauté du travail sur ordinateur, peu présent dans leur cursus, mais surtout la possibilité de progresser à leur rythme, en choisissant les aides qui leur paraissaient les plus adaptées. La situation même de travail sur machine empêche les interventions régulières et fréquentes de l'enseignant pour le groupe entier. Là encore, il s'agit d'un résultat connu de longue date, lié à l'évolution du rôle de l'enseignant lors de séances sur ordinateur, quelque soit le type de logiciel employé (Fey 1989). Nous n'avons pas abordé ici cette question fondamentale du rôle de l'enseignant, préférant nous centrer sur les pratiques des étudiants. La principale nouveauté concernant ces pratiques réside ici dans les observations relatives à ce que nous avons appelé « le paradoxe du concepteur ». Alors que l'on pouvait craindre un appel systématique aux aides, voire aux solutions, on constate que les étudiants en font un usage mesuré. Ils conservent, malgré les possibilités offertes par le logiciel, une véritable activité de résolution de problèmes. Ainsi l'emploi du support en ligne a réellement permis de ménager une place à cette activité peu présente dans les enseignements traditionnels. Bien entendu, il s'agit d'une simple résolution de problèmes faite au brouillon, et non de la rédaction d'une solution. Cependant cette activité de rédaction autonome par l'étudiant n'a pas plus de place dans les travaux dirigés classiques ; et elle peut exister avec le logiciel grâce à un scénario prévoyant d'exiger des traces écrites appropriées.

Il ne s'agit en aucun cas pour nous de prétendre que seul l'emploi de BRAISE, ou même d'autres logiciels de type « base de problèmes », permet de renforcer la place de la résolution de problèmes à l'université. D'autres dispositifs peuvent certainement être envisagés. Nous n'avons pas non plus cherché à évaluer a posteriori l'élaboration par les étudiants ayant travaillé sur le logiciel de types de problèmes, ni même à observer une possible amélioration de leurs performances. Nous faisons l'hypothèse que c'est la résolution de problèmes qui favorise la construction de types de problèmes. Et le logiciel a effectivement permis que les étudiants développent une véritable activité de résolution de problèmes.

Les recherches sur les bases de problèmes en ligne sont actuellement poursuivies, notamment afin de préciser les choix de scénarios possibles, suivant le public concerné et le logiciel utilisé. La question d'un travail des étudiants en autonomie partielle et celle de l'évolution du rôle de l'enseignant, qui y est fortement corrélée font l'objet d'études qui prolongent et complètent celle qui a été présentée ici.

Annexe : exemples d'écrans de BRAISE

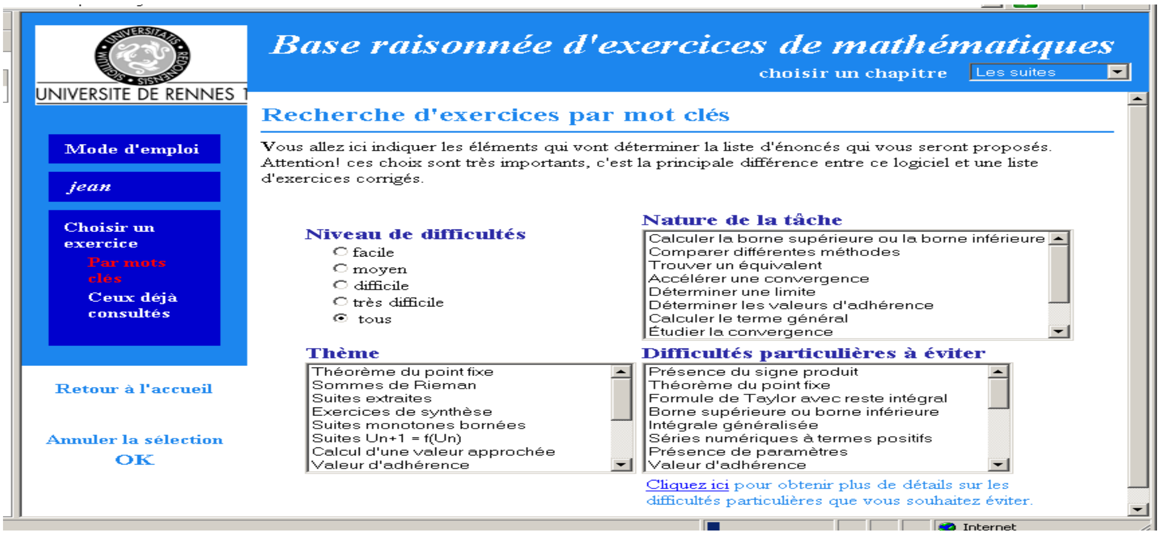


Figure 1 : écran de choix par mots-clefs

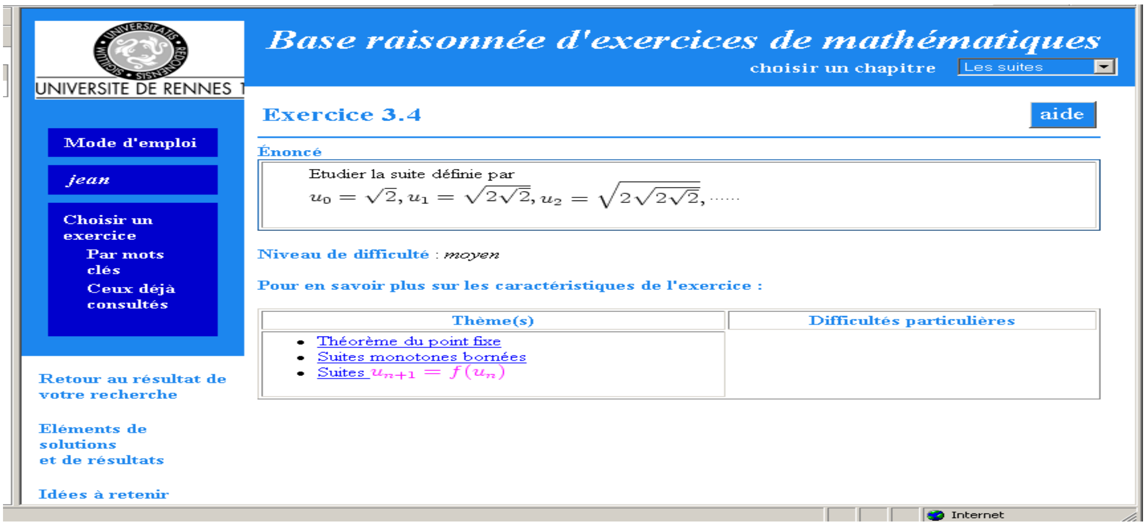


Figure 2 : écran de présentation d'un exercice

Bibliographie

C. CASTELA (2000), *Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique*. Recherches en didactique des mathématiques, **20(3)**, 331-380, La pensée sauvage, Grenoble.

C. CASTELA (2002), *Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison de deux institutions, université et classes préparatoires aux grandes écoles*, Cahiers de Didirem n° **40**, Paris, Université Paris 7.

C. CAZES, F. VANDEBROUCK (2003) *Analyse d'un exemple d'intégration de TICE dans une formation d'enseignement supérieur,* Actes du colloque ITEM, IUFM de Reims `http://www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom/`

C. CAZES, G. GUEUDET, M. HERSANT, F. VANDEBROUCK (2004), *Using web-based learning environments in teaching and learning advanced mathematics*, Présentation au colloque ICME10, Copenhague, Danemark.

J. T. FEY (1989) *Technology and mathematics education: a survey of recent developments and important problems.* Educational studies in Mathematics **20** 237-272.

G. GUEUDET, J. HOUDEBINE (2003), *Une base d'exercices en ligne à l'université,* Actes du colloque ITEM, IUFM de Reims.
`http://www.reims.iufm.fr/Recherche/ereca/itemcom/`

J. JULO (1995), Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement, *Presses universitaires de Rennes.*

D. MIODUSER and al. (2000), *Web-based learning environments: current pedagogical and technological state*, JRCE, **33(1).**

A. ROBERT, J. ROGALSKI (2003), *A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class*, to appear in Educational Studies in Mathematics.

K. RUTHVEN, S. HENESSY (2002), *A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning*, Educational Studies in Mathematics, **49(2-3)**, 47-86.

Ghislaine GUEUDET
CREAD,
IUFM Bretagne et Equipe DidmaR,
Université Rennes 1,
`Ghislaine.Gueudet@bretagne.iufm.fr`

LA THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES DE BROUSSEAU

Alain KUZNIAK

Résumé : La théorie des situations didactiques développe un cadre pour l'étude des situations d'enseignement des mathématiques. L'article présente deux éléments importants de cette théorie : les notions de situations didactiques et adidactiques et la notion de contrat didactique. L'exemple d'une expérience conduite par Brousseau d'un premier enseignement des statistiques au Cours Moyen illustre le propos.

Cet article reprend l'exposé sur la Théorie des Situations Didactiques que j'ai fait lors de la réunion de fin d'année 2004 de l'IREM de Strasbourg. Le prétexte de cet exposé avait été fourni par l'attribution de la médaille KLEIN 2003 à GUY BROUSSEAU pour l'ensemble de ses travaux en didactique des mathématiques.

Introduction

La présentation en peu de pages d'un travail aussi foisonnant et s'étendant sur plusieurs décennies relève du genre de tâches susceptible de laisser un goût d'inachevé ou de survol voire pire, à cause des approximations nécessaires, de donner une fausse idée de la théorie qu'on vise à faire découvrir. Outre sa prolixité et sa richesse, l'entrée dans l'œuvre de BROUSSEAU est rendue particulièrement difficile par un point qui relève de la méthode utilisée dans la théorie des situations elle-même. Son étroite relation pendant plus de trente ans avec des expérimentations dans les classes fait que peu à peu les concepts initiaux se modifient et s'approfondissent graduellement par extension de leur champ d'application. Il s'agira donc ici d'une présentation partielle de la théorie des situations didactiques et d'une introduction à la lecture des différents ouvrages de BROUSSEAU.

BROUSSEAU a l'habitude de dire que sa carrière et ses recherches sont en grande partie le fruit de la contingence et de rencontres souvent déterminantes. Dans son cas, il ne s'agit pas seulement d'une clause de style mais aussi du reflet de la réalité. Il me semble intéressant de préciser ce point en insistant sur l'importance d'institutions comme les IREM ou l'Ecole Michelet dans l'élaboration de la didactique des mathématiques.

Né en 1933 au Maroc, BROUSSEAU a d'abord été normalien dans le Lot et Garonne. Les Ecoles Normales recrutaient les futurs instituteurs dès la classe de seconde et après quatre ans les jeunes gens devenaient enseignants dans une classe de l'école primaire et ceci le plus souvent jusqu'à leur retraite. Dans les années soixante, le début de la massification de l'enseignement secondaire entraîne un manque de professeurs. BROUSSEAU est ainsi tiré hors de sa classe pour aller sur les bancs de l'Université où il peut ensuite suivre des études de mathématiques financées par les IPES. Dans le même temps s'amorce une autre révolution, celle des mathématiques modernes, qui remet en cause l'ordonnancement traditionnel du savoir mathématique enseigné. Cette révolution coïncide avec celle plus confidentielle alors de la pensée pédagogique appuyée sur les travaux de la psychologie génétique développée par Piaget. Il s'agit simultanément d'enseigner d'autres mathématiques et ceci autrement. Comme assistant à la faculté de Bordeaux, BROUSSEAU se trouve aspiré dans le mouvement dont il va être un des acteurs en œuvrant pour la création des IREM et aussi d'un centre pour l'observation de l'enseignement des mathématiques (le COREM) dans l'école Michelet à Talence. C'est dans cette école qu'il a pu, avec l'aide d'enseignants volontaires, mettre au point, développer et étudier, à partir de 1971, de nombreuses situations d'enseignement des mathématiques.

Il peut ainsi articuler de manière spectaculaire ces deux pierres d'achoppement de toute recherche sur l'enseignement des mathématiques : la théorie et l'expérience pratique. Par la suite, il contribuera à l'émergence institutionnelle, dans le cadre de l'Université, des études de didactique des mathématiques avec la création de DEA puis de Doctorats de didactique.

Aujourd'hui, alors que les IREM regardent avec nostalgie leur passé, l'expérience de BROUSSEAU rappelle la nécessité de la convergence de plusieurs types de volonté pour parvenir à progresser dans la recherche scientifique : une volonté personnelle bien sûr mais appuyée sur celle d'une collectivité elle-même relayée par la volonté des gouvernants.

1. Vers la didactique des mathématiques

1.1. La mise en place d'une « didactique nouvelle »

Un des apports majeur de BROUSSEAU est certainement d'avoir contribué à dégager un champ spécifique de recherches autour de la didactique des mathématiques. Ce champ se crée en rupture avec la didactique classique dont BROUSSEAU fait remonter les sources à COMENIUS, penseur tchèque un tantinet mystique du XVII[e] siècle et inventeur de l'idée de grande didactique (didactica magna). Pour COMENIUS la didactique est « l'art d'enseigner » tout à tout le monde :

> *Mais j'ose promettre, moi, une grande didactique, c'est-à-dire un art universel qui permet d'enseigner tout à tous avec un résultat infaillible ; d'enseigner vite, sans lassitude ni ennui chez les élèves et chez les maîtres, mais au contraire dans le plus vif plaisir.*

Une méthode unique suffit pour toutes les matières :

> *Il n'existe qu'une seule méthode pour enseigner toutes les sciences : c'est la méthode naturelle, valable aussi bien dans les arts que dans les langues. Les variations qui pourraient exister sont si insignifiantes qu'elles ne sauraient exiger de méthode spécialisée.*

D'autre part, COMENIUS ne tire pas sa méthode de l'observation de ce qui est mais d'une réflexion a priori.

> *Enfin, je démontre tout cela a priori, c'est-à-dire en le tirant de la nature immuable des choses ; comme d'une source vive coulent sans cesse des ruisseaux qui s'unissent finalement en un seul fleuve, j'établis une technique universelle qui permet de fonder des écoles universelles.*

Cette approche va influencer la vision traditionnelle qui considère l'enseignement d'une discipline comme éclaté en deux composantes indépendantes : le contenu et la didactique. Cette dernière apparaît comme naturelle, immuable et en quelque sorte intemporelle.

En réaction à cette conception générale et purement spéculative de la didactique classique, BROUSSEAU insiste sur les spécificités liées au contenu mathématique et sur la nécessité d'études expérimentales et scientifiques. En effet, selon lui

> *« on sait aujourd'hui que ni l'humanité entière, ni les êtres humains individuellement, n'acquièrent toutes les connaissances dans les mêmes circonstances, ni suivant les mêmes processus: la géométrie,*

l'algèbre ou les probabilités n'ont pas la même genèse ni la même organisation ».

Ainsi pour lui, la conception ou l'étude d'un projet d'enseignement dépend de la connaissance qui est l'objet de l'enseignement, et donc de la discipline. Et elle exige en retour des aménagements originaux et appropriés de cette connaissance car pour BROUSSEAU l'enseignement produit chez les élèves des formes de connaissances qui varient suivant les conditions didactiques et qui diffèrent des savoirs de référence.

D'autre part, à partir du XX[e] siècle, l'apprentissage et l'enseignement sont devenus un champ d'études expérimentales. La nouvelle didactique que défend BROUSSEAU va s'attacher à la conception et à l'étude de faits didactiques mais en s'appliquant à distinguer, dans ses productions, les déclarations à caractère scientifique des opinions ou des dispositifs d'ingénierie. La didactique souhaitée par BROUSSEAU doit développer des méthodes et des concepts originaux autour de son champ de préoccupation. Elle n'est pas réductible aux domaines classiques comme les mathématiques, la psychologie ou la sociologie.

1.2. La notion de situation didactique

BROUSSEAU met au cœur de son approche de la didactique la notion de situation didactique. Le terme situation désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu. Une situation didactique est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner.

Pour comprendre la conception privilégiée par BROUSSEAU dans l'étude des situations, il faut associer à la notion de situation didactique celle de situation non didactique. Cette dernière est la situation rencontrée par le mathématicien ou l'usager des mathématiques lorsqu'il doit résoudre un problème dont la finalité première n'est pas l'apprentissage d'une quelconque notion mathématique. En s'inspirant de l'usage des connaissances mathématiques en mathématiques ou en dehors des mathématiques, BROUSSEAU introduit la notion de situation adidactique pour l'élève : l'élève s'approprie la situation proposée par le professeur non pas en faisant son travail d'élève mais plutôt celui d'un « mathématicien en herbe » préoccupé par la seule résolution du problème posé. Le problème devient son problème à l'issue d'un processus de dévolution fondamental dans cette conception de l'apprentissage où l'élève doit participer à l'élaboration de ses connaissances de manière active.

Ainsi, le chercheur en didactique des mathématiques va devoir concevoir des situations didactiques à fort potentiel d' « adidacticité ». Ces situations devront permettre un accès au savoir mathématique. L'étude de la conception et de l'impact de telles situations est le premier objectif initialement fixé à la Théorie des Situations Didactiques.

Avant d'aller plus loin dans la présentation de cette théorie, je vais développer un exemple qui montre la fécondité de cette approche qui relie étroitement mathématique et enseignement.

2. Un exemple : une expérience d'un premier enseignement des statistiques

La situation que j'ai choisie de présenter est un peu particulière dans le travail de BROUSSEAU. Elle est ancienne et a été développée en 1974 pour envisager ce que pourrait être un enseignement des statistiques pour des élèves de l'école primaire en CM2. Les programmes de Seconde lui donnent une nouvelle actualité. Il s'agit d'une situation doublement expérimentale puisqu'elle envisage un enseignement sur une notion totalement nouvelle et aussi parce qu'elle apparaît à un stade précoce du développement théorique proposé par BROUSSEAU, développement qu'elle a contribué à nourrir. Elle n'est donc pas aussi achevée que d'autres situations que BROUSSEAU utilise pour présenter sa théorie comme la *course à vingt* ou la *situation du puzzle*. La description complète de la situation est faite dans un article cosigné avec Nadine BROUSSEAU[1] [5] (2002).

Le but du processus est de dégager l'équivalence de deux statistiques lorsqu'on peut leur associer le même modèle. A terme, cela conduit à l'idée de test d'hypothèse pour vérifier cette équivalence. Les données étudiées, contrairement à beaucoup de situations d'enseignement de statistiques ne sont pas fournies mais vont être obtenues par les élèves.

Le processus est assez long et a duré trente deux séances. La durée des séances est très variable : elles sont souvent courtes (5 à 10 minutes) mais elles peuvent durer jusqu'à une heure. Voici un résumé du processus :

Expérience : deviner ce qui est caché (séances 1 à 5) ;
Modélisation et comparaison d'expériences (séances 6 à 8) ;
Représentation graphique de séries (séances 8 à 16) ;
Convergence et décision (séances 17 à 20) ;
Les intervalles de décision (séances 21 à 25) ;
Les événements et leur probabilité (séances 26 à 32).

L'expérience statistique à la base de la situation didactique s'engage autour d'une « machine » constituée par une bouteille opaque qui contient des boules noires et des boules blanches qui pourront apparaître dans le goulot mais une seule à la fois. Le contenu de la bouteille ne sera connu ni par les élèves ni, et c'est essentiel, par le professeur. La préparation de la « machine » est donc importante, voici comment elle se déroule :

Préparation de la machine

PROFESSEUR : *Votre camarade Jean va mettre dans cette bouteille (opaque et vide), 5 boules prises dans ce sac (opaque lui aussi), qui en contient une trentaine.*
Venez vérifier que dans ce sac, il n'y a pas autre chose que des boules blanches et des boules noires.

PROFESSEUR : *Jean, mélange les boules dans le sac! Maintenant, sans regarder, sépare 5 boules et maintiens les à part dans le sac, saisis-les de l'extérieur du sac.*
Venez vérifier qu'il y en a 5. Mettez la bouteille dans le sac.
Jean, fais entrer les cinq boules dans la bouteille et ferme la avec ce bouchon translucide !
Vous êtes sûrs que dans cette bouteille il y a exactement 5 boules et que personne ne sait de quelle couleur elles sont.

Ensuite, une première série d'observations se déroulent où va se manifester l'obstacle déterministe.

[1] On ne soulignera jamais assez l'importance, reconnue par Guy Brousseau, du travail de Nadine Brousseau qui a mis en œuvre la plupart des activités conçues par son mari et en a assuré des comptes rendus particulièrement précis et vivants. La minoration institutionnelle constante du rôle des femmes dans l'élaboration théorique mérite d'être soulignée.

Premières observations

PROFESSEUR : *Nous allons essayer de savoir ce que contient cette bouteille* ***sans jamais l'ouvrir****.*

Les élèves regardent à travers le bouchon mais ne voient rien. Mais en renversant la bouteille, une boule paraît.

ELÈVE : *Il y a une blanche !…*

ELÈVE : *Recommence... Il y a une noire aussi*

Les élèves émettent des hypothèses qui vont faire avancer le processus

ELÈVE : *Recommence cinq fois pour qu'on voie toutes les boules.*

Cet élève pense que peut-être les boules se montrent à tour de rôle.

ELÈVE : *Eh! Il y a trois boules blanches et deux noires.*

La prégnance du modèle déterministe se manifeste ici. Et le processus pourrait s'arrêter mais *l'idée que les boules se montrent dans le même ordre, exprime que ce qui paraît doit «ressembler» au contenu de la bouteille.* Le professeur peut saisir l'occasion de lancer le processus et tenter de clore l'épisode déterministe en utilisant et en formalisant un argument déterministe :

PROFESSEUR : *Si ce que tu dis est vrai, alors en recommençant on doit voir à nouveau trois blanches et deux noires... non ?*

Les élèves ont des doutes

Les élèves recommencent mais le phénomène qui se produit ne correspond pas à leurs attentes.

ELÈVE : *Maintenant il y a quatre blanches et une noire.*

Comme le signale BROUSSEAU, *l'idée de la réapparition régulière fait long feu. Avec elle l'espoir de voir les 5 boules en 5 observations fait naufrage.* Un débat s'instaure autour d'hypothèses :

ELÈVE : *De toute manière il y a plus de blanches que de noires …*

PROFESSEUR : *Alors on devrait continuer à voir plus de blanches que de noires si on recommence ?*

ELÈVES : *Non ! Si les blanches sont apparues, maintenant ce sera le tour des noires.*

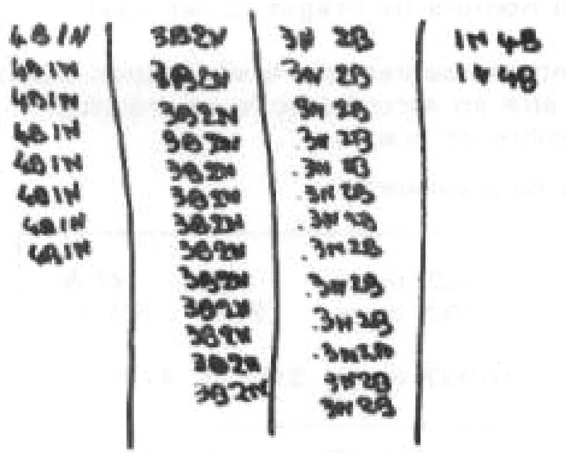
Ces élèves pensent qu'il y aura une compensation.

Ainsi apparaît l'idée, qui n'est pas évidente pour tous les élèves, de recourir à une « expérience » pour trancher entre diverses hypothèses. Elle constitue un progrès important souligné par le professeur. Les élèves relancent la « machine » pour observer ce qui se passe. Pour eux, il ne s'agit pas de tirages mais simplement d'une reproduction d'un phénomène. Mais quel est le point commun de toutes ces expériences ? Une dialectique s'installe entre le passé (la statistique) et la prévision du futur (la probabilité). Les deux sont reliés par des hypothèses sur la constitution de la machine.

Le processus s'amorce

Les élèves réalisent des séquences d'observations qu'ils représentent de manières différentes suivant la propriété du contenu supposé de la bouteille qu'ils souhaitent vérifier (effectifs de noires et de blanches pour savoir s'il y a plus de noires que de blanches, ou groupes de 5 observations pour représenter le contenu lui-même). Les élèves sont déçus de voir les résultats fluctuer (pour le contenu), mais ils sont mieux convaincus du fait qu'il y a plus de blanches que de noires. Ce « succès » les encourage à continuer.

Ensuite ils comptent combien de fois ils ont obtenu (4b, 1n) (3b, 2n) (2b, 3n) et (1b, 4n), et trouvent des arguments pour renforcer leur conviction. Ainsi dans le cas représenté, il y a le même nombre de séries (3b, 2n) que (2b, 3n) mais il y a nettement plus de séries (4b, 1n) que de séries (1b, 4n). Ainsi certains élèves concluent qu'il doit y avoir 3 blanches et 2 noires.



Une autre manière de noter les résultats

D'autres comptent toutes les apparitions de noires et de blanches pour arriver à la même conclusion.

Une première idée du test d'hypothèse

Ils se déclarent sûrs de la conclusion qu'ils ont obtenue… et ils demandent l'ouverture de la bouteille pour vérifier ! Mais là, coup de théâtre, le professeur refuse :

PROFESSEUR : *Si vous êtes si sûrs, il est inutile de vérifier, et si non, il faut trouver une manière de se convaincre.*

La probabilité n'est pas un concept expérimental. Cette posture est particulièrement difficile à tenir par le professeur et lorsque cette expérience a été refaite récemment en classe de seconde, le professeur a cédé à la demande des élèves, annulant d'une certaine façon tout le processus d'entrer dans les tests d'hypothèse pour se convaincre de la nature de la statistique en question. Un autre élément de risque pour le professeur est évidemment que certains événements nécessaires à la poursuite de son expérience ne se produisent pas et c'est là que le choix de la configuration de base a nécessité un calcul qui ne doit rien au hasard.

Les élèves disent qu'ils seront sûrs si une des compositions possibles apparaît trois fois de plus que les autres. C'est une première forme du test d'hypothèse.

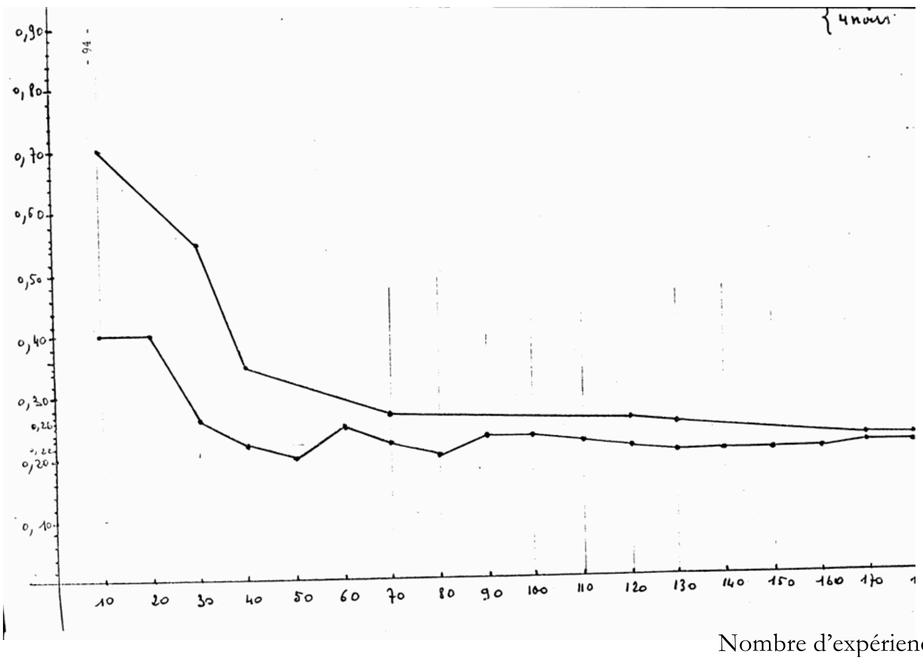
La situation fondamentale va continuer à évoluer et à produire toute une série de concepts et de méthodes. Comme je l'ai signalé, le processus se poursuit sur 32 séances et ceci avec des enfants de 10-11 ans. Il n'est pas question de détailler ici ce processus particulièrement riche. Voici seulement comment se sont introduites la modélisation et la simulation dans l'expérience développée au CM2. En fait, intrigués et peut-être irrités par le refus obstiné du professeur d'ouvrir la bouteille, un groupe d'élèves a demandé de faire une bouteille transparente avec la composition supposée pour la première. Cette demande a été reprise avec espoir par les autres élèves et tous recommencent à faire des observations avec la nouvelle bouteille.

Mais il ne se passe rien, les séries d'observations ne se ressemblent pas contrairement aux attentes. Cet événement permet de franchir une nouvelle étape, les élèves commencent à s'intéresser non plus à la suite exacte des événements mais à la longueur de la suite : *il y a des écarts mais si on recommence on devrait voir les écarts se réduire.* En fait pour réaliser cet espoir il faudra passer des effectifs aux fréquences. Le processus suit plusieurs étapes.

Les élèves demandent d'autres bouteilles transparentes, chacune avec un des contenus possibles. Pour gagner du temps le professeur propose des résultats de simulations faites grâce à un ordinateur (et à une fonction pseudo aléatoire). Les élèves comptent les noires et les blanches, puis demandent à la machine de faire ce comptage et enfin ils demandent des calculs de rapports.

Les séries de fréquences sont reportées sur des graphiques. Le graphique suivant représente deux simulations avec la même composition (4 noires, 1 blanche) :

Fréquence des boules blanches



Nombre d'expériences

Pour avancer vers l'idée du test d'hypothèse, un jeu est proposé aux élèves : de quelle bouteille vient cette série ? Les élèves vont devoir examiner un graphique et « deviner » de quelle bouteille –transparente– est issue la suite qu'il représente. Par la suite les élèves devront acheter des suites pour deviner le contenu de la bouteille, plus la suite est longue, plus elle est chère ! Les données ont un coût en statistique. A quel moment est-il raisonnable d'arrêter la suite? Lorsque les élèves choisissent de s'arrêter, il est possible de vérifier leur conclusion car, cette fois, la réponse est connue de celui qui fournit la suite.

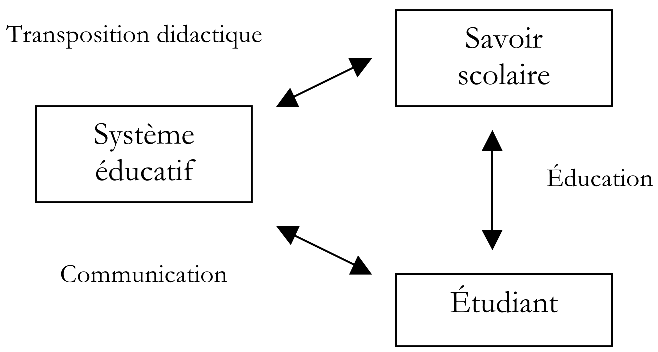
La conception d'un tel processus didactique nécessite une étude préalable importante qui s'intéresse aux divers aspects de la statistique dans les différents niveaux institutionnels où elle apparaît. Elle regarde aussi les pratiques et les stratégies des statisticiens. Elle nécessite enfin une étude des difficultés et des obstacles liés à la pensée statistique.

L'ambition théorique de BROUSSEAU vise à définir les éléments constitutifs des situations didactiques conçues en étroite relation avec les mathématiques. L'objet de la suite de cet article est de présenter quelques éléments du cadre théorique en insistant notamment sur la place centrale des notions de situation didactique et de contrat didactique.

3. Situations didactiques et adidactiques

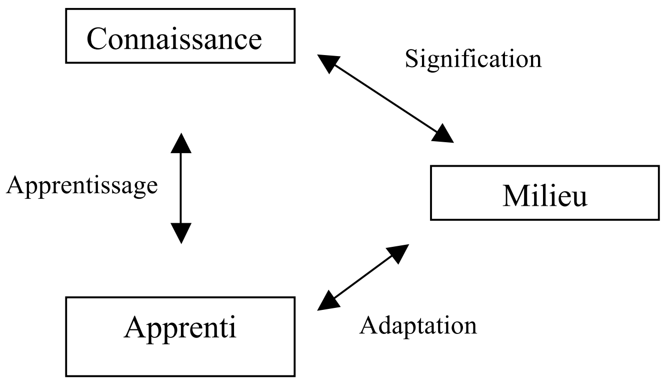
3.1. La situation didactique de base

Pour illustrer sa conception de la situation didactique de base dans sa théorie, BROUSSEAU se propose de l'insérer dans le cadre classique du fameux triangle didactique. Ce triangle modélise le jeu de l'enseignement entre trois pôles : un savoir scolaire, un système éducatif souvent représenté dans la classe par un enseignant et enfin un étudiant.



Cette façon de voir se place plutôt du côté de l'institution éducative dans son rôle d'instance de transmission ou de communication d'un savoir.

Si l'on se place plutôt du côté de l'apprenant en situation d'apprentissage, un autre triangle se met en place qui fait intervenir le milieu et les connaissances du sujet. BROUSSEAU propose cette organisation du travail de l'élève dans une situation d'apprentissage spontané.

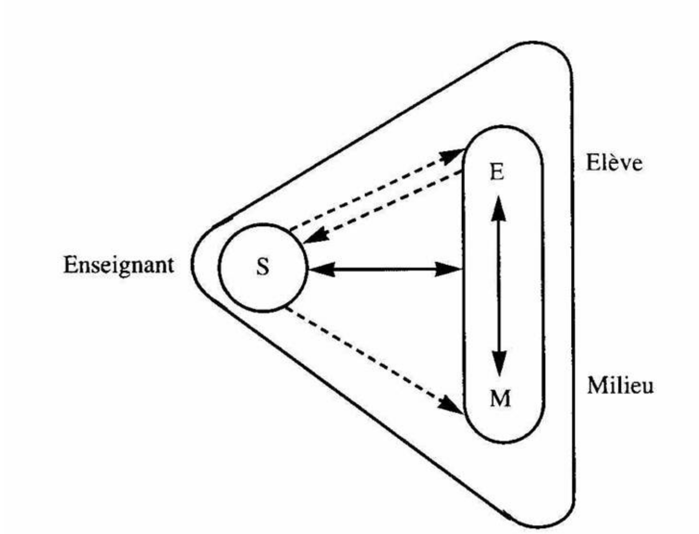


Dans l'enseignement, les deux triangles se rapprochent. Le savoir s'articule avec les connaissances et l'apprenti avec l'élève ou l'étudiant.

BROUSSEAU réorganise ces deux regards sur le système éducatif en privilégiant (voir 1.2) l'action de l'élève, le professeur a pour tâche essentielle d'établir les conditions les plus favorables à la mise en action de l'élève.

Voici comment se schématise alors la situation didactique de base (voir [1] page 92).

S = Savoir



La situation didactique englobe tout l'environnement de l'élève et notamment l'enseignant. La partie adidactique de la situation (désignée sous le nom de *situation adidactique*) est la partie que le professeur délègue (dévolue) à l'élève. Ce dernier peut alors interagir avec un *milieu presque non didactique*, où il peut et doit ignorer les intentions didactiques du professeur.

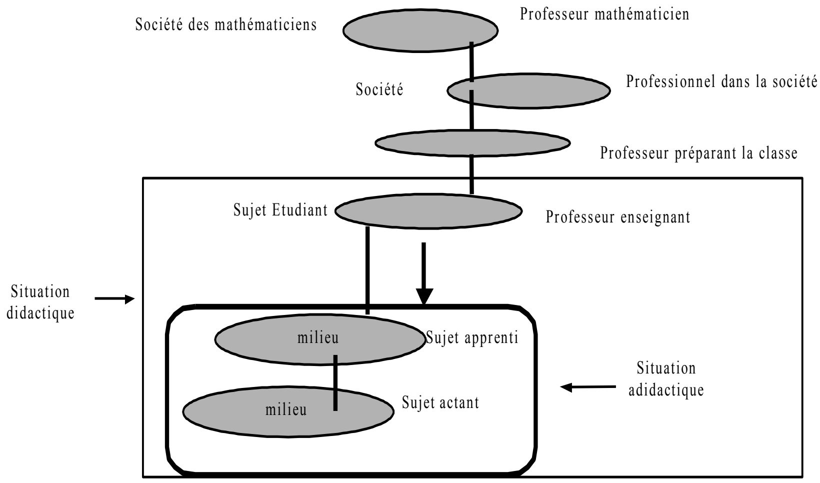
Il faut noter que le professeur fait désormais partie de la situation didactique, ce qui n'a pas toujours été le cas. Au début de ses recherches, BROUSSEAU s'est concentré sur les situations pour l'élève (donc adidactiques). Différentes raisons motivaient ce choix, la première était l'inexistence de telles situations dans un contexte privilégiant une transmission du savoir de type magistral. Les autres relèvent plus de l'environnement pédagogique et psychologique propre aux années soixante-dix où le modèle constructiviste était dominant. D'autre part le rôle déterminant du professeur dans la gestion des situations avait certainement été initialement minoré par BROUSSEAU qui pensait qu'une situation adidactique bien conçue emporterait tout sur son passage. Depuis, il est revenu sur cette première idée comme en témoigne le rôle central de la dévolution et du contrat didactique dans la conception des situations didactiques (voir 4.4).

3.2. Principes de l'étude des situations didactiques

BROUSSEAU énonce un certain nombre de principes nécessaires selon lui pour bâtir une étude des situations didactiques. Trois horizons principaux paraissent importants dans l'approche de BROUSSEAU.

L'horizon systémique

Une situation didactique s'inscrit dans un système plus vaste que le seul environnement de la classe. Voici comment cet ensemble de relations peut être schématisé pour en montrer les différents liens avec le monde savant et la société.



L'étude globale d'une situation didactique doit envisager tous les niveaux. Elle porte bien sûr principalement sur les conditions de l'enseignement et de l'apprentissage. Ces conditions sont importantes dans l'approche constructiviste du savoir où le rôle actif de l'apprenant est essentiel. Ainsi pour BROUSSEAU, *le seul moyen dont disposent les professeurs pour provoquer l'apprentissage d'un savoir est de connaître et de reproduire les conditions qui provoquent son acquisition.*

L'horizon de la théorie des jeux

Dans les années 60, BROUSSEAU s'est beaucoup intéressé à la théorie des jeux qui a profondément influencé sa façon d'envisager l'enseignement. Son idée initiale était de modéliser les systèmes didactiques en termes de *jeux mathématiques* dénommés *situations.* Il faut ainsi préciser *l'actant,* celui qui agit, et les états du *milieu* et aussi définir les règles et les enjeux. Cette conception entraîne un travail d'évaluation d'un certain nombre de *coûts* de la situation : coût d'utilisation, de communication, coût d'enseignement, coût d'apprentissage *etc.*

L'horizon théorique

Il y a dans le travail de BROUSSEAU très peu de formalisme, mais un petit nombre de principes qu'il qualifie parfois d'axiomes et qui sont des hypothèses fortes qui guident le travail spécifique sur les situations.

Ainsi en Théorie des Situations Didactiques, un concept C sera *l'objet qui résout une situation déterminée S(C), de façon optimale.* Cette définition s'inspire de l'approche développée par Hilbert dans son étude des fondements de la géométrie, un objet est défini par une relation qu'il vérifie. A cela s'ajoute ce que BROUSSEAU appelle l'Axiome de la correspondance entre les connaissances mathématiques et les situations. Il s'agit en fait d'un principe directeur pour concevoir et organiser des situations didactiques. Chaque connaissance mathématique possède au moins une situation qui la caractérise et en retour chaque situation mathématique requiert l'usage d'au moins une connaissance mathématique. Cependant, il n'y a pas correspondance un à un entre situations et connaissances. BROUSSEAU pose alors son hypothèse la plus forte et sans doute la plus discutée surtout lorsque la complexité du savoir mathématique augmente. Il s'agit de l'hypothèse de l'existence de situations fondamentales.

> *Toute collection de situations qui caractérisent une même connaissance mathématique, possède au moins une* ***situation fondamentale*** *qui les génère toutes par la détermination des valeurs de ses variables.*

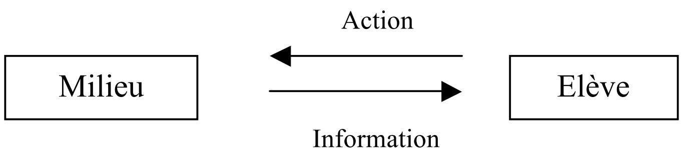
Cette hypothèse tire les conséquences de l'axiome de la correspondance entre connaissances et situation. Elle pose l'existence d'une situation génératrice. La recherche des variables didactiques pertinentes pour définir cette situation s'avère particulièrement fructueuse en forçant une analyse épistémologique et didactique approfondie du savoir visé. Cette analyse envisagera notamment les divers types d'obstacles que rencontre l'étudiant dans son apprentissage d'une notion mathématique.

3.3. Les types de situations adidactiques

Les situations adidactiques ont fait très tôt l'objet de l'attention théorique de BROUSSEAU qui a tenté une typologie de ces situations conçues, rappelons le, par le professeur dans l'intention d'enseigner un contenu mathématique tout en laissant à l'élève la marge de manœuvre et d'initiative la plus grande possible. Il introduit ainsi trois grands types de situations qui graduellement conduisent l'élève à préciser les connaissances utilisées pour résoudre un problème.

Situation d'action

Dans ce premier type de situations, le sujet est confronté à un milieu qui interagit avec lui.



Agir consiste pour le sujet à choisir des états du milieu en fonction de ses propres motivations. Le milieu est présenté comme antagoniste par BROUSSEAU car il doit réagir aux propositions de l'élève dans une perspective d'apprentissage.

Situation de formulation

Pour dépasser l'action, il est nécessaire de développer des situations de formulation, souvent appuyées sur l'obligation faite à l'élève de communiquer avec un autre interlocuteur. La formulation des connaissances utiles pour maîtriser l'action met en œuvre des répertoires linguistiques et facilite également leur acquisition.

Situation de preuve (ou de validation)

Dans les deux premiers types de situations, existaient des corrections et des régulations empiriques, mais pour progresser dans la construction du savoir un nouveau type de formulation est nécessaire. Il ne s'agit plus simplement d'échanger des informations mais de coopérer avec un partenaire pour rechercher la vérité.

4. Le contrat didactique

4.1. Définition

La notion de contrat didactique est une notion centrale dans la théorie des situations didactiques. On a vu que les situations didactiques mettaient en contact un système enseignant avec un système enseigné. L'enseigné ignore ce qui est spécifique du savoir avant de l'avoir appris et, mis à part les cas d'autodidaxie, il fait confiance à l'enseignant pour gérer au moins partiellement la responsabilité du résultat de l'action d'enseignement entreprise.

Dans la pratique de la classe, un certain nombre de comportements spécifiques du maître et de l'élève vont permettre la gestion de l'acte d'enseignement à la fois du côté de l'élève et du côté du professeur. Pour BROUSSEAU, *ces habitudes (spécifiques) du maître attendues par l'élève et les comportements de l'élève attendus par le maître, c'est le contrat didactique*. Les différents contrats didactiques vont se déterminer par la répartition, explicite ou implicite, des responsabilités de prise de décisions par rapport à l'apprentissage entre le professeur et les élèves.

Le contrat didactique n'est pas un contrat véritable avec des clauses précisant la nature de savoir qui va être enseigné puisque au début de l'apprentissage l'élève ignore la nature réelle du savoir qu'on veut lui faire acquérir. *Il ignore ainsi nécessairement où et comment on veut le conduire.* Mais pourtant, BROUSSEAU fait remarquer que lorsqu'un enseignement échoue ou rencontre des difficultés, chaque parti se comporte comme si un contrat avait été rompu. De fait de nombreux paradoxes président à l'existence du contrat didactique qui repose sur un grand nombre d'incertitudes : le professeur n'est pas assuré du taux de réussite de ses élèves dans une situation donnée.

Le contrat didactique s'impose à tous et il est intéressant de le repérer pour expliquer certains dysfonctionnements de l'enseignement. *L'âge du capitaine* reste un des plus fameux et rend compte des réponses absurdes données à des pseudo énoncés du type « *Sur un bateau, on embarque 25 moutons et 18 vaches. Quel est l'âge du capitaine ?* » et les élèves de répondre *43 ans*. Lorsqu'on demande aux élèves si l'énoncé ne leur a pas paru bizarre, ils disent que la question était « bête » parce que les moutons n'ont rien à voir avec l'âge du capitaine. Ils ont répondu parce que le maître le leur demandait. Ainsi ces réponses aberrantes ne révèlent pas, comme certains l'ont prétendu, une insuffisance des élèves ou des professeurs mais les conditions de la gestion scolaire de la négociation du savoir entre professeur et élèves. Dans les conditions normales de l'enseignement, le professeur ne pose pas des questions farfelues et l'élève tente de répondre à ces questions en utilisant ses connaissances.

4.2. Dévolution et institutionnalisation

Dans la conception de BROUSSEAU, l'étude du contrat didactique doit permettre d'éclairer le passage d'une situation didactique à une situation adidactique Le travail du professeur comporte deux aspects inverses l'un de l'autre et contradictoires. Dans un premier temps, pour faire vivre la connaissance, il doit personnaliser et contextualiser le savoir grâce à des situations qui le mettent en œuvre. Dans un deuxième temps, il doit décontextualiser et dépersonnaliser cette connaissance pour lui redonner son caractère universel de savoir non relié à une situation spécifique. Pour analyser ces deux temps de l'acte d'enseignement, BROUSSEAU introduit les deux concepts de dévolution et d'institutionnalisation.

La dévolution

Tout l'art du professeur va être de faire accepter à l'élève d'entrer dans une situation adidactique. Il doit ainsi parvenir à ce que la résolution du problème soit de la responsabilité de l'élève. *La dévolution est l'acte par lequel le professeur obtient que l'élève accepte, et peut accepter, d'agir dans une situation adidactique. Il accepte les conséquences de ce transfert, en prenant le risque et la responsabilité de ses actes dans des conditions incertaines.*

Le professeur s'efforce d'exclure de ses interventions celles qui ont trait à la solution. La conception et la gestion de l'incertitude des situations adidactiques sont les parties les plus difficiles de l'acte didactique. Le premier paradoxe de la dévolution est que *le maître souhaite que l'élève ne veuille tenir la réponse que de lui-même mais en même temps il veut, il a le devoir social de vouloir, que l'élève donne la bonne réponse.* BROUSSEAU signale que les difficultés posées par la dévolution sont souvent analysées en termes de motivation et les solutions préconisées sont alors de nature psychologique, psychoaffective ou pédagogique. Il insiste au contraire sur le rôle spécifique de la didactique dans une phase où la signification de la connaissance et de la situation joue un rôle important.

L'institutionnalisation

BROUSSEAU reconnaît, qu'influencé par les travaux de PIAGET qui laissaient penser qu'une épistémologie génétique de chaque notion mathématique était possible, il avait imaginé que les situations pouvaient provoquer des apprentissages constructivistes en quelque sorte autodidactiques. Les faits, observés et interprétés grâce à sa théorie, lui ont montré la vanité de cette espérance et la nécessité de donner par l'institutionnalisation le statut decontextualisé et « officiel » de savoir à certaines connaissances. *L'institutionnalisation est le passage pour une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle : celui de référence pour des utilisations futures, collectives ou personnelles.* Cette phase est indispensable pour assurer le passage d'une connaissance reliée à une situation vécue individuellement et très contextualisée à un savoir decontextualisé actif dans une institution donnée.

4.3. Quelques effets de contrat ou l'effacement de la volonté d'enseigner

Lorsque l'enseignement échoue, le professeur peut tenter de sauver les apparences d'un apprentissage de différentes façons par des effets de contrat. Ces effets sont nombreux et je n'en retiens ici que trois.

L'effet Topaze et le contrôle de l'incertitude

BROUSSEAU illustre cet effet grâce à la scène du Topaze de Pagnol où le professeur donne une dictée à un élève faible. Dans ce cas en modifiant sa diction, le professeur « suggère » à l'élève la solution et « les moutons étaient dans le parc » devient « les moutonsses étai-hunt… ». Topaze négocie à la baisse les conditions dans lesquelles l'élève finira par mettre le « s ».

Mais ce processus traduit un effondrement de l'acte d'enseignement puisque le professeur a pris à sa charge l'essentiel de l'acte d'apprentissage. Cet effet apparaîtra à travers la gestion des questions que peut poser le professeur à l'élève pour guider l'élève vers la solution.

L'effet Jourdain ou le malentendu fondamental

Nommé ainsi en référence à la scène du Bourgois Gentilhomme où le maître de philosophie révèle à Jourdain ce que sont la prose ou les voyelles, il s'agit d'un cas particulier de l'effet Topaze. *Cette fois le professeur admet de reconnaître l'indice d'une connaissance dans les comportements ou les réponses de l'élève bien qu'elles soient en fait motivées par des causes banales.*

BROUSSEAU se moque ainsi de ceux qui feignaient de voir dans les travaux d'un jeune élève la découverte d'un groupe de Klein alors que ce dernier faisait des coloriages ou des manipulations de pots de yaourts.

Glissement métacognitif

Voici comment BROUSSEAU attire l'attention sur cette forme subtile d'effet de contrat : *Lorsque son enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et, pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objet d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique.*

C'est ainsi que, par exemple, l'étude et la construction de diagrammes logiques vont se substituer à l'apprentissage du raisonnement. La connaissance de ces nouveaux objets demande des explications et du vocabulaire, elle mobilise toute l'attention et le temps de travail de l'élève et du professeur. Il s'agit d'une substitution progressive qui s'appuie sur un processus normal et fondamental, celui de l'aide.

4.4. Les contrats « fortement didactiques »

Les quelques effets de contrat précédents illustrent une disparition de la volonté d'enseigner. Il reste à envisager les différents types de contrats où le professeur joue effectivement son rôle d'émetteur d'un savoir nouveau pour l'élève. Lorsque l'enseignant se préoccupe de la bonne réception par l'élève de ce savoir, BROUSSEAU parle de contrats « fortement didactiques »[2]. BROUSSEAU distingue six grandes formes de tels contrats[3] : l'imitation ou reproduction formelle, l'ostension, le conditionnement (appuyé sur les thèses béhavioristes), la maïeutique socratique, les contrats d'apprentissage empiriste et constructiviste.

Je n'envisage ici que le contrat d'ostension sans doute le moins connu hors de la didactique. BROUSSEAU définit ainsi l'ostension : *Le professeur montre un objet et l'élève est supposé le voir comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. La communication de connaissance ne passe pas par son explicitation sous forme d'un savoir. Il est sous-entendu que cet objet est l'élément générique d'une classe que l'élève doit imaginer par le jeu de certaines variables souvent implicites.*

Cette idée d'ostension réfère à la notion de sémiotique qui désigne le fait qu'un objet est sélectionné pour exprimer la classe des objets dont il est membre.

Ce contrat est bien sûr insuffisant pour définir un objet mathématique mais il a l'avantage de la simplicité surtout dans le cas d'objets dont la définition serait trop lourde pour un

[2] Les contrats qui laissent cette appropriation à la seule charge de l'élève sont appelés « faiblement didactiques », dans ce cas le professeur organise le savoir et éventuellement l'étude de l'élève. Une conférence (ou un cours magistral) est un exemple de contrat « faiblement didactique ».

[3] Il faut remarquer que ces contrats se préoccupent essentiellement de l'entrée dans des savoirs nouveaux. BROUSSEAU a consacré un travail important à l'étude du rôle de la mémoire didactique dans la transformation des savoirs anciens.

niveau de scolarité donné. Ainsi, le professeur montrera simplement un triangle à des jeunes enfants en le désignant comme un triangle.

Cependant, ce contrat a des effets négatifs, le principal est l'absence de sens autour de l'objet mathématique qui n'apparaît pas comme un outil pour résoudre des problèmes. Dans l'enseignement traditionnel, la pratique ostensive est courante et finalement assumée. Les savoirs mathématiques sont montrés immédiatement avec peu ou pas de préoccupation adidactique. Des chercheurs proches de BROUSSEAU (BERTHELOT et SALIN) ont montré l'existence d'une forme « dissimulée » d'ostension apparue dans les années 80 avec le développement de l'incitation à des pratiques constructivistes dans l'enseignement. Cette fois l'élève doit reconnaître lui-même l'objet de référence dissimulé derrière une activité sans réelle portée adidactique. Ainsi, pour introduire les notions d'agrandissement et de réduction par similitude, le professeur demande simplement de dessiner des maisons qui se ressemblent, il est ensuite amené à ne valider dans les productions très variées des élèves (au grand désarroi de ces derniers) que celles semblables (au sens mathématique). Il revient ainsi à une pratique ostensive.

Ces six grandes formes de contrats sous-tendent des manières d'enseigner très variées et qui peuvent s'appuyer sur des principes éducatifs et théoriques très différents. Il est intéressant de les relier avec des types de situations didactiques même si fondamentalement la théorie de BROUSSEAU s'inscrit davantage dans un contrat constructiviste : les situations adidactiques fournissant une manière de mettre en oeuvre ce contrat de manière optimale.

Même si sa préférence initiale allait au contrat constructiviste, BROUSSEAU pense qu'un enseignement effectif doit, suivant les moments et les diverses contraintes (notamment temporelles), pouvoir jouer sur ces différentes formes de contrat. L'enseignement ne peut pas se résumer à une accumulation de situations adidactiques apparaissant comme autant d'obstacles remettant sans cesse en cause les connaissances des élèves. D'autres types de situations sont nécessaires pour stabiliser et utiliser les savoirs enseignés. L'étude de ces ruptures et de ces choix reste une question ouverte.

Conclusion

Je conclurai cette présentation en insistant sur l'intérêt que peut présenter de manière générale le travail initié par Guy BROUSSEAU.

La créativité didactique

En centrant sa réflexion sur la notion de situation didactique, BROUSSEAU invite le chercheur et l'enseignant à créer des situations d'enseignement. Il se démarque ainsi d'un type de recherches critiques sur l'enseignement essentiellement basées sur la docimologie et l'évaluation. L'observation des connaissances des élèves reste indispensable mais insérée dans un processus qui vise à les transformer. Au sein du COREM, un grand nombre de situations très originales ont ainsi été développées. Ces situations s'insèrent à chaque fois dans des processus didactiques complets sur l'enseignement d'une notion. *Le puzzle* pour mettre en discussion une conception additive de la proportionnalité, *la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier* pour introduire les rationnels, *la construction du plus grand triangle formé par les trois médiatrices d'un triangle* pour initier à la démonstration en sont quelques-uns parmi les exemples les plus connus. Il faudrait y ajouter aussi *la course à vingt*, jeu qui met en oeuvre la division dans un contexte non familier et que BROUSSEAU utilise maintenant pour présenter les différents types de situations adidactiques.

Une approche scientifique

La Théorie des situations didactiques permet un découpage de la réalité de l'enseignement qui en facilite une approche plus scientifique. La terminologie adoptée et les phénomènes mis à jour permettent le développement d'observations et l'analyse de ces observations. D'autre part, la méthode reste assez souple et évolutive, un des principes de base est de n'introduire que les éléments utiles à la compréhension des faits didactiques à un niveau donné. Mais en réalité, la théorie s'est considérablement complexifiée depuis qu'elle tente de saisir complètement l'acte d'enseignement. Ainsi, en cherchant à comprendre le rôle du professeur, certains chercheurs dans la lignée de BROUSSEAU ont introduit différents types de situations et de milieux en relation avec les diverses institutions d'enseignement et notamment celles portant sur la formation.

Les mathématiques : retour et approfondissement

Profondément articulée sur les contenus mathématiques, la Théorie des Situations permet de revenir sur certaines notions et de les approfondir. La recherche de situations fondamentales, et l'analyse nécessaire des obstacles notamment épistémologiques donnent du sens aux recherches historiques et à la résurgence des problèmes qui ont pu donner naissance à une théorie. Ceci est notamment le cas pour l'enseignement de l'analyse au Lycée ou au début de l'enseignement supérieur pour donner du sens au calcul différentiel et intégral.

L'exemple de l'enseignement de la statistique montre aussi la nécessité d'élargir le champ de réflexion du mathématicien en se préoccupant des pratiques sociales de sa discipline.

La réflexion sur les curricula

Les savoirs complexes s'articulent autour d'agrégats de connaissances. La reconstitution de ces savoirs dans des situations didactiques ne recouvre pas nécessairement le savoir savant de référence. Ainsi apparaît la nécessité d'une réflexion à long terme sur l'organisation de l'enseignement du savoir et des connaissances dans un contexte institutionnel donné. L'approche de BROUSSEAU donne des possibilités à l'enseignant de s'investir davantage dans la conception et la création de cette progression et de ne pas apparaître comme le souligne trop justement CHEVALLARD comme « asservi » à l'institution qui lui impose ces choix en ne lui laissant trop souvent que les tâches de bas niveaux décisionnels. Les IREM ou les IUFM en relation avec les Universités peuvent constituer ces lieux où s'effectue cette réflexion.

Bibliographie

Pour préparer cette présentation, j'ai particulièrement utilisé

[1] G. BROUSSEAU (1998), Théorie des Situations Didactiques, *La pensée sauvage.*

Cet ouvrage contient les principaux articles parus avant 1990. Son organisation suit celle de la traduction en anglais d'une sélection des travaux de BROUSSEAU.

[2] G. BROUSSEAU (1997), *Théories des situations didactiques*, Conférence de Montreal,
`http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf`

[3] G. BROUSSEAU (2000), *Education et didactique des mathématiques,*
`http://math.unipa.it/~grim/brousseau_didact_03.pdf`

[4] La situation d'enseignement de la statistique est décrite dans les deux articles suivants :
G. BROUSSEAU (2003), *Situations fondamentales et processus génétique de la statistique,* Actes de la 12e école d'été de didactique des mathématiques (à paraître).

[5] G. BROUSSEAU, N. BROUSSEAU & V.WARFIELD (2002), *Une expérience sur l'enseignement des statistiques et des probabilités.* L'article en anglais est paru dans Journal of Mathematical Behavior **20,** 363-441.

Enfin un site sur BROUSSEAU est maintenu par

`http://math.unipa.it/~grim/homebrousseau.htm`

où l'on peut trouver les articles cités.

Alain KUZNIAK
DIDIREM Paris VII et IUFM d'Orléans-Tours
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES, DESSIN INDUSTRIEL ET INFORMATIQUE

Pascal SCHRECK, Pascal MATHIS, Arnaud FABRE

Résumé : Cet article constitue la version écrite d'un exposé présenté devant des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans le cadre d'une journée spéciale du Plan Académique de Formation. Nous y décrivons la mise au point de quelques algorithmes de résolution de contraintes géométriques à partir d'exemples de constructions géométriques dans le domaine du dessin technique assisté par ordinateur.

Introduction

Le dessin industriel constitue une des principales applications de la géométrie dans le domaine des sciences de l'ingénieur. Son cadre théorique constitue la *géométrie descriptive* qui a été formalisée par Gaspard Monge et qui était encore enseignée il y a quelques années en mathématiques dans certaines classes de terminale. Un des buts du dessin industriel est de représenter des objets 3D sur une feuille de dessin et de spécifier leurs mesures par un *système de cotes*.

Une telle représentation utilisant plusieurs projections orthogonales (ou *vues*, voir la figure 1) permet en effet de mieux appréhender les formes et les dimensions d'une pièce ou d'un ensemble de pièces et, éventuellement, de comprendre un mécanisme. Pour réaliser cette description, il n'est pas nécessaire de dépeindre une pièce réellement existante : le dessin technique est également un outil indispensable lors de la *conception* d'objets ou d'assemblage. La cotation sert alors à définir complètement un objet en vue de sa réalisation (cotes de fabrication) ou de la vérification de sa conformité vis-à-vis de certaines fonctionnalités (cotes fonctionnelles).

À ce propos, quiconque a pratiqué le dessin technique, en particulier en reproduisant à l'échelle des *esquisses cotées* comme celle de la figure 2(a) s'est vu confronté à des problèmes de constructions géométriques un peu similaires à ceux que l'on rencontre dans les programmes de géométrie de l'enseignement secondaire. Ici, les énoncés sont donnés sous forme graphique grâce à la cotation, qui doit respecter un certain nombre de normes et conventions, et la construction est habituellement effacée pour ne retenir que le dessin « au propre » (voir la construction géométrique suggérée à la figure 2(b)).

Ce désintérêt relatif pour la manière de résoudre le problème de construction correspondant à une esquisse n'est pas le seul point de divergence entre les constructions géométriques telles qu'elles sont vues dans l'enseignement et le dessin technique, en voici quelques autres :

- en constructions géométriques, les énoncés n'utilisent habituellement pas de données numériques et on *discute* tous les cas de figure possibles, alors qu'en dessin technique, on n'envisage qu'un cas de figure, celui présenté par l'esquisse avec les données métriques imposées par la cotation ;
- les contraintes géométriques qu'on peut rencontrer dans l'enseignement sont très variées et parfois très originales tandis que la cotation en dessin technique impose un nombre assez restreint de types de contraintes ;

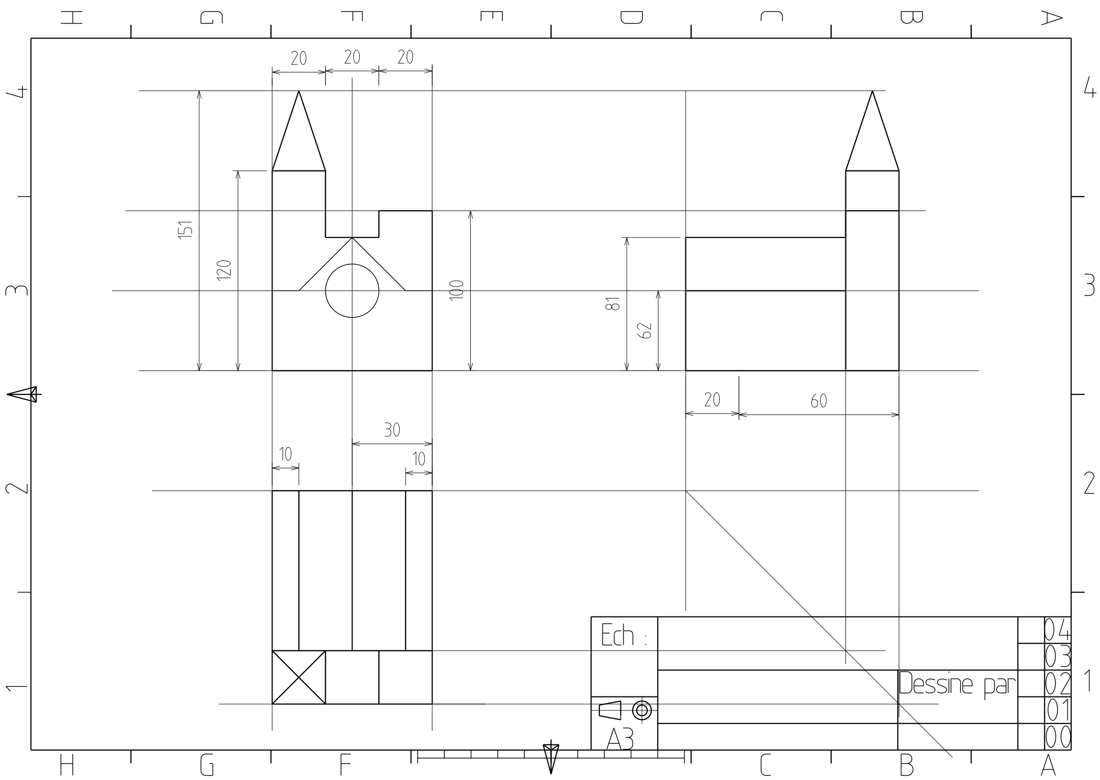


Fig. 1 – Exemple de dessin technique. La vue de face est en haut à gauche, la vue de dessus en bas à gauche et la vue de gauche en haut et à droite (un pictogramme représentant un tronc de cône dans le cartouche rappelle les conventions de vue). Ce dessin a été réalisé avec Qcad un logiciel de dessin technique gratuit et opensource (voir `http ://www.ribonsoft.com`)

– les problèmes rencontrés dans l'enseignement sont en général de petite taille et toujours astucieux, dans le sens où l'on veut faire utiliser une notion particulière aux élèves, tandis qu'en dessin technique, les dessins mettent souvent en jeu un grand nombre d'objets et de contraintes et, dans beaucoup de cas, la construction n'est pas très compliquée.

Les divergences entre les deux domaines se sont naturellement traduites par des approches très différentes lorsqu'il s'est agi d'« informatiser » les constructions géométriques. Dans le domaine de l'enseignement assisté par ordinateur, les chercheurs ont souvent suivi une approche consistant à reproduire les méthodes de construction utilisées dans l'enseignement et cela s'est traduit par des techniques essentiellement empruntées à l'intelligence artificielle. Notons ici, qu'il y a fort peu de travaux qui traitent de l'automatisation des constructions géométriques [1]. Inversement, les premières approches utilisées en Conception et Dessin Assistés par Ordinateur (CDAO ou plus simplement CAO) se sont essentiellement focalisées sur la résolution de systèmes d'équations non-linéaires en utilisant des techniques numériques basées sur la méthode de Newton-Raphson ou la méthode par continuation.

[1]Nous parlons ici des logiciels permettant de résoudre automatiquement des problèmes de construction géométriques et non des éditeurs en géométrie dynamique, comme Cabri-géomètre ou Cinderella, qui sont d'une facture plus classique.

Ces méthodes sont bien connues des mathématiciens et, malgré leur adaptation au cadre de la CAO, il nous semble qu'elles ont un rapport lointain avec la géométrie. Nous avons ainsi pris le parti de ne présenter ici que des méthodes de résolution constructive, c'est-à-dire basées sur des propriétés géométriques des figures et des objets mis en jeu. Il va par ailleurs de soi que nous n'allons pas présenter un panorama exhaustif des recherches dans ce domaine. Ainsi, et cela semble un peu paradoxal, cet article ne va pas détailler les travaux concernant l'enseignement assisté par ordinateur où, modulo une relative complexité technique, on reproduit les schémas de pensée des enseignants.

Il nous a, en effet, paru plus intéressant de montrer à un public composé de professeurs de mathématiques comment, à l'aide de quelques exemples, les constructions géométriques sont utilisées, en dehors des mathématiques, dans le contexte de l'informatisation du dessin technique. De ce point de vue, l'objectif est double, il s'agit d'une part de montrer des problèmes de constructions intéressants issus du dessin technique et d'autre part, d'illustrer, dans ce cadre particulier, des méthodes d'abstraction assez propres à l'informatique et souvent méconnues. Nous allons ainsi nous appuyer sur une série d'exemples de petite taille qui sont autant de problèmes de construction, puis dégager des méthodes permettant de traiter toute une famille de problèmes.

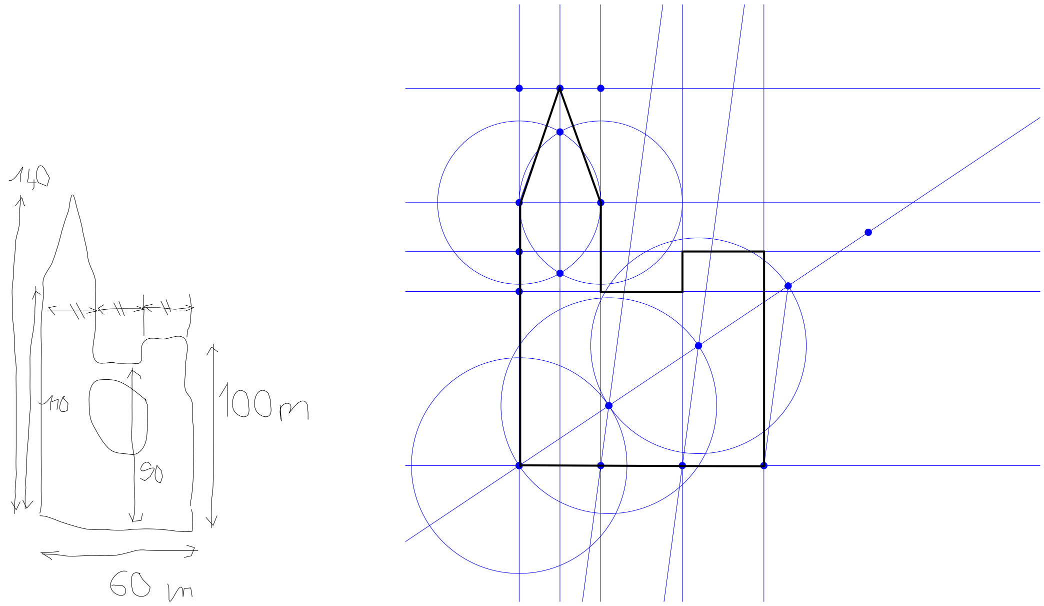
Le reste de cet article est structuré comme suit. La section 1 présente un certain nombre d'exemples introductifs que le lecteur peut essayer de résoudre avant de lire les sections suivantes. La section 2 présente un algorithme élémentaire permettant de résoudre de manière efficace beaucoup de cas simples du dessin technique. La section 3 étudie les polygones simplement contraints qui constituent un cas d'école où un petit raisonnement permet de montrer la complétude de l'algorithme de construction. La section 4 montre comment on peut exploiter systématiquement l'invariance par déplacement, qui est l'une des propriétés caractéristiques des systèmes de contraintes géométriques en dessin technique. Les techniques de décomposition des systèmes de contraintes peuvent s'étendre à d'autres groupes d'invariance, qu'on peut considérer dans un même cadre. La section 5 décrit un cadre où l'on exploite conjointement l'invariance par déplacement et l'invariance par similitude.

1. Exemples de base

Nous proposons dans cette section quelques exemples de problèmes de constructions géométriques simples dont les solutions seront développées plus loin.

Le dessin « à souris levée » donné à la figure 2(a), impose que la hauteur de la flèche soit de 140m et que les largeurs des deux flèches et de la partie entre celles-ci soient égales. Les contraintes de verticalité et d'horizontalité sont implicites. Sur ce schéma grossier, on peut aussi imaginer, parce que c'est une situation courante, que le sommet de la flèche décrit un triangle isocèle. Enfin, la rosace n'étant pas détaillée sur le dessin, nous supposerons que c'est un élément décoratif placé ici à titre d'illustration et qui ne sera pas repris dans le dessin à l'échelle. Moyennant ces compléments d'information, il y a un nombre fini de figures géométriques qui remplissent, à un déplacement près, ces contraintes. On dit parfois que la figure cotée est rigide ou isostatique ou bien contrainte modulo les déplacements puisque l'ensemble des solutions se décompose en un nombre fini d'orbites sous l'action du groupe des déplacements.

Dans cet exemple, la construction géométrique suggérée à la figure 2(b) par les lignes de construction, est simple et le dessinateur peut la réaliser facilement avec des outils de



(a) esquise cotée

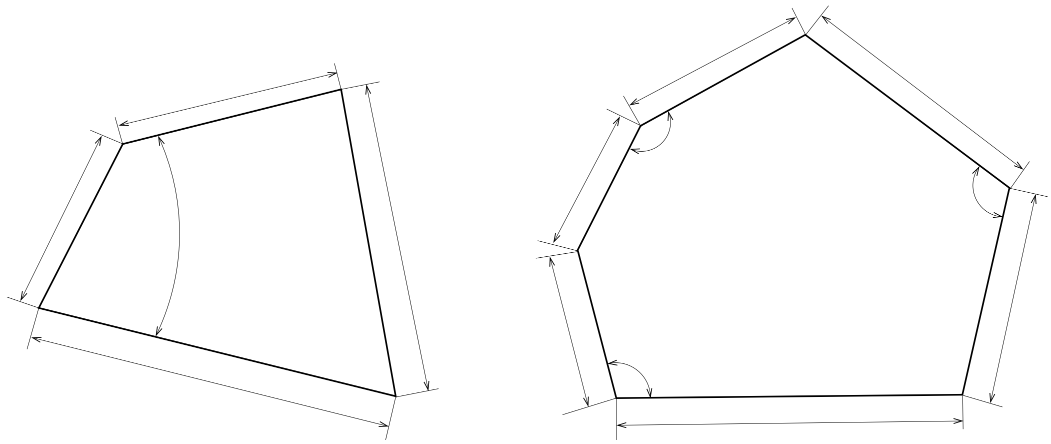
(b) construction

Fig. 2 – Esquisse cotée (a) et construction d'une solution (b).

dessin usuels, qu'ils soient matériels ou logiciels. Remarquons qu'une approche algébrique aboutit à considérer un système global de 16 équations et 16 inconnues. Cette taille est modeste en regard des performances des outils actuels, mais on trouve facilement en dessin technique des esquisses cotées impliquant des centaines, voire des milliers, d'équations dont la résolution est coûteuse en temps. La section suivante explique comment des techniques simples de propagation de contraintes sont utilisées pour résoudre efficacement de tels problèmes.

Les deux exemples donnés à la Fig. 3, illustrent une autre facette du dessin technique. Il arrive qu'un ingénieur dessine un petit croquis avec quelques cotes fonctionnelles : ces dessins sont de petite taille, mais ils peuvent s'avérer difficiles à construire et, en tout cas, en dehors des possibilités des méthodes par propagation de contraintes. Les méthodes numériques, très générales, sont alors utilisées, mais dans le cas des polygones cotés simples, par exemple le quadrilatère et l'hexagone donnés Figs. 3(a) et 3(b), il existe des méthodes constructives permettant de trouver toutes les solutions. Remarquons que, sur ces esquisses, les valeurs des cotes ne sont pas mentionnées, cela n'est pas gênant mais impose, en toute rigueur, de trouver des solutions génériques. La section 3 décrit un algorithme général de résolution permettant, en particulier, de résoudre les problèmes de la figure 3.

Les techniques simples de propagation de contraintes ne parviennent généralement pas à résoudre des problèmes de taille importante, comme celui donné à la Fig. 4. En revanche, on peut souvent aboutir à une décomposition en sous-problèmes plus facile à résoudre. Les contraintes étant indépendantes de la position de la figure dans le plan, les méthodes utilisées se fondent habituellement sur l'invariance par déplacement de ces problèmes. Plusieurs techniques ont été développées pour découvrir et utiliser une telle décomposition, nous décrivons les plus simples à la section 4. Elles permettent, en particulier, de faire la construction correspondant à la figure 4.



(a) Quadrilatère (b) Hexagone

Fig. 3 – Deux polygones cotés simples

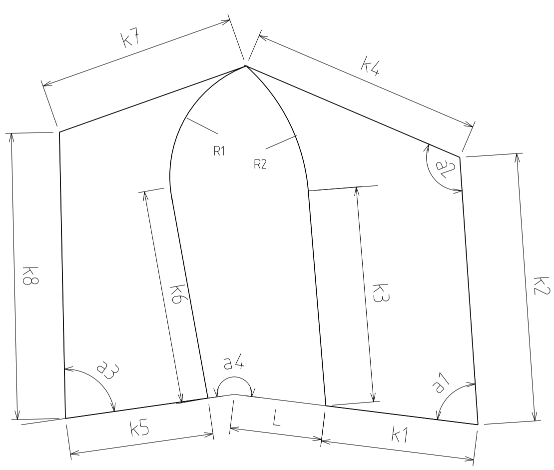
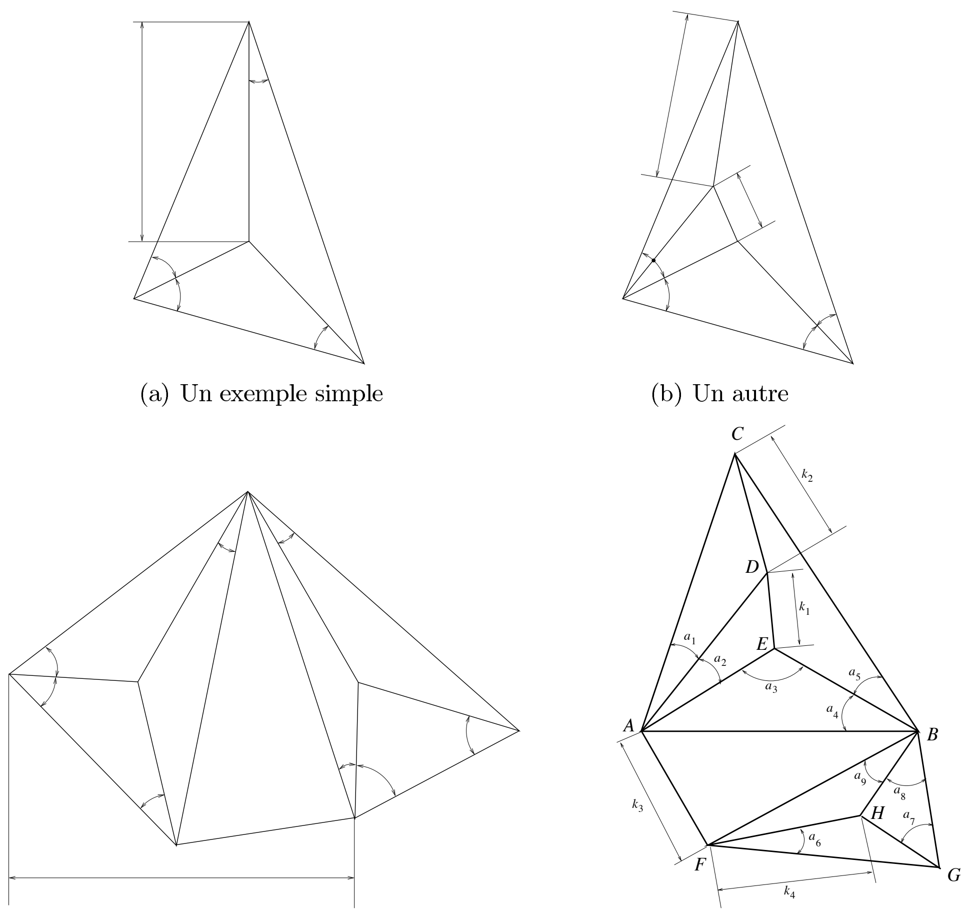


Fig. 4 – Esquisse cotée décomposable modulo les déplacements (Il y a deux contraintes de tangence qui sont implicites).

La dernière classe de problèmes, incluant les esquisses données à la Fig. 5, concerne une généralisation des techniques de décomposition au cas des systèmes de contraintes dont une partie est invariante par similitudes. La section 5 propose une méthode pour résoudre les problèmes de construction posés par les esquisses a) b) et c) de la Fig. 5 et suggère une construction pour l'esquisse d).



(a) Un exemple simple

(b) Un autre

(c) Exemple avec de la décomposition

(d) Un autre

FIG. 5 – Quatre exemples plus ou moins simples mettant en jeu l'invariance par similitude.

2. Propagation de contraintes

La propagation de contraintes, et son adaptation dans le cadre de la CAO, sont issues d'une idée simple : lorsqu'on a une solution concernant une inconnue dans un système de contraintes, on peut remplacer cette inconnue par cette valeur dans tout le système qui devient ainsi plus simple à résoudre dans ce cas particulier. Si on connaît toutes les solutions possibles pour l'inconnue, on a autant de systèmes plus simples à résoudre. Dans le cas particulier des constructions géométriques, on retrouve l'idée de la méthode des lieux : si on a construit deux lieux différents contenant un objet à construire, alors celui-ci appartient à leur intersection.

Cette idée s'est traduite par l'abstraction des données géométriques pour ne conserver des objets géométriques que la notion de degré de liberté, correspondant à peu près au nombre de coordonnées de l'objet, et ne garder des contraintes que la notion de degré de restriction, grosso modo le nombre d'équations réelles. Ces notions issues de la théorie de la rigidité [2,4] et appliquées, à l'origine, aux points et aux contraintes de distance, ont été implicitement étendues à divers types d'objets et de contraintes. Comme nous le verrons plus bas, cela a conduit à l'inadéquation des méthodes de propagation de contraintes aux problèmes généraux de résolution de contraintes géométriques.

Le processus d'abstraction évoqué plus haut conduit à considérer des *graphes étiquetés* où les sommets sont les inconnues du système pondérées par leur degré de liberté et les arêtes sont les contraintes pondérées par leur degré de restriction. Plus exactement, on a la définition suivante :

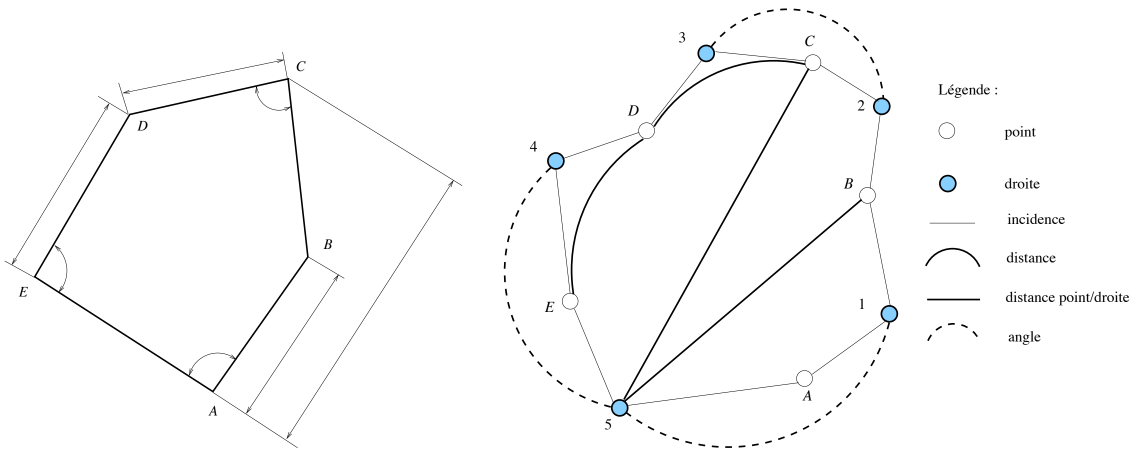
> **Définition 1** Étant donné un ensemble S, un graphe sur S est un couple $G = (S, A)$ où A est un sous-ensemble de $S \times S$. S est l'ensemble des sommets de G et A est l'ensemble des arcs de G. On peut aussi considérer des graphes non-orientés où A est un ensemble de paires (de cardinal exactement égal à 2) de sommets. La pondération des sommets et des arcs, ou des arêtes, est traduite par l'adjonction à la notion de graphe de deux fonctions de pondération, $f : S \to P_1$ et $g : A \to P_2$, où P_1 et P_2 sont des ensembles numériques. □

Nous considérons ici des *graphes de contraintes* qui sont des graphes non-orientés où S est l'ensemble des inconnues, A l'ensemble des contraintes géométriques supposées binaires, f est la fonction qui à toute inconnue associe le degré de liberté du type auquel elle correspond et g est la fonction qui à toute contrainte associe son degré de restriction. En considérant des points, des droites, des contraintes de distance, d'angle et d'incidence, nous nous plaçons dans un cadre simplifié où tous les sommets ont un degré de liberté égal à 2 et toutes les arêtes un degré de restriction égal à 1. Les graphes ont habituellement une représentation graphique où les sommets sont représentés par des pictogrammes, nous utiliserons des petits cercles, et les arêtes par des connecteurs, nous utiliserons des segments ou des arcs de cercle. Ainsi, à la Fig. 6, l'esquisse cotée de la partie gauche se traduit par le graphe représenté partie droite de la même figure : pour des raisons de lisibilité, les sommets sont dessinés différemment suivant qu'ils représentent des points ou des droites (disque grisé). Il en est de même pour les arêtes : les arêtes représentant une contrainte d'incidence sont représentées par un trait droit fin, celles représentant une distance entre deux points par un arc de cercle gras, celles représentant une distance point/droite par un trait droit gras et enfin, celles représentant des angles par un arc de cercle pointillé.

Oublions maintenant la géométrie pour ne considérer que le graphe. Deux techniques sont envisageables : l'une appelée *chaînage arrière* et l'autre *chaînage avant*. Voyons comment utiliser ces techniques sur l'exemple donné.

En adoptant le point de vue du chaînage arrière, on remarque que le sommet A n'est relié qu'à deux sommets, les sommets 1 et 5. Par conséquent, suivant la méthode des lieux, on peut dire que si on connaît 1 et 5, on connaitra A. On retire A et les arêtes incidentes pour obtenir un graphe simplifié où A n'apparaît plus. Dans ce graphe simplifié, le sommet 1 n'est relié qu'aux deux sommets B et 5. On peut donc le retirer de la même manière. On trouve ainsi une planification de la construction : A en dernier, 1 en avant dernier, *etc.*

pour arriver à un graphe extrêmement simple où l'on n'a plus que les sommets E et 5 relié par un arc. Ceci correspond au fait que les systèmes de contraintes géométriques sont, dans le cas de la CAO, invariants par déplacement. On obtient donc une solution particulière en fixant des objets géométriques particuliers, ici un point et une droite incidents. Une manière de construire la figure peut donc être : fixer le point E et la droite 5 passant par E, puis construire successivement 4, D, C, 3, 2, B, 1 et enfin A.



(a) esquisse cotée (b) graphe

FIG. 6 – Une esquisse cotée et le graphe de contraintes correspondant

Lorsqu'on agit par chaînage avant, on commence par fixer un repère de la figure, c'est-à-dire à fixer les valeurs de certains objets géométriques pour pouvoir commencer la construction. Un décompte des degrés de liberté conduit à fixer les objets correspondants à deux sommets reliés par une contrainte (on restreint ainsi le système de $2 \times 2 - 1 = 3$ degrés de liberté qui correspondent à la dimension de l'espace des déplacements)[2]. On peut, par exemple fixer les sommets E et D, ce qui correspond à tracer un segment de longueur donnée. On marque ces sommets pour indiquer ainsi qu'ils sont connus. Puisque le sommet 4 est relié par deux contraintes aux sommets E et D, on peut construire 4. On continue ainsi en marquant successivement les sommets non marqués qui sont reliés par deux contraintes à deux sommets marqués. On suit ainsi l'algorithme de la table 1.

Appliqué à notre exemple, l'algorithme parcourt successivement les sommets E, D, 4, 5, C, 3, 2, B, 1 et A, et produit en sortie la liste de ces sommets en signalant sa réussite. Remarquons qu'il y a plusieurs parcours possibles.

À l'issue de cette étape de planification, on peut finir de résoudre le système soit numériquement —on ne considère alors que des systèmes de deux équations à deux inconnues et de degré au plus deux, soit formellement en associant une méthode de construction à chaque couple de contraintes (ou un lieu à chaque contrainte).

Il est évident que cette méthode ne permet de résoudre que des problèmes simples : il s'agit en fait d'une triangulation de nature purement combinatoire de systèmes d'équations en

[2]Encore une fois, ce raisonnement abstrait sur les degrés de liberté peut facilement être mis en défaut dans des constructions géométriques simples.

```
Algorithme (planification par propagation de contraintes)
Données : S = ensembles des sommets, A = ensembles des arêtes
Sortie : liste de sommets
L = liste vide
Choisir une arête a = (p1, p2) dans A,
placer p1 à la fin de L
placer p2 à la fin de L
Tant qu'il y a des sommets de S non dans L et qu'on n'est pas en échec
faire
     chercher un sommet q de S - L relié à deux sommets de S dans L
      si cette recherche réussit  alors ajouter q à la fin de L
                                sinon signaler un échec
                                      (et sortir de la boucle)
fait
retourner L et l'indication éventuelle d'un échec
```

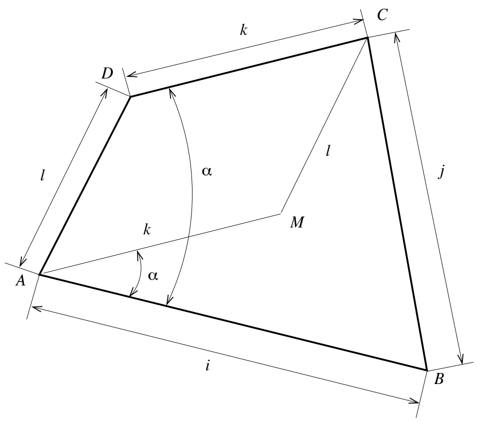
Tab. 1 – Algorithme de propagation de contraintes en chaînage avant.

blocs 2×2 tenant compte de l'invariance par déplacement. Ces méthodes sont bien sûr mises en échec par des exemples un peu plus sophistiqués, comme tous ceux des sections suivantes, et, pire, le cadre même de la propagation de contraintes est inadéquat. Il suffit, en effet, de considérer une esquisse cotée constituée d'un triangle dont on impose la valeur des trois angles : cette esquisse est sur-contrainte en général, à cause de la relation de Chasles, et il manque une information d'échelle. La méthode de propagation de contraintes ne permet de prendre en compte aucun des ces deux faits. Cependant elle est capable de résoudre de manière efficace un grand nombre de problèmes et elle est souvent employée conjointement à d'autres méthodes comme nous le verrons dans les sections 4 et 5.

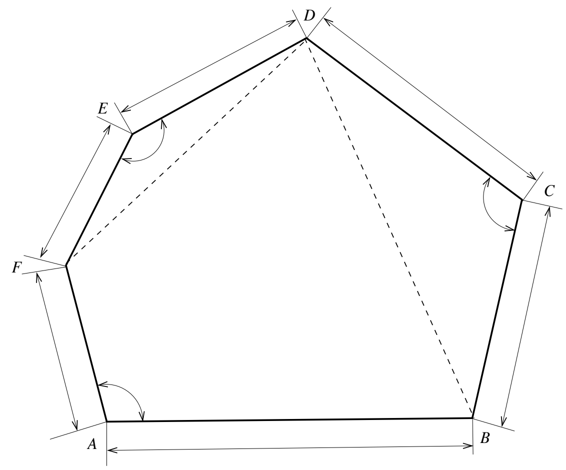
3. Polygones simplement contraints

Les polygones simplement bien contraints constituent une famille d'exemples mettant en échec la propagation de contraintes. Il ne s'agit que d'exemples « jouets » de problèmes dont l'utilité essentielle ici est de montrer comment à partir d'exemples simples on essaie de généraliser des constructions particulières en termes d'algorithme et de structures de données. Les exemples typiques de problèmes que l'on veut résoudre correspondent aux problèmes classiques de construction de triangles et aux esquisses de la figure 3. Voyons comment on peut les résoudre constructivement.

Le « truc » permettant de construire le quadrilatère coté consiste à ajouter un point M matérialisant un parallélogramme comme à la Fig. 7(a)). Avec les relations d'égalité de longueurs et de parallélisme caractéristiques d'un parallélogramme, il est facile de voir que l'angle entre les droites (AB) et (AM) est connu et que la longueur AM l'est aussi. Ainsi, en commençant par fixer les points A et B, on peut poursuivre facilement en construisant le point M, puis le point C et enfin le point D symétrique de M par rapport au milieu de (A, C).



(a) Quadrilatère et parallélogramme



(b) Hexagone et triangles auxiliaires

FIG. 7 – Figures auxiliaires pour résoudre des polygones simplement bien contraints

Le cas de l'hexagone est encore plus simple. Il suffit de remarquer qu'on peut déterminer les distances FD et BD, éventuellement en construisant des triangles auxiliaires, ce qui permet de construire facilement en fixant les points A et B, le quadrilatère (A, B, D, F). Le reste de la construction est immédiat.

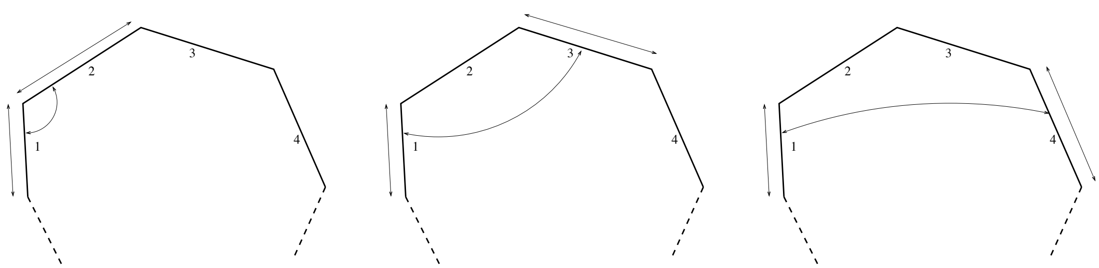
Les ingrédients utilisés pour la résolution de ces deux exemples vont nous servir pour résoudre la classe des polygones simplement contraints dont voici la définition.

Définition 2 Un polygone simplement contraint est un système de contraintes consistant en la donnée
– d'une suite de n segments $E = (s_1, ..., s_n)$ formant un polygone quelconque
– d'un ensemble de contraintes de longueur sur certains segments de E
– d'un ensemble de contraintes d'angle sur certains couples de segments de E.
Un polygone simplement bien contraint est un polygone bien contraint ayant un nombre fini de solutions à un déplacement près. □

En comptant les degrés de liberté et les degrés de restriction, comme on a n points, soit $2n$ inconnues réelles, il faut $2n-3$ contraintes pour définir un tel polygone à un déplacement près (ce qui correspond au -3). Par ailleurs, ces contraintes doivent contenir au moins une contrainte de distance, elles doivent contenir au plus n contraintes de distance et au plus $n-1$ contraintes d'angle. Nous sommes donc dans l'une des trois situations suivantes :
(i) n contraintes de distance et $n-3$ contraintes d'angle,
(ii) $n-1$ contraintes de distance et $n-2$ contraintes d'angle,
(iii) $n-2$ contraintes de distance et $n-1$ contraintes d'angle.

Par ailleurs, en considérant la relation de Chasles, on peut regrouper les segments contraints en angle par classe : deux côtés sont dans la même classe si l'angle qu'ils font est connu ou déductible par la relation de Chasles, des contraintes d'angle données. Supposons que nous ajoutions les contraintes d'angle une à une, chaque ajout de contrainte d'angle entre deux côtés ne peut se faire qu'entre des côtés qui sont dans des classes différentes. On connecte ainsi les classes de ces deux côtés et on diminue le nombre de classes de 1. Ayant n classes avant la pose de toute contrainte d'angle, après avoir considéré toutes les

contraintes d'angle, on peut avoir respectivement 3, 2 ou 1 classes suivant que l'on soit dans les cas (*i*), (*ii*) ou (*iii*). Le théorème des tiroirs nous dit alors que si on considère 4 segments consécutifs, il y en a au moins deux entre lesquels il y a une contrainte d'angle et au moins deux dont la longueur est imposée. Plus exactement, en reprenant les cas précédents, on est dans l'un des trois cas :
(*i*) les 4 côtés sont de longueur imposée et on connaît au moins un angle,
(*ii*) 3 côtés sont de longueur imposée et on connaît au moins 2 angles,
(*iii*) 2 côtés sont de longueur imposée et on connaît tous les angles.
Un petit raisonnement montre alors qu'on est forcément dans l'une des trois situations représentées à la Fig. 8 (lorsqu'il n'y a pas de cotes sur les côtés cela signifie qu'il est indifférent qu'ils soient de longueur imposée ou non).



(a) Premier cas (b) Deuxième cas (c) Troisième cas

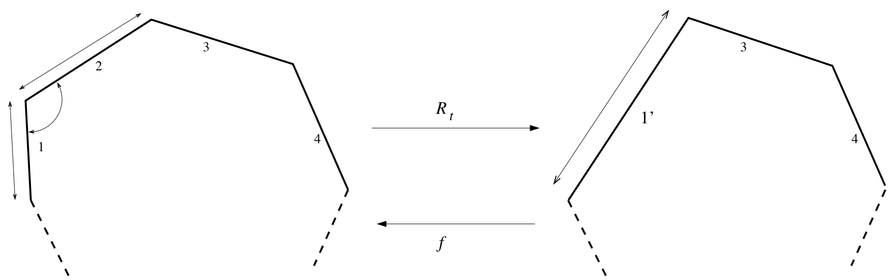
Fig. 8 – Les trois cas possibles pour les polygones simplement contraints

Le premier cas correspond à ce que nous avons fait lors de la résolution de l'hexagone et donne lieu à la règle que nous appellerons *règle du triangle*, représentée graphiquement à la Fig. 9 en haut. Cette règle est appliquée pour simplifier un polygone simplement contraint en remplaçant deux côtés du polygone par un seul côté dont la longueur peut être calculée. La « réciproque » de cette règle est une règle de construction permettant de construire, à partir d'une solution pour le polygone simplifié, une solution pour le polygone initial.

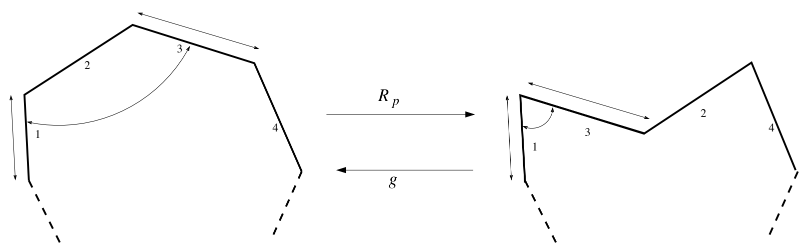
Le deuxième cas donne lieu de la même manière à une règle de simplification/construction, dite *règle du parallélogramme* et qui est celle que nous avons employée pour résoudre le quadrilatère coté. Elle consiste simplement à permuter les côtés numérotés 2 et 3 à la Fig. 9 au milieu, en faisant suivre les contraintes d'angle. On se retrouve alors dans un cas d'application de la règle du triangle. Comme précédemment, la réciproque de la règle permet de construire une solution du polygone simplement coté avant simplification. Finalement, le troisième cas se résout en appliquant une règle de permutation ressemblant à la précédente, suivie de la règle du parallélogramme et suivie, à nouveau, de la règle du triangle. Encore une fois, on peut retourner la règle pour faire la construction inverse de cette simplification.

En appliquant tant que faire se peut ces règles de simplification, on aboutit au cas des triangles qui sont les cas les plus simples de polygones simplement contraints et que l'on sait parfaitement résoudre ! Tout ceci conduit à l'algorithme décrit en langue naturelle à la table 2.

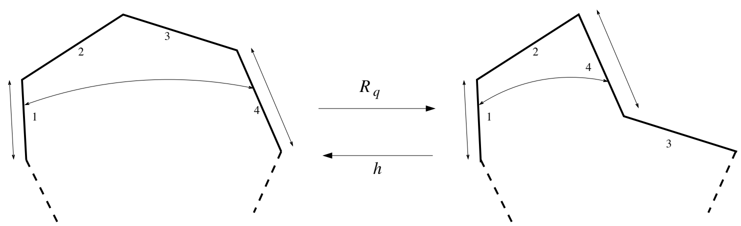
Par exemple, on peut construire ainsi un hexagone correspondant à la coupe d'un cube par un plan à partir des dimensions des segments tracés sur le cube (*cf.* Fig. 10) en appliquant deux fois la deuxième règle du parallélogramme et en construisant le triangle dont la longueur de chaque côté est la différence des longueurs des côtés opposés de l'hexagone.



(a) Première règle : règle du triangle



(b) Deuxième règle : règle du parallélogramme



(c) Troisième règle : deuxième règle du parallélogramme

FIG. 9 – Les trois règles de simplification.

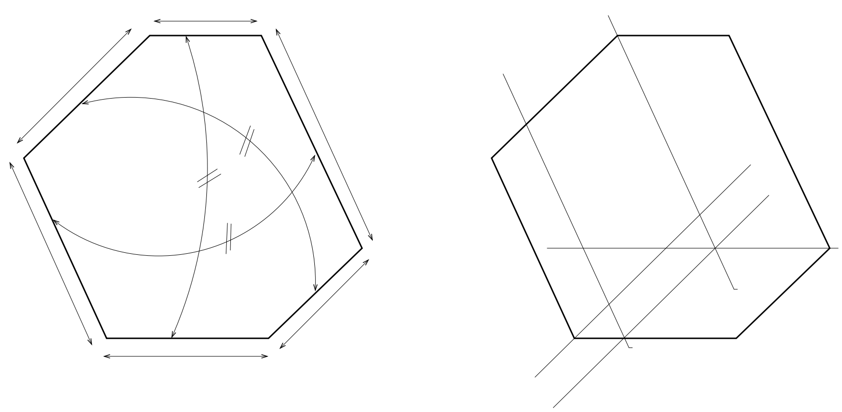


FIG. 10 – Coupe d'un cube : problème de construction (à gauche) quelques parallélogrammes utiles (à droite)

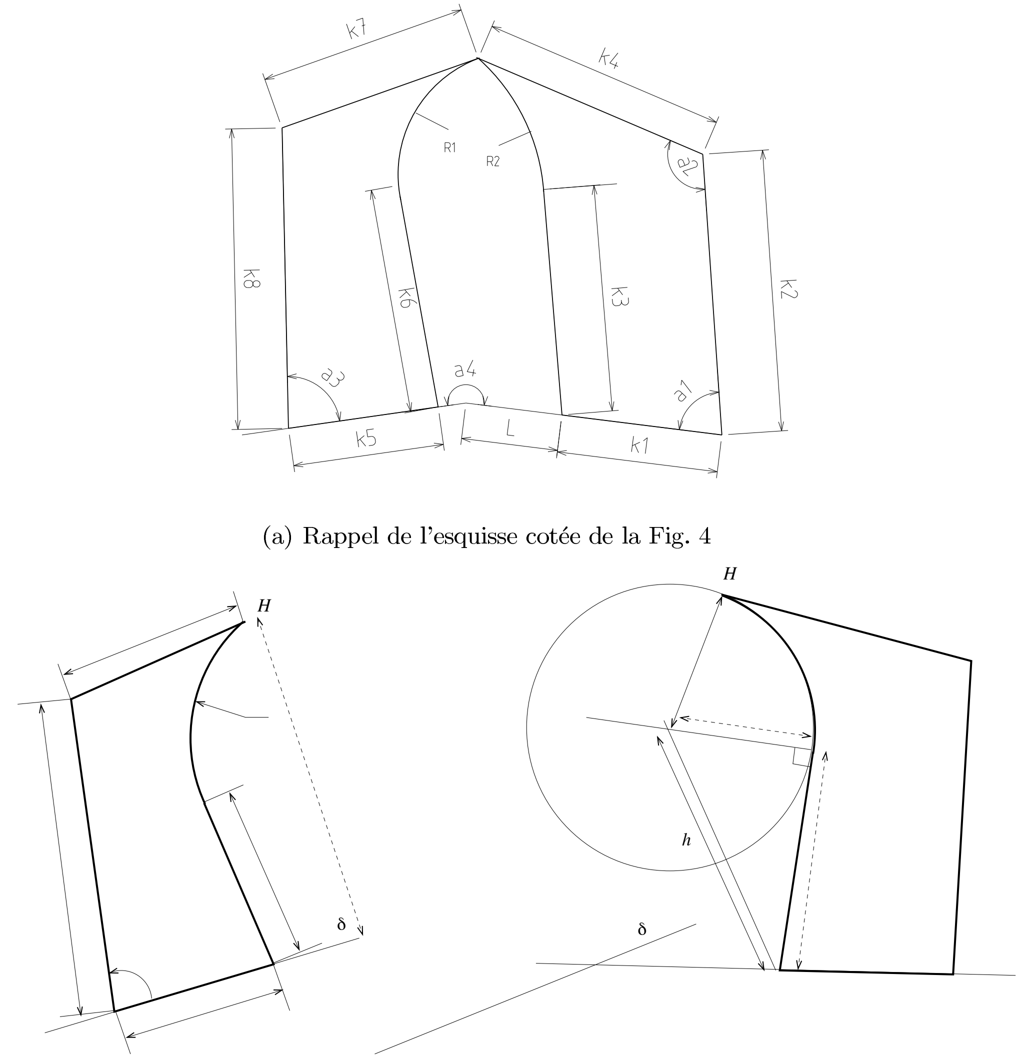
```
Algorithme(résolution des polygones simplement contraints)
Données : L = liste des côtés (avec la longueur quand elle est connue)
          A = ensemble des classes de côtés contraints en angle
Sortie : pile F des opérations à faire pour construire le polygone
F = liste vide
Tant que L est de longueur > 3 et qu'il n'y a pas d'erreur
  Si L[1] et L[2] sont de longueur connue et dans la même classe de A
     alors calculer la longueur du troisième côté 1',
           ainsi que les angles du triangle (1,2,1')
         enlever L[1] et L[2] et mettre 1' en tête de liste
         empiler sur F l'appel de fonction à f  avec les bons arguments
     sinon  si L[1] et L[3] sont de longueur connue et de même classe
            alors échanger L[2] et L[3] en mettant A à jour
                   empiler sur F l'appel de fonction à g
                     (avec les bons arguments)
            sinon si L[1] et L[4] sont de long. connue et de même classe
                   alors échanger L[3] et L[4] en mettant A à jour
                       empiler sur F l'appel de fonction à h
                         (avec les bons arguments)
                   sinon signaler une erreur et arrêter la construction
fait
Si la longueur de L n'est pas > 3 ou qu'il y a une erreur
  alors signaler une erreur
  sinon décider quel cas de triangle décrivent L et A
       empiler sur F la fonction résolvant ce cas de triangle
         (avec les bons arguments)
retourner F en signalant éventuellement une erreur
```

Tab. 2 – Algorithme pour résoudre des polygones simplement contraints

4. Décomposition tirant parti de l'invariance par déplacement

La règle du triangle de la figure 9 utilise de manière typique l'invariance par déplacement en permettant de déduire d'une figure auxiliaire une caractéristique (une distance) elle-même invariante par déplacement qui pourra être réutilisée dans une autre partie de la construction. Cela peut être généralisé à n'importe quel type de construction, et pas seulement des triangles, et à n'importe quelle caractéristique invariante par déplacement.

Essayons de résoudre le problème posé par l'esquisse de la Fig. 4 et reproduit à la Fig. 11(a). Comme le problème est invariant par déplacement, on commence par fixer un point et une direction en fixant, par exemple, les deux points de la partie droite tout en respectant la contrainte $k2$. On peut alors en appliquant des règles de géométrie élémentaire construire la partie droite avec, en plus, une droite attenant à la partie gauche (voir Fig. 11(c)). Puis, on ne sait pas continuer. On peut essayer de construire un autre morceau, par exemple dans l'esquisse cotée correspondant au système de contraintes restant. Cependant, celui-ci est sous-contraint modulo les déplacements.



(a) Rappel de l'esquisse cotée de la Fig. 4

(b) Sous-système de gauche (la cote en pointillés a été ajoutée).

(c) Début de la construction (notez le calcul de h)

FIG. 11 – Décomposition modulo les déplacements.

En ajoutant la contrainte de distance entre le point noté H sur la Fig. 11(b) et la droite δ que l'on peut calculer dans la partie droite (Fig. 11(c)) maintenant construite, on retrouve un système bien contraint modulo les déplacements qu'on peut résoudre simplement.

On a ainsi une construction en deux morceaux f_g et f_d qui sont deux solutions partielles et particulières : chacune a été construite en fixant un repère qui lui est propre et il n'y a aucune raison pour que la réunion de ces deux solutions partielles soit la solution globale. En revanche, puisque chacun des systèmes est invariant par déplacement, on obtient toutes les solutions d'un sous-système en faisant agir le groupe des déplacements sur les solutions particulières. Il existe ainsi un et un seul déplacement φ faisant coïncider le point H et la droite δ de la partie gauche avec le point H et la droite δ de la partie droite considérée comme fixe. Il est alors clair que la réunion de f_d et de $\varphi(f_g)$ est une solution particulière globale du système de contraintes initial. Il n'est pas difficile de montrer que ce procédé est complet : si on a toutes les solutions particulières pour chacune des deux parties, on retrouve en faisant tous les assemblages possibles toutes les solutions particulières globales.

Nous retenons de cette construction les deux ingrédients essentiels qui pourront être utilisés de manière plus générale :

– le bord d'un sous-système est constitué des contraintes métriques que l'on peut déduire d'une solution au sous-système, par exemple la distance entre deux points.
– l'assemblage des solutions de deux sous-systèmes d'un même système de contraintes invariant par déplacement consiste à appliquer sur l'une des figures le déplacement faisant coïncider les valeurs pour les inconnues communes aux deux sous-systèmes.

Ces deux ingrédients permettent d'augmenter considérablement la puissance des méthodes par propagation de contraintes et ont donné lieu à plusieurs méthodes. Nous allons présenter deux approches différentes.

4.1 Méthode de Owen

Au début des années 90 Owen a proposé de décomposer les systèmes de contraintes géométriques en examinant, en quelque sorte, les points de faiblesse des graphes de contraintes sous-jacents. Donnons auparavant quelques définitions classiques.

Définition 3 Étant donnés deux sommets s et t d'un graphe non orienté G, un chemin de s à t est une suite finie de sommets $s_0 = s, s_1, \ldots, s_n = t$ telle que $\{s_i, s_{i+1}\} \in A$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.
La relation d'accessibilité entre deux sommets est alors définie par :

s_2 est accessible à partir de s_1 s'il existe un chemin allant de s_1 à s_2.

Cette relation est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées composantes connexes de G. Un graphe connexe est un graphe qui n'a qu'une composante connexe. □

En ce qui concerne les systèmes de contraintes du dessin technique, l'invariance par déplacement impose que les graphes correspondant à des systèmes bien contraints modulo les déplacements soient au moins connexes. En effet, chaque composante connexe correspond à un solide (déformable ou non) pouvant se déplacer librement par rapport aux éléments définis par les autres composantes connexes. En allant plus loin, on peut imaginer que si deux composantes connexes sont reliées par un sommet, on obtient encore deux solides pouvant avoir un mouvement relatif, par exemple une rotation si ce sommet est un point ou une translation si ce sommet est une droite. Les systèmes bien contraints modulo les déplacements doivent donc remplir un critère plus fort que la connexité.

Définition 4 Dans un graphe non orienté G, un sommet d'articulation est un sommet de G dont le retrait, avec les arêtes qui lui sont incidentes, augmente le nombre de composantes connexes (on dit qu'il déconnecte le graphe). Un graphe connexe qui ne contient pas de sommets d'articulation est dit biconnexe : dans un tel graphe, il existe au moins deux chemins distincts entre deux sommets distincts quelconques. □

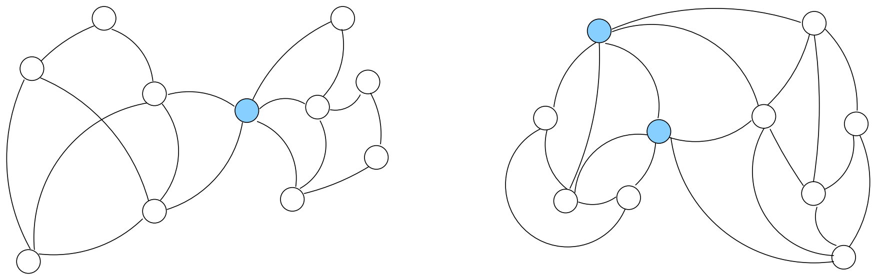
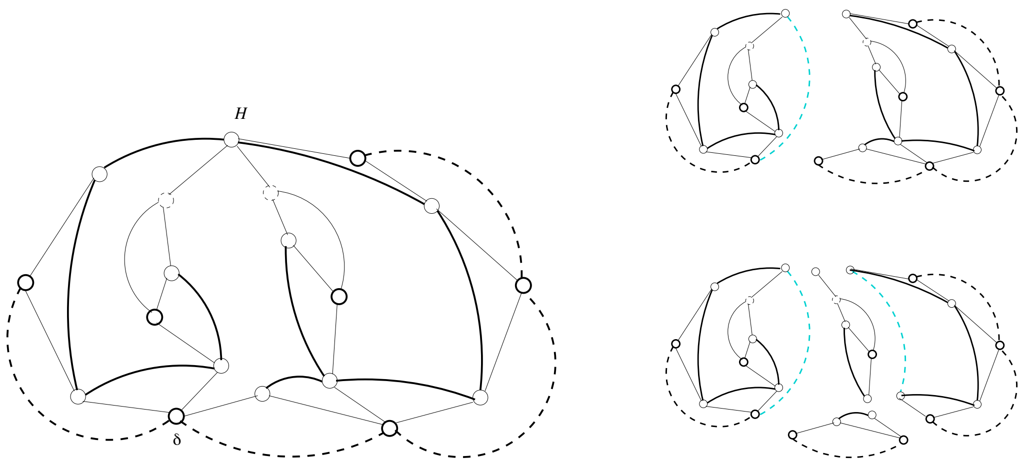


FIG. 12 – Exemples de connexité : à gauche un graphe connexe et non biconnexe, et à droite un graphe biconnexe et non triconnexe (les sommets d'articulation sont en grisé)

Il est facile de se persuader que la biconnexité est une condition nécessaire pour qu'un graphe de contraintes corresponde à un système bien contraint modulo les déplacements. Les définitions précédentes s'étendent pour des degrés de connexité supérieurs :

Définition 5 Dans un graphe non orienté biconnexe G, une paire d'articulation est une paire de sommets dont le retrait déconnecte G. Un graphe connexe qui ne contient pas de paires d'articulation est dit triconnexe : dans un tel graphe, il existe au moins trois chemins distincts entre deux sommets distincts quelconques. □

Dans le cas d'un système bien contraint, la découverte d'une paire d'articulation permet de décomposer le problème en deux parties plus petites qu'on peut résoudre, presque, indépendamment l'une de l'autre. C'est le cas de l'exemple donné à la Fig. 4 et repris en deux parties Fig. 11 : le point H et la droite δ sur cette dernière figure correspondent à la paire d'articulation du graphe de contraintes (*cf.* Fig. 13). La remarque que nous avons faite lors de la résolution de l'exemple s'applique. En effet, l'une des deux composantes (celle de gauche) est sous-contrainte : on ajoute une arête reliant les deux sommets de la paire d'articulation pour la rendre bien-contrainte. Cette arête correspond évidemment à la contrainte imposant la distance de H à δ calculée dans la partie droite du graphe. En poursuivant récursivement cette décomposition sur chacun des sous-graphes obtenus, on obtient des composantes triconnexes (ce ne sont pas tout à fait les composantes triconnexes du graphe initial à cause de l'ajout systématique d'une arête dans l'un des deux sous-graphes). Dans les cas simples, ces composantes correspondent à des cas de triangle, mais il peut arriver qu'on ait des composantes triconnexes qu'on ne sait pas résoudre constructivement et pour lesquelles il faut employer une méthode numérique itérative. Il existe des algorithmes classiques pour trouver efficacement les paires d'articulation d'un graphe (*cf.* par exemple [3]). Moyennant un tel algorithme, la méthode d'Owen donne lieu à l'algorithme décrit à la table 3. Chaque graphe de contraintes de la liste produite par cet algorithme est ensuite résolu constructivement s'il s'agit d'un cas de triangle ou numériquement sinon.



(a) graphe de contraintes.

(b) premiers découpages suivant les paires d'articulation.

Fig. 13 – Paire(s) d'articulation et découpage de graphes

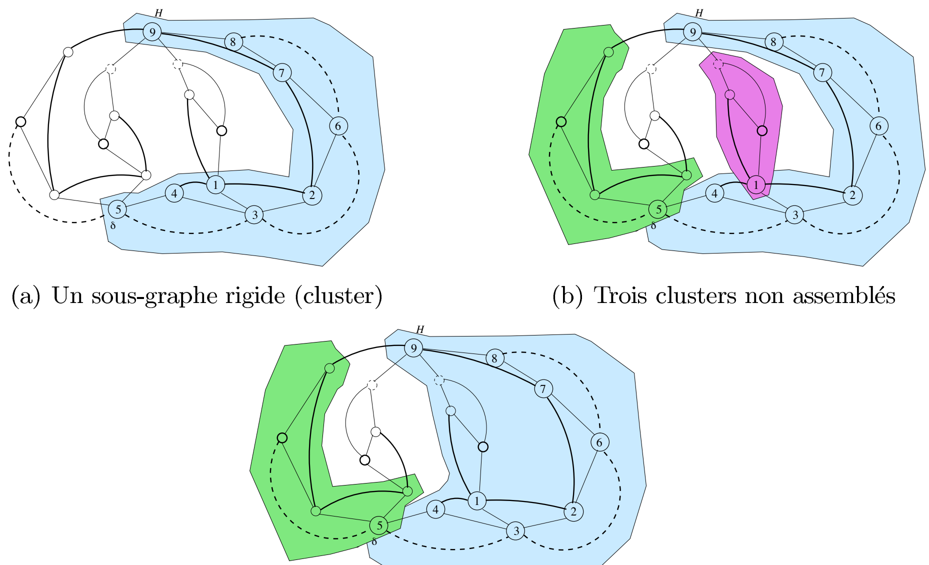
```
Algorithme(décomposition de graphes de contraintes avec la méthode d'Owen)
Données : graphe de contraintes G=(S,A)
Sortie : Liste de sous-graphes à résoudre numériquement
L = liste vide de graphes
P = pile vide de graphes
empiler G sur P
tant que P est non vide  faire
    G' = dépiler P
    chercher une paire d'articulation (s1,s2) de G'
     si cette recherche échoue (le graphe est triconnecté ou simple)
        alors placer G' à la fin de L
        sinon
           (G1, G2) = couper G suivant (s1,s2)
            si G1 est sous-contraint
               alors ajouter une arête entre s1 et s2 dans G1
                           (dont le poids est calculé dans G2)
                    empiler sur P : G2 puis G1
               sinon ajouter une arête entre s1 et s2 dans G2
                           (dont le poids est calculé dans G1)
                    empiler sur P : G1 puis G2
fait
retourner L
```

Tab. 3 – Algorithme d'Owen

4.2. Méthode de Hoffmann

Nous présentons ici une méthode mise au point par C. Hoffmann et son équipe basée sur la découverte des petites composantes rigides ensuite assemblées.

L'idée de base de cette méthode repose sur la propagation de contraintes par chaînage avant (*cf.* section 2). Initialement, une contrainte est choisie, sa résolution permet de définir une figure rigide minimale, comme par exemple deux points à une distance fixée l'un de l'autre. Puis, l'algorithme de propagation de contraintes est utilisé pour trouver le plus grand sous-graphe possible bien contraint modulo les déplacements. Ce graphe est ensuite considéré comme un objet rigide dans le plan (possédant 3 degrés de liberté). Dans la terminologie usuelle, un tel sous-graphe est appelé un *cluster*. Avec l'exemple présenté Fig. 4 et dont le graphe est donné Fig. 13(a), on peut faire de la propagation de contrainte en commençant avec la contrainte de distance en bas à droite pour obtenir un sous-graphe rigide représenté par la partie grisée Fig. 14(a) (les numéros à l'intérieur des nœuds du cluster indiquent l'ordre de parcours).



(a) Un sous-graphe rigide (cluster)

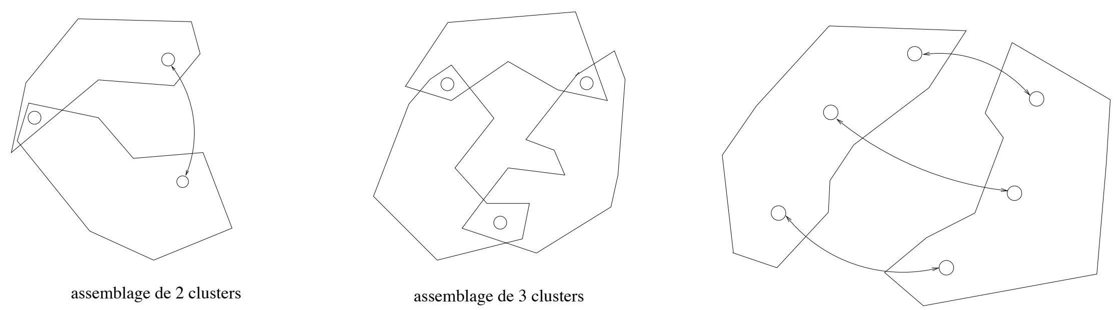
(b) Trois clusters non assemblés

(c) Assemblage des deux premiers clusters

Fig. 14 – Exemples de formation de clusters et assemblage.

Si un cluster recouvre tout le graphe, il n'y a plus rien à faire : l'algorithme de propagation de contraintes a réussi à planifier la construction d'une solution. S'il reste des contraintes, ce processus de formation de clusters est relancé à partir d'une des contraintes non encore utilisée. Par exemple, à la Fig. 14(b), nous avons construit trois clusters dans le graphe de l'exemple 13(a).

Lorsque plusieurs clusters ont été ainsi identifiés, l'algorithme, à un deuxième niveau, procède à l'assemblage des clusters découverts suivant les deux règles illustrées à la figure 15(a) pour former ainsi des clusters plus gros qui pourront à leur tour être assemblés. En reprenant notre exemple, la Fig. 14(c) montre le résultat de l'assemblage des deux clusters de droite de la Fig. 14(b). Le cluster de gauche peut alors être assemblé avec le cluster de droite en utilisant encore une fois la première règle d'assemblage.



(a) Les deux règles d'assemblage (b) Exemple non résolu

Fig. 15 – Assemblage de clusters

Arrêtons-nous un instant sur ces règles d'assemblage. La première, illustrée par la Fig. 15(a), dit que si C_1 et C_2 sont deux clusters possédant un sommet s en commun et une arête $c = (s_1, s_2)$ avec $s_1 \in C_1$ et $s_2 \in C_2$, alors on peut construire un cluster contenant tous les sommets de C_1 et de C_2. L'interprétation « physique » de cette règle est immédiate et intuitive. En terme de résolution de systèmes de contraintes, plusieurs points de vue peuvent être adoptés. Celui qui nous paraît le plus simple, et que nous avons mis en œuvre consiste à considérer le petit système $\mathcal{S}$ associé aux sommets s, s_1 et s_2 avec comme contraintes celle associée à c et celles qu'on peut déduire du fait que s et s_1 d'une part et s et s_2 d'autre part appartiennent au même cluster. Par exemple, si s et s_1 sont des points, la distance de s à s_1 est connue et calculable dans C_1. Lorsqu'une figure f solution de $\mathcal{S}$ est construite, on peut calculer deux déplacements, l'un, φ_1 permettant d'assembler une solution f_1 correspondant au cluster C_1 avec f, et un autre déplacement φ_2 pour assembler une solution f_2 correspondant au cluster C_2, $\varphi_1(f_1) \cup \varphi_2(f_2) \cup f$ étant alors une solution pour l'assemblage des deux clusters noté $F(C_1, C_2, s, s_1, s_2)$. Le même genre de construction est réalisé pour la deuxième règle produisant l'assemblage noté $H(C_1, C_2, C_3, s_1, s_2, s_3)$.

L'algorithme termine avec succès lorsqu'il arrive à former ainsi un seul cluster impliquant toutes les arêtes du graphe de contraintes, et il termine en échec, s'il n'arrive ni à faire de la propagation de contraintes, ni de l'assemblage de clusters alors qu'il reste des contraintes non utilisées ou plusieurs clusters. Un exemple de situation de mise en échec est présenté à la figure 15(b). Hoffmann et Fudos ont montré que la réussite ou l'échec de cette méthode ne dépend pas du choix des contraintes initiales utilisées pour fabriquer les premiers clusters, et que, par l'emploi de certaines heuristiques, le résultat numérique obtenu en cas de réussite ne dépend pas non plus de ces choix.

L'algorithme découlant de cette méthode est donné à la table 4. Nous y appellerons cluster basique la liste ordonnée des sommets obtenue par propagation de contraintes et cluster composé le résultat de l'assemblage de deux clusters (simples ou composés). Un cluster composé peut ainsi être représenté par un arbre de clusters correspondant à l'assemblage de clusters avec les fonctions F et H. Le résultat de cet algorithme est donc un cluster composé représenté par un arbre de clusters qui décrit la manière d'assembler les clusters basiques. Cet arbre correspond ainsi à l'ordre des constructions (intra-cluster) et assemblages (inter-clusters) pour calculer une solution au système de contraintes.

```
Algorithme(méthode des clusters)
Données : graphe de contraintes G=(S,A)
Sortie : arbre de clusters basiques
Lc = liste vide de clusters (qui sont des arbres de clusters basiques)
echec = faux
tant que echec = faux et G non vide  faire
    si il existe deux clusters C1 et C2 de L assemblables avec la règle 1
    alors  fabriquer cluster C =  F(C1, C2, s, s1, s2)
           enlever C1 et C2 de L
           ajouter C dans L
    sinon
           si il existe trois clusters C1, C2 et C3 avec la règle 2
           alors fabriquer cluster C =  H(C1, C2, C3, s1, s2, s3)
                enlever C1, C2 et C3 de L
                ajouter C dans L
           sinon
              si G non vide
              alors choisir une contrainte c=(s1,s2) de G
                   L = appliquer la prop. de contraintes à partir de C
                   si L ≠ [s1, s2]  alors ajouter L dans Lc
                                          enlever les sommets de L
                                          ainsi que les arêtes incidentes
                                     sinon echec = vrai
fait
si Lc ne contient qu'un cluster C et que G est vide
   alors retourner C
   sinon signaler un échec
```

TAB. 4 – Algorithme de formation et d'assemblage des clusters basiques

5. D'autres groupes d'invariances

Il est tentant de généraliser l'utilisation de l'invariance par déplacement à d'autres groupes. Les trois premières esquisses proposées à la Fig. 5 illustrent d'une part l'intérêt de considérer l'invariance par similitude et d'autre part la pérennité des notions d'invariance de la section précédente lorsqu'on les étend à d'autres groupes. L'esquisse représentée à la figure 5(d) donne l'exemple d'un système de contraintes où produire une solution passe par la construction de clusters invariants par déplacement et de clusters invariants par similitudes.

Considérons le premier exemple (Fig. 5(a)). Une idée consiste à « oublier » la contrainte de distance : on obtient alors un système ne contenant que des contraintes d'angle qui est sous-contraint modulo les déplacements et bien contraint modulo les similitudes. Résoudre modulo les similitudes ce nouveau système ne pose aucun problème : on fixe un repère pour les similitudes, par exemple les deux points de la base du triangle, et la construction se fait par simple propagation de contraintes (avec éventuellement utilisation de la règle de l'arc capable). L'ensemble des solutions à ce problème est invariant par similitude. Calculer la similitude qui permet de satisfaire la contrainte de distance initiale donne, à un déplacement près, une solution au problème initial. L'exemple de la Fig. 5(b) se traite de la même manière en oubliant les deux contraintes de distance et en les remplaçant par une contrainte de rapport de distances. Dans ces deux cas, l'algorithme envisageable est fort simple : identifier une contrainte d'échelle, transformer le problème invariant par déplacement en un système invariant par similitude, le résoudre, puis utiliser une similitude pour satisfaire la contrainte d'échelle.

L'exemple 5(c) se traite en étendant aux similitudes la technique de décomposition modulo les déplacements. En effet, en oubliant la contrainte de distance, on trouve un système invariant par similitude dont le graphe peut être décomposé en utilisant les techniques que nous avons vu dans la section précédente : soit en cherchant des paires d'articulation, soit en fabriquant des clusters. Le dernier exemple 5(d), plus compliqué, combine de la transformation de systèmes, de décomposition et de rattrapage de contraintes d'échelle dans plusieurs composantes. Nous en laissons la résolution à la sagacité du lecteur intéressé, l'idéal étant, bien sûr, qu'il en déduise un algorithme général pour ce genre de problèmes.

Conclusion

Ainsi se termine ce petit florilège de problèmes de constructions géométriques qu'on peut rencontrer dans le cadre de la CAO. On pourra avantageusement compléter ce point de vue en consultant des ouvrages sur la théorie de la rigidité [4,2] et des articles sur la résolution de contraintes [1,6] et sur la preuve en géométrie [5].

Nous espérons avoir montré quelques petits problèmes de construction suffisamment intéressants pour aiguiser la curiosité du lecteur en lui laissant entrevoir, au moins dans ce domaine, comment on passe d'une résolution « à la main » à un algorithme plus ou moins général.

Bibliographie

[1] A.S. (2004), Modélisation géométrique sous contraintes, *Action Spécifique du CNRS* , `http ://www.esil.univ-mrs.fr/mdaniel/gtmg/as-contraintes/index.html`

[2] Claude Berge (1958), Théorie des graphes et ses Applications, *Dunod*.

[3] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson & Ronald L. Rivest (1990), Introduction à l'algorithmique, *Dunod*.

[4] Jack E. Graver, Brigitte Servatius & Herman Servatius (1993), Combinatorial Rigidity, Graduate Studies in Maths, Vol. 2, *American Mathematical Society*.

[5] Jean Mainguené & Marie-Françoise Roy (1999), *Démonstration automatique en géométrie : une approche par la géométrie analytique*, Bulletin de l'APMEP **421**, 177–188.

[6] Minime-IGG (2004), *Publications de l'équipe IGG concernant la résolution de contraintes en géométrie*, `http ://axis.u-strasbg.fr/~schreck/recherche.htm`.

Pascal Schreck, Pascal Mathis, Arnaud Fabre
Équipe Informatique et Graphique du
Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection
UMR 7005, CNRS-ULP Strasbourg
schreck@dpt-info.u-strasbg.fr

Combinatoire des dominos, un atelier mathématique pour les enfants

Bénédicte Autier, Muriel Cron, Anne-Céline Mittelbronn,
Nathalie Wach et Marc Wambst

Résumé : Nous décrivons un atelier mathématique destiné à des enfants de cycle 3 du primaire et travaillant des notions de combinatoire à l'aide de dominos et de triminos.

Introduction

Historique.— Depuis plusieurs années, la Mission Culture Scientifique et Technique (M.C.S.T.) de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg propose des ateliers de découverte scientifique durant les vacances scolaires à des enfants de huit à douze ans. Ces ateliers sont conçus et animés par le personnel de la M.C.S.T., mais aussi par celui d'autres composantes de l'Universitité Louis Pasteur dont le Musée Zoologique et le Jardin Botanique, ainsi que par les membres de l'association *Les Petits Débrouillards*. En 2002, la M.C.S.T. a lancé un appel aux différentes U.F.R. (Unité de Formation et Recherche) de l'université pour qu'elles participent plus activement aux activités d'animation. L'U.F.R. de Mathématique-Informatique a répondu à cet appel en confiant à l'IREM la tâche de concevoir de tels ateliers.

Nous avons ainsi constitué un groupe réunissant des enseignants-chercheurs de l'université, des enseignants du second degré ainsi qu'un professeur des écoles. Le groupe conçoit des ateliers mathématiques et les teste à la fois dans le cadre scolaire d'une école primaire et dans celui des ateliers de découverte scientifique de l'Université.

Notre démarche.— Nous savons que des musées scientifiques comme *la Cité des Sciences* et *le Palais de la Découverte* ainsi que des associations de vulgarisation comme *les Petits Débrouillards* organisent des ateliers scientifiques en direction des enfants. Certains de ces ateliers traitent de mathématiques. Néanmoins, nous n'avons pas trouvé de publication décrivant en détail leurs activités. Nous avons donc décidé de créer nos ateliers de toutes pièces. Les thèmes abordés ne sont certainement pas originaux. Nous avons adopté la démarche suivante. D'une part, nous récusons le terme de *jeu mathématique* et de *casse-tête*. Nous avons préféré présenter les problèmes de manière plus approfondie faisant appel à la notion de recherche plus qu'à celle de résolution. De plus, la non trivialité des problèmes est garantie par le rattachement à des notions fondamentales des mathématiques. D'autre part, bien que les thèmes des activités ne fassent pas partie du programme scolaire, celui-ci a été notre outil de référence pour préjuger du niveau de connaissance et du niveau de compétence des enfants. Ceci nous permet de proposer nos ateliers au plus grand nombre, ne nous restreignant pas à une catégorie d'enfants *doués* ou a priori intéressés. De plus, ces ateliers ont été perçus par les enfants comme des activités de recherche plus ou moins différentes du travail scolaire habituel, ce qui permet de les proposer dans des cadres différents de l'école.

Nos objectifs pédagogiques.— Nous nous plaçons dans le fil du document d'application des programmes[1], où la résolution des problèmes est mise au centre des activités mathématiques du cycle 3[2] du primaire. En particulier, nous proposons des *problèmes de recherche* dont le but est de *développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter*[1].

Nous avons adopté une forme de travail par petits groupes, parfois par binômes généralement d'âge hétérogène (d'âge du cycle 3). L'hétérogénéité confère une certaine dynamique de travail au groupe, la discussion et la confrontation des résultats se faisant à plusieurs niveaux. Les plus jeunes sont souvent aidés par les plus âgés de leur groupe. L'émulation des différents groupes est une motivation supplémentaire à l'avancée du travail. Comme nous l'avons dit plus haut, nous souhaitons que nos ateliers soient accessibles au plus grand nombre. Des élèves en difficulté y ont pris un grand plaisir et se sont souvent impliqués dans nos activités. L'erreur permet d'avancer dans la recherche et d'élaborer de nouvelles hypothèses à tester. Enfin, ces ateliers permettent de mobiliser différentes compétences notamment l'expression orale. Les enfants décrivent leurs observations, expliquent et argumentent leurs démarches.

Atelier combinatoire des dominos

Cette activité est consacrée à la combinatoire et au dénombrement. Il s'agit de dénombrer des dominos sans avoir de dominos. Dans un second temps, on s'intéresse aux *triminos.* Cet atelier a été testé à plusieurs reprises avec des élèves de cycle 3 à l'école primaire d'Andlau ainsi que dans une classe de cinquième du collège Kléber de Strasbourg.

Remarques pédagogiques spécifiques. — Les compétences mises en œuvre, que nous reprenons des directives de programme [1] sont les suivantes :
— Enumérer exhaustivement des structures complexes (dominos, triminos) à l'aide d'un classement logique (tri, tableau).
— Chercher et produire une solution originale dans un problème de recherche.
— Connaître les tables d'addition et de multiplication pour calculer une somme ou un produit.
— Diviser un nombre par 2 (c'est-à-dire calculer la moitié d'un nombre).
— Mettre en œuvre un calcul réfléchi, c'est-à-dire organiser et effectuer mentalement ou à l'aide de l'écrit sur des nombres entiers un calcul additif (...) en s'appuyant sur des résultats mémorisés.
— Eventuellement écrire une formule comprenant des lettres et/ou appliquer cette formule.
— Traduire par un schéma une situation exprimée en langue naturelle.

[1] *Document d'application des programmes 2003* — Mathématique, Cycle 3. Collection Ecole, SCEREN (CNDP), http ://www.eduscol.education.fr/D0048/pb_pour_chercher.pdf

[2] Cours élémentaire 1, cours moyen 1 et 2.

Déroulement de l'activité et remarques mathématiques

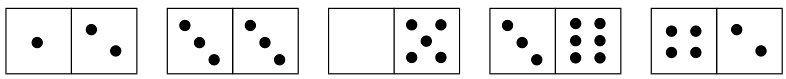
L'atelier comporte deux parties, l'une est consacrée aux dominos et la seconde aux triminos. La première a elle-même donné lieu à deux *matinées ateliers* à l'école d'Andlau.

Le matériel

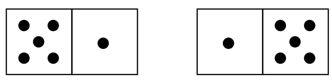
— Tableau noir ou blanc pour la mise en commun des résultats
— Papiers et crayons pour les enfants
— Des feuilles au format A4 ou A4 représentant des dominos ou triminos vierges.
— Des cartons prédécoupés pour réaliser des jeux de dominos et de triminos.

Nous décrivons maintenant en détail le déroulement de l'atelier en donnant les explications mathématiques nécessaires à sa compréhension. Les textes encadrés sont des approfondissements mathématiques et historiques. Ils peuvent être omis lors d'une première lecture.

Classification des dominos. — Nous exprimons immédiatement la problématique de l'atelier, à savoir la question, *Combien y-a-t-il de dominos dans une boîte de dominos ?* Dans un premier temps, il s'agit de s'assurer que chaque enfant sait ce qu'est un domino. Il s'agit d'une petite pièce rectangulaire dont l'une des faces comporte deux symboles (généralement des nombres figurés par des points). Dans un jeu classique, les symboles sont les nombres compris entre 0 à 6. Par exemple, un jeu classique comporte, entre-autre, les dominos suivants :



Les enfants ne disposant pas de jeu de dominos proposent de les dessiner afin de les compter. Pour leur faciliter la tâche, on peut leur distribuer une feuille avec des dominos vierges qu'ils complétent. La feuille comportera plus de dominos vierge qu'il y en a dans un jeu usuel. Ils s'aperçoivent rapidement de deux aspects du problème. Le premier est qu'il faut classer les dominos de manière logique pour être certain de n'en oublier aucun. Le second est qu'il faut tenir compte de la symétrie des pièces. Par exemple les deux dessins ci-dessous représentent la même pièce :



Une des possibilités de classement est celle du tableau 1. Ce qui permet d'effectuer le décompte sans difficulté. Il suffit de compter le nombre de dominos par ligne (ou par colonne) et d'additionner tous les nombres. On obtient :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Il est également possible de remarquer que le tableau de dominos peut être *doublé* à la manière du tableau 2. En utilisant deux jeux de dominos, on forme ainsi un rectangle dont les côtés sont constitués de 7 et 8 dominos. Il y a donc $7 \times 8 = 56$ dominos dans le rectangle. Chaque jeu a donc $56/2 = 28$ dominos.

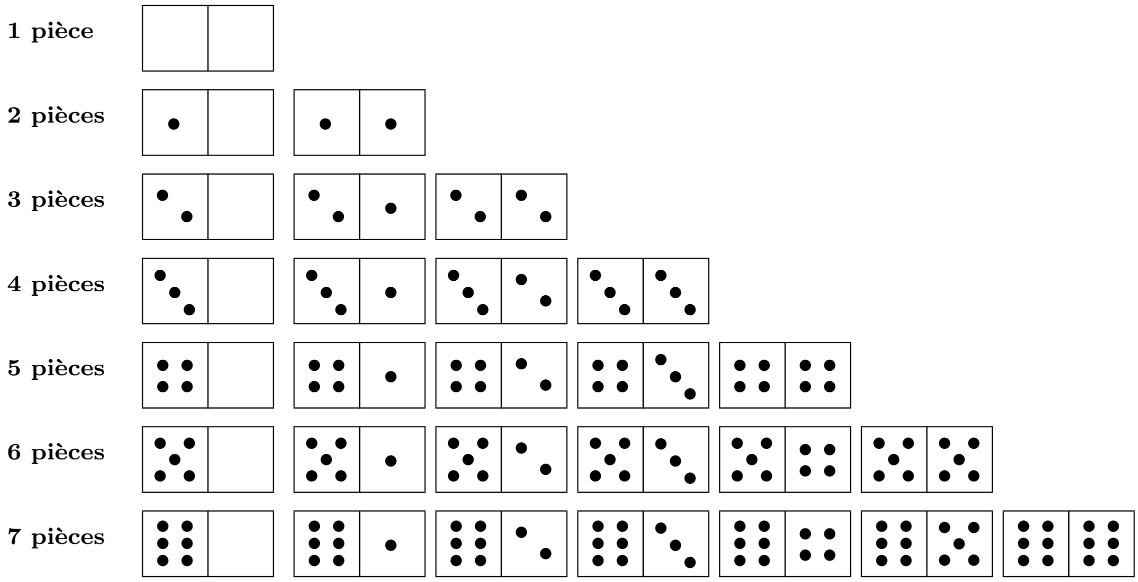


Tableau 1

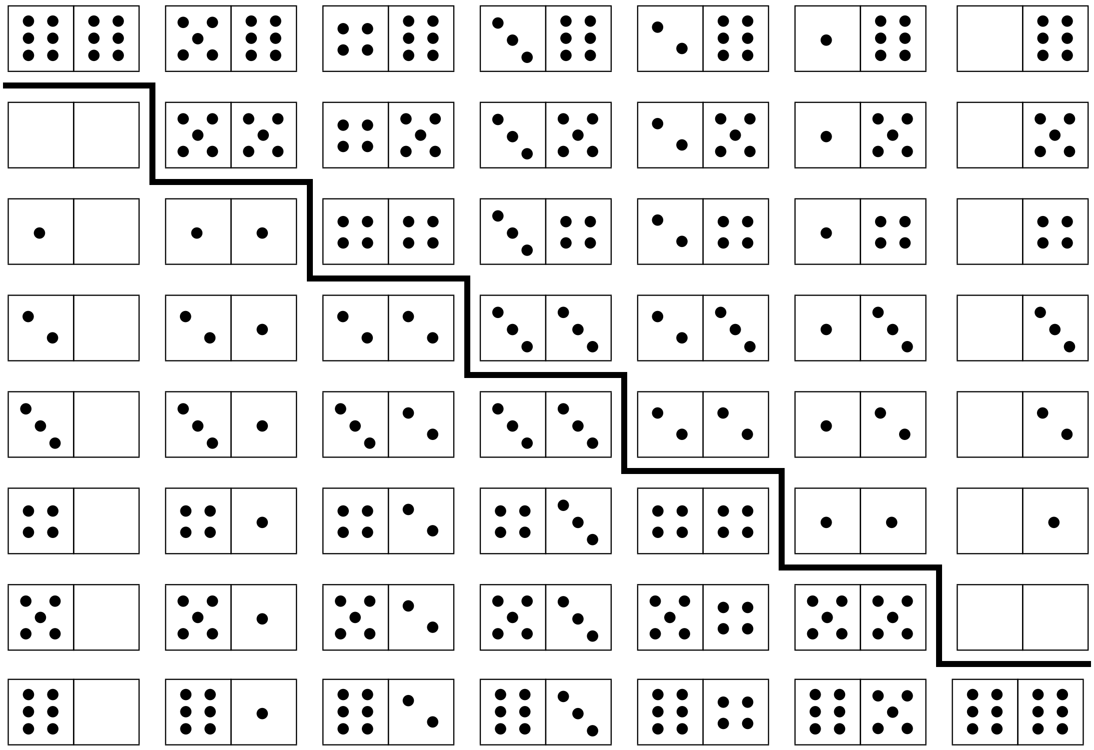
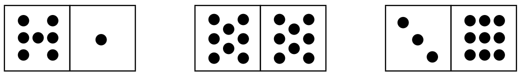


Tableau 2

Généralisation à un jeu à n symboles. — Dans une deuxième phase de l'activité, on demande aux enfants combien il y aurait de pièces dans un jeu comportant plus de symboles (dix cette fois-ci), c'est à dire qu'on souhaite introduire dans le jeu des pièces du type :



Les enfants ayant intégré la démarche précédente doivent refaire un classement des dominos leur permettant de les compter. On arrive alors à devoir calculer la somme

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11.$$

De même que précédemment on peut réunir deux jeux pour former un rectangle de côtés comportant 11 et 10 dominos. La somme vaut donc $\frac{11\times 10}{2}=55$. Il y a donc 55 pièces dans le jeu à 10 symboles.

On peut ensuite demander aux enfants combien de dominos il y dans un jeu à vingt symboles, puis dans un jeu de cent symboles. La réponse sera

$$1+2+3+\cdots+19+20$$

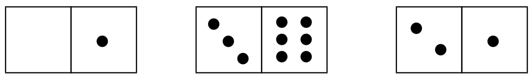
pour le premier et

$$1+2+3+\cdots+99+100$$

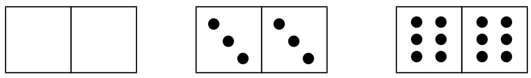
pour le second. La difficulté pratique de calculer les sommes doit les inciter à imaginer les rectangles que formeraient deux jeux ensemble et finalement aboutir à la formule $\frac{n\times(n+1)}{2}$ qui donne le nombre de dominos d'un jeu à n symboles.

Nous donnons maintenant une démonstration alternative se basant sur un raisonnement de combinatoire.

Supposons que l'on veuille dénombrer un jeu de dominos à n symboles où n est un entier supérieur à 1. Nous pouvons considérer qu'il y a deux sortes de dominos, ceux où les deux symboles sont différents par exemple :



et les dominos *doubles* où les deux symboles sont identiques, comme par exemple



Le décompte des dominos double est simple. Il y en a autant que de symboles c'est-à-dire n. Nous allons maintenant dénombrer les autres. Cela revient à déterminer le nombre de couples (X,Y) de deux symboles différents (X et Y) que l'on peut former en puisant dans une réserve de n symboles. Il y a n choix pour le premier symbole et le premier étant choisi, le second devant être différent du premier, il ne reste que $n-1$ possibilités. Le nombre de couples (X,Y) est donc $n\times(n-1)$. Mais dans ce raisonnement, nous n'avons pas tenu compte de la symétrie des dominos. Les couples (X,Y) et (Y,X) représentent le même domino. Dans notre décompte chaque domino apparaît deux fois. Le nombre de dominos *non doubles* est donc $\frac{n\times(n-1)}{2}$. En combinatoire, il est commun de noter ce nombre C_n^2.

Par conséquent, le nombre de dominos est

$$\frac{n\times(n-1)}{2}+n=\frac{n\times(n-1)+2n}{2}=\frac{n\times(n-1+2)}{2}=\frac{n\times(n+1)}{2}.$$

On remarque que le nombre $\frac{n\times(n+1)}{2}$ est un entier pour tout n. En effet quel que soit n, l'un des nombres n ou $n+1$ est pair, et par conséquent, leur produit est toujours divisible par 2.

L'atelier a mis en relief une autre propriété du nombre $\frac{n\times(n+1)}{2}$. On a en effet la formule

$$1+2+\cdots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}.$$

Ceci peut se démontrer par ailleurs de manière élémentaire. Soit $s = 1+2+\cdots+n$. Il suffit d'additionner la somme donnant s avec elle-même changeant l'ordre des termes de la manière suivante :

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc} s & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ +s & n & + & (n-1) & + & (n-2) & +\cdots+ & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline =2s & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & +\cdots+ & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

On en déduit que $2\times s$ vaut $n\times(n+1)$ et par conséquent $s=\frac{n\times(n+1)}{2}$.

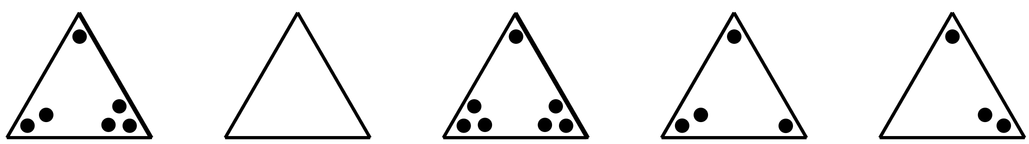
Dans le cas d'un groupe plus avancé ou d'une utilisation en collège, on peut compléter l'activité par l'application pratique qui suit. On pose la question suivante aux enfants :

> *Lorsqu'on forme un groupe de six personnes, si l'on veut jouer aux dominos tous ensemble de telle manière que chacun ait au moins six dominos au départ et qu'il y en ait au moins dix dans la pioche, combien de symboles doit comporter le jeu pour avoir suffisamment de pièces ?*

Nous avons choisi six personnes, mais ce nombre peut bien entendu correspondre à celui des petits groupes de travail que forment les enfants. Pour répondre à la question, il faut calculer le nombre minimal de pièces nécessaires, c'est-à-dire $(6\times 6)+10=46$. Il faut donc, a priori, plus de sept symboles puisqu'un jeu ordinaire contient 28 dominos. En utilisant la formule, on calcule qu'un jeu de huit symboles contient $\frac{8\times 9}{2}=36$ dominos, un jeu de neuf symboles en contient $\frac{9\times 10}{2}=45$ et un jeu de dix symboles $\frac{10\times 11}{2}=55$. C'est donc un jeu de 10 symboles qu'il faut construire.
Le reste de la séance peut être consacré à la réalisation des jeux à l'aide de rectangles de carton et à jouer avec les dominos fabriqués.

Le décompte des triminos. — Après s'être intéressé aux dominos qui comportent deux symboles, on peut étendre la problématique aux triminos comportant trois symboles. Néanmoins, nous avons réservé cette partie de l'atelier aux plus âgés des élèves de primaire.

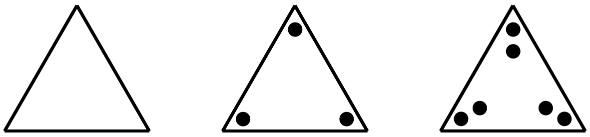
Un *trimino* est une pièce ayant la forme d'un triangle isocèle dont chaque coin comporte un symbole choisi parmi une collection prédéfinie. Par exemple si les symboles sont des nombres compris entre 0 et 3 et représentés par des points, on a par exemple les triminos suivants.



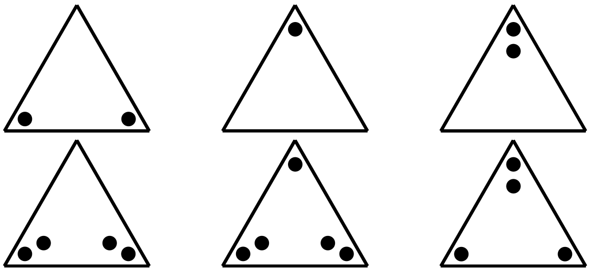
De tels jeux de triminos sont disponibles dans le commerce.

Nous proposons aux enfants de déterminer leur nombre. Pour cela on commence par demander de déterminer ceux pour lesquels les symboles sont 0, 1 et 2. On leur distribue des feuilles reproduisant des triminos vierges ou des petits cartons triangulaires vierges de symboles eux-aussi et qu'ils doivent compléter.

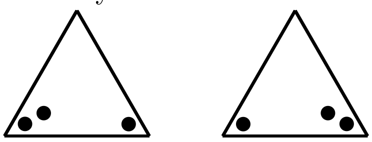
On parvient à classer les triminos de la manière suivante.
— Il y en a trois *triples* :



— Il y en six où l'un des symboles se répète deux fois exactement :



— Enfin, il y en a deux où les trois symboles sont différents :



Il y a une petite difficulté à se convaincre que ces deux derniers triminos sont bien distincts. On peut par exemple faire tourner deux fois l'un d'entre-eux d'un tiers de tours pour s'appercevoir que les deux dominos ne sont pas superposables. En conclusion, il y a $3 + 6 + 2 = 11$ triminos à trois symboles.

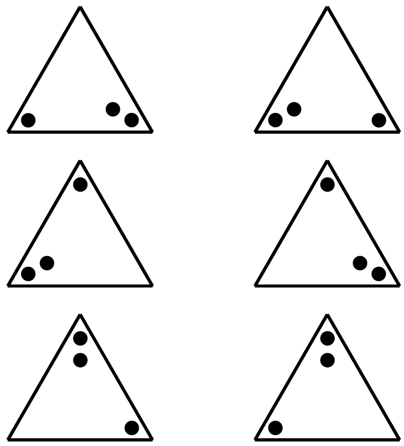
On pose ensuite la même question pour les triminos à quatre symboles. Comme précédemment, les enfants doivent déterminer tous les triminos à l'aide d'un classement adéquat pour les compter.

Après s'être intéressé aux triminos à trois symboles, on peut chercher le nombre total des triminos à n symboles. Nous pouvons procéder de la manière suivante.
Tout d'abord, comme précédemment, nous classons les triminos en trois catégories. Ceux où les trois symboles sont identiques, ceux comportant exactement deux symboles différents et ceux en comportant exactement trois différents.
— Pour les triminos comportant un seul exactement des n symboles, il y en a exactement n. Par exemple si $n = 3$, nous en avons bien compté 3.
— En ce qui concerne les triminos qui comportent deux exactement des n symboles, il y en a $n \times (n-1)$. En effet, il y a n possibilités pour le symbole qui apparaît une fois, et celui-ci choisit, il reste alors $n-1$ possibilités de choix du symbole qui apparaît en deux exemplaires. Par exemple, pour $n = 3$, nous avons bien compté $3 \times 2 = 6$ triminos de cette sorte.
— Enfin, en ce qui concerne les triminos qui ont trois symboles différents, il y en a $\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3}$. Par exemple pour $n = 3$, on a $\frac{3\times2\times1}{3} = 2$ pièces. Expliquons cette formule

dans le cas $n = 3$. L'explication pour un nombre de symboles n est donnée dans l'encadré ci-dessous.
Nous faisons la liste des triplets des nombres de 0 à 2 sans répétition. Il y en a $3 \times 2 \times 1$. En effet, pour chacun des trois choix du premier nombre, correspond, deux choix possibles pour le second et un seul pour le troisième :

$$\text{Trois possibilités pour le premier choix} \quad \left\{ \underbrace{\begin{array}{ll} (0,1,2) & (0,2,1) \\ (1,2,0) & (1,0,2) \\ (2,0,1) & (2,1,0) \end{array}}_{\text{Deux possibilités pour le second choix}} \right.$$

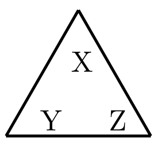
Pour chacun de ces triplets, nous pouvons dessiner un trimino :



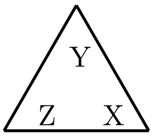
Mais les trois triminos de droite, représentent en fait la même pièce. Il suffit d'en faire tourner un d'un angle de 120^o et d'un angle de 240^o pour retrouver les deux autres. Il en est de même des trois triminos de gauche qui représentent la même pièce qui est différente de celle représentée par les triminos de droite.
Comme pour chaque possibilité de choix, on obtient trois fois le même trimino, pour avoir le nombre de pièces du jeu, il faut diviser le nombre de choix par 3. On a donc bien $\frac{3\times 2\times 1}{3} = 2$ pièces.

Démontrons la formule $\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3}$ donnant le nombre de pièces d'un jeu de triminos à n symboles.

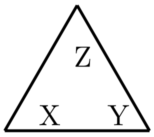
Nous raisonnons en termes de choix de symboles. Considérons les triplets (X, Y, Z) où X, Y et Z sont des symboles distincts choisis parmi les n disponibles. Pour le premier symbole, il y a n choix possibles, pour le second, il reste $n - 1$ choix possibles et pour le dernier, $n - 2$ choix possibles. Il y a donc $n \times (n - 1) \times (n - 2)$ triplets différents. A chaque triplet, (X, Y, Z), correspond un trimino :



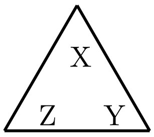
Mais les pièces pour les triplets (Y, Z, X) et (Z, X, Y) :

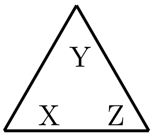


et

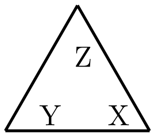


sont identiques à cette dernière pièce. Il suffit de les tourner d'un angle de 120^o où de 240^o pour s'en rendre compte . Ils sont différents des triminos





et



donnés par les triplets (X, Z, Y), (Y, X, Z) et (Z, Y, X) .

Nous avons donc compté la même pièce exactement trois fois. Pour arriver au décompte des pièces à trois symboles choisis dans un ensemble de n, il suffit donc de diviser le nombre $n \times (n-1) \times (n-2)$ de possibilités de triplet X, Y, Z par trois. Il y a donc $\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3}$ triminos à trois symboles distincts choisis parmi n.

Si nous récapitulons, nous avons compté n triminos à un symbole, $n \times (n-1)$ triminos à exactement deux symboles différents et $\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3}$ triminos à trois symboles distincts. En conclusion le nombre de triminos à n symboles est

$$n + n \times (n-1) + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{3}$$

Ce qui vaut encore

$$\frac{3n + 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)}{3} = n\frac{3 + 3n(n-1) + (n-1)(n-2)}{3} =$$
$$n\frac{3 + (n-1)(4n-2)}{3} = \frac{n(4n^2 - 6n + 5)}{3}$$

Le tableau de suivi

En annexe, nous reproduisons des tableaux qui décrivent les quatre séances de cet atelier qui ont été proposées aux élèves de l'école élémentaire d'Andlau durant l'année scolaire 2003/2004. Ils permettent de se faire une idée du déroulement possible de l'atelier. Les données horaires sont purement indicatives.

Groupe Atelier de L'IREM de Strasbourg
Bénédicte Autier, Collège Kléber, Strasbourg
Muriel Cron, Ecole Elémentaire d'Andlau, Andlau
Anne-Céline Mittelbronn, Collège La Providence, Strasbourg
Nathalie Wach, UFR de Mathématique et Informatique, Université Louis Pasteur, Strasbourg
Marc Wambst, UFR de Mathématique et Informatique, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Combinatoire des dominos

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'Ecole élémentaire d'Andlau en 2003/2004 — **Première séance – 1**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
10 min.	**Emission de conjectures, oral collectif**	L'institutrice écrit la question *Combien y-a-t-il de dominos dans un jeu de dominos classique ?* au tableau. Elle s'assure que tous les élèves savent comment représenter un domino et quels sont les symboles qui se trouvent sur ces derniers. Elle écrit au tableau les propositions de réponse à la question, que font les élèves.	Tous les enfants ne connaissaient pas les dominos. Il a fallut préciser la notion de *nombre de symboles* et l'utilisation d'un symbole *zéro*. Il y a eu des réponses du type 7×7 ou 6×6. Mais en général, les enfants ont fait une bonne estimation du nombre de dominos. Certains ont raisonné sur le nombre de pièces par joueurs et le nombre de pièces restant dans la pioche, d'autre en raisonnant sur le nombre de dominos qu'il est possible de loger dans une boîte. D'autres, les utilisaient régulièrement comme pièces de jeu de construction et ont produit une estimation déduite de cette familiarité.
15 min.	**Recherche par binôme travail écrit**	*Vous devez maintenant trouver la réponse exacte à cette question. Qui a une idée sur la manière de trouver la solution ?* Une discussion s'engage et on finit par convenir qu'il faut dessiner les dominos puis les compter. L'institutrice distribue une feuille avec des dominos vierges et fait travailler les enfants par groupes de deux.	L'idée de faire un schéma, puis de dessiner les dominos apparaît rapidement. Les résultats sont très différents suivant l'âge. Certains enfants dessinent les dominos en les accolant comme s'ils jouaient. D'autres ne font aucun classement ou distinguent simplement les doubles des autres. Quelques uns sont totalement démunis ne sachant par quoi commencer.
15 min.	**Mise en commun orale collective**	L'institutrice recense les différents nombres obtenus et demande aux binômes d'expliquer leur manière de procéder. Elle écrit les méthodes au tableau ainsi que le nombre proposé. S'en suit une discussion sur l'efficacité des différentes façons de dénombrer les dominos. La question *Comment être sur d'avoir dessiné tous les dominos ?* se dégage.	

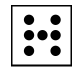
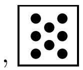
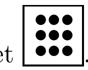
Combinatoire des dominos

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'Ecole élémentaire d'Andlau en 2003/2004 — **Première séance – 2**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
20 min.	**Recherche individuelle**	Après le choix d'un mode de rangement, les élèves dessinent individuellement l'ensemble des dominos en respectant ce mode. L'institutrice rappelle la consigne : *Combien de dominos y a-t-il dans un jeu de dominos classique ?* Les élèves s'auto-corrigent à partir d'une discussion au sein du groupe ou à partir d'une feuille-réponse fournie par l'enseignante. Les élèves comptent le nombre de dominos, un par un, par colonne ou par ligne, ou encore en s'aidant d'un second jeu de dominos dessiné. L'enseignante observe les élèves pour repérer les différentes façons de procéder pour le dénombrement.	Après le choix d'un mode de rangement, chaque binôme produit un classement. Certain oublient la colonne de symboles contenant *zéro*. Beaucoup comptabilisent en comptant un à un ce qui engendre de nombreuses erreurs. L'idée de compter par ligne ou par colonne ne vient qu'après une suggestion de l'enseignante. Certain élèves dessinent deux jeux de dominos et parviennent à faire le tableau 2.
15 min.	**Mise en commun collective**	L'institutrice interroge les élèves sur leur résultat. Elle demande que les différents procédés de comptage soient évoqués et justifiés lors de la mise en commun. L'ensemble de la classe discute de l'efficacité de chacun de ces procédés.	
	Recheche individuelle	Finalement, on souhaite arriver à ce que les enfants additionnent le nombre de dominos situés sur chaque ligne (ou chaque colonne) de leur classement. La somme $1+2+3+4+5+6+7$ doit apparaître. On conclut que, dans un jeu de dominos classique, **il y a 28 pièces**.	Les élèves regroupent la somme en $(3+7)+(6+4)+5+2+1$ mais aussi en $7+(1+6)+(2+5)+(4+3)$.
10 min.	**Mise en projet de la suite de l'activité**	L'institutrice explique que, pour pouvoir jouer à plus de joueurs, il faut fabriquer un jeu avec plus de pièces. Pour cela, on choisit cette fois-ci 10 symboles différents au lieu de 7. *Combien de dominos vierges dois-je dessiner sur la photocopie que je vais vous remettre ?*	

Combinatoire des dominos

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'Ecole élémentaire d'Andlau en 2003/2004 **Deuxième séance – 1**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
10 min.	**Projet de recherche**	L'institutrice écrit la question *Combien y-a-t-il de dominos dans un jeu de dominos sur lesquels il peut y avoir 10 symboles différents ?* au tableau. Elle explique la notion de *symbole* et donne des exemples de symboles différents.	Ce sont les élèves qui ont choisi de numéroter les symboles de 0 à 9 et de représenter les symboles 7, 8 et 9 par : ,  et .
25 min.	**Recherche par binôme travail écrit**	*Vous devez maintenant trouver la réponse exacte à cette question. Vous pouvez travailler à deux.* On distribue des feuilles de dominos vierges à chaque binôme. L'enseignante observe les différentes façons de procéder pour le dessin et le comptage.	Quasiment tous les binômes reprennent la méthode de classement par nombre de symboles en réinvestissant ce qui a été fait lors de la première séance.
15 min.	**Mise en commun orale collective**	L'institutrice recense les différents nombres obtenus et demande aux binômes d'expliquer leur manière de procéder. Elle écrit les méthodes au tableau ainsi que le nombre proposé. S'en suit une discussion sur l'efficacité de différentes façons de dénombrer les dominos. La question *Comment être sur d'avoir dessiné tous les dominos ?* se dégage à nouveau. On rappelle le mode de rangement utilisé à la séance précédente. Finalement, on souhaite arriver à ce que les enfants décompte les dominos par lignes ou par colonnes et aboutissent à la somme : $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$. *Comment calculer facilement cette somme ?*	Une seule méthode de rangement a été proposé par les différents binômes. Les enfants ont ensuite fait un comptage par ligne ou colonne. Pour répondre à la question *Comment calculer facilement cette somme ?*, ils ont groupé les termes de la manière suivantes : $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 =$ $(1+9)+(8+2)+(3+7)+(4+6)+5 =$ $5\times 10+5 = 55\,.$ Tous les groupes ont alors pu calculer le bon résultat.

Combinatoire des dominos

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'Ecole élémentaire d'Andlau en 2003/2004 **Deuxième séance – 2**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
20 min.	**Recherche individuelle**	L'institutrice propose aux enfants de dénombrer deux jeux ensemble. *Comment faire pour que cela soit le plus facile possible ?* Elle propose de faire des regroupements et suggère : $11 = 10 + 1\,;\ 11 = 9 + 2\,;\ 11 = 8 + 3\,;\ \ldots;\ 11 = 1 + 10$	A la suggestion de dénombrer deux jeux ensemble, les enfants écrivent $55 \times 2 = 110$ dominos. Il faut leur préciser que le nombre de dominos d'un seul jeu n'est pas forcément connu. Chaque colonne du classement apparaîssant deux fois, on propose de regroupe la somme de la manière : $1\ +2\ +3\ +4\ +5\ +6\ +7\ +8\ +9\ +10$ $+\ 10 + 9\ +8\ +7\ +6\ +5\ +4\ +3\ +2\ +1$ $=\ 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 11 \times 10$ Ce regroupement n'est pas naturel pour les enfants, il faut fortement l'induire et le mettre en relation avec la visualisation des deux jeux emboîtés (tableau 2) ce qui leur a permis de comprendre le calcul.
15 min.	**Mise en commun collective**	Un binôme explique la méthode au tableau. L'enseignante visualise le procédé d'assemblage. On peut donner la conclusion. Dans deux jeux de dominos avec 10 symboles, il y a $11 \times 10 = 110$ dominos. Par conséquent, dans un jeu, il y en a la moitié, c'est-à-dire 55.	
10 min.	**Réinvestissement**	*Si je choisis cette fois-ci 20 symboles différents, combien y aura-t-il de dominos ? Et pour 100 symboles différents ?* L'institutrice aide à formuler le procédé de calcul correspondant à la formule $S = \frac{n\times(n+1)}{2}$ en expliquant que cela revient aussi à calculer la somme $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$.	

Combinatoire des dominos Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'Ecole élémentaire d'Andlau en 2003/2004			**Troisième séance − 1**
Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
10 min.	**Rappel oral collectif**	L'institutrice rappelle ce qui a été fait précédemment avec les dominos, c'est-à-dire de trouver le nombre de dominos d'un jeu comportant 10 symboles. *Quelle a été la méthode utilisée ? Etait-elle efficace, pourquoi ?*	Des enfants se souviennent bien qu'il s'agissait de faire la multiplication de deux nombres, mais pas de quels nombres il s'agissait. Ils trouvent tous la méthode efficace à condition de savoir effectuer une multiplication et de trouver la moitié d'un nombre. L'enseignante leur rappelle une méthode permettant de calculer la moitié d'un nombre : *la moitié de 110 est la moitié de 100 plus celle de 10, c'est-à-dire* $50 + 5 = 55$.
10 min.	**Entraînement individuel**	*Peut-on connaître le nombre de dominos sans les dessiner ?* L'institutrice rappelle que le nombre de dominos est aussi le résultat de la somme $1 + 2 + \cdots + n$, où n est le nombre de symboles. Pour calculer une telle somme il suffit de calculer $\frac{n\times(n+1)}{2}$. L'institutrice demande de calculer les sommes $1+2+\cdots+15\,;\quad 1+2+\cdots+36\,;\quad \text{et}\quad 1+2+\cdots+99$ à l'aide de l'ardoise. Les plus jeunes ont le droit d'utiliser une calculatrice.	Les enfants calculent les sommes en utilisant la procédure suivante : *je multiplie le dernier terme par le suivant et je prend la moitié du résultat.* La formule a surtout été donné pour les élèves de cours moyen en leur expliquant que c'était une façon de décrire le procédé de calcul. Les éléves du cours moyen savent poser une multiplication mais font encore des erreurs de calcul. Le plus difficile a été de trouver la moitié pour les grands nombres. Un quart des élèves ont trouvé le résultat de suite.
10 min.	**Mise en projet, émission de conjecture, oral collectif**	*Aujourd'hui, nous allons nous intéresser aux triminos. Qu'est-ce qu'un trimino ?* L'institutrice s'assure que tous les élèves ont compris qu'un trimino est représenté par un triangle équilatéral sur lequel on écrit les symboles dans les angles. Elle convient des symboles à utiliser avec la classe. Elle énonce le problème : *Combien y a-t-il de triminos si les symboles proposés sont* 0, 1 *et* 2 *?* Les enfants émettent des conjectures qui sont recensées au tableau.	Les réponses étaient aléatoires et comprises entre 10 et 50.

Combinatoire des dominos

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'Ecole élémentaire d'Andlau en 2003/2004 — **Troisième séance – 2**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
25 min.	**Recherche écrite par binôme**	*Vous devez maintenant trouver la réponse exacte à la question. Qui a une idée sur la manière de trouver la solution ?* Les élèves travaillent à deux. On distribue des triminos vierges à chaque binôme. L'enseignante observe les élèves pour repérer les différentes façons de procéder, pour le dessin puis le comptage.	Les enfants essaient de dessiner les triminos en les classant comme les dominos. Pour débloquer certains, l'institutrice leur suggère le mode de classement par *triples* (ceux dont les trois symboles sont identiques), *doubles* (ceux dont deux des trois symboles sont identiques) et *simples* (ceux dont les trois symboles sont différents).
10 min.	**Mise en - commun collectif**	L'institutrice recense les différents nombres obtenus et demander aux binômes d'expliquer leur manière de procéder. Elle écrit méthodes au tableau ainsi que le nombre proposé. S'en suit une discussion sur l'efficacité de chaque façon de dénombrer les triminos. En particulier *Comment être sûr de les avoir tous dessinés ?*	Il y a eu lieu à une disscussion sur les triminos identiques comportant les mêmes symboles.
15 min.	**Recherche individuelle**	Après le choix d'un mode de rangement, les élèves dessinent individuellement l'ensemble des triminos en respectant ce mode.	
	Par groupe de quatre	Les élèves s'auto-corrigent à partir d'une discussion au sein d'un groupe de quatre ou à partir d'une feuille-réponse distribuée par l'enseignante. Ils comptent ensuite le nombre de triminos.	

Combinatoire des dominos

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'Ecole élémentaire d'Andlau en 2003/2004 — **Troisième séance – 3**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
15 min.	**Mise en commun collective**	Les élèves expliquent et justifient leurs procédés de comptage. On conclut que dans un jeu de triminos avec les symboles 0, 1 et 2 , il y a 11 pièces.	Après la mise en commun, tous les enfants ont classé les triminos suivant le nombre de symboles identiques. La difficulté a résidé dans le dénombrement des triminos à trois symboles différents.
10 min.	**Mise en projet de la suite de l'activité**	*Pour pouvoir jouer à plus de joueurs, nous voulons fabriquer un jeu avec plus de pièces. Pour cela, nous choisissons cette fois-ci 4 symboles différents au lieu de 3 .* *Combien de triminos vierges dois-je vous fournir pour fabriquer le jeu ?* Les enfants émettent des conjectures qui sont recensées au tableau.	

Combinatoire des dominos

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'Ecole élémentaire d'Andlau en 2003/2004 **Quatrième séance – 1**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
10 min.	**Rappel, mise en projet de recherche**	L'institutrice rappelle ce qui a été fait la semaine précédente et la question : *Combien y a-t-il de triminos dans un jeu de triminos sur lesquels il y a 4 symboles différents ?* Elle réexplique la notion de *symbole* et donne des exemples de symboles différents.	
20 min.	**Recherche écrite par binôme**	*Vous devez maintenant trouver la réponse exacte à cette question.* La recherche se fait par binôme. On distribution des triminos vierges (plus que nécessaire) à chaque binôme . L'enseignante observe les élèves pour repérer les différentes façons de procéder pour le dessin puis le comptage. Elle rappelle le mode de rangement évoqué lors de la séance précédente.	Les enfants font spontanément un classement suivant le nombre de symboles identiques. Il y a de nombreux oublis de triminos avec trois symboles différents.
20 min.	**Mise en commun orale collective**	On recense au tableau les différents nombres obtenus et les binômes expliquent leur manière de procéder. S'en suit une discussion sur le classement.	Pour se convaicre de n'avoir pas compté deux fois le même triminos, les enfants découpent des triminos et les font tourner.

Combinatoire des dominos

Déroulement de l'atelier en cycle 3 à l'Ecole élémentaire d'Andlau en 2003/2004 **Quatrième séance – 2**

Temps	**Phase**	Déroulement, consignes données (en italique)	Réaction des élèves, remarques
20 min.	**Recherche par binôme**	L'institutrice propose aux enfants de dénombrer en observant les types de triminos. *Que remarque-t-on si on compare le nombre de triminos de chaque type par rapport au nombre de symboles ? On peut aider les élèves en indiquant au tableau les différents types de triminos possibles (avec trois symboles identiques dans chaque coin, avec deux symboles identiques seulement, avec trois symboles distincts).*	Le nombre de triminos *triple* et celui à de triminos *doubles* ont rapidement été trouvés. Le décompte des triminos *simples* a, en revanche, posé des difficultés.
25 min.	**Mise en commun collectif**	La méthode de classement et le dénombrement est expliqué au tableau par un binôme ou par l'institutrice. On conclut en donnant le nombre de triminos à quatre symboles qui est 24.	
15 min.	**Travail Individuel puis jeu collectif**	Les enfants construisent le jeu de triminos à l'aide de triangles de carton prédécoupés. Ils l'utilisent ensuite pour jouer.	Les enfants ont réutilisé leur classement pour vérifier que tous les triminos ont été fabriqués.

COMMENTAIRES SUR « LA LOGIQUE ET LA VÉRITÉ »

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Jean-Pierre FRIEDELMEYER nous écrit à propos de l'article « la logique et la vérité » d'Alain CHAUVE publié dans le numéro 109 de L'OUVERT.

J'ai trouvé cet article bien écrit et je me suis laissé prendre, dans un premier temps, à la logique (c'est bien la moindre des choses pour un article sur la logique, n'est-ce-pas ?) froide et implacable de l'argumentation. Il donne en particulier un aperçu historique précis et clair des diverses manières d'appréhender la relation entre vérité et logique.

Ce qui m'amène à la question du fond. Quelle est finalement la thèse soutenue par l'auteur ?

Si j'ai bien compris, c'est celle-ci, exprimée par la dernière phrase :

En logique il n'y a pas de sujet ; il n'y a que le calcul.

Donc il n'y a pas de vérité en logique, il n'y a que des tautologies de calcul. Fort bien. Mais on ne voit pas comment les règles logiques pourraient avoir une existence s'il n'y avait pas un sujet qui les pense, les élabore, les manipule. D'autre part, il y a des logiques bivalentes, n-valentes, floues, mais ce sont toujours des logiques construites selon des règles et c'est l'ensemble des règles qui définit très exactement la vérité de la logique. La nécessité logique n'est une nécessité que si un sujet, quel qu'il soit, les pense nécessaires. Même si c'est une « machine à penser », un ordinateur, c'est un sujet qui a construit la machine en respectant des règles qui expriment une certaine vérité, en accord avec par exemple, des lois de la nature, celles de la mécanique, de l'électricité, etc. Même une tautologie n'est tautologie que pour un être pensant : le mot « tautologie » est un mot qui a un sens. Et c'est le sens qui renvoie à la notion de vérité. Or le mot « sens » est totalement et curieusement absent du texte.

L'auteur cite la proposition 6.123 du *Tractatus* de WITTGENSTEIN, à l'appui de sa thèse :

> *Il est clair que les lois logiques ne doivent pas être subordonnées elles mêmes à des lois logiques.*

Et on ne peut qu'être d'accord avec cela. Mais WITTGENSTEIN fait, lui, le lien avec la question du sens, dans la proposition principale suivante 6.124 :

> *Les propositions logiques décrivent l'échafaudage du monde, ou plutôt, elles le représentent. Elles ne « traitent » de rien. Elles présupposent que les noms aient une signification, les propositions élémentaires un sens ; et c'est là leur connexion au monde.*

Puisque cet article est prévu principalement pour des mathématiciens dans le cadre de l'OUVERT, l'auteur aura, je crois, du mal à convaincre les lecteurs que leur activité, de caractère fondamentalement logique, n 'a rien à voir avec la vérité. Certes, en mathématiques aussi, le statut de la vérité a évolué. Il peut y avoir un certain arbitraire dans le choix des axiomes et des règles, mais, comme le dit HILBERT dans une lettre à FREGE :

> *Si les axiomes choisis arbitrairement ne se contredisent pas, dans toutes leurs conséquences, alors ils sont vrais, les objets par eux définis existent. Ce qui est pour moi critère de vérité et d'existence.*

Il n'y a donc effectivement aucun

> *mystérieux lien de nécessité logique entre ces deux formules* $((p \vee q)$ et $(p \wedge q))$ *et qui ferait que la vérité de* $(p \wedge q)$ *entraîne la vérité de* $(p \vee q)$ (p. 30).

Mais il y a bien un lien de nécessité parce que ces connecteurs ont été posés et définis d'une certaine façon, avec des règles précises, qui en constituent certes l'entière et seule vérité, mais qui n'ont pas été posées, elles, indépendamment d'un certain sens, qui fait leur connexion au monde et à la pensée.

Dire

> *qu'on ne saurait parler à propos des vérités logiques de « lois de la pensée »*

reviendrait à dire qu'il n'y a pas de pensée rationnelle.

Jean-Pierre FRIEDELMEYER
IREM de Strasbourg
jean-pierre.friedelmeyer@wanadoo.fr

Nouvelle publication

LES ÉTOILES DE MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES
2000-2003

Fascicule 7 – Edition française
Fascicule 8 – Edition internationale (français, allemand, italien, anglais, hongrois, polonais, espagnol)

Présenté par l'Inspection Pédagogique, les Equipes de Professeurs,
l'**I**nstitut de **R**echerche sur l'**E**nseignement des **M**athématiques de Strasbourg.

Auteurs L'équipe de conception de la compétition « Mathématiques sans frontières » : Jérôme AUDEOUD, Michel BARTHELET, Michel BURET, Jacques FREYBURGER, Pierre HUBER, Gérard KERNEIS, Nicole KRÄMER, Jacques MERTZEISEN, Germain REHLINGER, Pierre SCHWARTZ, Erich STROBEL ainsi que tous les collègues qui ont donné des idées d'exercices.

Mise en page Eliane LEGRAND et Jacques FREYBURGER

Dessins Pierre HUBER

Mots-clés Troisième – Seconde – Rallye

Date Octobre 2004

Nombre de pages n° 7 : 50 pages
n° 8 :186 pages

Editeur n° 7 : IREM de Strasbourg (**S. 190)**
n° **8 :** IREM de Strasbourg (**S. 191**)
http://irem.u-strasbg.fr

ISBN n° 7 : 2-911446-25-9
n° 8 : 2-911446-26-7

Public concerné Professeurs et élèves des classes de Troisième et Seconde.

Résumé Ces fascicules présentent les sujets en français (n° 7) et en six langues (n° 8) de la compétition « Mathématiques sans frontières » des années 2000 à 2003 : trois épreuves d'entraînement et trois épreuves définitives, avec leurs corrigés.
Plus de 5 000 classes de Troisième et de Seconde ont concouru en 2003. Près de 128 000 élèves de 15 à 17 ans ont ainsi découvert des mathématiques ludiques et attirantes, grâce au travail d'une trentaine d'équipes d'organisation, dans une vingtaine de pays différents.

Prix n° 7 : 8€ (+ 2,5€ de port)
n° 8 : 14€ (+ 5€ de port)
Règlement à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM
Courriel : bibirem@math.u-strasbg.fr - Tél. : 03 90 24 01 61

Nouvelle publication

GRAPHES EN TERMINALE ES
CD-ROM

Auteurs Yann BUGEAUD, Francine BURCKEL , Maria Christina CAMBAS , Elodie HENRIET, Bernard KOCH, Bernard LANGER, Didier LETZELTER Chantal MAETZ, Christian SCHULTZ, Brigitte WENNER

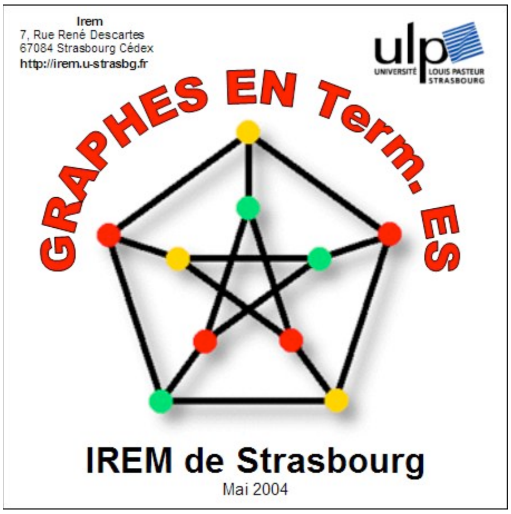
Mots-clés Graphes
Terminales ES
Théorie des graphes

Date Mai 2004

Editeur IREM de Strasbourg (**S. 189**)
http://irem.u-strasbg.fr

ISBN 2-911446-24-0

Public concerné Professeurs des classes de Terminale ES.



Résumé Ce CD a été élaboré par un groupe de l'IREM au moment de l'introduction des graphes en terminales ES. Il contient les corrigés des exercices du document d'accompagnement des programmes, des sujets de Baccalauréat, des parties de cours et des exercices.

Prix 5€ (+1€ de frais de port)
Règlement à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM.
Courriel : bibirem@math.u-strasbg.fr - Tél. : 03 90 24 01 61.

SOMMAIRE

N° 110 – DECEMBRE 2004

◇ Notre couverture : *Découpage du graphe de contraintes d'une esquisse cotée.*

◇ Éditorial : 1

◇ *Renforcer la place de la résolution de problèmes à l'université : développement et emploi d'un support en ligne*
par G. GUEUDET.. 3

◇ *La théorie des situations didactiques de Brousseau*
par A. KUZNIAK 17

◇ *Constructions géométriques, dessin industriel et informatique*
par P. SCHRECK, P. MATHIS, A. FABRE.. 35

◇ *Combinatoire des dominos, un atelier mathématique pour les enfants*
par B. AUTIER, M. CRON, A-C. MITTELBRONN, N. WACH, M. WAMBST 57

◇ Courrier des lecteurs : *Commentaires sur « la logique et la vérité »*
par J. P. FRIEDELMEYER 75

◇ Nouvelle publication : *Les étoiles de mathématiques sans Frontières 2000-2003*
Fascicule 7 – Édition française, Fascicule 8 – Édition internationale.................... 77

◇ Nouvelle publication : *Graphes en Terminale ES*.................................. 78

L'OUVERT
ISSN 0290-0068
Anciens numéros en ligne : `http://irem.u-strasbg.fr`

◇ *Responsable de la publication :* Nicole BOPP
Rédacteur en chef :
Comité de rédaction : Michel EMERY
Relecture : Odile SCHLADENHAUFEN

◇ *Correspondance à adresser à :*
Université Louis Pasteur – Bibliothèque de l'IREM
7, rue René Descartes – F-67084 STRASBOURG CEDEX
Tel. : 03 90 24 01 61 – Fax : 03 90 24 01 65
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr

◇ *Prix de l'abonnement (3 numéros)*
16 euros pour les membres A.P.M.E.P. d'Alsace
20 euros dans les autres cas.

◇ Chèque à l'ordre du Régisseur de Recettes de l'IREM
Merci de bien vouloir indiquer votre e-mail.

◇ Prix d'un numéro : 8 euros.