Annales de Didactique et de Sciences Cognitives

Publication de travaux du séminaire
de didactique des mathématiques de Strasbourg

Responsable de la publication : **François PLUVINAGE**

Université Louis Pasteur,
IREM de Strasbourg **Volume 9** **2004**
7, rue René Descartes
F - 67084 STRASBOURG Cedex

TABLE DES MATIERES

Pages

EDITORIAL

L'affiche du colloque Argentoratum 2002 représentait des élèves de lycée en train de réaliser des travaux consacrés à la représentation de l'espace, pour l'exposition organisée par l'IREM à l'occasion de l'année mondiale des mathématiques. Parmi les recherches doctorales menées au titre de la formation de didactique des mathématiques à Strasbourg, l'une a porté très spécifiquement sur la géométrie 3D, selon la désignation actuellement courante. Cette recherche s'inscrivait dans une lignée de travaux, où l'on peut signaler en particulier ceux qui avaient été conduits par Gérard Audibert et par Josiane Caron-Pargue, et elle a résulté d'une réflexion précise et pénétrante qui devra être prise en compte dans les travaux à venir sur ce domaine. Malheureusement, il ne sera plus possible d'avoir recours en la matière aux avis éclairés de son auteur, Marie-Paule Rommevaux, emportée trop tôt par une maladie inexorable cet été 2003. Un fort sentiment de vide nous a saisis à la nouvelle de son décès. Après avoir entrepris le DEA en 1987 sans interrompre pour autant son activité d'enseignement auprès de ses lycéens de Montbéliard, elle avait publié un premier article en 1991 dans le volume 4 de ces Annales, puis soutenu sa thèse en 1997. Cet écart dans le temps n'était pas avant tout imputable à l'exercice professionnel, mais à un ennui de santé qui l'avait obligée une année durant à suivre une rééducation de la voix. Elle avait mis à profit le temps écoulé pour approfondir ses réflexions et n'avait pas hésité dans certains cas à procéder elle-même à une remise en cause d'idées qu'elle avait énoncées. Dans sa thèse, elle revenait par exemple sur une perspective pédagogique esquissée en fin de sa conclusion de l'article des Annales : "*Dans une telle optique, les représentations planes en perspective ne devraient intervenir qu'en tout dernier lieu, lorsque les élèves sont capables pour un problème donné de sélectionner et de coordonner sur une maquette les sections utiles, c'est à dire lorsque le point de vue pertinent pour la résolution du problème a été découvert.*" Pourquoi lui était-il apparu nécessaire de modifier ce point de vue ? C'est qu'entre temps elle avait été amenée à réaliser toute l'importance que peuvent avoir pour les apprentissages les changements de dimension amenés concomitamment par une action physique telle que faire tourner une maquette et une activité sémiotique telle que tracer un trait sur une représentation.

De son article de 1991 à sa thèse, les approfondissements et les progrès de ses travaux s'appuient fortement sur les précisions apportées quant à la place des registres de représentation dans les apprentissages mathématiques, précisions dont la nécessité avait commencé à se faire sentir justement vers 1987, l'année où Marie-Paule Rommevaux entreprenait son DEA. Elle nous avait fait l'heureuse surprise, au terme de cette année là, de nous remettre à chacun un exemplaire de

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 5.

ses notes de nos cours, enrichies de réflexions personnelles, de questions et d'une abondante documentation en rapport avec les sujets traités. La clarté et la qualité de ce qu'elle avait rédigé nous renvoyait une image stimulante et gratifiante de notre enseignement ! Et le travail personnel dont elle l'avait enrichi nous a été précieux. Nous ne connaissons pas les qualités d'enseignante de Marie-Paule Rommevaux, mais la manière dont elle nous parlait de ses élèves, de leurs questions, de leurs difficultés et aussi de leurs réussites, des activités qu'elle élaborait pour leur faire comprendre et aimer les mathématiques, laissait percevoir une passion communicative. Pour ce qui est de la recherche nous avons pu apprécier sa perspicacité, sa rigueur, sa patience et sa capacité à se remettre en question pour avancer. Oui, vraiment, elle a été dans notre équipe, quelqu'un dont l'intelligence, le travail et l'amitié ont compté.

Raymond DUVAL et François PLUVINAGE

François PLUVINAGE

SUR LES MÉTHODES ET LES RÉSULTATS DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Abstract. In a first part of this paper we analyse how didactics of mathematics was emerging during the 20th century. It seems to be a relation between the growth of education and the need of ever more acute educational studies. Structuralism has played an important role too. It introduced major changes in mathematics education and made didactics of mathematics an autonomous scientific field. In a second part we look how research work in this field considers mathematical contents and students activities. Constraints in using semiotic registers for building mathematical objects or concepts are specifically examined. We conclude with a survey of methods in use in didactics of mathematics.

Résumé. Dans une première partie, cet article analyse l'émergence de la didactique des mathématiques au cours du 20ème siècle. L'extension de l'enseignement semble être associé à un besoin d'études sans cesse plus précises. Le structuralisme a joué aussi un grand rôle. Il a introduit des changements importants dans l'enseignement mathématique et fait de la didactique des mathématiques un champ scientifique autonome. Dans une seconde partie, nous regardons comment la recherche dans ce champ envisage les contenus mathématiques et les activités des apprenants. On examine spécifiquement les contraintes dans l'usage des registres sémiotiques pour la construction d'objets ou concepts mathématiques. Un passage en revue de méthodes utilisées en didactique des mathématiques conclut cet article.

Mots-clés : Didactique des mathématiques, pédagogie, histoire, structuralisme, registres sémiotiques, changements de registres, représentations de nombres, contradictions.

Note préliminaire : Les participants au colloque Argentoratum 2002 s'étonneront peut-être de trouver ici un autre texte que celui qui leur avait été remis à cette occasion. Un article très proche de ce premier texte a en effet déjà été publié au premier trimestre 2003 (voir en fin de bibliographie) au sein d'un volume, coordonné par Alain Denis, intitulé *Didactique des mathématiques*. Le texte présenté ici résulte d'une rédaction entièrement nouvelle, hormis le §7 (présentant les programmes de travail en didactique des mathématiques), qui est repris du premier texte afin que les réactions des intervenants à la table ronde du colloque soient situées dans leur contexte. Le titre coïncide presque avec l'intitulé de la table ronde, qui était *Méthodes et résultats de la didactique des mathématiques*. J'ai simplement relativisé sa portée, pour que le lecteur ne confère pas à cet article un caractère trop fondamental ou généralisant, qui n'était pas recherché. Il s'agit simplement de faire un tour d'horizon, forcément incomplet malgré les efforts de l'auteur pour ne pas omettre d'aspect essentiel, sur ce qui s'est fait jusqu'à aujourd'hui en didactique des mathématiques et de réfléchir aux leçons à en retirer pour les travaux à venir dans ce domaine. En conformité avec les thèmes abordés

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 7 – 43.

lors de la table ronde, la vision présentée de la didactique des mathématiques s'attache essentiellement à repérer l'émergence de ce domaine au courant du vingtième siècle et elle est accompagnée de quelques hypothèses explicatives sur le pourquoi de telle ou telle des évolutions signalées. En fin de l'article précité, la conclusion contenait une remarque laconique à propos de rigueur dans la recherche en didactique des mathématiques : La présentation de quelques *fondamentaux* de la didactique des mathématiques permet de développer une telle remarque. Sur l'utilisation de cadres mathématiques et de registres d'expression, des précisions me paraissaient s'imposer, notamment suite aux échanges que j'ai pu avoir durant le colloque. Depuis lors d'ailleurs, des conversations avec Raymond Duval m'ont fait apercevoir l'intérêt possible de l'un ou l'autre développement supplémentaire, qui a été inclus. La bibliographie a été enrichie, mais je lui ai conservé son organisation chronologique, plutôt que par ordre alphabétique des noms d'auteurs.

1. Préambule

Si les réflexions sur l'enseignement des mathématiques sont sans doute aussi anciennes que les mathématiques elles-mêmes (penser par exemple au dialogue dans lequel Platon met en scène la maïeutique de Socrate), le développement d'un champ spécifique de recherches ayant explicitement l'enseignement des mathématiques pour objet est en revanche récent. A quelle date convient-il de situer une institutionnalisation de la didactique des mathématiques au sens qu'elle a aujourd'hui dans l'école française ainsi que dans nombre de pays ? La discussion peut porter sur une période de l'ordre d'une dizaine d'années : des années 1960, avec les réflexions de la commission Lichnérowicz et le lancement de programmes d'expérimentation pédagogique et d'Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, aux années 1970, avec la création de diplômes universitaires de troisième cycle de didactique des mathématiques. Nous venons de citer des événements qui se sont produits dans le cadre hexagonal, mais nous y revenons dans les paragraphes suivants, car les phénomènes considérés ont eu un aspect largement planétaire. Un regard sur les évolutions qui se sont dessinées depuis lors, sur les productions qui ont surgi, peut conduire à faire le point, plus encore sur des questions à étudier aujourd'hui, des sujets à discuter, des chantiers à lancer, que sur les idées désormais acquises, des faits à considérer comme établis.

2. Scolarité généralisée et didactique à partir du début du 20e siècle

Les mathématiques enseignées aux élèves à une époque donnée donnent déjà lieu à un certain nombre de disparités d'un pays à l'autre, sans parler des fluctuations au cours du temps. Et dans la formation des professeurs amenés à enseigner des mathématiques, on observe davantage encore de différences, dues aux spécificités des systèmes éducatifs, en particulier à leur recrutement d'enseignants et à leurs modes de désignation des responsables pédagogiques ou décideurs, tels les formateurs d'enseignants, inspecteurs, rédacteurs de programmes scolaires, auteurs de manuels, etc. Ces différences se sont traduites par l'existence dans certains pays d'institutions ou d'établissements n'ayant pas nécessairement leur pendant dans d'autres systèmes d'enseignement. Dans ceux qui comportaient des institutions supérieures chargées de la formation des enseignants avec des titres correspondants (exemple aux USA : *Ph.D. in mathematics education*), tels les Etats-Unis ou l'Allemagne, mais aussi du côté francophone la Belgique et la Suisse, le début du vingtième siècle vit déjà se publier des directives pédagogiques fondées sur des réflexions sur l'enseignement, englobant notamment celui des mathématiques. De nombreux écrits portent les traces de telles orientations, qui marquent évidemment ce qu'il convenait d'entendre par *didactique*.

Ainsi en langue allemande, le MEYERS Konversations-Lexikon, dont nous avons consulté la sixième édition en vingt volumes, datée de 1908, indique pour *didactique*[1] (nous traduisons ; le texte original allemand est en note) : *discipline ou science de l'enseignement, constituant la partie majeure de la pédagogie, laquelle englobe de plus la formation en science de l'éducation. La didactique apparaît pour partie comme didactique générale, qui développe les principes de base de l'enseignement à partir de fondements psychologiques, et pour partie comme didactique spécialisée ou méthodologie particulière, qui exploite ces principes de base dans les différentes disciplines d'enseignement*. Le mot *Didaktiker* (didacticien) y est même déjà mentionné, avec l'acception de *spécialiste ou enseignant de didactique* et accompagné d'une référence à l'ouvrage en deux volumes de Willmann, 1903, *Didaktik als Bildungslehre* (la didactique comme discipline de formation), Braunschweig, troisième édition. Notons qu'en allemand, le substantif féminin invariable *Didaktik* se distingue d'emblée de l'adjectif *didaktisch*. Dans la même langue allemande, une référence d'usage actuel est le dictionnaire WAHRIG, dont la première édition date de 1966, Verlagsgruppe Bettelsmann GMBH, et qui a été repris en 1975 puis 1980, Mosaik Verlag GMBH. Traduit en français, le sens qui est attribué à *Didaktik* est celui de *science de l'apprentissage et de l'enseignement, des contenus de la formation et de leur choix dans les progressions d'enseignement* et des termes comme *Unterrichtslehre, Unterrichtskunde*, auxquels correspond le mot français moins spécialisé *pédagogie*, en sont donnés comme des synonymes.

En France, la situation a été plus mouvante. La langue ne distingue d'ailleurs pas l'adjectif et le substantif *didactique*. Dans le Larousse Universel en deux volumes, édition de 1922, le substantif se trouvait présent et l'acception qui en était

---

[1] **Didáktik** (griech.), Unterrichtslehre oder Unterrichtswissenschaft, der eine Hauptteil der Pädagogik (s. d.), die außerdem noch die Lehre von der Erziehung umfaßt. Die D. ist teils allgemeine D., die auf psychologischer Grundlage die allgemeinen Grundsätze des Unterrichts entwickelt, teils besondere D. oder spezielle Methodik, welche die Anwendung dieser Grundsätze auf die einzelnen Unterrichtsfächer nachweist.

donnée était simplement *l'art d'enseigner*. Mais dans la première édition du Petit Robert, parue en 1967, l'article *didactique* ne mentionnait ce mot que comme adjectif, donc n'en faisait en particulier pas mention comme branche scientifique. Le contraste avec l'univers germanique est net. Mais dans l'édition revue, datée de 1993, le mot apparaît comme substantif, avec l'acception *théorie et méthode de l'enseignement ⇒ pédagogie*, accompagnée de l'exemple de la *didactique des langues*. Notons que dans une référence pourtant spécialisée, comme l'est l'ouvrage de Dimitri DEMNARD et Dominique FOURMENT, 1981, *Dictionnaire d'histoire de l'enseignement*, éd. J.P. Delarge, Paris, l'entrée *didactique* est tout simplement absente.

Si l'on élargit l'horizon du français à celui de la francophonie, on pourra au contraire y observer çà ou là des similitudes frappantes avec le point de vue allemand précédemment présenté Ainsi un ouvrage qui a fait date est celui de Raymond BUYSE, 1935, *L'expérimentation en pédagogie*. En guise de préface, l'entrée en matière de l'ouvrage est intitulée *Introduction à l'étude de la didactique expérimentale* ; il s'agit en fait, comme l'auteur finit par le signaler, d'un pastiche pédagogique de l'*Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*, ouvrage bien connu de Claude BERNARD. Les trois *parties fondamentales* que Raymond BUYSE distingue dans *la pédagogie scientifique* sont la *biologie*, la *psychologie* et la *didactique*. Pour cette dernière, qu'il verrait d'ailleurs bien désigner par le terme de *méthodologie*, il indique la distinction entre *didactique générale* et *didactique spéciale* (propre à une discipline d'enseignement). On ne peut manquer de remarquer la conformité avec la formulation précédemment extraite de l'encyclopédie allemande ; une telle convergence est pour nous à rattacher à des similitudes d'institutions de formation des enseignants dans beaucoup de pays européens, la situation française à cet égard constituant plutôt une exception. L'existence de telles institutions a amené dès le début du vingtième siècle la didactique à être l'objet d'une considération attentive, plus attentive sans doute qu'en France, sans pour autant apparaître comme une branche d'étude dotée de son autonomie.

C'est à propos de ce dernier point que va se créer la différence qui s'introduit au courant des années 1960-1970. Avant de la préciser, tentons de résumer la situation antérieure des réflexions sur l'enseignement, notamment celui des mathématiques.

Partout dans le monde, la *généralisation de la scolarisation* a en effet suscité le besoin de développer de telles réflexions. On peut dire qu'elles étaient plutôt dispersées en France[2], réparties entre psychologues, comme Alfred BINET (1857-1911) célèbre pour ses *tests d'intelligence*, pédagogues innovateurs tel Célestin FREINET (1896-1966) et spécialistes des mathématiques comme l'inspecteur général Emile BLUTEL, l'un des fondateurs de l'Association de Professeurs de Mathématiques en 1909 et propagateur de la *méthode de la redécouverte*. Au contraire elles étaient davantage concentrées dans d'autres pays, mais en s'appuyant en définitive sur les mêmes types d'apports fondamentaux relevant de champs disciplinaires différents :

- la psychologie avec une éventuelle spécialisation en psychopédagogie à l'instar du Genevois Edouard CLAPARÈDE (1873-1940), prédécesseur de Jean Piaget, et des expérimentateurs dont par exemple la revue américaine *Journal of Experimental Psychology* publiait des articles,
- la pédagogie, telle qu'elle se manifeste par exemple en Allemagne dans des ouvrages comme celui de W.A. LAY, 1910 (2e édition, la 1e édition datant de 1903), *Experimentelle Didaktik*, Leipzig, Nemnitz, ou telle qu'elle donnait lieu aux Etats-Unis dès les années 1920 à des études publiées dans la revue *Journal of Educational Research* et était largement marquée par l'autorité d'un John DEWEY (1859-1952), dont en particulier des aphorismes tels "*learning by doing*" ou "*education is life, school is society*" restent bien connus aujourd'hui.

Pour ce qui est des mathématiques, elles occupaient peut-être dans le contexte français une place un peu plus particulière et éminente que dans d'autres pays ; l'investissement dans l'enseignement consenti par certains mathématiciens confirmés avait pu contribuer à cette reconnaissance. Un exemple notable d'un tel investissement au niveau de l'enseignement du second degré (les collèges et lycées actuels) est constitué par la série des manuels de mathématiques rédigés par le mathématicien Emile BOREL (1871-1956). C'est le développement du contenu mathématique qui dicte alors les choix de présentation et non pas des considérations issues d'études sur son enseignement. En gros, l'auteur d'un manuel prend la responsabilité des réflexions théoriques (mathématiques) qu'il expose, considérant qu'ensuite intervient l'art de la pédagogie, lequel incombe entièrement à l'enseignant.

Dans des systèmes éducatifs s'appuyant sur des principes pédagogiques déclarés, les mathématiques tendaient à se présenter comme une discipline au même titre que d'autres. Ainsi sont rapportées de la même manière dans l'ouvrage déjà cité de Raymond BUYSE, 1935, des expérimentations faites sur certains acquis mathématiques, qui sont souvent de type opératoire algorithmique (les exercices

---

[2] Raymond Duval me signale qu'en France, la première chaire de *science de l'éducation* a été créée en 1896 et occupée par Ferdinand Buisson, mais qu'il faut attendre jusqu'en 1967 pour que l'on emploie institutionnellement l'expression *sciences de l'éducation*.

nommés *drills* en anglais, entraînement pour une exécution automatisée), que des observations concernant l'expression dans la langue maternelle des élèves. On ne fait donc pas de différence fondamentale dans l'enseignement élémentaire entre l'apprentissage de l'orthographe, de la grammaire ou du vocabulaire et celui de la bonne exécution des opérations arithmétiques ou du calcul fractionnaire par exemple. Si l'on songe par exemple aux traditionnelles acquisitions affichées pour la scolarité obligatoire, *savoir lire, écrire, compter*, les mathématiques sont présentes mais occupent simplement la troisième place de cette trilogie.

On s'est accordé néanmoins à conférer aux mathématiques une spécificité du point de vue des apprentissages. Cette spécificité d'ordre psycho-sociologique continuera à être évoquée alors même que l'enseignement mathématique prendra, sous une bannière de *mathématiques modernes*, un virage que nous étudierons. Ainsi William E. LAMON, éditeur de l'ouvrage collectif *Learning and the nature of mathematics*, 1972, écrivait-il en introduction[3] : *« Rare est l'enfant capable de mettre en jeu et de découvrir par lui-même des formules algébriques, alors que beaucoup d'enfants deviennent poètes en secret, sans aucune incitation extérieure ni aide autre que les choses du quotidien et des échanges verbaux. Le langage des mathématiques doit être appris ; sa pratique doit constamment être évaluée. »* A ce moment, on en reste pour les apprentissages à prendre appui sur des études de type psychologique et on ne se pose pas encore la question du pourquoi : Quelles particularités ce *langage des mathématiques* peut-il bien avoir pour *nécessiter* l'apprentissage ? La tentative d'apporter des réponses à cette question ne surgira que plus tard ; elle constituera précisément l'un des éléments conduisant à une certaine autonomie de la didactique des mathématiques. Nous y reviendrons.

3. Les structures et le virage des années 1960-1970

L'enseignement mathématique a vécu un mouvement d'ampleur planétaire avec les *mathématiques modernes*. Celles-ci se caractérisaient certes par l'attention portée à des objets d'études non considérés antérieurement, comme les ensembles, les relations et leurs propriétés ou les connecteurs logiques, mais surtout par la place essentielle dévolue aux structures. Cette place est attestée dans des ouvrages rédigés pour les enseignants et largement diffusés à l'époque, comme celui d'Irving ADLER, 1964, *Initiation à la mathématique d'aujourd'hui*, Paris, OCDL (traduit de l'anglais). L'extrait suivant présente cette *Mathématique*.

> *« Tout texte de mathématiques un peu avancées se hérisse aujoud'hui de termes tels que groupe, anneau, champ, homomorphisme, isomorphisme, et*

---

[3] It is the rare child who can go off and discover algebraic formulas on his own, while many children secretly become poets without any external push or any aid other than the stuff of everyday life and speech. The language of mathematics must be learned; its practice must be evaluated constantly. [Introduction, p. XIII, op. cit.]

homéomorphisme. Ces termes aux allures peu familières donnent à penser que les mathématiques ont abandonné leur ancien objet, et ne s'intéressent plus à l'étude des nombres et de l'espace. Ceci, évidemment, est faux. Les nombres et l'espace résident toujours au cœur même de la Mathématique. Les idées nouvelles sont nées avec une analyse plus pénétrante de leurs propriétés.
(...)
Le mathématicien voit l'ensemble numérique comme un complexe de ***structures*** *liées entre elles. Il étudie ces structures séparément, et aussi dans leurs relations les unes avec les autres. »* [op. cit. p. 12-13].

Vers la fin des années 1950, la référence aux structures avait imprégné de nombreux domaines des sciences humaines, notamment linguistique, psychologie, sociologie, anthropologie, économie, philosophie, histoire, sciences de la nature. La place de la linguistique en début de liste tient à ce que l'on s'accorde souvent à lui conférer un rôle moteur dans le structuralisme ; dès les années 1920, le cercle linguistique de Prague publiait ses réflexions, mûries à partir du *Cours de linguistique générale* de Ferdinand de SAUSSURE, paru en 1916.

La place particulière des mathématiques dans un tel mouvement tient sans doute à ce qu'elles sont la discipline qui a précisément en charge l'étude en soi des structures. Lorsque les spécialistes d'autres disciplines tombent sur des objets ou des propriétés que les mathématiques ont déjà mises en forme (ou permettent de mettre en forme), ils éprouvent une impression de rassurante solidité. Faire jouer les propriétés mathématiques peut aussi les intéresser, en faisant apparaître tel ou tel développement ou résultat auxquels on aurait pu ne pas songer. Un exemple connu est celui de Jean PIAGET avec le *groupe INRC de Piaget*, lequel est tout simplement isomorphe au groupe des isométries laissant globalement invariant un système de trois droites de l'espace supports d'un repère orthonormé.

Il y eut donc une convergence remarquable d'opinions favorables à la présentation, dès l'enseignement élémentaire, des mathématiques à partir des idées de structures. L'ouvrage collectif déjà cité, *Learning and the nature of mathematics*, réunit les signatures, entre autres, de Jean DIEUDONNÉ, Zoltan DIENES, Hans FREUDENTHAL, Robert GAGNÉ, Jean PIAGET. Aux deux extrémités de cette liste figurent deux éminentes personnalités qui ont soumis leurs vues de spécialistes (respectivement mathématicien et psychologue clinicien) aux pédagogues, sans s'avancer directement sur le terrain de l'enseignement. Au contraire, Zoltan DIENES, Hans FREUDENTHAL et Robert GAGNÉ sont intervenus sur ce terrain, en envisageant explicitement des problèmes signalés dans le système éducatif et en avançant des hypothèses ou des propositions. Notons que les linguistes sont absents de l'ouvrage cité. Il y a peut-être là un phénomène d'école : Il nous semble que l'apport possible des linguistes pour l'étude de questions touchant à l'enseignement mathématique était davantage considéré à l'époque en

Union-Soviétique ou dans le monde francophone, en particulier en Suisse où PIAGET bénéficiait de collaborations de linguistes, qu'aux Etats-Unis. Pour être précis, notons que, sans que des linguistes soient sollicités, il y avait néanmoins émergence aux USA de ce type de préoccupations : La traduction en langue anglaise[4] de l'ouvrage de VYGOTSKY, sous le titre de *Thought and Language*, a par exemple été publiée en 1962, l'édition russe originale datant de 1934.

Quelles étaient à l'époque les positions vis-à-vis de la mise en œuvre de ces *mathématiques modernes* dans l'enseignement ? Il y avait évidemment des **sceptiques**, souvent peu concernés eux-mêmes directement, qui contemplaient ce mouvement dans l'enseignement mathématique avec une certaine condescendance. Leur opinion pourrait être ainsi résumée : «Toute cette agitation ne rime pas à grand chose, de toute façon les mathématiques de l'école sont et resteront à des années-lumières de celles que pratiquent les mathématiciens. » De l'autre côté, c'est à dire parmi ceux qui se déclaraient partisans de changements, il n'y avait pas unanimité d'opinions. Les **enthousiastes** étaient persuadés que *la Mathématique* dans l'enseignement allait provoquer des changements bénéfiques : démocratisation, acquisition d'autonomie, meilleure compréhension amenant une diminution générale des difficultés à saisir les concepts et les pratiques mathématiques, meilleure préparation aux études supérieures. Le changement devant aussi porter sur les méthodes d'enseignement, désormais moins dirigées vers l'acquisition de recettes que de méthodes de travail et de recherche, la condition de son succès était la mise en place d'actions en direction des professeurs en exercice et des parents d'élèves, notamment afin de bien expliquer les principes et les démarches de ces *mathématiques modernes*. Au contraire, les **prudents** estimaient que de réels changements de méthode ne peuvent pas résulter de changements de contenus d'enseignement, en l'absence d'études spécifiques.

Quoi qu'il en soit, une réflexion sur l'enseignement des mathématiques s'imposait, ne serait-ce que pour mettre au point de nouveaux programmes scolaires, de nouvelles activités. Au besoin habituel de manuels scolaires s'ajoutait celui d'ouvrages destinés aux enseignants et d'ouvrages tout public. Et le nombre et les spécialités des personnalités impliquées par l'enseignement mathématique étaient accrus.

4. Généralisation de l'accès aux études secondaires et didactique des mathématiques

4.1. Une demande institutionnelle renouvelée

Parallèlement au mouvement des idées, un phénomène d'augmentation des publics concernés par les études secondaires amenait une demande d'ordre

[4] Une traduction française de Vygotski, plus complète que l'anglaise, a été publiée en 1985.

sociologique, comparable à celle qui avait résulté de la scolarité généralisée au début du vingtième siècle. Les systèmes éducatifs était intéressés par des études qui puissent être utilisables au moment d'envisager les problèmes liés à la massification de l'enseignement du second degré (en France, il s'agissait du *collège pour tous*). Or, par rapport à l'école primaire, l'enseignement du second degré se démarque par la spécialisation des professeurs dans une discipline d'enseignement. Un déplacement ou plus précisément un élargissement de la commande institutionnelle, va en résulter : Il ne s'agit plus seulement de s'intéresser à la pédagogie, mais aux problèmes spécifiques à l'enseignement d'une discipline. Après ce qui vient d'être dit concernant le mouvement en mathématiques, on comprend que cette discipline d'enseignement ait alors pu être l'objet d'une particulière attention.

4.2. Emergence de réflexions originales

Un ouvrage qui fut largement diffusé en France auprès des enseignants de mathématiques est celui de FLETCHER, 1966, sous l'intitulé de *Didactique*. Il s'agit de la traduction française de textes rédigés par une vingtaine de professeurs britanniques et édités par T.J. FLETCHER sous le titre *Some lessons in mathematics*, publié en 1962 par Cambridge University Press (Londres). Dans son introduction (op. cit. p. 13), FLETCHER pointe dans une même phrase les deux phénomènes que nous avons signalés :

« (...) l'esprit des mathématiques a changé et enfin on s'adresse à un public de plus en plus vaste alors que ces notions étaient réservées autrefois à une élite. »

La version française est préfacée par André REVUZ, l'un des fondateurs des IREM avec Jean FRENKEL à Strasbourg et Maurice GLAYMAN à Lyon. Cette préface (op. cit. p. 11-12) aborde elle-aussi l'élargissement de la diffusion des mathématiques dans un alinéa, lequel est ainsi conclu :

« (...) Etude et mathématisation d'une situation, c'est ce que l'on veut faire dans ce livre. Le mot situation a été introduit en pédagogie par Caleb Gattegno et l'idée qu'il exprime est à coup sûr extrêmement féconde, mais le mot risque de devenir la tarte à la crème de la pédagogie nouvelle et d'être utilisé sans que l'on comprenne son contenu. »

Sans en avoir conscience, étant donné qu'il parle uniquement de pédagogie, l'auteur situe un virage qui va être pris par la didactique des mathématiques, sans doute mieux d'ailleurs que ce qu'il redoutait. Une partie importante des travaux de Guy BROUSSEAU sera consacrée à l'étude des situations. Nous y reviendrons. L'auteur souligne aussi au passage un risque d'usage incontrôlé, que nous envisageons dans le paragraphe sur les *fondamentaux* de la didactique des mathématiques.

A l'époque, rares étaient toutefois les esprits suffisamment lucides, même parmi les *prudents* dont nous avons précédemment parlé, pour analyser les besoins qui pouvaient résulter du mouvement introduit dans l'enseignement des mathématiques, incluant sa démocratisation. L'un des plus pénétrants fut sans doute Hans FREUDENTHAL, qui écrivait dès 1963 dans la revue l'Enseignement Mathématique (voir FREUDENTHAL, 1963, p. 29 et p.31) :

« Dans ces dernières années, l'accent s'est porté sur les programmes. C'est inquiétant cette activité des programmeurs. A maintes reprises, j'ai insisté sur les recherches franchement didactiques. Il est vrai que jusqu'alors, le résultat de mes efforts est assez maigre(...) Si l'on adopte l'idée de l'apprentissage de l'invention, la matière qui doit être analysée, avant qu'on ne construise un système d'enseignement, n'est plus la matière à enseigner, mais le processus d'invention de cette matière. »

Dans les propos de FREUDENTHAL, qui parle par ailleurs de *didactique*, terme employé comme substantif pour référer à la façon d'enseigner, on notera la présence de l'expression *recherches didactiques*, qui pointe en fait un domaine spécifique. Le développement de ces recherches qu'il souhaitait devait toutefois attendre que l'on ait tiré du structuralisme un parti supplémentaire : Un champ d'études peut avoir une spécificité sans nécessairement qu'il amène à s'intéresser à des objets qui lui soient propres, mais simplement en raison de la particularité des systèmes qu'il conduit à envisager. Par conséquent <u>la didactique des mathématiques peut constituer un champ d'étude spécifique</u>.

4.3. Mise en place de la didactique des mathématiques

Nous avions cité bien évidemment Guy BROUSSEAU à propos de situations. Mais tous ses travaux relèvent de l'assertion que la didactique constitue un champ spécifique. Peut-être déborde-t-il çà ou là des mathématiques (le *contrat didactique* par exemple n'est pas propre à l'enseignement des mathématiques), mais cela n'est-il pas imputable au cadre principal de ses recherches : l'enseignement du premier degré ? Cela remet-il en cause l'intitulé du présent paragraphe, mentionnant l'enseignement du second degré ? Nous ne le pensons pas : Si le moteur des recherches résulte bien pour nous des problèmes dans l'enseignement du second degré, la compréhension des phénomènes en jeu obligeait néanmoins à ne pas se contenter d'études à ce niveau, mais à remonter aux premiers apprentissages mathématiques L'école Jules Michelet, pour laquelle Guy BROUSSEAU avait réussi à obtenir un statut expérimental, constituait un terrain d'observation certes riche, mais très prenant, au détriment certainement de rédactions détaillées qui devaient n'être couchées sur le papier que plus tard. C'est ainsi que le premier fascicule de formation des maîtres rédigé par Guy BROUSSEAU (voir BROUSSEAU, 1970) sous le titre de *Mathématiques pour l'enseignement élémentaire* comporte dans sa table des matières un chapitre 21 à l'intitulé prometteur, *Didactique et pédagogie des mathématiques*, mais la rédaction du-dit fascicule s'achève à la fin du chapitre 20.

Le bulletin de l'APMEP (voir BROUSSEAU, 1972) a publié un peu plus tard sous forme d'article ce chapitre 20, *Processus de mathématisation*. Mais il faut consulter un document de 1975 (voir *L'analyse de la didactique des mathématiques*, communications d'un colloque Inter-IREM, 1975) pour que l'on puisse lire ce qu'annonçait le chapitre 21. Il s'agit de la communication numéro 3 : *Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?* Une lecture rapide de cette communication pourrait faire penser à une définition circulaire, car elle recourt au terme didactique qu'il s'agit de définir, mais il y a là en réalité une conséquence de la même polysémie signalée précédemment à propos de FREUDENTHAL. En faisant simplement disparaître cette ambiguïté, nous obtenons dans cette communication la définition de la didactique des mathématiques comme une *réflexion sur la finalité de l'enseignement, sur la nature du savoir visé, sur les méthodes d'acquisitions spécifiques aux enseignés, sur les objectifs et sur les conditions particulières, théoriques et pratiques, des activités pédagogiques dans l'enseignement de la discipline*. C'est certes quelque peu étiré (et encore, nous avons extrait ce passage d'un texte plus développé, car Guy BROUSSEAU souhaitait pointer aussi précisément que possible tout ce à quoi le didacticien devait prêter attention), mais une remarque ultérieure constitue en définitive une formulation alternative beaucoup plus concise. Nous la citons en nous contentant d'ajouter entre crochets, pour la compréhension, une précision extraite de la phrase précédente : *L'étude des relations [que l'on utilise pour fonder les choix et les décisions d'enseignement] est l'objet fondamental de la didactique en tant que discipline.*

Même un terminologue exigeant ne rejetterait pas une telle définition d'une discipline par ses objets d'étude. Il convient pour nous de la particulariser au cas de l'enseignement des mathématiques, moyennant quoi elle reste d'actualité. Une conséquence essentielle à tirer du structuralisme est que la didactique des mathématiques apparaît comme une discipline (ou une spécialité, si l'on veut être plus modeste) dotée d'autonomie, dès lors qu'il y a un système éducatif, avec des établissements et des classes (même virtuelles dans l'enseignement à distance) où l'on enseigne les mathématiques. Certes elle n'indique pas ce qu'il convient de prendre en compte, au contraire de la formulation précédente ou de celle qu'Alain BOUVIER a présentée (voir BOUVIER, 1992) : « *La didactique des mathématiques prend en considération les élèves, l'enseignant, les institutions et la discipline dans une situation où l'enseignant a, vis à vis des élèves, l'intention d'enseigner cette discipline.* » Pour ce qui est des méthodes, de l'ingénierie de la didactique des mathématiques, aucune de ces définitions ne fournit de précisions. De même, la nécessité de la prise en compte par la didactique des mathématiques de domaines mathématiques, psychologiques, linguistiques, sociologiques reste à préciser. Nous y reviendrons. Aujourd'hui en tout cas, il y a eu suffisamment de travaux en didactique des mathématiques pour qu'une définition très simple suffise.

Définition. La *didactique des mathématiques* est la discipline qui étudie l'enseignement des mathématiques.

Tout l'arrière-plan évoqué précédemment, qui devait être explicité à une époque de fondation, avec notamment la nécessité de se démarquer de nombreuses études dirigées vers des phénomènes intéressant cet enseignement, mais ne l'ayant pas directement comme objet, s'impose avec maintenant le support des nombreuses recherches publiées ces dernières décennies. Les articles de revues, comme Educational Studies in Mathematics ou Recherches en Didactique des Mathématiques, portent pour l'essentiel sur la didactique des mathématiques. Cela n'empêche pas que des précisions, par exemple méthodologiques, soient toujours de quelque utilité et c'est pourquoi nous leur consacrons plus avant un paragraphe.

4.4. Recherches engagées au niveau du collège

La discussion précédente laisse de côté une question assez naturelle : Si la demande socio-politique de réfléchir à l'enseignement des mathématiques est à relier à une généralisation de l'enseignement du second degré (le collège pour tous), qu'a-t-on fait en réponse à cette demande ? L'orientation forte des réflexions des IREM en direction du collège est une réponse, de même que le lancement en France d'opérations d'évaluation à ce niveau, dont certaines institutionnelles perdurent à l'échelle nationale – les évaluations CE2 – 6e –, mais il y a eu aussi un effort important d'équipes de recherches qui se sont mises en place avec des projets d'études didactiques.

Ce fut le cas pour l'équipe de Strasbourg, dont le lecteur ne m'en voudra pas de dire quelques mots, pour lesquels je fais effort d'objectivité dans la mesure où mon implication personnelle intervient. L'intérêt précis pour l'heuristique du mathématicien Georges GLAESER, la présence dans l'équipe du psychologue Raymond DUVAL, pour référer à leurs "étiquettes" de recrutement, amenaient très naturellement l'équipe à s'intéresser de près aux comportements des élèves lors d'une activité mathématique en situation scolaire. En plus des raisons précédemment évoquées, le collège nous paraissait constituer un secteur dans lequel des investigations s'imposaient pour des raisons scientifiques.

- Si la grande majorité de la population est *alphabétisée* et disons *numérisée*, il n'en est pas de même pour l'*algébrisation* (et des articles du volume 8 des Annales, consacré avec ce volume 9 aux communications du colloque Argentoratum 2002, montrent que les études se poursuivent actuellement sur cette question complexe),
- la *démonstration* mathématique, du point de vue de son enseignement, méritait un examen attentif. Georges GLAESER exprimait le souhait que tout élève puisse dans sa scolarité avoir l'occasion de vivre *son* miracle grec. Il ne s'agit pas en effet d'un acquis conceptuel au même titre que les

notions de fraction ou de parallélogramme, pour ne citer que ces deux exemples.

Or aussi bien l'emploi de l'algèbre que la présentation de démonstrations formalisées apparaissent normalement au niveau du collège. Certes, comme des études didactiques l'ont d'ailleurs montré (nous pensons par exemple aux recherches de Régine DOUADY, voir par exemple DOUADY, 1987), le raisonnement intervient plus précocement dans l'enseignement, de même que des désignations de valeurs par des lettres. Mais nous faisons ici référence à des apprentissages qui puissent être considérés comme à mettre en place pour une grande partie des élèves et pour ceux-là, c'est bien le niveau du collège, lors duquel les élèves traversent notamment les changements de la puberté, qui apparaît bien approprié.

Non sans tourner à l'occasion les regards en amont (l'école) ou en aval (le lycée), l'équipe strasbourgeoise avait donc décidé d'entreprendre des recherches sur l'enseignement des mathématiques au collège. Le programme de travail était très standard :

- des séances régulières de séminaire,
- des observations empiriques dans des classes,
- une investigation plus contrôlée, avec un appui sur des questionnaires d'évaluation.

Le séminaire était orienté d'une part sur l'étude d'ouvrages ou publications qui semblaient dignes d'intérêt à l'équipe, d'autre part sur le compte-rendu de travaux en cours. Les observations en classe étaient faites régulièrement dans les mêmes classes, avec l'accord des professeurs concernés, qui bénéficiaient de la préparation d'un certain nombre d'activités en échange de la présence d'observateurs ; autrement dit, observateurs et professeurs avaient un intérêt commun à voir comment les élèves allaient réagir aux activités préparées. Il n'y avait pas pour autant de statut expérimental qui ait été sollicité auprès de l'administration, seule l'autorisation de se rendre dans des classes était accordée à quelques observateurs désignés. Et ces classes se déroulaient en conformité avec les programmes de mathématiques en vigueur, sans dérogation particulière. D'une part, il convient de rappeler la multiplicité au collège des disciplines d'enseignement autres que les mathématiques, d'autre part, il paraissait important à l'équipe de recueillir des observations dans un environnement scolaire aussi "habituel" que possible, tout en sachant que la présence d'observateurs introduit forcément des perturbations (d'ailleurs plutôt bénéfiques pour les élèves concernés). Quant aux évaluations, je me rends compte aujourd'hui, avec le recul, qu'elles relevaient d'une catégorie qui n'apparaît pas dans le gros traité sur l'évaluation[5] élaboré par BLOOM, HASTINGS et

[5] BLOOM Benjamin S, HASTINGS J. Thomas, MADAUS George F, 1971, *Handbook on formative and summative evaluation of student learning,* New York, Mc Graw Hill Book co.

MADAUS : il ne s'agissait en effet ni d'évaluation *formative*, ni d'évaluation *sommative* (du type examen), mais d'une évaluation qui peut être qualifiée de *descriptive*. A l'époque, nous parlions d'*enquêtes* ; le terme est parfaitement approprié mais il recouvre un éventail de pratiques très diverses dont certaines sans rapport avec nos centres d'intérêt.

En songeant aux *statistiques descriptive*s, nous estimons justifié de parler d'*évaluation descriptive*. De même que les premières se proposent de dégager les grandes tendances observables dans un corpus et au contraire les cas qui semblent singuliers, de même les évaluations que nous élaborions et analysions étaient destinées à permettre de repérer les *démarches de réponse* mises en œuvre pour certains traitements mathématiques, autant les démarches communes à beaucoup d'élèves que celles qui peuvent présenter des singularités. Notons qu'en remplissant une telle condition, une évaluation apparaît véritablement comme un instrument dans une recherche de didactique des mathématiques. La bibliographie indique un article de Raymond DUVAL et moi-même, 1976 ; on y trouve des notes sur le type d'évaluations descriptives pratiquées et les traitements mis en œuvre.

La présentation des travaux conduits à Strasbourg est à voir comme un exemple d'illustration, car nombreux furent les centres où se développèrent des recherches poursuivant des objectifs comparables. Rien que dans le cadre français, nous pouvons citer en particulier Grenoble, où une partie notable des réflexions de Colette LABORDE (voir en bibliographie LABORDE, 1982) s'est dirigée vers le collège, Paris, avec, exemple pris parmi bien d'autres, des réflexions sur l'articulation école-collège dont certaines soutenues par l'INRP, et Rennes, avec notamment les travaux de Régis GRAS qui contribuèrent à la mise au point du logiciel de traitement d'évaluations CHIC[6].

5. Quelques fondamentaux de la didactique des mathématiques

Un survol de publications récentes de didactique des mathématiques, non pas tant du point de vue de leurs objectifs et résultats mais seulement des modalités d'action, permet de dégager ce que l'on peut appeler des *fondamentaux*. Par ce terme il convient d'entendre les règles et pratiques à mettre en œuvre dans une recherche, quels que soient son sujet et sa problématique propre. Il est intéressant de les répertorier, afin de pointer un certain nombre de *routines* utiles au chercheur. Le chercheur, l'équipe ou le groupe qui entreprend une étude ou une expérimentation s'interroge évidemment au premier chef sur les sujets qui lui paraissent constituer le cœur de ses préoccupations. Et c'est bien ce qu'il convient de faire. Mais une recherche effective en didactique des mathématiques comporte nécessairement des aspects contingents, liés précisément à l'objet même de la discipline. Disposer de *routines* limite les obligations d'improviser lors du

[6] Voir un descriptif de ce logiciel à l'adresse URL http://www.ardm.asso.fr/CHIC.html.

déroulement d'une recherche, permet des prises de décisions qui ne risquent pas d'empêcher des analyses projetées ou d'invalider des conclusions à dégager. Nous essayons de dégager un lot de questions qu'il vaut la peine pour un didacticien ou une équipe de se poser, afin de faciliter l'élaboration de son agenda et la sélection de ses routines de travail.

5.1. Domaines connexes

Rencontre-t-on dans d'autres disciplines des concepts ou des résultats dont une réflexion que l'on engage pourrait profiter ?

Il est évident qu'autonomie n'est pas isolement. Dans les observations résultant d'une recherche en didactique des mathématiques, tout lien avec ce qui est établi dans d'autres domaines est en premier lieu à rechercher, ensuite à exploiter. Cela impose au didacticien de se tenir au courant des résultats publiés dans d'autres disciplines, en rapport de près ou de loin avec ses propres préoccupations. On pense au premier chef aux mathématiques, la discipline d'enseignement étudiée, et à la psychologie, dont le fonctionnement intellectuel des individus et son évolution s'inscrivent dans les objets d'étude. Mais les disciplines qui s'intéressent aux moyens d'expression sont tout aussi importantes. Dès le début de ses réflexions, quelqu'un comme Guy BROUSSEAU était de ceux qui avaient pris conscience de cette importance. Voici par exemple un extrait du premier chapitre du fascicule BROUSSEAU, 1970, rencontré au troisième paragraphe, après des paragraphes sur l'*importance du signe* et la *désignation* :

« Langages. Pour faire des mathématiques nous utiliserons et étudierons plus *ou moins trois langages :*

- *L'écriture de la langue usuelle. Les signifiants sont des mots ou des phrases. Ils sont obtenus par un assemblage de signes typographiques : les lettres,*
- *l'écriture mathématique formalisée. Une théorie mathématique utilise des signes graphiques, des lettres, des signes particuliers ($\in$, $=$, $+$) et des assemblages de signes simples. Ces signes et ces assemblages sont dénués de sens a priori, mais ils peuvent recevoir éventuellement une signification ou une autre suivant les situations dans lesquelles on veut appliquer la théorie,*
- *le langage schématique, figuratif ou non. Les signes graphiques élémentaires (des points colorés par exemple) sont groupés en configurations, elles-mêmes assemblées pour former des images qui peuvent avoir une signification. »*

De cette présentation, que les études réalisées depuis lors sur les registres d'expression amènent à conforter tout en la précisant, il ressort que le didacticien ne pourra pas être ignorant de domaines de linguistique et de sémiologie, notamment la graphique. (Dans un article de l'Encyclopedia Universalis intitulé

Graphique, Jacques BERTIN précise les variables visuelles à prendre en compte pour la représentation de variables suivant la nature de celles-ci : nominales, ordonnées ou quantitatives.) Récemment à propos de l'enseignement à distance, ou *e-Learning*[7], j'ai eu pour ma part à connaître de préoccupations en matière de terminologie (en français et anglais) relative à ce domaine.

5.2. Importations

Comment s'adresserait-on aux auteurs ou aux spécialistes d'une discipline pour justifier l'utilisation en didactique des mathématiques d'un de leurs concepts ou résultats ?

Lorsque des notions d'autres disciplines apparaissent utiles pour une étude de didactique des mathématiques, il importe de réfléchir à leur particularisation à l'enseignement des mathématiques, voire leur détournement. Considérons à titre d'exemple la notion d'*obstacle* telle qu'elle ressort des études de Gaston BACHELARD (BACHELARD, 1938). Cette notion résulte de considérations sur des expériences physiques. Le philosophe n'a d'ailleurs que peu envisagé les mathématiques, hormis dans son premier ouvrage couronné par l'Institut[8]. On peut certes voir intervenir le champ physique en didactique des mathématiques (voir par exemple la communication de Robert ADJIAGE dans le volume 8 de ces Annales), mais comme une composante parmi d'autres dans la construction d'un concept mathématique. Le problème de la *connaissance objective* se pose d'ailleurs pour les concepts mathématiques et doit donc être envisagé, implicitement ou explicitement, si l'on souhaite faire intervenir la notion d'obstacle en didactique des mathématiques ; on notera que par exemple en parlant d'*ostensifs*, Yves CHEVALLARD aborde un tel sujet, qui est par ailleurs développé dans le point de vue des registres Ainsi dans un exemple récemment paru, présentant un dialogue entre des élèves à propos d'une question de limite (voir BALACHEFF, 2002, p. 11-13, consultable sur Internet), Nicolas BALACHEFF analyse un type de conflits inter-registres qui peuvent surgir lors d'une activité mathématique et sur lesquels nous reviendrons dans le §6.5.

D'autres importations sont encore plus délicates, car elles portent sur des notions pluridisciplinaires, comme c'est par exemple le cas pour des concepts de logique. Là une discussion doit être engagée sous peine de confusions sans fin. Dans une discussion disons sur l'implication, le didacticien devra au moins sommairement confronter le point de vue de la logique (des propositions ou des prédicats) avec celui de psychologues et de linguistes (voir DUCROT, 1972). Entre une assertion courante comme *"Pour aller à New York, il suffit de 200 €"* et un théorème tel que *"Pour qu'une fonction f continue sur l'intervalle [a, b] s'annule*

[7] Consulter par exemple le site http://www.internettime.com/Learning/Eglossary.htm.

[8] Gaston BACHELARD, 1928, *Essai sur la connaissance approchée*, Paris, Vrin.

en un point de]a, b[, il suffit que f(a)f(b) < 0", il y a tout un monde et c'est ce monde qui est pris en compte par exemple dans la communication de Janine et Marc ROGALSKI, dans ce même volume des Annales.

5.3. *Consommation* de didactique des mathématiques

Quelles sont les contraintes, les conditions d'emploi, d'une méthode ou d'un résultat de didactique des mathématiques que l'on souhaite utiliser ?

Pour des importations, nous venons d'envisager la nécessité d'adapter ; une telle nécessité vous place *ipso facto* en situation de production. A l'intérieur de la discipline, une telle obligation ne s'impose pas à tout coup ; on peut référer directement à tel résultat ou telle méthode, ce qui correspond à une situation de consommation, celle d'un savoir antérieurement produit. Le cas n'est évidemment pas propre à la didactique des mathématiques. En mathématiques par exemple, on n'arrête pas d'utiliser des théorèmes établis. Il y a toutefois alors une règle d'emploi explicite, qui est de préciser que les hypothèses d'un théorème utilisé s'appliquent. Pour la didactique des mathématiques, il n'y a pas un garde-fou aussi solide, ce qui peut engendrer des risques de dérive ou même d'inconsistance. C'est un tel risque que craignait déjà André REVUZ (voir supra § 4) à propos des situations, mais les précisions théoriques apportées ensuite sur le sujet ont heureusement rendu ces craintes infondées. A propos de contrat didactique, de jeu de cadres, de registres de représentation, le lecteur pourra rencontrer çà ou là des emplois à la légère. Pour les deux derniers indiqués en particulier, les conséquences peuvent en être gênantes, dans la mesure où des élèves qui n'en peuvent mais risquent de se trouver embarqués dans des pratiques d'enseignement inefficaces ou mêmes nuisibles pour les apprentissages visés. Or si une déontologie doit comporter au premier chef de respecter des élèves, c'est bien celle du didacticien. Plus avant dans cet article, nous revenons sur le cas des représentations.

5.4. Ingénierie

Quelles phases distinguer et quels moyens envisager pour un projet d'expérimentation, de recherche ? Penser l'ingénierie de bout en bout dès le départ permet d'éviter bien des impasses ou des travaux inachevés. Un article (voir ARTIGUE, 1987) de Michèle ARTIGUE traite explicitement de l'ingénierie. Son propos déclaré est l'expérimentation dans des classes, mais il peut également être consulté au service d'autres formes de recherche. Ainsi la réflexion épistémologique à entreprendre sur le sujet d'une recherche est de toute première importance indépendamment de sa méthodologie. Et plusieurs formes de recherche nous semblent avoir leur place en didactique des mathématiques. L'une d'entre elles a été à l'origine de plusieurs des communications du colloque Argentoratum rapportées dans ce volume des Annales ou dans le volume précédent. Il s'agit de l'expérimentation ou observation *parallèle* au déroulement d'un enseignement : Un ou plusieurs élèves, éventuellement regroupés en binômes, sont spécifiquement suivis ou se voient proposer des activités propres, sans cesser pour autant d'appartenir à une *cohorte* d'apprenants qui suivent un enseignement déterminé. Les objectifs d'une telle approche peuvent être variés, aussi bien préciser un processus d'enseignement – apprentissage en cours (voir les indications données par Moncef ZAKI dans ce volume sur des travaux conduits à Fès) que réfléchir à des aides individuelles (voir par exemple l'article de Florence FAUVET dans le volume 8). Outre ces recherches parallèles à un enseignement, signalons l'investigation *a posteriori*, que par exemple la communication de Jean-Claude RAUSCHER dans ce volume illustre et dont on comprend l'intérêt notamment en formation des professeurs.

Le choix des outils d'analyse à employer fait également partie de l'ingénierie. Leur adéquation à la nature des données recueillies est primordiale. À côté des moyens de traitement généraux (pour l'analyse du discours, l'analyse de données, etc.) il existe des outils spécifiquement conçus pour des recherches didactiques, comme le logiciel CHIC déjà cité en fin du §4. Parmi les communications du colloque Argentoratum, les articles de Athanasios GAGATSIS, M. SHIAKALLI et A. PANAOURA dans le volume 8 et de Saddo AG ALMOULOUD dans ce volume 9 s'appuient sur des travaux pour lesquels ce logiciel a été utilisé.

5.5. Intérêt des participants

Pour chacune des personnes (élèves et/ou professeurs) impliquées dans un projet de recherche, a-t-on veillé à l'intérêt qu'elle peut y trouver ? L'ingénierie dont il était question précédemment prend en compte l'idée qu'un observateur perturbe forcément le phénomène qu'il observe. L'expérience montre d'ailleurs que nombre de recherches fructueuses en didactique des mathématiques ont été le fait de binômes chercheur – enseignant. Chacun des deux membres d'une telle équipe y a trouvé son intérêt. Même lorsqu'une recherche n'amène pas une coopération aussi régulière, le didacticien bénéficiera de conditions d'autant meilleures que le ou les enseignants impliqués auront un intérêt à prêter leur concours. Cet intérêt peut être effectif, sous la forme par exemple d'un certain allègement dans la charge habituelle de travail (préparations, enseignements ou corrections) grâce à l'ingénierie mise en œuvre, ou purement intellectuel, sous la forme de retours à même d'enrichir le savoir professionnel. A leur niveau d'engagement, simplement personnel, il en est de même des élèves impliqués. Il est par exemple frustrant pour eux de fournir des réponses écrites et de ne rien savoir ensuite de leur devenir. Certains chercheurs pratiquent une double correction dans ce but : un relevé simple des réponses considérées comme exactes pour retour aux élèves interrogés, un relevé détaillé pour les analyses effectuées pour la recherche.

6. Regards didactiques sur la présentation de contenus mathématiques

Dans un scénario d'enseignement, la désignation des contenus mathématiques en jeu tient, si l'on peut dire, un des premiers rôles par ordre d'entrée en scène aux yeux de l'enseignant ou du didacticien. C'est à sa suite que les options pédagogiques du professeur et les réactions d'élèves occupent le devant de la scène. Et le fait d'envisager des contenus mathématiques pour l'enseignement conduit à les éclairer en quelque sorte de différentes manières en les plaçant sous différents projecteurs. L'éclairage épistémologique est certainement parmi les premiers qu'il convient d'envisager. Il est clair que pour des propositions d'enseignement touchant à un concept mathématique, il importe de connaître ce qui a pu amener la communauté mathématique ou plus généralement scientifique à l'introduire ou le développer.

L'analyse en termes de registres de représentation, intervenant à propos d'acquisitions conceptuelles ou dans la catégorisation de traitements d'énoncés, fournit un autre de ces éclairages. A la voir toute faite sur un exemple approprié, convenablement traité, elle paraît simple. Mais elle est plus exigeante qu'on ne l'imagine souvent. Le modèle cognitif de la représentation d'un objet ou d'un concept mathématique que Raymond DUVAL propose (cf. DUVAL, 1995, p. 67) résulte de l'interaction d'au moins deux registres sémiotiques. L'erreur didactique serait alors d'inférer que ce modèle s'applique dès lors qu'un même objet apparaît dans deux registres sémiotiques différents, en omettant de vérifier les contraintes dues à la *fonction d'objectivation* (expression de Raymond DUVAL) attendue du modèle. Tant le fonctionnement séparé des registres sémiotiques considérés que les conversions entre ces registres sont concernés.

6.1. Objectivation par des registres de représentation différents ?

Pour un modèle *opératoire* de la représentation, Raymond DUVAL présente un schéma (cf. DUVAL, 1995, p. 65), adapté de F. BRESSON, centré sur la *fonction de traitement*. Ce schéma met côte à côte un dispostif matériel avec son protocole d'utilisation et une maquette, c'est à dire sa représentation et les traitements auxquels on peut la soumettre. L'article de Raymond DUVAL présenté dans le volume 8 de ces Annales (cf. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 2003) envisage la désignation et la visualisation, lesquelles fonctionnent souvent selon ce dernier schéma. Dans ce même volume 8 des Annales, Robert ADJIAGE rapporte de son côté une expérience d'introduction des nombres rationnels, qui s'appuie sur la séparation et l'articulation du champ physique et du champ mathématique. Dans une première phase, par exemple à propos d'un problème de mélange, on attend des élèves qu'ils se représentent l'expérience physique (de la réalisation du mélange jusqu'au contrôle par exemple de sa saveur s'il s'agit d'une boisson). Il y aura donc une activité de désignation ou de visualisation, fonctionnant selon un schéma centré sur la fonction de traitement. Il en était de même, jusqu'à la phase de formulation, dans une expérience à l'école que Guy BROUSSEAU avait pilotée, expérience mettant en jeu l'épaisseur de feuilles de papier, rappelée dans la communication citée de Robert ADJIAGE. Pour bon nombre de concepts mathématiques de base, le champ physique intervient ainsi dans la construction à côté de registres sémiotiques différents.

Il n'apparaît pas de risque de confusion lorsqu'il intervient une expérience physique et une seule représentation de cette expérience, s'appuyant sur les mêmes perceptions de base qui permettent d'*identifier les objets* en présence et de repérer les *coïncidences* et les *simultanéités*. Mais l'existence de deux représentations peut conduire sans autre forme de procès à conclure qu'il intervient deux registres pouvant avoir une fonction d'objectivation. Or il est tout aussi possible de se trouver alors simplement devant un schéma de deux représentations centrées sur la fonction de traitement, que devant un schéma combinant le centrage sur la fonction de traitement et le centrage sur la fonction d'objectivation.

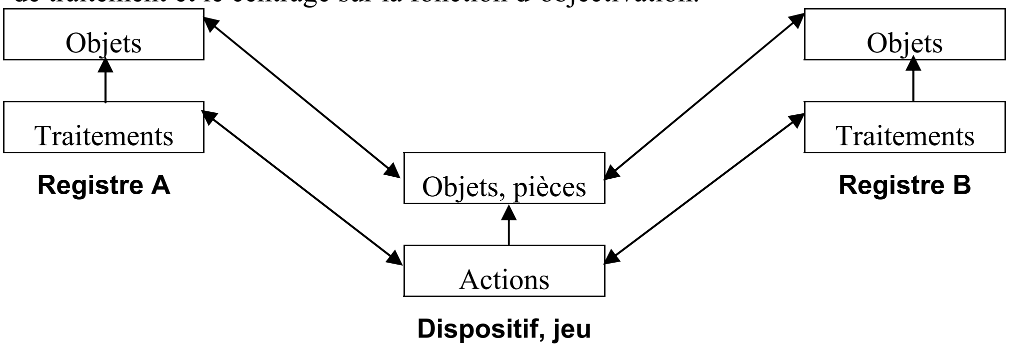


Figure 1 : Schéma de visualisation ou description dans deux registres sémiotiques, centré uniquement sur la fonction de traitement.

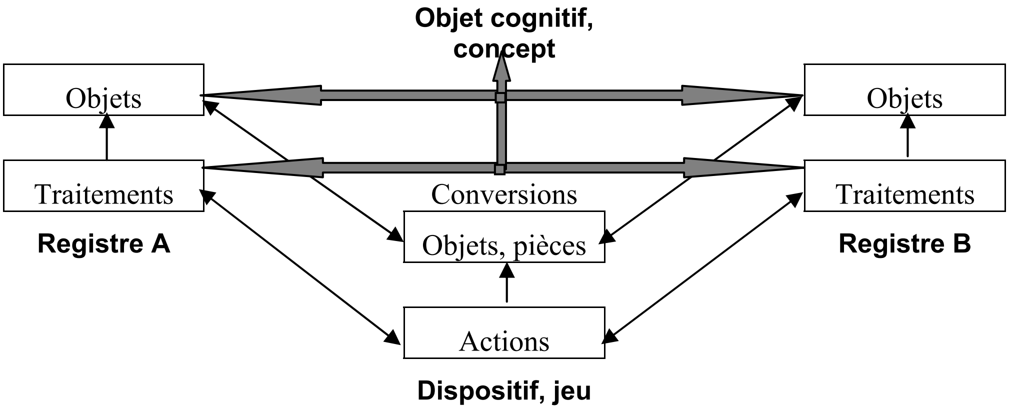
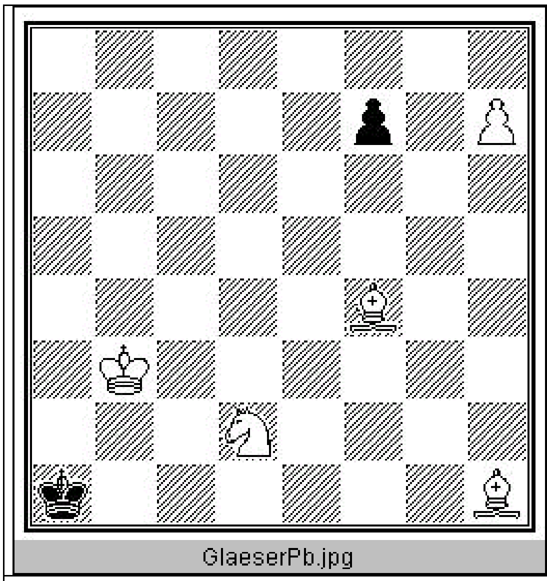


Figure 2 : Modèle de représentation dans deux registres sémiotiques, centré sur les deux fonctions de traitement et d'objectivation.

Seule la dernière situation est adaptée à la détermination d'un concept ou d'un objet mathématique. Et la distinction entre les deux modèles n'est pas aussi criante en pratique qu'elle n'apparaît sur les figures. En effet, puisque les traitements dans les deux registres envisagés correspondent à des actions sur les objets matériels ou les pièces en jeu, ils se correspondent nécessairement entre eux. Et de même pour les objets. Mais ces correspondances ne sont pas nécessairement des *conversions*. Il est donc tout particulièrement important de rappeler les contraintes concernant *traitements* et *conversions*[9]. La présentation de quelques exemples typiques nous paraît pour ce rappel préférable à un exposé systématique.

6.2. Deux représentations isomorphes d'un jeu : les échecs

Considérons comme premier exemple le jeu d'échecs, souvent rapproché des mathématiques car c'est un jeu à information complète, donnant de plus lieu comme les mathématiques à la résolution de *problèmes*. On peut représenter une position d'échecs soit par un diagramme, qui est une schématisation de la vue du jeu à ce moment, soit au moyen d'une notation.

<table>
<tr><td>
</td><td>La même position de jeu d'échecs sous forme de diagramme (à gauche) et en notation dite algébrique (ci-dessous).

Blancs : Rb3, Ff4 et h1, Cd2, Ph7.
Noirs : Ra1, Pf7.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Un problème à condition : Le mat <u>doit</u> être donné par le fou qui est placé sur le diagramme en h1 ; mat en trois coups.</td></tr>
</table>

Figure 3 : Un diagramme d'échecs et sa notation.

---

9 Sur son schéma, Raymond Duval n'avait pas représenté de correspondance entre traitements, pour bien marquer que chaque registre dispose de ses traitements ; il indiquait toutefois les cas de congruence ou d'équivalence calculatoire, qui nous amènent ici à envisager des conversions entre les traitement dans les registres différents.

Dans la notation dite *algébrique*, les cases de l'échiquier sont désignées par un couple constitué d'une lettre, de a à h pour les colonnes, et d'un chiffre, de 1 à 8 pour les lignes ; la case inférieure gauche se note ainsi a1 ou la supérieure gauche a8. Pour plus de précisions, voir dans l'Encyclopedia Universalis l'article *Echecs (jeu d')*, qui a été rédigé par François LE LIONNAIS, lequel avait dirigé par ailleurs la rédaction du remarquable Dictionnaire des Mathématiques[10] (date de la première édition : 1979). Nous prétendons que <u>le diagramme et la notation ne conduisent pas pour le jeu d'échecs à des registres de représentation indépendants</u>.

Pour illustration, nous avons présenté un *problème d'échecs à condition*, créé par Georges Glaeser. Pour les connaisseurs du jeu, signalons au passage que ce problème est typique de l'esprit de Glaeser, épris à la fois de logique et de *pensée latérale*. Ils pourront mettre leur esprit d'analyse à l'épreuve en tentant de le résoudre (on notera que la condition exclut le mat trivial en un coup). Mais notre propos ici est autre : nous ne disons pas que deux registres distincts sont en présence, en raison de la *parfaite correspondance* de chacun des deux modes de représentations avec les déplacements de pièces sur un échiquier réel. En effet, la notation ne conduit à aucun traitement qui ne se reporte sur le diagramme ; la même chose s'exprime de deux manières certes différentes, mais parfaitement interchangeables. On pourrait faire une suite de diagrammes représentant les positions après les coups successifs des blancs et des noirs. Comme cela prendrait une place considérable, on préfère recourir par économie à la notation algébrique pour décrire les coups. Par exemple, pour le diagramme présenté, on pourra écrire 1 : Ra3, Pf5, si l'on veut dire que le premier coup des blancs à partir de la position donnée sera d'amener leur roi (qui était en b3) en a3 et que les noirs répliquent en déplaçant leur pion de deux cases (de f7 en f5) ; on continuera de même pour les coups ultérieurs. Les habitués du jeu sont entraînés à visualiser mentalement sur les 64 cases son évolution, les amateurs moins expérimentés la suivent en reportant les coups sur un échiquier.

6.3. Droite graduée et opérations (addition et soustraction des entiers)

A propos des premières opérations arithmétiques sur les entiers naturels, voyons l'utilisation d'une *règle à additionner*. Ceux qui ont pratiqué la *règle à calcul* reconnaîtront une version simplifiée de cet outil : La *règle à additionner* représentée comporte une graduation inférieure fixe, une graduation supérieure mobile et un curseur (la flèche sur les figures). Outre la possibilité d'une réalisation matérielle grâce à deux règles graduées coulissant en regard l'une de l'autre, un logiciel comme CABRI permet aujourd'hui une réalisation parfaitement opératoire.

[10] Alain BOUVIER, Michel GEORGE, François LE LIONNAIS, 1993 (4e édition mise à jour et augmentée), *Dictionnaire des Mathématiques*, Paris, PUF.

Nos illustrations (malheureusement statiques sur le papier) résultent de son utilisation.

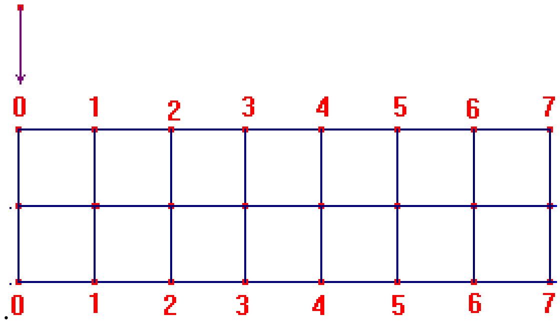


Figure 4 : Vue (partielle) d'une *règle à additionner* en position initiale.

Nous prétendons que <u>la *règle à additionner* procure un registre différent de l'écriture arithmétique</u>. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que la position opératoire qui est représentée sur la figure 5 correspond aussi bien à l'égalité

$$3 + 4 = 7$$

qu'à l'égalité

$$7 - 4 = 3.$$

De plus, la vision n'est pas seulement concentrée sur la flèche, ce qui permet d'apercevoir sur la même représentation une égalité comme 3 + 7 = 10 ou d'autres encore, que des déplacements de la flèche mettront explicitement en évidence.

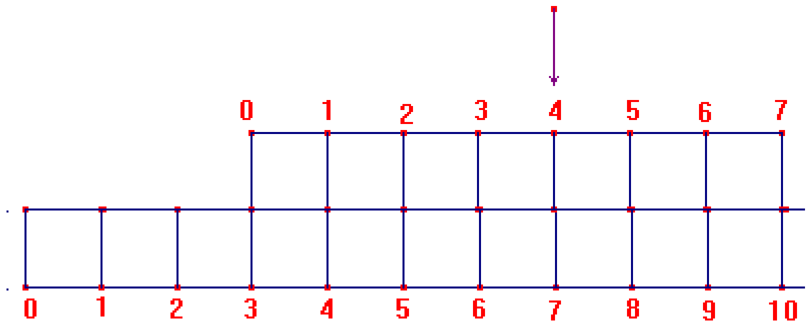


Figure 5 : Vue de la même *règle à additionner* en position opératoire.

Certes, il y a bien des correspondances : faire « 3 plus quelque chose », c'est amener le 0 de la graduation supérieure en regard du 3 de la graduation inférieure. Mais « 3 plus quelque chose » précisément n'a pas de pendant en écriture arithmétique. Inversement, je ne peux pas traduire une égalité comme

$$3 + 2 + 5 = 10$$

par un positionnement de la règle avec son curseur. Pour n'opérer qu'avec la seule règle, sans notation de résultat intermédiaire, deux placements successifs sont nécessaires : Le premier consiste à amener le 0 de la graduation supérieure en regard du 3 de la graduation inférieure et la flèche en regard du 2 de la graduation supérieure ; le second consiste à amener alors le zéro de la graduation supérieure en regard de la flèche et ensuite cette flèche en regard du 5 de la graduation supérieure. **Conclusion** : La règle permet d'effectuer une suite d'additions, mais seul le résultat de la dernière reste visible au terme du dernier déplacement.

Cette imperfection dans les correspondances, cette absence d'algorithme canonique de passage d'une représentation à l'autre, sont caractéristiques de *conversions*, selon le terme retenu par Raymond Duval. Et ce sont ces *conversions* qui mettent en évidence que deux ou plusieurs *registres de représentation* peuvent interagir dans un modèle centré sur la fonction *fonction d'objectivation*.

Par opposition, considérons les représentations de ces mêmes opérations dont l'article de Athanasios GAGATSIS, M. SHIAKALLI et A. PANAOURA, dans le volume 8 de ces Annales (*Annales de didactique et sciences cognitives*, 2003), a pointé les difficultés. La figure 4 illustre l'égalité déjà considérée, cette fois-ci sur une droite graduée avec emploi d'une flèche curviligne de déplacement.

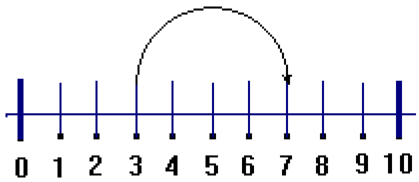


Figure 6 : L'égalité 3 + 4 = 7 illustrée par un déplacement sur une droite graduée.

Ici la correspondance entre l'égalité et son illustration est canonique. Par rapport à la représentation précédente, on notera que c'est à la représentation complète que l'addition est associée : la flèche curviligne part de 3 et aboutit quatre graduations plus loin. On remarquera surtout que la flèche curviligne n'est pas issue d'une lecture directe, mais suppose un comptage lié au second terme de l'opération, un surcomptage comme dirait Jean-Paul FISCHER (voir FISCHER, 1992). Et deux flèches curvilignes successives, l'origine de la seconde étant l'extrémité de la première, sont associées à un enchaînement d'opérations, tel que 3 + 2 + 5 = 10.

Discussion

Pour les opérations arithmétiques, addition et soustaction, les déplacements fléchés sur une droite graduée ne constituent pas un registre de représentation indépendant du registre numérique opératoire. C'est d'ailleurs pourquoi le terme d'illustration paraît plus approprié dans ce cas. Et l'acquisition de l'addition et de la soustraction des entiers naturels est la condition de compréhension de cette illustration.

Il nous paraît clair que c'est bien ce qui ressort en définitive des résultats rapportés dans l'article déjà cité de Athanasios GAGATSIS, M. SHIAKALLI et

A. ANAOURA. Entendons-nous bien : Il ne s'agit pas de nier que, pour des conditions appropriées, la doite graduée donne lieu à un registre de représentation spécifique. Dans le cas envisagé, nous avons vu par exemple qu'un *dédoublement* permet effectivement d'obtenir des traitements suffisamment autonomes.

Notons aussi que l'attention ne doit pas seulement se porter sur les résultats apparents, mais aussi sur les conditions de production d'une représentation. Supposons par exemple, pour le cas des déplacements fléchés sur une droite graduée, que l'on dote un logiciel des deux possibilités suivantes :

- Tracer une flèche curviligne d'origine 0 et d'extrémité un entier quelconque,
- déplacer (par translation) une telle flèche pour amener son origine en un entier quelconque.

Nous aurons alors un fonctionnement très proche de celui de la *règle à additionner*, évitant par exemple de devoir recourir à une activité de comptage. Mais il nous paraît didactiquement moins productif pour deux raisons :

- Une réalisation matérielle concrète peut être envisagée (par exemple en utilisant du papier calque), mais elle est plus compliquée et artificielle que de faire glisser en regard l'une de l'autre deux graduations identiques. L'analyse épistémologique met d'ailleurs en évidence la place prise dès le début des mathématiques (voir les *Eléments* d'Euclide, livre 5) par des opérations de report correspondant à un tel glissement,
- la reconnaissance visuelle de la translation entre deux flèches curvilignes d'origines différentes ne résulte pas d'une perception visuelle immédiate, contrairement au déplacement d'une règle graduée.

6.4. Ecriture de nombres en système décimal et en système binaire

Regardons à présent le cas de deux registres sémiotiques dans une situation où le rôle de l'environnement physique est limité à la logistique des registres, c'est à dire la production des objets et les traitements : Examinons l'écriture des nombres en numération de position, soit en système binaire, soit en système décimal.

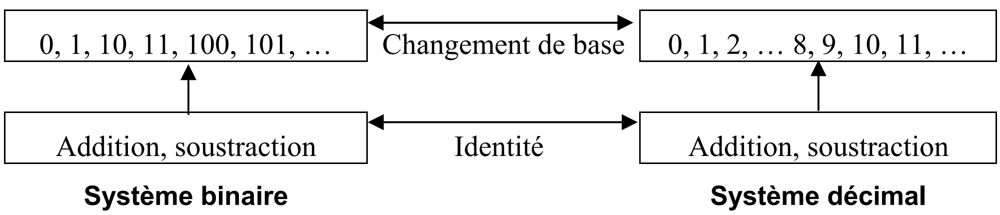


Figure 7 : Deux registres isomorphes pour la représentation des entiers.

Commençons par nous intéresser aux seuls entiers naturels. En base deux, les seuls chiffres sont 0 et 1 ; lus de droite à gauche, ils représentent successivement les unités, les paires, les quatuors, etc. Les premiers entiers sont ainsi zéro : 0, un : 1, une paire : 10, une unité et une paire : 11, un quatuor : 100, etc. En base dix, les chiffres sont les chiffres usuels de 0 à 9 et, lus de droite à gauche, ils représentent successivement les unités, les dizaines, les centaines, etc. Pour ces entiers et les opérations d'addition et de soustraction, on peut expliciter une correspondance complète entre les deux systèmes : passage de l'une à l'autre écriture des entiers par changement de base de numération, conservation des opérations. Signalons qu'il existe deux algorithmes pour changer de base : celui de la transformation chiffre par chiffre et celui des restes successifs dans la division euclidienne par la base de numération. On peut choisir indifféremment l'un ou l'autre ; en raison de la plus grande familiarité avec l'écriture décimale, on utilisera à la main plutôt le premier algorithme pour passer de l'écriture binaire à l'écriture décimale d'un entier et plutôt le second pour le passage inverse.

Par exemple, si je veux connaître l'écriture décimale du nombre dont l'écriture binaire est 101 000 111, j'effectue une correspondance chiffre par chiffre, suivie d'une addition.

Ecriture	1	0	1	0	0	0	1	1	1
Valeur	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Le nombre recherché est donc : 256 + 64 + 4 + 2 + 1 = 327.

Réciproquement, si je veux écrire dans le système binaire le nombre dont l'écriture décimale est 327, j'écris successivement

$327 = 2 \times 163 + 1$, $163 = 2 \times 81 + 1$, $81 = 2 \times 40 + 1$,
$40 = 2 \times 20 + 0$, $20 = 2 \times 10 + 0$, $10 = 2 \times 5 + 0$,
$5 = 2 \times 2 + 1$, $2 = 2 \times 1 + 0$, $1 = 2 \times 0 + 1$.

Son écriture binaire, formée des restes lus en remontant ces égalités, sera donc 101 000 111. On a bien retrouvé le nombre précédent, ce qui est rassurant ! Aux esprits chagrins qui s'offusqueraient de l'emploi de la division euclidienne alors qu'on est censé travailler seulement sur l'addition, faisons remarquer que c'est un cas simple qui est en jeu ici : la dissection. De même en géométrie, le pliage est une opération qui donne un sens particulier à la partition en deux d'un segment : on ne mobilise pas le théorème de Thalès en référant à un milieu.

Intéressons-nous à présent aux quatre opérations et aux nombres à virgule dans l'un ou l'autre des deux systèmes considérés. Pour le système décimal, on parle des nombres décimaux, pour le système binaire, des nombres dyadiques. On peut dire de manière synthétique (à des professeurs, pas à des élèves non préparés) qu'aussi bien pour p égal à deux (sytème binaire) que pour p égal à dix (système décimal), les objets considérés sont de la forme :

$$x = \sum_{n \geq m} a_n \times p^n \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_n \leq p-1 \text{ et } a_m \neq 0,$$

tous les a_n étant nuls au delà d'un certain rang puisque l'écriture désigne un nombre. Le problème qui va alors surgir tient au fait que l'on n'obtient pas les mêmes objets dans les deux systèmes. (Il arrive que le recours à l'informatique fasse apparaître des conséquences pratiques d'un tel phénomène, à cause d'obligations de troncature.) Précisément, tout nombre dyadique se trouve être un décimal (parce que dix est divisible par deux), mais la réciproque est fausse : Ainsi, il faut un développement illimité dans le système binaire pour représenter le nombre décimal 0,2. Ce nombre exprime en effet la fraction « un cinquième » (la division de 1 par 5 en écriture décimale permet de s'en assurer) et voici en système binaire le début de la division de 1 par 101, écriture binaire du nombre cinq :

```
1000 |101
 101 |0,0011
  110
  101
    1
```

Ayant obtenu un reste égal à 1, on est sûr que le processus va se répéter indéfiniment, comme cela se produit par exemple dans le système décimal de numération, quand on effectue la division de 1 par 3 pour tomber sur le développement illimité 0,333… Ici on obtient le développement illimité 0,001100110011… dont la période est le groupe 0011.

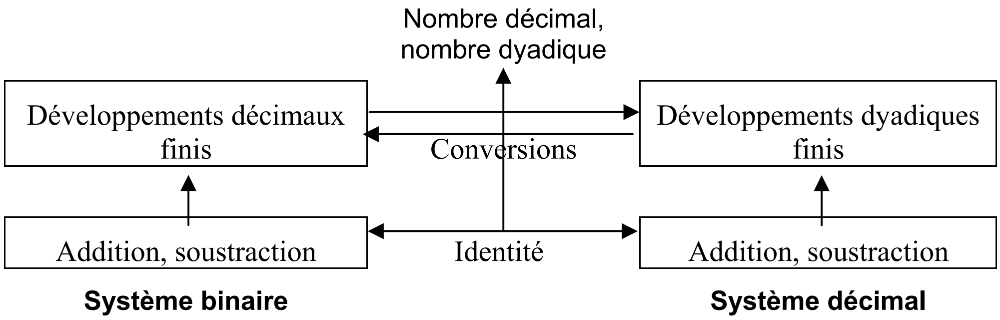


Figure 8 : Une objectivation du nombre décimal et du nombre dyadique.

Discussion : Le changement qui s'est introduit quand on est passé de l'écriture des entiers à celle de nombres fractionnaires est mince. Seule apparaît une *imperfection* dans le sens de la transformation d'un développement décimal en développement dyadique, obligeant par exemple à tronquer ou arrondir des résultats. Mais cette *imperfection* est fondamentale pour que l'on soit en présence d'une conversion. Elle nous dit en effet que l'on n'exprime pas exactement les mêmes choses dans le registre de l'écriture décimale et dans celui de l'écriture binaire. Par conséquent, un changement de base de numération n'a pas d'intérêt conceptuel pour les opérations sur les nombres entiers ; au contraire, il peut contribuer à la conceptualisation de la notion de nombre décimal. Quand on sait que la très grande majorité des adultes d'aujourd'hui ignore ou méconnaît cette notion de nombre décimal, on voit se présenter une possibilité d'enseignement intéressante, en plus des conversions entre écritures fractionnaires et décimales.

6.5. Aperçu d'exploitations en didactique des mathématiques

Les exemples qui viennent d'être exposés ont été choisis en raison de leur caractère minimaliste. Certes, des concepts un peu plus avancés conduisent à des situations un peu plus complexes. Ainsi, les exemples choisis n'ont pas fait apparaître de *conversions* entre traitements dans des registres différents, alors qu'il en intervient dans des situations comme par exemple faire passer une droite par le point d'intersection de deux droites (registre graphique) et combiner linéairement les équations des deux droites (registre algébrique). Pour autant nos exemples constituent de notre point de vue un ensemble représentatif des questions rencontrées en didactique des mathématiques provenant des registres sémiotiques.

Conclusion d'ensemble à propos de registres différents pour un même contenu : Ce n'est pas seulement parce qu'un même contenu est l'objet de désignations distinctes ou de visualisations diférentes que l'on est en présence, pour ce contenu, de registres de représentation distincts. Cette présence suppose des fonctionnements (traitements intra-registre) autonomes et l'existence de *conversions* (traitements inter-registres) ; Raymond DUVAL a souligné que les conversions doivent avoir un caractère incomplètement algorithmique. Par rapport à une acquisition mathématique, une telle indépendance est fondamentale. Inhérente à la nature même des objets mathématiques, elle est aussi indispensable à une *double programmation*, de traitement et de contrôle, qu'un modèle de fonctionnement mathématique humain met nécessairement en jeu (cf. PLUVINAGE, 1983, et BALACHEFF, 2002).

Les analyses auxquelles les considérations de registres conduisent interviennent à de multiples occasions :

- élaboration de scénarios en vue de l'introduction de contenus mathématiques dans l'enseignement,
- détermination de la complexité d'énoncés mathématiques, en tenant notamment compte de la congruence ou non d'expressions dans des registres différents à mobiliser pour la compréhension puis la résolution,
- formulation d'hypothèses sur certaines démarches d'élèves observées lors d'une activité mathématique.

Dans ce texte, nous avons abordé le premier point. Pour le second, nous renvoyons le lecteur aux études effectuées par Raymond DUVAL (cf DUVAL, 1995, et *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 2003). Pour le troisième, un cas d'une importance particulière est la résolution de conflits, lorsqu'une contradiction surgit en raison de distorsions entre des expressions dans deux registres.

Dans sa thèse, Fernando HITT (HITT, 1978) avait déjà observé les effets possibles du repérage de contradictions. Une nette contradiction inter-registres est rapportée dans BALACHEFF, 2002, à propos du concept de longueur : Une suite de courbes (chacune constituée de demi-cercles de même rayon, voir la figure 9) "s'écrase" sur un segment [A, B] tout en conservant à chaque étape du processus une longueur totale constante, égale à $\frac{\pi}{2} \times AB$. Un élève qui, en l'occurrence, ne mobilise pas plusieurs registres reste bloqué sur le problème apparent que pose alors la longueur du segment, tandis que ses condisciples résolvent le paradoxe.

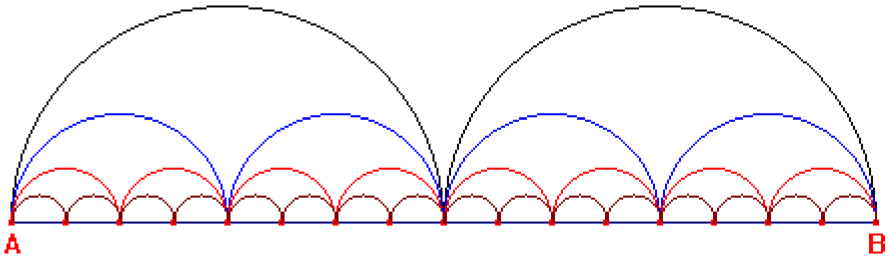


Figure 9 : Suite de courbes formées de demi-cercles *tendant* vers le segment AB.

Par ailleurs, plusieurs des communications présentées dans le volume 8 de ces Annales (cf. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 2003) mobilisent des registres différents pour des analyses de réactions d'élèves. Nous pensons en particulier aux représentations dessinées par des élèves qui sont reproduites dans l'article de Pierre BELMAS et à de savoureux dialogues franglais rapportés par Luis RADFORD, entre des élèves canadiens.

7. Programmes de travail en didactique des mathématiques

On a vu l'intérêt d'un fondement théorique pour l'examen de productions destinées à l'enseignement. Des principes d'économie, tels que ceux auxquels Yves CHEVALLARD se rattache volontiers (CHEVALLARD, 1985), peuvent s'avérer féconds dans cette voie. La méthode utilisée est alors une relecture, ou réinterprétation, de présentations ou de pratiques mathématiques à la lumière des fondements théoriques retenus. Ainsi, Yves CHEVALLARD énonce-t-il par exemple que la *théorie anthropologique du didactique* (TAD) situe l'activité mathématique dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales ; notamment, il en déduit qu'un des principaux moteurs de la TAD est la *problématique écologique*. Ce type de réflexion exige un talent certain, car les omissions, voire les glissements, constituent des pièges dans lesquels il est facile de tomber. Il s'agit en effet de respecter scrupuleusement les développements mathématiques considérés dans une conformité rigoureuse avec les principes invoqués. Pas évident !

En tout état de cause, un objectif qu'il convient d'assigner à la didactique est la description du fonctionnement général propre aux mathématiques. Cela suppose des analyses de productions, non seulement celles destinées à l'enseignement, mais celles qui émanent de l'enseignement, autrement dit des discours (qui peuvent être oraux ou écrits) d'élèves ou d'étudiants, comme nous en avons vus précédemment.

7.1. Suivi d'échanges entre élèves, notamment suivi de binômes

La situation standard d'enseignement n'est pas la seule qui peut amener de telles productions. Par exemple, Colette LABORDE s'était appuyée dans sa thèse déjà citée (LABORDE, 1982) sur des jeux d'échanges de messages décrivant des figures géométriques (en réalité, les récepteurs auxquels les binômes d'émetteurs étaient censés s'adresser n'existaient pas nécessairement ; ce qui importait à Colette LABORDE était la production de textes pour des destinataires). Le suivi pendant une certaine durée de binômes (la plus petite unité suscitant des échanges oraux) attelés à des tâches qui peuvent être variées, à l'instar de ce que les membres du Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques de Fès (Maroc) ont largement pratiqué, est particulièrement intéressant en vue d'une telle description. La lourdeur du travail de recueil des données dans ce contexte est encore considérable ; nous souhaitons que des enregistrements permettant des retranscriptions automatisées puissent l'alléger dans un avenir proche.

7.2. Sondages et entretiens

La recherche de l'origine de difficultés est un prolongement assez naturel de l'évaluation et constitue ainsi un objectif d'études didactiques. Il peut reposer sur des études cliniques ainsi que sur des enquêtes orientées vers des questions précises et adressées à des échantillons appropriés. Il n'y a d'ailleurs pas que des traitements mathématiques qui peuvent être proposés aux sujets interrogés. Dans des démarches relevant de la technique des sondages ou de celle des entretiens, il est possible de recueillir les opinions de sujets sur l'enseignement qu'ils ont suivi et l'activité mathématique qui leur a été demandée. C'est ainsi que nous avions conduit, à la demande de la Société Mathématique de France, une enquête intitulée "Les Maths et Vous" et qu'un chercheur comme Jean-Claude RAUSCHER de l'IUFM d'Alsace, (Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 2003, vol 8) procède à un certain nombre d'investigations. Notons au passage l'importance que peut avoir l'attitude devant les mathématiques, susceptible d'être source de difficultés énormes en raison d'une incompréhension globale de l'activité intellectuelle sollicitée. Un cas d'échec électif en mathématique (*le cas Gaël*) a ainsi été décrit par Guy BROUSSEAU, dans une étude postérieure de quelques années à celle de 1972 citée en bibliographie.

Pour des difficultés très spécifiques, la didactique peut apporter des propositions concrètes. Ainsi, une thèse de Mouloud ABDELLI (1985) à Strasbourg portait sur les apprentissages mathématiques d'enfants sourds ou malentendants. A l'époque le mot d'ordre dans l'enseignement dirigé vers ces enfants était de tout faire passer par l'oralisation. Inutile de dire que le temps nécessaire dans ces conditions pour la compréhension du moindre énoncé était rédhibitoire pour des apprentissages mathématiques même courants. Il était clair que prendre appui sur les capacités de repérage visuel de ces enfants pour un accès au sens ne pouvait qu'être plus efficace, ce qui est évidemment apparu dans la thèse. Personnellement, j'avais été à l'époque personnellement choqué de constater le manque d'efficacité des pratiques pédagogiques avec ces élèves et j'avoue être soulagé de savoir que la langue des signes ou le LPC (langage parlé complété) ont maintenant droit de cité dans leurs écoles.

7.3. Expérimentations ponctuelles et classes expérimentales

La question des compétences nécessaires à tel ou tel type de traitement, notamment mathématique, est d'actualité dans le système éducatif français. La constitution de groupes nationaux de réflexion sur ce sujet n'est d'ailleurs pas forcément la manière la plus efficace de l'approfondir. Il conviendrait plutôt, pour certains de ses aspects fins, de définir des programmes de recherche. Peut-être le monde politique souhaite-t-il des réponses plus rapides que celles qui peuvent être apportées par la recherche. La question conduit en effet à procéder à de véritables expériences, comme celles qui sont décrites par Jean-Paul FISCHER, 1992. Car ce n'est pas seulement la capacité ou non de procéder à certains traitements qui est en cause dans la notion de compétence, c'est aussi leur coût (pour les effectuer bien ou mal). Et cela peut exiger par exemple des mesures de temps de réaction suffisamment précises, aujourd'hui à la portée d'un chercheur en didactique pouvant mettre un ordinateur à la disposition des sujets de l'expérience.

La classe, complète ou répartie en groupes, et son fonctionnement est bien évidemment l'objet des préoccupations de l'institution et donc la source de demandes adressées aux didacticiens. Paradoxalement, il est difficile, du moins dans le système français, de réunir durablement des conditions correctes d'expérimentation dans des classes. Ainsi le fonctionnement de l'Ecole Michelet à Bordeaux n'a jamais été une affaire simple pour Guy BROUSSEAU. Notre objectif n'est pas l'analyse des obstacles d'origines variées, institutionnelles, déontologiques ou autres. Ne dénigrons tout de même pas trop notre système : chez nos voisins allemands, il a longtemps été quasiment exclu de pouvoir simplement se livrer à des observations dans des classes. Ce fait a d'ailleurs pu contribuer au caractère fortement livresque des études didactiques effectuées, avant que le secteur intitulé *empirische Forschung* ne connaisse un certain développement. Une pratique qui a été abondamment mise à profit en France est celle de *tandems* constitués d'un chercheur et d'un enseignant, qui s'associent pour préparer ensemble des séquences scolaires expérimentales, mener et observer leur déroulement et enfin analyser leurs résultats (Note : ce sont parfois, des équipes de trois ou quatre personnes au lieu de *tandems* qui ont réalisé de tels programmes d'expérimentation). Citons à ce titre Régine DOUADY pour le montage de ses jeux de cadres, avec notamment les activités autour de la recherche de la racine carrée de 27 (DOUADY, 1987), ainsi que Nicolas BALACHEFF, avec Bernard CAPPONI, pour plusieurs expérimentations de l'usage de l'outil informatique, notamment le tableur (CAPPONI et BALACHEFF, 1989). Plus récemment, Robert ADJIAGE (ADJIAGE, 2001) dont les travaux concernant les nombres rationnels ont été signalés, à propos de l'exploitation pédagogique des registres, a procédé à des recherches dans des classes d'une manière comparable, mais avec moins d'implication des enseignants des élèves concernés.

7.4. Last but not least

Que convient-il de faire pour la formation initiale et continue des professeurs ayant à enseigner les mathématiques ? Voilà une question qui a parfois dégringolé sous une forme aussi peu précise avec demande de réponses concrètes (en direction des professeurs des écoles et des professeurs de mathématiques dans l'enseignement du second degré) attendues de divers spécialistes, dont des chercheurs en didactique. Au risque de décevoir le lecteur, j'avancerai qu'une telle question ne me semble que très partiellement relever de la recherche en didactique envisagée dans cet article. Pour les professeurs des écoles, dont la formation initiale a pu être éloignée des mathématiques, certaines études didactiques ont été conduites, par exemple par Alain KUZNIAK (pour sa thèse soutenue à Paris 7 en 1994) et il est intéressant que perdure un secteur de travaux dans cette direction. Pour les professeurs de mathématiques, au-delà de la préparation des concours, la formule qui s'avère sans conteste la plus féconde n'est pas celle d'un *enseignement*, mais celle de la *recherche-action* telle qu'elle peut être pratiquée dans les IREM, avec un esprit d'égal niveau de contribution des participants. S'agit-il d'une méthode ? Probablement pas, mais bien plutôt d'un état esprit, éminemment souhaitable par ailleurs, quand on estime que la réflexion sur les plans de carrière dans l'enseignement mérite que beaucoup plus d'efforts lui soient consacrés que ce n'est le cas actuellement dans le système éducatif français. Je n'en dirai pas plus, pour ne pas être entraîné, à la lumière de mon expérience personnelle en matière de formation des professeurs, à des développements qui occuperaient tout de suite un certain nombre de pages et sortiraient du sujet de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

***Note :** La présentation est organisée non pas selon l'ordre alphabétique des auteurs, mais d'après les dates de la rédaction originale (le plus souvent celle indiquée en référence) des œuvres citées, hormis les articles de l'Encyclopedia Universalis regroupés en début de bibliographie.*

Articles de *l'Encyclopedia Universalis* concernant la didactique et l'enseignement des mathématiques (présents dans l'édition 2002) :

Régine DOUADY, Mathématiques (didactique des) ;
Pierre GRECO, Pédagogie – les problèmes de l'éducation scolaire ;
Daniel LACOMBE, Didactique et Didactique des disciplines ;
André REVUZ, Mathématique (enseignement des).

VYGOTSKY Lev Semenovitch, 1962, *Thought and Language* (traduction de E. Henfmann et G. Vakar, texte russe : 1934), Cambridge (Mass.), The M.I.T. Press.

BUYSE Raymond, 1935, *L'expérimentation en pédagogie*, Bruxelles, éd. Maurice Lamertin.

BACHELARD Gaston, 1938 (douzième édition : 1983), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin.

WITTGENSTEIN Ludwig, 1983 (traduction par M.A. Lescourret de l'édition posthume originale de 1956 rassemblant des notes écrites de 1937 à 1944), *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Paris, Gallimard – NRF.

DEWEY John, 1968, *Expérience et Education* (traduction de M.A. Carroi, texte anglais publié en 1938), Paris, Armand Collin.

GATTEGNO Caleb, 1965, *Pour un enseignement dynamique des mathématiques* (traduction par René Fonéré de *For the teaching of mathematics*, 1963), Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

FREUDENTHAL Hans, 1963, *Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques ?* L'Enseignement Mathématique vol. 9, 28-44.

FLETCHER T.J., 1966, *Didactique* ou *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui* (traduit du livre anglais *Some lessons in mathematics*), Paris, O.C.D.L.

BENVENISTE Emile, 1966, *Problèmes de linguistique générale* (tome 1), Paris, Gallimard.

GRIZE Jean Blaise, 1968, Analyses pour servir à l'étude épistémologique de la notion de fonction, in *Epistémologie et psychologie de la fonction*, Jean Piaget et al., 167 à 197, Paris, PUF.

BROUSSEAU Guy, 1970, *Mathématiques pour l'enseignement élémentaire*, collection Formation des maîtres, tome 1, Bordeaux, IREM.

Ce tome contient notamment le texte d'une conférence faite aux journées de l'APMEP de 1970, texte qui a été repris dans :

BROUSSEAU Guy, 1972, Les processus de mathématisation, in *La Mathématique à l'Ecole Elémentaire*, Bulletin de l'APMEP, n° 282 (spécial).

BLOOM Benjamin S., HASTINGS J. Thomas, MADAUS George F., 1971, *Handbook on formative and summative evaluation of students learning*, New-York, Mc Graw Hill.

DUCROT Oswald, 1972, *Dire et ne pas dire*, Paris, Hermann.

Learning and the nature of mathematics, 1972, William E. Lamon ed., Chicago, Science Research Associates Inc.

PIAGET Jean et INHELDER Bärbel, 1975, *La psychologie de l'enfant*, Paris, PUF.

L'analyse de la didactique des mathématiques, communications d'un colloque Inter-IREM, 1975, Bordeaux, IREM.

VAN HIELE Pierre M., 1976, *Wie kann man in Mathematikunterricht den Denkstufen Rechnung tragen*, Educational Studies in Mathematics, volume **7**,

157-169, Dordrecht, Reidel.

DUVAL R. et PLUVINAGE F., 1976, *Démarches de réponse en mathématique - Résultat d'une enquête à trois modalités auprès d'élèves de 5e d'âge moyen : 13 ans* - Educational Studies in Mathematics, volume 8/1, Dordrecht, Reidel.

WASON P.C.et JOHNSON-LAIRD P.N., 1976, *Psychology of reasoning, Structure and content*, London, Batsford.

REUCHLIN Maurice, 1981 (4ème édition, première édition : 1977), *Psychologie*, Paris, PUF.

HITT Fernando, 1978, *Comportements de retour en arrière après la découverte d'une contradiction*, Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

Didaktik der Mathematik, Hrsg. H.G. STEINER, 1978, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

DEMNARD Dimitri et FOURMENT Dominique, 1981, *Dictionnaire d'histoire de l'enseignement*, Paris, Jean-Pierre Delarge.

Colette LABORDE, 1982, *Langue naturelle et écriture symbolique* (2 tomes), thèse de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

PLUVINAGE François, 1983, Variations de questions, questionnaires à modalités, *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*, p. 465, Boston, Birkhäuser.

GLAESER Georges, 1984, *Racines historiques de la didactique des mathématiques*, Deuxième rédaction augmentée avec la collaboration d'Eric Chaney, Strasbourg, IREM.

ABDELLI Mohamed, 1985, Oralisation et apprentissage arithmétique par des élèves déficients auditifs, Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

RADFORD Luis, 1985, *Interprétation d'énoncés implicatifs et traitements logiques, contribution à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée*, thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

CHEVALLARD Yves, 1985, *La transposition didactique*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

DOUADY Régine, 1986, *Jeux de cadres et dialectique outil – objet*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 7/2, Grenoble, La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU Guy, 1986, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 7/2, 33-115, Grenoble, La Pensée Sauvage.

VAN HIELE Pierre M., 1986, *Structure and Insight, a theory of mathematic education*, Orlando (Flor.), Academic Press.

FILLOY Eugenio, 1986, Teaching strategies for elementary algebra and the interrelationship between the development of syntactic and semantic abilities, *Proceedings of the 8th annual meeting for the Psychology of Mathematic*, North American Chapter, 108-113, Michigan, East Lansing.

VERGNAUD Gérard, 1987, Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances de l'enfant, in *Psychologie*, dir. J. Piaget, 821-843, Paris, Gallimard.

GRAS Régis, 1988, *Une situation de construction géométrique avec assistance logicielle*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 8/3, Grenoble, La Pensée Sauvage.

ARTIGUE Michèle, 1988, *Ingénierie didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 9/3, pp. 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage.

CAPPONI Bernard et BALACHEFF Nicolas, 1989, *Tableur et calcul numérique (spreadsheet and algebra)*, Educational Studies in Mathematics, volume **20**, 179-210, Dordrecht, Reidel.

GUZMAN RETAMAL Ismenia, 1990, *Le rôle des représentations dans la notion de fonction*, thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

CHARLOT Bernard, 1991, L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques, in *Faire des Math : le plaisir du sens*, R. Bkouche, B. Charlot et N. Rouche, pp. 171 – 193, Paris, Armand Collin.

BIDEAU Jacqueline, MELJAC Claire et FISCHER Jean-Paul, 1991, *Les Chemins du Nombre*, Les Presses Universitaires de Lille.

FISCHER Jean-Paul, 1992, *Apprentissages numériques, la distinction procédural – déclaratif*, Presses Universitaires de Nancy.

CHEVALLARD Yves, 1992, *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 12/1, Grenoble, La Pensée Sauvage.

BOUVIER Alain, 1992, *La mystification mathématique*, Paris, Hermann.

Didactics of mathematics as a scientific discipline, 1994, textes d'un groupe d'enseignants de l'INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK BIELEFELD, Dordrecht, Kluwer.

KUZNIAK Alain, 1994, Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres au premier degré, Thèse, Université Paris 7.

ROGALSKI Marc, 1994, *Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement des méthodes en analyse*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 14/1.2, Grenoble, La Pensée Sauvage.

DUVAL Raymond, 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Bern, Peter Lang.

DURAND–GUERRIER Viviane, 1996, *Logique et raisonnement mathématique, défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, thèse de l'Université Lyon 2.

Introduction à la didactique expérimentale des mathématiques, 1999, textes de Georges Glaeser recueillis et présentés par Bernard Blochs et Jean-Claude Régnier, complétés par les contributions de divers auteurs, Grenoble, La Pensée Sauvage.

ADJIAGE Robert, 2001, *Maturations du fonctionnement rationnel*, Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 7, IREM Strasbourg.

DUVAL Raymond, 2001, Ecriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? in : *Produire et lire des textes de démonstration*, ouvrage collectif IREM – IUFM, Paris, Ellipses.

BALACHEFF Nicolas, 2002, *Cadre, registre et conception*, Les cahiers du Laboratoire Leibniz, numéro 58, Grenoble, Leibniz-Imag.

Cet article est consultable à l'adresse URL http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers.

Groupe "Livre" de l'IREM de Strasbourg : BOURDENET Gilles, GASSER Jean-Luc, GIRAULT Paul, KRETZ Elizabeth, ZOLLER Patrick, 2002, *Ressources pour le programme de Sixième* (brochure et Cédérom d'accompagnement), Strasbourg, IREM.

PLUVINAGE François, 2003, Expression et représentation, leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique in Didactique des mathématiques, 2003, *Revue du Centre de Recherche en Education*, n° 22-23 (décembre 2002) coordonné par Alain Denis, Saint-Étienne, Université Jean Monnet, 235-276.

Annales de didactique et de sciences cognitives, 2003, volume 8, Strasbourg, IREM.

Site web de l'IREM de Strasbourg, permettant notamment l'accès au logiciel Alexandrie pour consultation du fonds documentaire : http://irem.u-strasbg.fr/.

François PLUVINAGE
IREM de Strasbourg

e-mail : pluvin@math.u-strasbg.fr

Lucia GRUGNETTI

ACQUIS ET APPLICATIONS DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, DU POINT DE VUE DES ÉLÈVES

En mathématique, le point culminant est l'instant où l'on comprend !
(G. Glaeser, 1976)

Abstract. The aim of this paper is that which concerns some issues in the field of mathematical education from pupils' point of view. Which are the productions of our pupils when confronted with problem solving ? Which are their acquisitions, their difficulties? An example comes from protocols by pupils who take part in the Transalpine Mathematics Rally. For what concerns obstacles in learning mathematics, the concept of the limit is taken here into account in connection with Linguistic considerations, which, as Pluvinage said, have a considerable part in mathematics teaching.

Résumé. Le but de cette intervention est de prendre en considération certaines problématiques didactiques du point de vue des élèves en tant que protagonistes dans ce domaine. Quelles sont donc les productions de nos élèves lorsqu'ils sont confrontés à la résolution de problèmes ? Quels sont leurs acquis, leurs difficultés ? Un exemple est tiré des analyses des copies d'élèves qui participent au Rallye mathématique transalpin. En ce qui concerne plutôt les obstacles de différentes natures que les élèves rencontrent dans la construction des connaissances, c'est le concept de limite qui est pris ici en considération, par rapport, en particulier aux faits langagiers, qui, comme le rappelle Pluvinage dans sa présentation *Expression et représentation, leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique,* Pluvinage 2003, occupent une place considérable dans l'enseignement mathématique.

Mots clés : Résolutions de problèmes, procédures d'élèves, difficultés, obstacles épistémologiques, faits langagiers, comportements de réponse, école primaire, secondaire et secondaire supérieure.

---

1. Introduction

Mon intérêt pour la didactique des mathématiques a toujours été marqué par les problématiques liées à l'enseignement - apprentissage « du point de vue des élèves ».

Mais que veut dire « du point de vue de l'élève » pour chacun d'entre nous ?

S'agit-il de l'élève par antonomase, l'élève comme entité fictive, le bon élève, l'élève faible en mathématique, l'élève dont j'ai besoin pour parler de didactique des mathématiques ?

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 45 – 59.

Comme le dit Guy Brousseau (1994, p.51) *la didactique des mathématiques est née de l'intérêt porté dans les années soixante aux moyens d'améliorer l'enseignement des mathématiques.*

Donc l'accent était mis sur « l'enseignement » et sur l'élève dans un sens que je qualifie de global : n'importe quel élève (l'ensemble des élèves).

Dans les années quatre-vingts, le modèle de recherche en Italie, en général était plutôt (cf. Boero, 1994, p.21) du genre *production et expérimentation de propositions novatrices pour l'enseignement des mathématiques et pour la mise à jour des enseignants.*

Je parlerais, dans ce cas, de l'élève comme entité fictive (abstraite). Il s'agit de l'élève dans une *dimension globale.*

L'évolution des conceptions de l'apprentissage de l'époque, ainsi que les séminaires donnés par François Pluvinage à l'Université de Cagliari (où je travaillais à l'époque) sur le thème de sa thèse (1977) dont le dispositif expérimental (imaginé par lui-même), permet de repérer des variations de réponses sous l'effet des variations d'énoncés, nous a forcé à faire le passage de « l'élève comme entité fictive (abstraite) » aux « élèves, chacun dans sa dimension réelle » : l'élève dans une *dimension locale*.

Il s'agit donc du passage des problématiques d'enseignement aux problématiques d'apprentissage avec toute la cour de questions sur les raisons des réussites et des échecs, les raisons des difficultés, le rôle de l'erreur, les obstacles, les conceptions, les théorèmes en acte, les motivations socio-affectives, etc., qui font partie des acquis de la didactique (comme les notions de contrat, de transposition ... – voir Pluvinage 2002), mais qui portent le regard directement sur les élèves et pas seulement sur l'enseignement. On se pose alors la question cruciale suivante :

l'élève, chaque élève devient-il le protagoniste de la didactique ?

2. Quelques exemples de recherche liées aux productions d'élèves

2.1 Le Rallye mathématique transalpin (RMT)[1]

Ces trente dernières années, la recherche en didactique a mis en évidence le rôle essentiel de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques et de nombreuses innovations pédagogiques cherchent à en tenir compte dans leurs propositions pratiques.

Au cours de la même période, les concours et autres confrontations mathématiques entre classes ont suscité un intérêt croissant, chez les élèves, appelés à résoudre des problèmes, individuellement mais aussi collectivement,

[1] Concours de mathématique par classes ayant lieu dans différents pays européens pour les degrés 3 à 8.

chez les maîtres et chez les chercheurs en didactique qui peuvent ainsi observer les procédures de résolution mises en oeuvre.

Le Rallye mathématique transalpin (RMT), en dix années d'existence (Grugnetti, Jaquet, 1999) a connu un développement rapide et important[2] : augmentation du nombre des classes participantes, extension internationale, ouverture vers les premiers degrés de l'école secondaire, approfondissement des analyses didactiques. Il se situe dans cet espace dynamique où élèves, enseignants et chercheurs se rencontrent sur le thème de la construction des connaissances mathématiques.

Les finalités du Rallye sont définies explicitement : résolution de problèmes, interactions entre élèves, engagement et responsabilité du groupe classe, explicitation des procédures de résolution, justification des solutions.

Ses animateurs ont toujours maintenu une réflexion active à propos de ces objectifs : ils les analysent de façon critique, cherchent à contrôler leur évolution, vérifient leur adéquation aux attentes des différents partenaires. Ils réfléchissent aussi à la manière d'exploiter les potentialités du Rallye dans le domaine de la rédaction de problèmes, de leur analyse a priori et a posteriori, de la gestion de leurs variables didactiques, de l'étude des stratégies de résolution, des obstacles cognitifs qu'ils présentent pour les élèves.

Dans le RMT on est aussi confronté :

- à la problématique des situations a-didactiques,
- au rôle de l'erreur et des conflits cognitifs,
- au phénomène de l'évolution des connaissances en fonction de l'âge.

On y retrouve donc un ensemble de paramètres de la didactique des mathématiques centré sur les élèves.

2.1.1 RMT comme situation a-didactique

Le milieu créé par le RMT (Grugnetti, Jaquet, Tièche Christinat, preprint) a des caractéristiques très particulières, différentes de la situation classique d'enseignement : l'activité se déroule dans un lieu qui a pour fonction institutionnelle l'enseignement et l'apprentissage, mais en l'absence de l'enseignant, remplacé par une personne étrangère et neutre et dont la seule fonction est la

[2] En décembre 1992, *Math-Ecole* proposait à ses lecteurs une confrontation sur des problèmes de mathématiques, par classes entières de 3e, 4e et 5e primaire. C'était le premier *Rallye mathématique romand* auquel ont participé une vingtaine de classes. L'intérêt s'est vite développé et, dès sa troisième édition, lors de l'année scolaire 1994-1995, le concours franchissait ses frontières d'origine et devenait le *Rallye mathématique transalpin* a se développant successivement dans plusieurs régions d'Italie, au Tessin, en France (Bresse), au Luxembourg, en République tchèque et en Israel. Outre son développement géographique, le Rallye s'est aussi étendu aux degrés 6 à 8 de l'école secondaire.

surveillance de la classe. En l'absence d'intention didactique clairement exposée, les élèves reconnaissent et attribuent toutefois à la situation des caractéristiques similaires à une situation d'enseignement par problèmes, où l'intérêt est centré non seulement sur l'évaluation de la réussite, mais également sur l'élaboration des procédures de résolutions (Iesu, 1999, Mazzoni, 1999 et Puxeddu, 1999).

Les situations-problèmes du RMT sont conçues comme des situations où les élèves vont mettre en jeu soit des connaissances personnelles déjà construites, soit des savoir-faire enseignés ou, par nécessité, créer des procédures de résolution donnant lieu à de nouvelles connaissances. Il y a lieu de souligner que les problèmes présentés sont inédits ; les élèves ne peuvent pas, ainsi, recourir uniquement à des connaissances anciennes et les ajuster au problème. De plus, la situation d'interactions dans laquelle les élèves se trouvent, nécessite une médiation de leurs connaissances, leur mise en jeu dans le groupe afin de choisir la justification de leur solution qui leur paraît susceptible d'obtenir le plus de points. Les rapports avec le milieu permettent aux élèves de passer d'un niveau de connaissances à l'autre. Par ailleurs les problèmes sont proposés de manière à ce que les élèves ne soient pas guidés par la lecture des intentions du professeur, mais par la logique du milieu proposé. Ces différentes particularités nous amènent à penser que les situations du Rallye ont un caractère essentiellement a-didactique.

De plus, en vertu des expériences faites lors des épreuves d'essai ou d'épreuves antérieures, les élèves sont certains que le problème posé peut se résoudre et sont assurés, dans une certaine mesure, que leur connaissances sont suffisantes pour élaborer des solutions acceptables du problème et que leur enseignant leur fait confiance. Ainsi, même en l'absence de l'enseignant, nous pouvons constater l'existence implicite d'un contrat didactique liant le maître et l'élève face au contenu mathématique des problèmes et permettant que "l'élève accepte la responsabilité de résoudre les problèmes dont on ne lui a pas enseigné la solution." (Brousseau, 1996, p. 68).

Toutefois, la situation didactique du rallye est particulière du point de vue de son organisation temporelle, puisqu'elle ne présente pas d'homogénéité temporelle. En effet, pour chacun des problèmes proposés, la situation se déroule en deux temps distincts. Dans un premier temps, le problème est entièrement dévolu aux élèves qui le prennent en charge. En vertu des règles du concours, le maître absent de la classe n'intervient pas. Dans un deuxième temps, chronologiquement séparé, le maître reprend la situation-problème en classe et exploite les procédures des élèves afin de les intégrer dans des objectifs mathématiques tels que l'initiation à la démarche scientifique ou à des objectifs mathématiques en lien avec d'autres situations-problèmes. Les problèmes du RMT deviennent ainsi partie intégrante du système didactique mis en place lors des séquences d'enseignement, pour autant que l'enseignant ait décidé d'exploiter les problèmes du RMT.

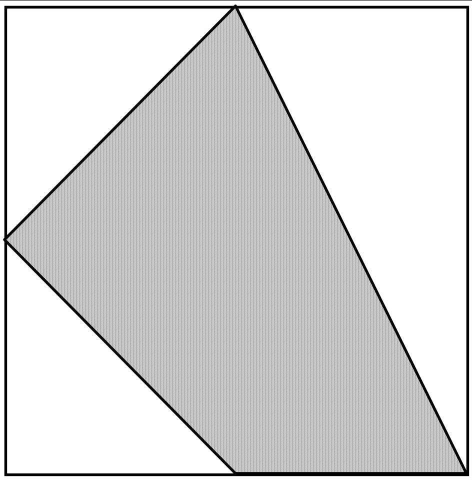
2.1.2 Le rôle de l'erreur et des conflits cognitifs

Le cas du conflit aire-périmètre (Jaquet, 2000)

Lorsque les élèves sont confrontés pour les premières fois au calcul de l'aire de figures géométriques, ils doivent abandonner les procédures additives qu'ils utilisaient pour calculer les périmètres et passer au produit de mesures. Mais ce passage n'est pas évident. Les deux grandeurs en présence pour une même figure : la longueur des côtés et l'aire, sont l'objet de confusions.

LE JARDIN DE MONSIEUR TORDU

Voici le jardin de Monsieur Tordu.
Il a planté des fleurs dans la partie grise.
Il a semé du gazon dans la parte blanche.
Monsieur Tordu observe son jardin et se demande:
"Quelle est la plus grande partie de mon jardin, celle avec les fleurs ou celle avec le gazon ?"
Et vous, qu'en pensez-vous ?
Expliquez votre réponse.



Le problème *Le jardin de Monsieur Tordu* fait apparaître un phénomène que les didacticiens désignent par "conflit" entre l'aire et le périmètre d'une figure. L'analyse des feuilles réponses révèle des raisonnements et des comportements tout à fait sereins. Les élèves ne semblent pas vivre une situation "conflictuelle": on ne trouve nulle trace d'anxiété, ni de désarroi dans leurs commentaires. On a même l'impression que chaque groupe est certain de l'exactitude de sa réponse, le doute ne subsiste que dans quelques rares réserves ou protections du genre : *nous pensons que le gazon est plus grand.*

Cette quiétude et cette assurance des élèves sont heureuses, certes, mais on ne peut s'en contenter, car, de là à la béatitude, il n'y a qu'un pas !

L'analyse a priori du problème était extrêmement réduite, par les contraintes de l'organisation du concours. L'analyse a posteriori a dévoilé une profonde richesse de procédures, dont certaines étaient même inattendues car elles conduisent à des réponses fausses.

La pratique de la classe

Il faut prendre en compte ces procédures d'un point de vue didactique. Les regarder sans les juger. Comprendre les raisons de leur mise en oeuvre. Ce n'est qu'à ce moment que l'enseignant pourra agir avec plus d'efficacité, placer ses élèves dans des situations analogues pour leur faire distinguer les deux grandeurs en jeu dans la comparaison de figures, pour les faire discerner les cas où il s'agit de l'aire de ceux où il s'agit du périmètre.

Les enseignants des classes du Rallye ont en main quelques éléments pour poursuivre la réflexion sur le problème *Le jardin de Monsieur Tordu* avec les élèves des groupes qui l'ont résolu, puis avec les autres élèves de leur classe. Ceux qui ne participent pas au rallye peuvent aussi tirer profit du problème et de son analyse.

2.1.3 Le rôle de l'erreur et évolution des connaissances selon l'âge

Une caractéristique intéressante du RMT est aussi le fait que la plupart des problèmes soient proposés à différentes catégories, donc à des groupes d'élèves d'âges et de niveaux scolaires différents. Cela permet une analyse sur l'évolution des connaissances selon l'âge, aussi bien que le rôle de l'erreur.

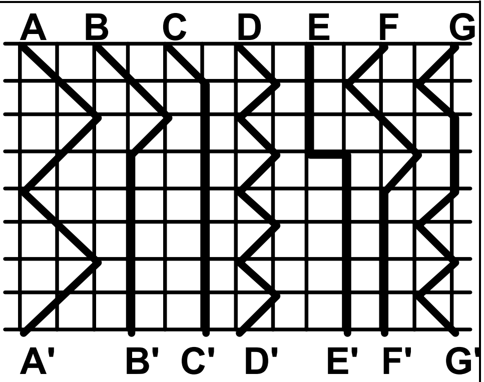
Par exemple, le problème *la traversée du quadrillage* a été proposé aux catégories 5, 6 et 7 et l'analyse des stratégies (Crociani et al., 2001) mises en œuvre par les différents groupes d'élèves s'est révélée riche en informations :

LA TRAVERSEE DU QUADRILLAGE

André, Berthe, Carlo, Denise, Émile, François et Géraldine ont chacun choisi un chemin pour traverser le quadrillage. André est parti de **A** pour arriver à **A'**, Berthe de **B** à **B'**, etc.

Classez ces chemins du plus court au plus long.

Indiquez comment vous avez établi votre classement et justifiez votre raisonnement.



Deux erreurs récurrentes

a) Une erreur assez répandue et étrange, présente dans toutes les catégories, dans chaque pays et région consiste à considérer que la mesure de la diagonale est la moitié de celle d'un côté de carré. "Une ligne verticale vaut un carré et une ligne oblique vaut la moitié d'un carré." "Nous avons compté les carrés divisés pour une moitié et les carrés entier pour un."
Il ne s'agit pas d'une faute de formulation ou d'une simple inattention car les groupes qui ont commis cette erreur l'ont ensuite répercutée de façon parfaitement cohérente dans le classement des parcours, trouvant que A et D sont les plus courts et que E est le plus long.

Ces erreurs n'ont pas été assimilées à celles de mesure. Elles sont probablement liées à une confusion entre aire et longueur ou entre segments et carrés, du fait que la diagonale partage un carré en deux et que le parcours le long d'un côté le laisse entier.
On peut imaginer aussi l'interprétation suivante : un parcours est vu comme la surface des carrés immédiatement à sa droite (ou à sa gauche).
La présence d'un rôle joué par l'aire est révélée par d'autres réponses comme la suivante (Degré 7) :
"Pour trouver l'ordre des parcours, nous avons regardé comment il était articulé et combien de place il occupait dans le rectangle."
Ceci suggère aussi que certaines estimations du rapport d/l (comme 2/1 ou 4/1) ont une origine dans la confusion entre un carré et son côté.

b) D'un tout autre ordre, l'erreur prévue par l'analyse a priori est celle qui conduit à dire que E est le parcours le plus long et que tous les autres sont égaux. Dans ce cas, aucune distinction n'est faite entre le côté d'un carré et sa diagonale.
"Les parcours sont tous égaux, de 8 carré excepté le parcours d'Émile que est de 9 carrés. Nous avons compté les carrés pour trouver l'ordre des parcours."
Ce type d'erreur est le plus fréquent dans les degrés 5 et 6, il dénote l'absence de distinction entre la distance et le parcours effectué pour cette distance. Mais, comme le suggère l'exemple précédent, il peut être aussi dû à une fixation de l'attention sur le carré, non pas comme aire ou comme longueur, mais comme atome constitutif du parcours.
Ces genres d'erreurs peuvent bien être à la source d'autres erreurs et de conceptions erronées chez les élèves. Il faut en tenir compte, il faut en être conscient afin de comprendre les difficultés des élèves et de les aider à les surmonter.

Comme on peut le constater à la lecture des pages précédentes, le RMT n'est pas qu'un concours. Dans l'idée de ses concepteurs, c'est aussi - et surtout - l'occasion d'un intense travail d'analyse didactique. Lors de l'élaboration des sujets, l'équipe internationale de rédaction envisage, a priori, les différentes procédures que les élèves pourront adopter, les obstacles qu'ils rencontreront, les représentations qu'ils se feront de la tâche.

Une deuxième phase formalise l'écriture des textes et le réglage des variables qui permettra de tirer le meilleur profit de la situation. Certaines de ces variables pourront se transformer en variables didactiques lors d'exploitations des problèmes en classe par les enseignants. Après l'épreuve, viennent les corrections où les explications des élèves, les "perles" parfois, la rigueur des justifications surtout, n'en finissent pas d'étonner les correcteurs. Finalement l'analyse a posteriori permet de confirmer ou d'infirmer les hypothèses de départ, de faire apparaître des stratégies ou des représentations non prévues, de calculer la fréquence des types de procédures, de mesurer les difficultés rencontrées par les élèves.

Le déroulement du Rallye offre également des conditions exceptionnelles pour une évaluation des aptitudes du groupe et de ses individus. Tous les maîtres qui l'ont expérimenté le reconnaissent : ils perçoivent à cette occasion des phénomènes, des attitudes, des compétences, des lacunes ou des obstacles qu'ils n'avaient pas pu constater dans les conditions habituelles de classe. Ces observations, exploitées lors de mises en commun, après la passation des épreuves, conduisent à des mises au point, des consolidations, des activités complémentaires, toutes caractéristiques d'une évaluation formative.

2.2 Recherches sur le concept de limite du Groupe 0°

Pour ce qui est des recherches du groupe, on pourra se référer, par exemple, à GRUGNETTI et AL., 1999 ; Andriani et al., 1999 ; Dallanoce et al., 2000 ; Alberti et al., 2001 ; Grugnetti et al., 2002.

2.2.1 Obstacles de différentes natures

Le concept de limite est difficile, on le sait bien : les enseignants le savent par la pratique et l'expérience, les chercheurs par leurs recherches. Ce concept fait partie de la famille des obstacles épistémologiques mais cette particularité est reconnue plus par les chercheurs que par les enseignants. Nous avons décidé de mener une enquête sur le sens "linguistique" attribué aux termes "limite" et "infini" ainsi qu'à certaines expressions d'usage courant comme "à la limite" etc. Comme Iacomella, Letizia, Marchini (1997) le montrent bien, il est nécessaire d'acquérir des informations sur ce que certains termes évoquent à l'esprit des élèves pour pouvoir établir un lien avec leur "statut empirique". Ceci devrait éviter que l'une des pires sortes d'incommunicabilité, celle du type disciplinaire, s'instaure entre l'enseignant et l'élève.

Comme le rappelle Pluvinage (2003) dans sa présentation *Expression et représentation leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique,* les faits langagiers occupent une place considérable dans l'enseignement mathématique.

Pour recueillir suffisamment de productions d'élèves, vu la variété des réponses possibles, nous avons choisi de proposer un questionnaire à des élèves des cinq années d'école secondaire supérieure (14-19 ans). La fiche a été proposée à des élèves de 14 à 19 ans, de différents types d'écoles, et parfois à des adultes. Globalement, nous avons analysé presque 600 fiches. Le même questionnaire a été proposé à des adultes non mathématiciens. Nous avons également demandé aux élèves d'instituts artistiques d'illustrer par des dessins leur idée de limite.

Dans la plupart des représentations, apparaît une barrière physique (espace et temps) et une barrière intellectuelle ou morale.

Le registre de la langue naturelle (pour utiliser l'expression de Duval et Pluvinage), dans le cas du concept de limite n'aide pas pour le passage vers le « registre mathématique ».

Pour vérifier nos hypothèses selon lesquelles les aspects liés à la limite comme "barrière" sont fortement en contradiction avec l'idée de limite infinie, nous avons préparé et proposé aux mêmes élèves impliqués dans l'enquête précédente des questions qui provoquent un conflit cognitif. Ces questions concernent aussi bien la problématique liée aux limites des suites (d'une façon implicite) que celle liée aux limites des fonctions. Comme on le sait bien, les niveaux cognitifs sont assez différents dans les deux domaines.

Les questions liées aux limites des fonctions ont été proposées seulement aux élèves qui avaient déjà travaillé sur le concept de limite. Les autres ont été proposées à tout le monde.

Classe .... Ecole ....

Expliquer le sens du mot « limite »

Expliquer le sens des expressions suivantes :
« à la limite »
« cas limite »
« sans limite »
« dans une certaine limite (mesure)»

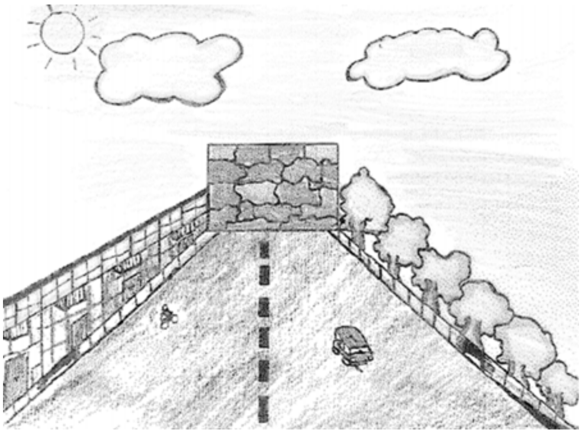
Tu peux éventuellement ajouter des observations

En considérant en particulier la première question, qui, d'une certaine façon, recoupe toutes les autres, on a essayé de classifier les réponses en distinguant l'idée principale exprimée.

1. idée d'empêchement, de barrière, de règle, de restriction,... **44%**
2. idée de borne, de fermeté, de distinction,... **30 %**
3. idée de bout, de fin, d'extrême, d'objectif,... **19 %**
4. autres significations[3] **3 %**
5. aucune réponse **4 %**

Puisque l'interprétation des données n'a pas été facile, les résultats précédents doivent être considérés sur un mode qualitatif plutôt que quantitatif. Mais il est intéressant de remarquer que les mêmes concepts apparaissent dans les dessins qu'on a demandés aux étudiants de l'école moyenne et du lycée artistique pour exprimer leur idée de limite :

[3] Dans les “ autres significations ” on a considéré les définitions de caractère mathématique, qui ont été vraiment peu nombreuses (moins de 10 sur 600), même si au moins 100 interviewés avaient étudié la limite au sens mathématique du terme.



En répartissant les réponses par niveau d'âge (14-17, 18-19, >19), on remarque en particulier que l'idée d'empêchement est plus fréquente chez les plus jeunes et se réduit quand l'âge augmente. L'intolérance aux contraintes ou aux règles est en effet typique des jeunes élèves.

On peut se demander si ces images de limite peuvent gêner l'apprentissage du concept mathématique. On suppose qu'elles pourraient produire deux genres de difficultés : d'un côté celle d'assimiler la limite à une idée d'itération (donc à un processus qui continue à l'infini) et de l'autre celle d'accepter la possibilité d'une limite infinie. En effet, la présence d'une opposition entre l'idée de limite et celle d'infini a été confirmée par une autre enquête que nous avons menée avec les mêmes élèves. Les réponses plus fréquentes à la question " expliquent ce que signifie pour toi le terme " infini " " ont été du genre " quelque chose qui n'a pas de limite ".

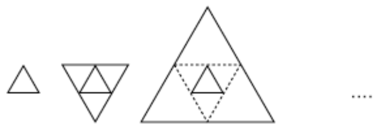
2.2.2 La limite est-elle une barrière ? Le cas d'une suite

On a vu dans la discussion des questionnaires précédents que beaucoup d'étudiants, et particulièrement ceux qui ont donné les définitions de BARRIÈRE et de BORNE, associent le mot "limite" à une idée de finitude dans le temps et dans l'espace qui les conduit à considérer la limite en opposition à l'infini.

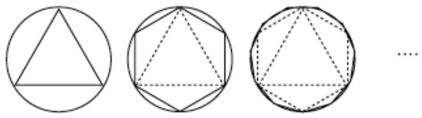
Pour tester cette conjecture, nous avons mis au point une activité destinée aux élèves qui n'avaient jamais entendu parler de limite au sens mathématique.

Classe........... École.............

1. Imagine de continuer cette séquence.
Que devient, à la limite, le périmètre des figures?



2. Imagine de continuer cette séquence.
Que devient, à la limite, le périmètre des figures?



Selon notre “ analyse a priori ” un premier conflit devrait émerger dans les deux cas entre la demande de continuer la séquence et l’expression « à la limite ». De plus, dans la première question, l’ambiguïté contenue dans l’affirmation des réponses “ *la limite est infinie* ” devrait se présenter, même si ce n'est que d’une façon implicite.

Enfin, dans la deuxième question, la présence d’un “ bord ” qui renferme toutes les figures devrait facilement être associée à une des images les plus fréquentes de limite, celle d’une ligne qui circonscrit un espace.

Pour la classification des réponses (voir diagramme), nous avons distingué avant tout entre réponses correctes (indiquées par A) et réponses erronées (B), tandis que les élèves qui n’ont donné aucune réponse font partie du groupe C.

Les réponses du genre A ont été divisées en deux catégories. La première (A1) contient les réponses où, bien qu’on n’arrive pas à donner une valeur à la limite, on établit un rapport exact entre les termes de la suite. La deuxième (A2) contient les réponses correctes en tolérant même les expressions peu rigoureuses.

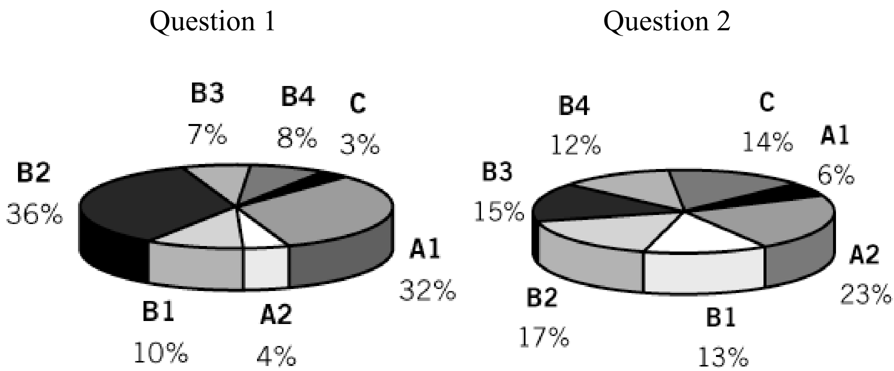
Parmi les réponses erronées nous avons distingué celles où la construction n’a pas été comprise (B1), celles où l’on s’arrête à la quatrième situation (B2), celles qui contiennent des fautes relatives aux variables[4] (B3), celles qui présentent d’autres fautes (B4).

La fiche a été proposée à un échantillon de 406 étudiants de l’école moyenne (collège) et supérieure (lycée) de 13 à 18 ans, qui n’avaient pas encore abordé les notions d’analyse.

Les résultats montrent que les problèmes dont la cause pourrait être, à notre avis, une opposition entre limite et infini, se présentent d’une façon assez

[4] Les fautes impliquant les variables (B) concernent principalement un choix erroné de la variable en jeu (par exemple le nombre ou la longueur des côtés des polygones) ou l’échange entre variable dépendante et variable indépendante.

remarquable. On le voit par exemple dans les réponses correctes, où 32 % des élèves ont une bonne intuition de la croissance de la suite, mais 4 % des étudiants seulement arrivent à affirmer que “ la limite est infinie ”. L’ambiguïté impliquée dans cette expression détermine un véritable conflit : on le voit très bien dans cette réponse d’un élève de collège (13 ans) : “ Je n’arrive pas à comprendre ce qu’on entend par “ à la limite ” parce que si l’on circonscrit continuellement les triangles selon le rapport P’ =2P, on n’a ni une borne ni un périmètre, parce que autrement le résultat serait P=∞”



Parmi les réponses erronées on remarque que 36% des élèves s’arrêtent à la quatrième situation (pour des raisons "pragmatiques", en général) comme s’ils n’associaient pas l’expression “ à la limite ” à l’idée d’un processus itératif.

Dans la deuxième question, on remarque que les réponses correctes sont pour la plupart complètes (23 %) et seulement un petit nombre d’élèves (6 %) s’arrête à la description du cours général de la suite. Il apparaît qu’il n’existe plus de problèmes pour ceux qui répondent correctement, à affirmer que “ la limite est la circonférence ”, en s’appuyant probablement sur l’image de limite comme “ borne ”.

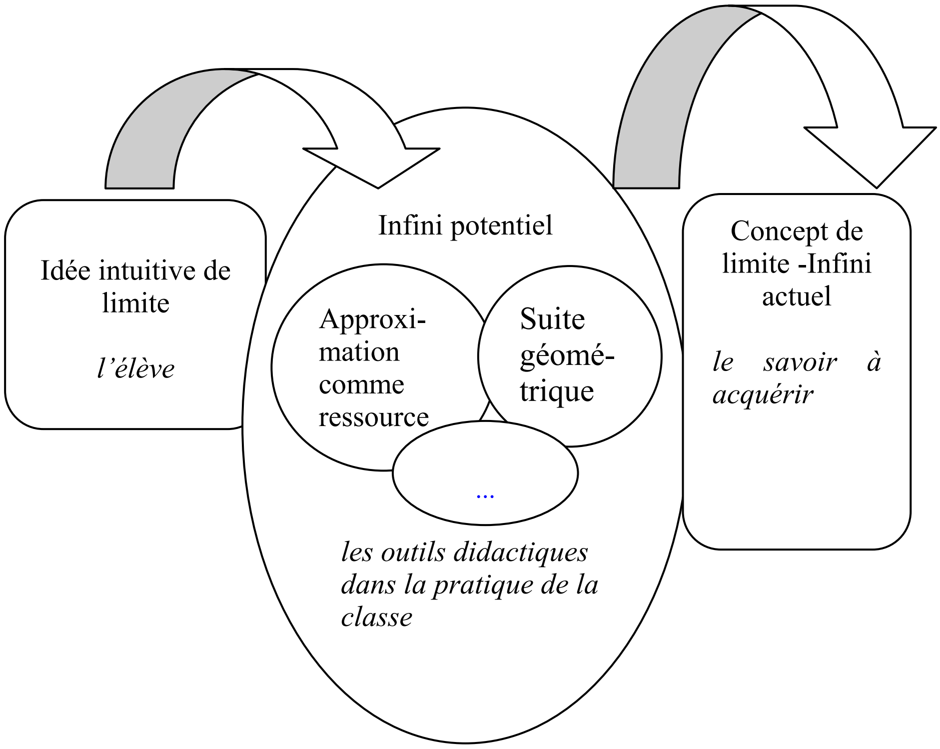
En essayant de tirer quelques conclusions on remarque que les difficultés prévues à procéder par l’itération et à affirmer que la limite est infinie apparaissent d’une façon significative.

On pourrait rapporter ces problèmes à une opposition entre les termes “limite” et “infini” engendrée par l’usage commun de ces mots.

Mais la question s’est révélée plus insidieuse que l’on ne pensait et les causes des insuccès sont probablement diversifiées et non complètement attribuables à des raisons linguistiques.

On a remarqué par exemple une difficulté considérable et imprévue dans l’interprétation des données graphiques et linguistiques et parfois une mauvaise maîtrise du concept de fonction.

A la suite et à partir des résultats de cette recherche et d'autres qui l'ont suivie (présentation de Falcade, Rizza à Mulhouse en mars 2002) sur les difficultés des élèves en analyse infinitésimale, nous sommes en train de construire des outils didactiques pour la construction de certains concepts, en tenant compte des caractéristiques saillantes de notre recherche (verticalité-de 6 à 18 ans-, prééminence des intuitions des élèves, familiarisation précoce avec l'infini) :



BIBLIOGRAPHIE

ALBERTI N., ANDRIANI M. F., BEDULLI M., DALLANOCE S., FALCADE R., FOGLIA, S., GREGORI S., GRUGNETTI L., MARCHINI C., MOLINARI F., PEZZI F., RIZZA A., VALENTI C.: 2001*,* 'Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite', *Riv. Mat. Univ. Parma*, (6) 3*, 1-21.

ANDRIANI M.F, DALLANOCE S., GRUGNETTI L., MOLINARI F., RIZZA A., 1999, "Autour du concept de limite" in F. Jaquet (ed.) Proceedings of CIEAEM 50*,* Neuchâtel 2-7 August 1998, 329-335.

BOERO P., 1994, 'Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergences et divergences dans les perspectives de recherche', *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, La Pensée Sauvage, 17-50.

BROUSSEAU G., 1976, 'Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques', *Comptes-rendus de la XXVIII^{e} rencontre de la CIEAEM,* Louvain-la-Neuve, 101-117.

BROUSSEAU G., 1996, Fondements et méthodes de la didactiques de mathématiques, in : J. Brun (sous la direction de) *Didactiques des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 45-143.

CROCIANI C., SALOMONE L., 2001, 'Un problème de type géométrique : *La traversée du quadrillage*', in (Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone, eds) Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin, Siena 1999-Neuchâtel 2000, 118-128.

DALLANOCE S., GRUGNETTI L., MOLINARI F., RIZZA A. et AL., 2000, 'A cognitive co-operation across different sectors of education', in Ahmed, Kraemer, Williams (eds.) *Proceedings of CIEAEM 51*, Chichester, Horwood Publishing, 297-303.

FALCADE R., RIZZA A, preprint, 'Approche intuitive du concept de limite', *Comptes rendus du colloque « Regards et perspectives sur l'enseignement de l'Analyse* », Mulhouse, mars 2002.

GLAESER G., 1976, 'Heuristique générale : estimation de la difficulté d'un problème', *Comptes rendus de la XXVIII^{e} rencontre de la CIEAEM*, Louvain-la-Neuve , 33-47.

GRUGNETTI L., RIZZA A., BEDULLI M., FOGLIA S., GREGORI S., 1999, 'Le concept de limite : Quel rapport avec la langue naturelle ?' in F. Jaquet (ed.) Proceedings of CIEAEM 50, Neuchâtel 2-7 August 1998, 313-318.

GRUGNETTI L, JAQUET F., TIÈCHE CHRISTINAT C., preprint, 'Enjeux didactiques des concours mathématiques', Actes du Colloque international Guy

Brousseau « Autour de la théorie des situations didactiques », Bordeaux 26-28 giugno 2000.

GRUGNETTI L., RIZZA A., DALLANOCE S, FOGLIA S., GREGORI S., MARCHINI C., MOLINARI F., PICCOLI A., VANNUCCI V., 2002, 'Piccole intuizioni crescono : alcune attività per sviluppare idee intuitive a livello di scuola dell'obbligo', in Malara N.A., Marchini, C., Navarra, G., Tortora, R. (eds.), 2002 : *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora Editrice, Bologna.

IACOMELLA A., LETIZIA A., MARCHINI C., 1997, *Il progetto europeo sulla dispersione scolastica : un'occasione di ricerca didattica. Dalla lingua d'uso comune e con il buon senso verso l'idea di connettivo logico e di quantificatore logico*, Galatina.

IESU N., 1999, 'Le point sur l'expérience, in (Grugnetti, Jaquet, eds) *Le Rallye mathématique transalpin. Quel profits pour la didactique ?*, Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin, Brigue 1997 – 1998, Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel 33-36.

JAQUET F., 2e Rallye mathématique romand, Math-Ecole, n. 162, 1994, 17-21.

JAQUET F., 2000, 'Le conflit aire-périmètre', *L'educazione Matematica*, première partie. n. 2-giugno, 66-77, deuxième partie n. 3-ottobre, 126-143.

MAZZONI C., 1999, Le point de vue d'une enseignante de l'école primaire. IN : L. Grugnetti & F. Jaquet (Eds)) *Actes des journées d'études sur le RMT, Brigue 1997-98,* 23 - 28. Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel, 23 – 28.

PLUVINAGE F., 1977, *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques (Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités*, Strasbourg, Thèse de Doctorat d'Etat (Sciences).

PLUVINAGE F., 2003, Expression et représentation, leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique in : Didactique des mathématiques, *Revue du Centre de Recherche en Education*, n° 22-23 (décembre 2002) coordonné par Alain Denis, Saint-Étienne, Université Jean Monnet, 235-276.

PUXEDDU S., 1999, Rallye et interdisciplinarité : l'expérience d'une enseignante de lettres. IN : L. Grugnetti & F. Jaquet (Eds)) *Actes des journées d'études sur le RMT, Brigue 1997-98,* 29 - 32. Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel, 29-32.

Unità locale di Ricerca Didattica dell'Università di Parma, Italie

Moncef ZAKI

ACQUIS ET APPLICATIONS DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : QUELQUES RÉSULTATS MÉTHODOLOGIQUES ET DE RECHERCHES AU NIVEAU UNIVERSITAIRE

Abstract. Through a short presentation of his team's researches (GRDM from Fes), the author insists on his methodology. This latter links quantitative and qualitative analyses with students' observations.

Résumé. Il s'agit ici à travers une rapide présentation des activités de recherche du groupe GRDM de Fes, de préciser la méthodologie utilisée en didactique des mathématiques. Cette dernière articule l'analyse qualitative et quantitative avec des observations d'étudiants.

Mots clés : Méthodologie, Analyse qualitative, Analyse quantitative, Probabilités, Analyse.

---

1. Introduction

L'ensemble des travaux de recherches menés par le GRDM de Fès est axé sur le premier cycle universitaire scientifique. Une telle orientation des recherches à ce niveau d'enseignement confère à ce groupe une certaine spécificité dans la communauté des didacticiens. En outre, le GRDM a mené durant ces dix dernières années, une étroite collaboration d'échanges et de recherches scientifiques avec F. Pluvinage. C'est donc à ce titre là que l'un des membres du groupe est intervenu à la table ronde « Acquis et applications de la didactique des mathématiques » organisée autour du texte écrit de F. Pluvinage « Expression et représentation, leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique ».

2. Acquis méthodologiques et résultats de recherches

Une première recherche, d'abord initiée à Strasbourg puis ensuite poursuivie à Mons, s'est intéressée à l'évolution des appréhensions probabilistes des étudiants en situation de simulation (M. Zaki, 1991). Ce travail a permis d'asseoir et de définir une méthodologie d'observations et d'analyses, que le groupe a su développer tout au long de ses recherches.

Le groupe a privilégié une approche expérimentale basée sur l'observation d'étudiants à effectif réduit sur de longues durées, à laquelle sera associée selon les besoins la passation d'un (ou plusieurs) questionnaires auprès d'un grand nombre d'étudiants.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 61 – 66.

Cette méthodologie expérimentale est en fait fortement liée aux méthodes d'analyses (M. Zaki, 2000) ; celles-ci sont souvent le résultat de couplage d'analyses qualitatives et quantitatives (issues essentiellement de méthodes factorielles).

2.1. De l'analyse qualitative vers l'analyse quantitative

Ayant observé des binômes sur de longues durées traitant des problèmes de probabilités en situation de simulation (M. Zaki, F. Pluvinage, 1991), l'analyse qualitative des productions et des démarches de résolutions des étudiants a permis d'émettre l'hypothèse selon laquelle, la réussite de beaucoup de traitements probabilistes[1] en situation de simulation est tributaire d'un seuil minimum d'appréhension probabiliste, à savoir une approche fréquentiste des probabilités.

Afin d'évaluer la portée de ces résultats, il fallait s'interroger sur les prérequis probabilistes des étudiants interrogés. Cela a conduit alors les investigations de cette recherche vers une étude quantitative de l'évolution de leurs appréhensions probabilistes.

Une approche méthodologique assez lourde des deux points de vues « observation » et « analyse » a été engagée, recourant d'une part à l'interrogation d'un grand nombre d'étudiants sur des questions très précises en probabilité, et d'autre part à la mise en œuvre d'analyses factorielles multidimensionnelles à partir des variables qualitatives dégagées par l'analyse initiale.

Les résultats de ce travail sont décrits de manière détaillée dans la thèse de M. Zaki (M. Zaki, 1991), néanmoins il faudrait surtout souligner ici que sans la complétion de l'analyse qualitative de départ par des analyses quantitatives, il aurait été probablement très difficile de mener une étude complète et précise sur l'évolution des appréhensions probabilistes des étudiants.

Une autre recherche réalisée au sein du groupe sur les éléments de structurations relatifs à l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire (A. Behaj, 1999) a aussi conduit à une approche méthodologique très voisine de celle menée dans l'étude précédente.

Plutôt que d'aborder ce sujet par la mise des étudiants en situation de résolution de problèmes, il paraissait ici *a priori* intéressant d'entamer cette recherche par une étude clinique, d'une part auprès des enseignants sur leur façon de concevoir leur cours (A. Behaj, G. Arsac, 1998) et d'autre part auprès des étudiants sur leurs méthodes et moyens d'apprentissages. Le fait que le cours magistral revête une grande importance dans le fonctionnement du système d'enseignement supérieur en tant que moyen didactique traditionnel, justifiait pleinement cette approche pour un premier déblayement du terrain.

---

[1] Elémentaires ou même parfois avancés.

C'est donc dans un contexte expérimental de préparation d'un cours (sur les débuts de l'algèbre linéaire), en vue de le présenter à quelqu'un, que des enseignants et des étudiants ont été interviewés. L'analyse qualitative réalisée dans le cadre de cette étude clinique a ainsi permis de mettre en évidence un certain nombre d'hypothèses sur la structuration du savoir chez les étudiants, en l'occurrence les facteurs les plus importants qui interviennent dans cette structuration et dont on retrouve quelques-uns uns dans la théorie de la transposition didactique de Y. Chevallard[2].

Afin d'approfondir ces résultats, comme dans l'étude sur « les probabilités », il fallait entreprendre une approche à plus grande échelle de type statistique. Ainsi, un questionnaire a été élaboré à partir de variables didactiques identifiées grâce aux résultats des interviews préalablement pratiquées. Deux classes de questions ont été retenues, d'une part des « questions d'environnement » qui renvoient à l'histoire d'apprentissage des étudiants, et d'autre part des « questions mathématiques » liées aux contenus mathématiques.

Des analyses factorielles de correspondances multiples ont été réalisées à partir des réponses des étudiants au questionnaire, et ont permis d'obtenir des résultats assez fins, en termes de hiérarchisation et de liens, autour de cette *notion de structuration*, en particulier sur :

- l'apparition très majoritaire de phénomènes de décalage entre le temps d'apprentissage et le temps d'enseignement,
- les événements qui sont l'occasion de reprise et de restructuration du savoir (révision en vue d'un examen, explication à autrui, etc..),
- la grande variété de structurations personnelles des éléments de savoir chez les étudiants et la diversité dans leurs stratégies d'apprentissage.

2.2. De l'analyse quantitative vers l'analyse qualitative

Le groupe a aussi entrepris un travail de recherche autour de la reconnaissance et la construction de contre-exemples chez les étudiants en analyse mathématique des fonctions (A. Benbachir, 2002).

Au départ, une étude épistémologique sur l'évolution de l'objet fonction a montré que la production d'exemples et de contre-exemples a joué un rôle très important dans le développement de l'analyse mathématique autour de la notion de fonction. La question était donc de savoir si la production d'exemples et de contre-exemples pouvait permettre aux étudiants une appropriation des fonctions de manière assez fine, du moins meilleure que celle qui résulterait d'un enseignement habituel (A. Benbachir, M. Zaki, 2001).

En adoptant une démarche expérimentale analogue à celle habituellement utilisée par le groupe, un nombre assez réduit d'étudiants regroupés en binômes a

[2] Les contraintes que prennent en compte les enseignants dans la structuration de leur cours sont encore plus complexes que celles prévues par la théorie de la transposition didactique.

été suivi sur des durées assez longues, travaillant sur le même ensemble de problèmes d'analyse des fonctions. Les corpus recueillis à l'issue de l'expérimentation étaient constitués des textes écrits reproduisant pour chaque binôme, en plus du dialogue, toute la production des deux membres du binôme. La taille des bases de données obtenues était importante (entre 350 et 600 unités de signification), elle suggérait un traitement statistique particulier, en l'occurrence celui d'une analyse factorielle de correspondances multiples.

Cette analyse quantitative a conduit à l'identification de deux types de stratégies chez les étudiants en situation de productions d'exemples et de contre-exemples : des *stratégies locales* et des *stratégies globales*.

Ensuite, une analyse qualitative a été conduite sur les corpus des binômes, à partir des groupes de modalités des variables ayant eu les plus fortes contributions dans les analyses factorielles. Ce retour aux corpus a permis de déterminer qualitativement les stratégies dégagées, en identifiant les éléments pertinents qui caractérisent les démarches des étudiants.

Le travail d'observation, ainsi que les analyses faites sur les productions des étudiants, ont montré que les situations de productions de contre-exemples sont très enrichissantes du point de vue apprentissage dans le traitement analytique des fonctions. Par ailleurs, la détermination de stratégies obtenue grâce à cette recherche pourrait s'avérer très utile dans la conduite de séquences de travail avec des groupes d'étudiants autour de l'analyse des fonctions en situation de productions d'exemples et de contre-exemples.

Le groupe s'est aussi intéressé au suivi de binômes en situation de résolution de problèmes (d'analyse ou d'algèbre) dans un milieu intégrant un système de calcul formel (en l'occurrence le logiciel DERIVE) (M. Mouradi, 2002). Dans cette recherche aussi, grâce uniquement à une analyse qualitative, une détermination des démarches des étudiants a pu être réalisée en termes d'approches «synthétique» ou «analytique» dans les traitements des étudiants dans «l'environnement DERIVE» (M. Mouradi, M. Zaki, 2001).

Seule une analyse qualitative dans cette recherche a suffi pour caractériser les démarches des étudiants et même pour donner des indications assez précises sur les profils personnels qui s'expriment dans un environnement de calcul formel.

Ainsi, le couplage d'analyses qualitatives et quantitatives n'est pas toujours nécessaire pour l'obtention de résultats élaborés, néanmoins cette approche d'analyses reste souvent efficace pour répondre aux questionnements d'une problématique donnée.

3. Conclusions

L'approche méthodologique, à la fois du point de vue de l'observation et celui de l'analyse, qui est décrite dans l'ensemble des recherches présentées ici, constitue certainement un acquis méthodologique dans la recherche en didactique des mathématiques[3]. Le fait de pratiquer des observations (sur des traitements mathématiques ou même cliniques) auprès d'un nombre réduit d'étudiants, accompagnées de questionnements[4] auprès de groupes d'étudiants à grands effectifs, permet d'obtenir dans beaucoup de situations des corpus de données complémentaires. Par ailleurs, lorsque les analyses qualitatives et quantitatives sont bien conduites, les résultats obtenues dans ces cas là sont souvent bien élaborés et peuvent, modulo certains ajustements relatifs aux « conditions de classe », être réinvestis dans des pratiques d'enseignements.

Les travaux du GRDM constitue un petit acquis de recherche didactique au niveau universitaire, sur des contenus mathématiques assez diversifiés. Les résultats de recherches relatifs aux stratégies développées par les étudiants dans leurs traitements mathématiques, ouvrent des perspectives au groupe pour un travail de développement autour de l'ingénierie didactique, notamment dans les situations d'enseignement où les étudiants pourraient conduire certaines activités mathématiques en petits groupes.

[3] Les autres disciplines pourraient aussi s'en inspirer pour conduire des recherches dans le domaine de la didactique.

[4] De préférence à choix multiples ou avec un nombre réduit de modalités lorsque les questions sont ouvertes.

BIBLIOGRAPHIE

A. BEHAJ, G. ARSAC, 1998, *La conception d'un cours d'algèbre linéaire.* Recherche en Didactique des Mathématiques, vol. 18/3, 333-370, La Pensée Sauvage – Editions, Grenoble.

A. BEHAJ, 1999, *Eléments de structurations à propos de l'enseignement et l'apprentissage à long terme de l'algèbre linéaire*, Thèse de Doctorat, Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, Faculté des Sciences Dhar Mehraz/Département de Mathématiques et Informatique.

A. BENBACHIR, M. ZAKI, 2001, *Production d'exemples et de contre-exemples en analyse : étude de cas en première année d'université,* Educational Studies in Mathematics, vol. 47, 273-295, Kluwer Academic Publishers/Dordrecht.

A. BENBACHIR, 2002, *Reconnaissance et construction de contre-exemples en analyse mathématique des fonctions : étude de cas en première année d'université,* Thèse de Doctorat. Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, Faculté des Sciences Dhar Mehraz/Département de Mathématiques et Informatique.

M. MOURADI, M. ZAKI, 2001, *Résolution d'un problème d'analyse à l'aide d'un logiciel de calcul form,.* Recherche en Didactique des Mathématiques, vol. 21/3, 355-392, La Pensée Sauvage – Editions, Grenoble.

M. MOURADI, 2002, *Résolution de problèmes mathématiques dans un environnement intégrant un logiciel de calcul forme,* Thèse de Doctorat. Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, Faculté des Sciences Dhar Mehraz/Département de Mathématiques et Informatique.

M. ZAKI, F. PLUVINAGE, 1991, *Démarches de résolution et de simulation face au problème de la ruine d'un joueur,* Educational Studies in Mathematics, vol. 22, 149-181, Kluwer Academic Publishers/Dordrecht.

M. ZAKI, 1991, *Evolution d'appréhensions probabilistes en situation de simulation,* Thèse de Doctorat, Université de Mons-Hainault/Institut de Mathématiques et Informatique, Belgique.

M. ZAKI, 2000, *L'analyse factorielle, un matériau d'analyse pour la recherche en didactique,* Actes de la Première Biennale du Réseau Marocain de Didactique des Sciences (RéMaDiS) : « Enseignement et recherche en Didactique des Sciences (ERDS 2000)», Faculté des Sciences Dhar El Mehraz et ENS. Fès.

Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques
Université de Fès – B.P. 1796 / Maroc
zaki.moncef@caramail.com

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN

ECLAIRAGES ET QUESTIONS POUR LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES : Cadres et registres en jeu dans la résolution de problèmes en lien avec les connaissances des élèves et recherches sur l'action des enseignants en classe.

Abstract. The first part of this paper is a reflection on the use of two notions to analyse the mathematical activity of students in problem solving, related to their knowledge: settings changes (Douady, 1987) and conversion of semiotic registers (Duval, 1995). The second part presents some results and some prospects on the action of the teacher in class in connection with recent theoretical progress.

Résumé. Cet article comporte deux parties. La première est consacrée à une réflexion sur l'usage des notions de changement de cadres (Douady, 1987) et de conversion de registres de représentation sémiotique (Duval, 1995) pour l'analyse de l'activité mathématique des élèves dans les résolutions de problème en relation avec les connaissances dont ils disposent. La seconde présente quelques résultats et perspectives des recherches françaises sur l'action de l'enseignant en classe en relation avec les avancées théoriques des dernières années.

Mots-clés : didactique des mathématiques ; registres sémiotiques ; conversion de registres ; changements de cadres ; résolution de problèmes ; interaction de points de vue ; action de l'enseignant ; pratiques des enseignants.

François Pluvinage a abordé de nombreux aspects de la didactique des mathématiques et même de l'épistémologie de la didactique. Cependant il fallait choisir et je commence par en citer quelques-uns qui me paraissent importants mais que je n'effleurerai que très indirectement, les laissant à la discussion générale :

- le lien éventuel entre les recherches en didactique des mathématiques et l'évolution des manuels : est-ce que le découpage des contenus effectué par les manuels tient compte des résultats des recherches, est-ce qu'il est une meilleure aide à l'étude pour l'élève, une meilleure aide pour organiser son enseignement pour l'enseignant ? Comment les recherches s'intéressent-elles aux manuels scolaires ?
- plus généralement, la question de la responsabilité de la recherche par rapport à l'enseignement : quels effets (positifs ou négatifs) les recherches ont-elles sur l'enseignement ? Comment les chercheurs communiquent-ils avec les enseignants ? Dans quelles structures, quelles rencontres, quelles publications ? Comment interviennent-ils dans la formation des enseignants à une époque où beaucoup d'entre eux ont un poste dans un IUFM ?

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 67 – 82.

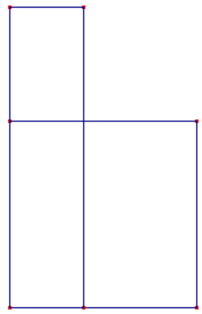
- le rapport entre la didactique des mathématiques et les disciplines connexes comme la psychologie, la sociologie, l'anthropologie, la linguistique ou les sciences de l'éducation, entre la didactique des mathématiques et les didactiques des autres disciplines. Quelle est la place des recherches pluridisciplinaires pour aborder des questions d'enseignement ? Peut-on comparer les didactiques ? Y a-t-il des savoirs didactiques qui transcendent les disciplines ?
- la question fondamentale des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques qui a été évoquée sous deux formes : celle des outils mathématiques, notamment d'analyse de données, utilisés en didactique des mathématiques et celle de l'épistémologie. Jusqu'où l'analyse didactique colle-t-elle à l'analyse mathématique ou épistémologique ?

Je me contenterai de réagir sur les deux points qui me sont les plus familiers : celui de l'articulation entre différents registres de représentation que je mettrai en parallèle avec l'utilisation des changements de cadres et celui des recherches sur les pratiques de l'enseignant ou l'action de l'enseignant.

1. Jeux de cadres et articulation de registres

François Pluvinage a souligné dans son exposé l'importance des faits langagiers en mathématiques et l'importance de la coordination des registres de représentation. Il a aussi rapproché les changements de registre des changements de cadres. Ceux-ci ont été utilisés par Régine Douady (1987) dans les jeux de cadres comme outil à la disposition de l'enseignant ou de l'ingénieur didacticien pour poser des problèmes qui font sens pour les élèves et permettent de faire avancer leurs connaissances. Je ferai deux remarques à ce propos :

a) Dans l'analyse didactique, il n'est pas toujours aisé de savoir si on a affaire à un changement de cadres ou de registres et il me semble que cela peut dépendre des connaissances supposées aux élèves. Je vais l'illustrer sur un exemple. Prenons le problème suivant, qui peut être proposé à des élèves de CM2 (comme nous l'avons fait avec R. Douady) ou à des élèves de seconde, et examinons les outils à la disposition des élèves dans les deux cas : "Parmi les rectangles de périmètre 50 cm, quel est celui qui a la plus grande aire ?"

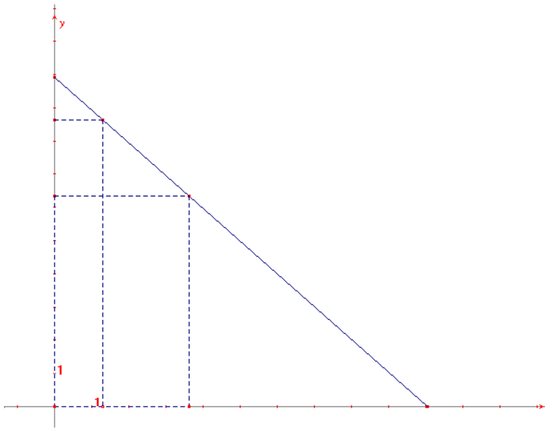


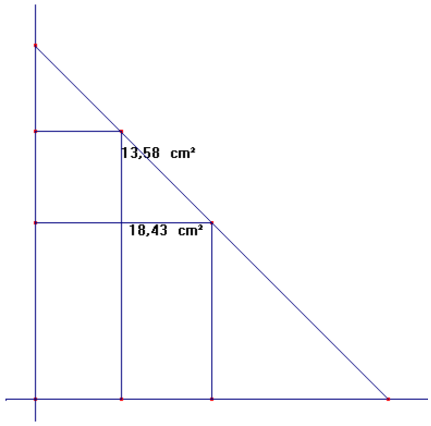
Le problème est posé dans le cadre géométrique, dans le registre du langage naturel. Mais c'est un problème de mesures, périmètre et aire activent des connaissances sur des formules qui peuvent inciter les élèves à passer dans le cadre numérique. Dans le cadre géométrique, les élèves disposent du registre graphique des rectangles dessinés mais ils peuvent aussi matérialiser les rectangles en les découpant dans du papier et recourir à des manipulations pour faire des comparaisons. C'est d'ailleurs un moyen de trouver la réponse et même d'en avoir une justification (comme je l'ai vu en CM2) qui est de l'ordre de l'exemple générique, selon la terminologie de Balacheff (1988) et qu'il suffirait de formaliser pour aboutir à une démonstration : la comparaison de ce qui dépasse.

Cette procédure de base - dessiner des rectangles de périmètre 50 cm - ne permet pas forcément de résoudre le problème, mais elle permet en général de le traduire dans le cadre numérique par la formule $l + L = 25$ dans le registre symbolique ou, dans le registre du langage naturel, "parmi les couples de nombres dont la somme est 25, quel est celui qui a le plus grand produit ?".

Mais les essais au hasard ne donnent pas grand chose. Il faut garder une trace des essais pour les organiser. Là, souvent, l'enseignant est obligé d'intervenir, à moins que ce ne soit une habitude de la classe, pour proposer de faire un tableau ou un graphique. Il suggère ainsi un changement de registre dans le cadre numérique.

l	L	A
5	20	100
10	15	150
2	23	46
12	13	156





Le registre des tableaux incite à ordonner et donc à repérer une variation. Dans le registre graphique plusieurs représentations sont possibles puisqu'on a 3 variables. Le graphique des couples (l, L) représente plus facilement les rectangles pour des élèves de CM2 que celui des couples (l, A). On peut utiliser un registre mixte en écrivant l'aire à côté du point qui représente le rectangle.

Ici, le graphique est porteur d'une connaissance qui n'est présente ni dans le cadre numérique, que ce soit dans le registre symbolique de l'écriture des nombres ou dans celui du tableau, ni dans le cadre géométrique, que ce soit dans le registre des figures ou sur les rectangles découpés, c'est la continuité. C'est pourquoi le passage au graphique relève davantage à ce niveau d'un changement de cadres que d'un changement de registre : on n'a plus affaire aux même objets, on obtient des points alignés et non plus des nombres ou des rectangles. De plus, le graphique peut jouer le rôle d'intermédiaire entre le cadre géométrique et le cadre numérique parce que les deux s'y retrouvent et qu'il porte des connaissances qui ne sont pas disponibles dans les autres cadres. En effet, le dessin du rectangle est présent en même temps que ses dimensions (et même la mesure de l'aire si on l'écrit à côté du point qui représente le rectangle) et la continuité de la variation est matérialisée par le segment qui représente l'ensemble des rectangles. On a ici l'ensemble des rectangles avec un ordre qui permet de rendre compte de la variation. Or l'ensemble des rectangles n'est pas disponible dans les autres cadres. Le graphique permet de poser le problème général parce que c'est l'amorce du cadre des fonctions. Il permet aussi d'accéder à la preuve géométrique par le lien qu'il permet entre le géométrique et le numérique. Un logiciel de géométrie dynamique apporte un nouveau milieu qui facilite la liaison entre le cadre numérique et le cadre géométrique. On peut représenter géométriquement le demi-périmètre, le déplacement du point figurant le sommet commande alors les déplacements sur le graphique et les valeurs numériques affichées. Le classement des Cabrifigures parmi les représentations n'est pas facile. Cela avait alimenté quelques discussions dans le séminaire de Raymond Duval à l'IUFM Nord-Pas-de-Calais il y a quelques années, mais je ne me souviens pas que l'on ait tranché.

Si on pose le même problème en classe de seconde, le cadre algébrique est disponible, ainsi que le sous cadre des fonctions : on peut exprimer l'aire en fonction de la largeur, avec une représentation dans le registre des écritures symboliques $A = l\ (25-l)$ qu'on peut traduire point par point dans le registre graphique, ce qui rendra évident le résultat. On a bien cette fois représentation d'un même objet référent dans des registres différents, même si, là encore, la continuité n'est accessible que dans le registre graphique. On a en revanche à ce niveau une possibilité de démonstration dans le cadre algébrique et le registre des écritures symboliques : $A = -l\ \ +25\ l = -(l-25)\ \ + 12,5$.

En fait, peu importe si on a affaire à un changement de cadre ou de registre. L'important est que les outils sémiotiques font partie intégrante de l'activité mathématique parce que ce sont des instruments de cette activité qui repose, en reprenant la terminologie de Bosch et Chevallard (1999), sur la manipulation d'ostensifs contrôlée par des non ostensifs. Les cadres contiennent à la fois les ostensifs et non ostensifs de l'activité mathématique, c'est-à-dire les règles de manipulation des ostensifs ainsi que les raisons de ces règles alors que les registres de représentation sémiotique comprennent certains des ostensifs ainsi que les règles de manipulation.

b) Quelle relation entre articulation de registres de représentation et construction des connaissances ? L'articulation de registres de représentation est-elle un préalable à l'usage des objets représentés dans le traitement de problèmes mettant en jeu ces objets ou le traitement de problèmes concernant les objets aide-t-il à l'articulation des registres qui les représentent ? En fait, je crois que l'action a lieu dans les deux sens et que l'articulation des registres de représentation se fait en interaction avec le développement des connaissances sur les objets représentés. Je vais le montrer avec un exemple de géométrie, une vieille question revenue d'actualité : cas d'isométrie des triangles ou transformations géométriques ? Il s'agit d'un exemple extrait d'un mémoire de stagiaires PLC2.

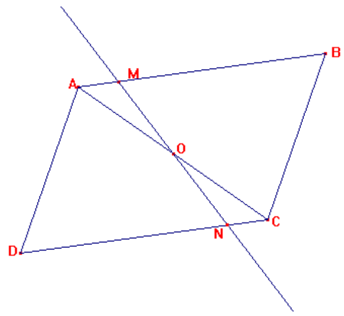
Les trois stagiaires enseignent en seconde. Ils ont posé le problème suivant en devoir à la maison à leurs trois classes à un moment où le chapitre sur les triangles isométriques a été traité et où il y a eu aussi des exercices de réinvestissement sur la symétrie centrale. Les deux méthodes sont donc en principe disponibles.

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
Soit M un point du segment [AB], distinct de A et B.
La droite (OM) coupe [CD] en N.
Faire une figure.
Le but de cet exercice est de démontrer que O est le milieu de [MN], de deux manières différentes.
Partie A

1- Montrer que MÂO = OĈN et que AÔM = NÔC.
2- Démontrer alors que AOM et OCN sont isométriques.
3- Quelles égalités de longueur peut-on déduire ?
4- En déduire que O est le milieu de [MN].

Partie B
Soit s la symétrie centrale de centre O
1- a- Déterminer l'image des points A et B par s. Justifier votre réponse.
b- Déterminer l'image des droites (AB) et (OM) par s. Justifier votre réponse.
2- En déduire que N est l'image de M par s.
3- Montrer que O est le milieu de [MN]

On remarquera que l'exercice est très détaillé, pour l'une comme pour l'autre méthode. Tout le schéma des démonstrations est indiqué, les élèves n'ont qu'à reconnaître les théorèmes suggérés et à les mettre en œuvre. Or les stagiaires constatent que les élèves ont beaucoup mieux réussi la partie A que la partie B.

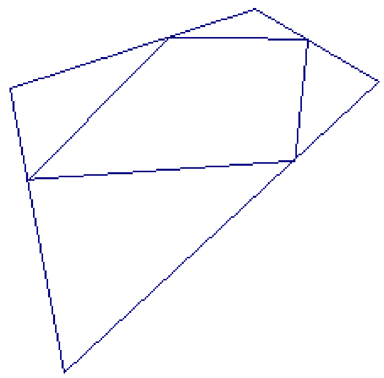


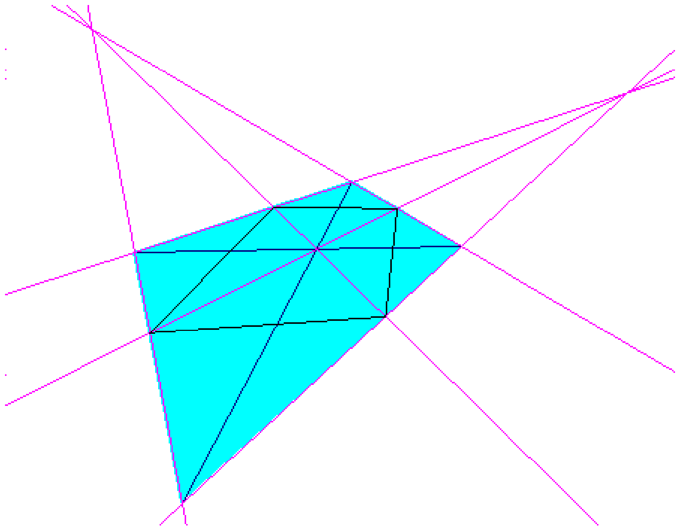
Les élèves ont rencontré des difficultés pour trouver l'image de la droite (OM) : la plupart des élèves ont utilisé le fait que N est l'image de M par la symétrie centrale pour le montrer et ils ont été évidemment bloqués à la question 2 ; les autres n'ont en général pas su traiter la question 2 parce que très peu d'élèves ont compris qu'il fallait considérer le point M comme intersection des droites (AB) et (OM) pour trouver son image. D'ailleurs, les élèves, à qui on demandait leur avis sur les méthodes ont trouvé la première plus facile et l'un des élèves a dit "car j'ai du mal avec les images des points".

On voit ici une interaction entre la vision de la figure et les connaissances nécessaires pour traiter le problème géométrique dans le sous-cadre des transformations ou dans celui des propriétés de configurations notamment les cas d'isométrie des triangles.

Pour montrer l'égalité des angles et l'isométrie des triangles, on regarde les triangles comme des surfaces et les côtés comme des bords de ces surfaces ce qui est cohérent avec la vision au premier coup d'œil de la figure comme juxtaposition et inclusion de surfaces. La seule difficulté est de choisir le bon cas d'isométrie : on ne connaît qu'une égalité de côtés, il faut donc s'occuper des angles mais cette difficulté est prise en charge par l'énoncé. Pour la démonstration qui utilise les propriétés de la symétrie centrale, il y a nécessité d'un changement de dimension : il faut voir le point M comme intersection des droites et déduire l'image de M de celle des droites. C'est un véritable changement de point de vue sur la figure : penser un point comme intersection de deux droites plutôt qu'une droite comme joignant deux points. De plus, si l'on pense à la symétrie centrale, l'évidence perceptive de la correspondance entre les points M et N bloque la recherche d'une démonstration : il faut une bonne maîtrise du raisonnement et une bonne connaissance des propriétés de la symétrie centrale pour mettre de côté cette évidence et se dire que c'est ce que l'on cherche à démontrer et qu'il faut donc trouver d'autres éléments qui définissent M et dont on peut prouver plus facilement l'image. Inversement, la connaissance des propriétés de la symétrie centrale aide à ce changement de regard quand on se demande ce que l'on sait et ce que l'on peut facilement déduire des données.

Ce travail perceptif sur la figure et le changement de dimension, notamment repérer des intersections et des alignements, voir un point comme intersection de lignes, peut se faire bien avant l'apprentissage de la démonstration, par exemple à travers la production et la reproduction de figures (au sens de dessin). C'est l'objet d'une recherche que nous menons actuellement à l'IUFM Nord Pas de Calais. Par exemple, on a proposé à des élèves de CM2 de reproduire la figure suivante à une taille différente déterminée par la donnée du polygone extérieur. Il faut pour cela repérer des alignements ou des intersections, y compris à l'extérieur du cadre de la figure de départ.





C'est le même genre de préoccupations qu'avaient Pluvinage et Rauscher en 1986 dans "La géométrie construite mise à l'essai" quand ils voulaient privilégier au début du collège une géométrie de construction où on travaille sur des figures effectives, résultat d'un programme de tracé qu'il faut concevoir pour reproduire une figure.

2. Recherches sur l'enseignant

François Pluvinage a préféré ne pas développer la question de la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques, disant qu'elle lui semblait ne relever que très partiellement de la recherche en didactique des mathématiques et qu'au-delà de la préparation des concours, la formule qui lui paraissait la plus féconde était celle de la participation à des recherches action, telles qu'on peut les pratiquer dans les IREM.

Sans minimiser le caractère essentiel pour la formation continue des recherches action qui sont menées dans les IREM, et j'en profite pour rappeler que la recherche en didactique des mathématiques est née des IREM, je voudrais quand même dire que la recherche en didactique doit prendre dans son champ d'étude la question de la formation des enseignants et, en amont, celle de l'étude du rôle de l'enseignant dans l'enseignement des mathématiques et des pratiques ordinaires des enseignants. Elle a commencé à le faire et les recherches dans ce domaine se développent beaucoup depuis une dizaine d'années. Dès la fin des années 80 et le début des années 90, les difficultés de transmission des ingénieries didactiques et les nécessités de la formation amènent les didacticiens à faire un peu plus de place à l'enseignant dans leurs objets d'étude, écartant la tentation première de se substituer à lui. L'objet d'une recherche scientifique est la production de connaissances et non la modification du système. Cependant, pour que les recherches en didactique soient utiles aux enseignants et à terme puissent avoir une influence sur la formation des enseignants, il faut d'abord mieux comprendre les déterminants de l'action de l'enseignant en classe. D'ailleurs, une des premières recherches s'intéressant directement aux pratiques ordinaires des professeurs a été menée à Strasbourg, c'est la thèse de Rauscher (1993). Il cherche à déterminer les objets d'enseignement que se donnent des professeurs de sixième en géométrie à travers leurs pratiques d'évaluation. Bolon (1996) a aussi mené une étude indirecte des pratiques ordinaires des enseignants de l'école et de sixième en regardant les raisons qui leur faisaient adopter ou rejeter un scénario d'enseignement sur les décimaux ou la manière dont il était transformé. Les recherches actuelles s'appuient en général sur des pratiques observées. Les méthodes sont diverses mais il s'agit souvent d'études cliniques, rarement statistiques.

J'ai été amenée en 2001, dans le cadre du programme cognitique, à participer à un rapport de synthèse (Perrin-Glorian, 2002) sur les recherches concernant l'étude des stratégies de l'enseignant en situation d'interaction. J'étais chargée des travaux de didactique des mathématiques. Un résumé de ce rapport sera publié et le rapport complet devrait paraître sous forme électronique mais il n'est évidemment pas question de reprendre l'ensemble de cette synthèse ici, ce serait beaucoup trop long. Je vais simplement pointer les questions abordées et les avancées de ces dix dernières années dans les recherches françaises.

2.1. Questions abordées par les recherches

Contrairement à ce qui se passe au niveau international, les recherches sur les croyances des enseignants de mathématiques, présentes dans les recherches françaises au début des années 90 sont pratiquement inexistantes actuellement. Les différentes recherches abordent les questions par des entrées diverses liées aux cadres théoriques et aux méthodes choisis, mais on peut retrouver des préoccupations communes ou largement partagées dans les recherches, que j'ai tenté de dégager, même si la formulation de la question peut faire référence à un cadre théorique plutôt qu'à un autre.

2.1.1. Déterminer des contraintes et des marges de manœuvre de l'enseignant

L'enseignant est soumis à un certain nombre de contraintes qui viennent de l'institution scolaire (programmes, examens, horaire prévu…), de l'établissement (emploi du temps de la classe, manuel scolaire, les autres classes où il enseigne, collègues…), des nécessités de l'enseignement (évaluation…), des élèves (niveau scolaire, origine sociale…), et de lui-même (son histoire, ses propres connaissances sur le sujet qu'il doit enseigner, ses préférences, sa tolérance au bruit…). Il lui reste cependant certaines marges de manœuvre pour s'adapter à ces contraintes. Rechercher ces contraintes et ces marges de manœuvre revient aussi à identifier des institutions (au sens large) auxquelles l'enseignant a affaire et qui risquent d'avoir un effet sur la viabilité de l'une ou l'autre des stratégies qu'il pourrait mettre en place.

2.1.2. Rechercher des caractéristiques de la position d'enseignant dans une institution didactique

Il s'agit ici de déterminer des caractéristiques générales de la fonction de l'enseignant dans la transmission des savoirs, en tenant compte éventuellement du type d'établissement et du niveau scolaire donné et du contenu précis enseigné. On identifie par exemple des tâches de l'enseignant ou des fonctions qu'il remplit dans la situation didactique, dans l'organisation et la gestion des relations de l'élève avec le savoir, à la fois dans le choix des activités qu'il lui propose, dans l'organisation de son travail et dans la gestion des interactions en classe. On cherche aussi comment peuvent se constituer des routines et quelles sont leurs raisons d'être. L'enseignant est alors vu comme un sujet générique, et les réponses aux questions sont en général d'ordre théorique pour fournir un cadre d'analyse de situations concrètes.

2.1.3. Identifier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer son projet d'enseignement et la place laissée à l'élève dans la réalisation de ce projet

Pour aborder cette question, il faut faire un certain nombre de choix méthodologiques et théoriques car cela suppose d'en traiter plusieurs autres : il faut d'abord déterminer le projet de l'enseignant qui ne se ramène ni aux programmes, ni aux textes qu'il utilise ou fournit aux élèves, ni même à ce qu'il déclare de ce projet. Ce projet peut aussi être défini à différents grains : sur l'année, sur un contenu d'enseignement, sur une séance, sur un exercice, sur une intervention. De même l'activité mathématique de l'élève n'est pas accessible directement : on peut seulement identifier des problèmes, des tâches, c'est-à-dire des activités potentielles de l'élève ou repérer des actions d'un élève, des prises de parole, c'est-à-dire des indices de l'activité des élèves qui restent à interpréter en termes de connaissances mises en jeu. Enfin les moyens didactiques eux-mêmes peuvent être d'ordres très divers : choix de problème, mise en place de dispositifs, discours, organisation du travail des élèves, de leurs prises de parole... Aborder la question de la gestion par l'enseignant de son projet d'enseignement et de l'apprentissage des élèves suppose la mise en place de cadres théoriques et de méthodes adaptées qui ont un effet sur le type de réponse obtenu.

2.1.4. Rechercher des régularités et des variabilités

Ce type de recherche suppose qu'on a identifié un certain nombre de variables qui permettraient de caractériser l'action de l'enseignant en classe et un certain nombre de contraintes qui pourraient avoir un effet sur ces variables. Les régularités peuvent être recherchées chez un même enseignant d'une séance à l'autre, sur un même contenu, sur des contenus différents, elles permettent alors d'identifier certains niveaux de routines. Les régularités entre enseignants différents correspondraient à des caractéristiques de la fonction enseignante, au moins dans un contexte donné : niveau, environnement scolaire, contenu fixés. Les variabilités correspondraient à la part personnelle de l'enseignant, l'investissement de ses marges de manœuvre. Là encore, on peut rechercher des régularités et des variabilités à différents niveaux : une régularité peut correspondre à une contrainte institutionnelle qui n'est pas valable pour le système d'enseignement en entier mais pour une sous-institution. On peut par exemple trouver des régularités dans un collège de banlieue qui ne se retrouvent pas dans un lycée de centre ville.

2.1.5. Comprendre comment se construisent les connaissances de l'enseignant

L'enseignant dispose d'un savoir mathématique, d'un savoir théorique d'ordre pédagogique et didactique et aussi d'un savoir d'expérience. Différents facteurs peuvent contribuer à modifier ces connaissances : cela peut être des lectures personnelles, des rencontres, des formations, mais aussi la pratique professionnelle elle-même. Il est souvent constaté la difficulté de faire évoluer les pratiques par la formation d'où l'hypothèse formulée par certains chercheurs que les connaissances de l'expérience contribuent à automatiser la pratique de l'enseignant, par la mise en place de routines et d'un système d'inter-régulations de ces routines. Ainsi, ces connaissances seraient un des déterminants de la stabilité de la pratique, d'où l'importance de savoir comment elles se forment.

2.2. Quelques résultats

Les résultats sont d'ordre divers. Il faut noter d'abord un *développement et une précision des cadres théoriques* proprement didactiques, comme les notions de milieu et de contrat en théorie des situations, le développement d'un cadre d'études des praxéologies didactiques dans l'approche anthropologique, et aussi l'importation de concepts d'ergonomie cognitive et leur articulation avec les concepts didactiques pour étudier des situations de classe.

Les recherches permettent à la fois de relever *des régularités* en même temps qu'une *grande diversité dans les pratiques* analysées. Des *régularités* modulo de petites adaptations au niveau global en ce qui concerne par exemple *le respect de certaines contraintes* comme les programmes ou le temps consacré à l'enseignement d'une question ou certains types d'exercices abordés dans l'enseignement d'un contenu donné. Mais une *grande variabilité au niveau local* sur l'ordre de présentation, la répartition dans le temps et le développement des différents points. Les premiers travaux portaient essentiellement sur le discours des enseignants, les travaux plus récents prennent en compte beaucoup plus de paramètres. Des études en cours en REP et en ZEP paraissent montrer des régularités chez des groupes d'enseignants qui semblent apporter une réponse collective à un ensemble de contraintes. il ne faut pas perdre de vue cependant que l'enseignant en classe est amené à gérer non seulement les contraintes externes dues au programmes, aux élèves etc… mais aussi les contraintes internes à la situation didactique et à son propre projet d'enseignement.

Parmi les régularités observées, *le recours à des pratiques ostensives* a été relevé par de nombreux chercheurs, y compris dans des situations expérimentales où est organisé un apprentissage par adaptation à une situation voulue adidactique. La résistance des pratiques ostensives malgré les inconvénients relevés par les chercheurs au niveau de l'apprentissage a conduit à étudier quelles fonctions elles remplissent pour les enseignants et pour les élèves, et à rechercher des conditions d'efficacité de ces pratiques, en liaison éventuelle avec d'autres.

L'importance de la *gestion de la mémoire de la classe en liaison avec l'avancée du temps didactique* dans un enseignement à partir de situations a été mise en évidence. Pour gérer l'avancée du savoir dans la classe, le professeur a besoin de garder en mémoire non seulement l'organisation du savoir à enseigner et les situations proposées aux élèves mais aussi ce que chacun d'eux a produit pour pouvoir gérer ce qu'il y a lieu de rappeler ou au contraire d'oublier en fonction de la progression des connaissances des élèves.

Ces derniers temps, beaucoup de travaux ont cherché à étudier *les régulations de l'enseignant,* par ses actions sur le milieu de la situation ou sur le contrat didactique, et plus généralement à caractériser les différentes fonctions didactiques que remplissent les actions de l'enseignant et la manière dont il peut les mettre en œuvre en identifiant des *gestes professionnels de l'enseignant*. Les études portent sur des enseignants ordinaires, des enseignants chevronnés ou des enseignants débutants, cherchant dans ce cas à voir notamment comment évolue le rapport personnel au contenu enseigné et comment se construit un rapport professionnel.

2.3. Des pistes

Au niveau international, on voit au cours des années 90 un déplacement de la recherche d'explication du niveau de l'enseignant en tant qu'individu vers une prise en compte de ce que certains appellent le contexte, c'est-à-dire notamment les contraintes de fonctionnement d'une classe, composée d'élèves particuliers, située dans une institution scolaire qui assigne certains objectifs à l'enseignement, lui fournit certains moyens, les contraintes de fonctionnement du savoir lui-même, et divers déterminants du métier d'enseignant. C'est ainsi que depuis le milieu des années 90 se développent de plus en plus de recherches cherchant à *comprendre l'économie des classes ordinaires et ce qui détermine la stabilité des pratiques*. La France est un des pays où ce tournant a été le plus net et les approches théoriques qui y ont été développées donnent des outils pour la prise en compte des différents aspects qui permettent de comprendre les pratiques des enseignants.

Cependant certaines questions n'ont pas encore été abordées ou ne sont qu'à leurs balbutiements : on ne trouve rien par exemple sur la spécificité de l'enseignant polyvalent pour l'enseignement des mathématiques. Il n'y a pratiquement rien non plus sur l'effet sur les élèves de certaines stratégies d'enseignement. Les premiers travaux s'intéressant aux enseignants avaient comme objectif de voir directement les effets de certaines variables concernant l'enseignant ou ses choix sur l'apprentissage des élèves. Cependant, des corrélations ne donnent pas des explications ni des moyens d'agir. Le problème s'est avéré très complexe, aussi bien pour caractériser les pratiques des enseignants que pour évaluer l'apprentissage des élèves ce qui fait que les chercheurs ont acquis la conviction qu'il n'y avait sans doute pas de stratégie d'enseignement efficace en toute circonstance ni de comparaison universelle des stratégies. Les recherches actuelles cherchent à prendre en compte la complexité de la situation didactique et du rôle de l'enseignant pour mieux caractériser sa fonction, ses intentions ou ses actions. Certaines commencent à prendre en compte le travail hors de la classe (par exemple les devoirs à la maison) comme un moyen d'interaction différé à mettre en relation avec les interactions en classe. Les recherches sur la formation des enseignants se développent mais sont encore peu nombreuses, surtout celles où il s'agit de comprendre comment se constituent les savoirs professionnels de l'enseignant et non d'obtenir un comportement de l'enseignant défini a priori.

Des recherches associant des chercheurs de plusieurs disciplines sur les mêmes objets ont commencé à voir le jour ainsi que des recherches de didactique comparée. Par ailleurs, les méthodes utilisées restent en général très lourdes ce qui amène à privilégier les études de cas. Les collaborations entre équipes qui se développent notamment à travers la constitution de réseaux nationaux, devraient permettre de donner une assise plus large aux résultats obtenus et on peut espérer que l'avancée des recherches permettra d'améliorer l'efficacité des méthodes et d'envisager de les alléger.

BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF Nicolas, 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège.* Thèse d'état, Université de Grenoble 1.

BOLON Jeanne, 1996, *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège,* Thèse Université René Descartes- ParisV.

BOSCH Mariana et CHEVALLARD Yves, 1999, La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 19/1, 77 - 123

DOUADY Régine, 1987, Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématique, vol 7 n°2*, 5-31.

DUVAL, 1995, S*émiosis et pensée humain. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Peter Lang, Bern, 395 pages.

PERRIN-GLORIAN, 2002, Chapitre 8 : Didactique des mathématiques, in Bressoux P. (éditeur) *Les stratégies de l'enseignant en situation d'interaction. Note de synthèse pour Cognitique. Programme Ecole et Sciences cognitive,* Université Pierre Mendès France Grenoble 2, remis au Ministère de la Recherche en février 2002, 203-239.

PLUVINAGE François et RAUSCHER Jean-Claude, 1986, La géométrie construite mise à l'essai, *Petit x n°11,* 5-36.

RAUSCHER Jean-Claude, 1993, *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège,* Thèse, IREM de Strasbourg.

QUELQUES REFERENCES POUR LES TRAVAUX SUR L'ENSEIGNANT

ARTIGUE M. & al., 2000, *De l'analyse des travaux de recherche concernant les T.I.C. à la définition d'une problématique de leur intégration à l'enseignement,* Rapport de recherche pour le C.N.C.R.E.

BLOCH I., 1999, L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19/2, 135-193.

BODIN A. & CAPPONI B., 1996, Junior Secondary School Practices. In Bishop A.J., élements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education,* 565-614, Kluwer Academic Publishers.

BROUSSEAU G., 1996, L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In Noirfalise, R. & Perrin-Glorian, M.J. (Eds) *Actes de la VIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques à Saint-Sauves d'Auvergne,* 3-46, IREM de Clermont-Ferrand.

BRUN J., CONNE F., FLORIS R., & SCHUBAUER-LEONI M.L. (Eds), 1998, *Méthodes d'étude du travail de l'enseignant, Actes des secondes journées didactiques de La Fouly,* Interactions Didactiques, Genève.

CHEVALLARD Y., 1997, Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en didactique des mathématiques,* 17/3, 17- 54.

CHEVALLARD Y., 1999, L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* 19/2, 221-265.

COMITI C. & GRENIER D., 1997, Régulations didactiques et changements de contrat, *Recherches en didactique des mathématiques,* 17/3, 81-102.

COULANGE L., 2000, *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

GRUGNETTI L. & JACQUET F., 1996, Senior secondary school practices in Bishop, A.J. Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education,* 615-645, Kluwer Academic Publishers.

HACHE C., 2001, L'univers mathématiques proposé par le professeur en classe. *Recherches en didactique des mathématiques,* 21/1.2, 81-98.

HACHE C. & ROBERT A., 1997, Un essai d'analyse des pratiques effectives en classe de seconde ou comment un enseignant fait "fréquenter" les mathématiques à ses élèves pendant la classes, *Recherches en didactique des mathématiques,* 17/3, 103-150.

HERSANT M., 2001, *Interactions didactiques et pratiques d'enseignement. Le cas de la proportionnalité au collège,* Thèse, Université Paris 7.

KRAINER K., GOFFREE F., & BERGER P., 1999 (Eds) *European research in Mathematics Education I.III, On research in mathematics teacher Education,* Forchungsinstitut fûr Mathematikdidaktik, Osnabrück.

MARGOLINAS C, 1992, Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques,*12/1, 113-158.

MARGOLINAS C., 1993, La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, In Margolinas (Ed.) *Les débats de didactique des mathématiques*, 89-102, Grenoble : La pensée sauvage.

MARGOLINAS & PERRIN-GLORIAN (Editeurs invités), 1997, *Recherches en didactique des mathématiques,* 17/3, La pensée sauvage, Grenoble, (numéro entièrement consacré au thème de l'enseignant) et Editorial de ce numéro, 7-15.

MASSELOT P., 2000, *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre I.U.F.M.) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas),* Thèse, Université Paris 7.

MATHERON Y., 2000, *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples,* Thèse, Université d'Aix Marseille I.

MERCIER A., 1998, La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques,* 18/3, 279-310.

PERRIN GLORIAN M.J., 1999, A study of teachers' practices : organisation of contents and of students' work. In Krainer K. & Goffree F., *On research in Mathematics Teacher Education. From a study of teaching practices to issues in teacher education.,* Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück.

PORTUGAIS J., 1995, *Didactique des mathématiques et formation des enseignants,* Peter Lang, Bern.

ROBERT A., 1999, Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe, *Didaskalia*, 15, 123-157.

RODITI E., 2001, *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Etude de pratiques ordinaire,* Thèse, Université Paris 7.

SALIN M.H., 1999, Pratiques ostensives des enseignants, In Lemoyne, G. & Conne, F. (Eds), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, 327-352, Les Presses de l'Université de Montréal.

SCHUBAUER LEONI M.L., 1999, Les pratiques de l'enseignant de mathématiques : modèles et dispositifs de recherche pour comprendre ces pratiques, In Bailleul (Ed.) *Actes de l'école d'été d'Houlgate*, tome 1, Rectorat de Caen.

SENSEVY G., MERCIER A. & SCHUBAUER-LEONI M.L., 2000, Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20, *Recherches en didactique des mathématiques,* 20/3, 263–304.

SOURY-LAVERGNE S., 2001, Connaissances et mise en œuvre d'un micromonde dans les interactions de préceptorat distant, *Sciences et techniques éducatives, numéro spécial "Communication Homme-Machine et Apprentissage.*

VERGNAUD G., 1993, Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, In Artigue, M., Gras, R., Laborde, C. & Tavignot, P. (Eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France,*177-191, Grenoble : La Pensée Sauvage.

VERGNES D., 2001, Effets d'un stage de formation en géométrie, *Recherches en didactique des mathématiques,* 21/1.2, 99-121.

Marie-Jeanne Perrin-Glorian
IUFM Nord-Pas-de-Calais

Jean-Paul FISCHER et Christine BOCÉRÉAN

IMPACT DE LA RÉFORME DE 1970 SUR LES CONNAISSANCES NUMÉRIQUES DES JEUNES ENFANTS*

Abstract. As a consequence of one of the major and inappropriate characteristics of the 1970 reform — known as "Modern Mathematics"— nursery school pupils were not asked to work on numbers anymore. Above all they no longer counted.
The authors evaluate the impact of such extreme trends by analyzing comparable data collected in 1920, 1980 and 2000 about how well children aged 3 to 5 1/2 could name numbers.
The hypothesis of a negative impact is corroborated not only through the study, both statistical and graphical, of the phylogenetic development, but also through the qualitative advancement of the process of naming itself : considering the same age group and number, in 1980 children counted in proportion more than children in 2000 although 1970 reformers had opposite goals.

Résumé. L'une des caractéristiques majeures et caricaturales de la réforme de 1970 — dite des "maths modernes" — est l'éradication des pratiques numériques, du comptage notamment, à l'école maternelle.
En s'appuyant sur des observations comparables de la dénomination des nombres par des enfants de 3 à 5 ans 1/2 faites, respectivement, en 1920, 1980 et 2000 environ, les auteurs proposent une évaluation de l'impact de ces (non-) pratiques extrêmes.
L'hypothèse d'un impact négatif est corroborée non seulement par l'étude statistique et graphique du développement phylogénétique, mais aussi par l'évolution qualitative du processus de dénomination lui-même : à âge et nombre comparables, les enfants de 1980 — et ce exactement à l'inverse du but poursuivi par les réformateurs de 1970 ! — comptaient proportionnellement plus que les enfants de 2000.

Mots–clés : maths modernes, apprentissage numérique, comparaison intergénérationnelle, école maternelle, comptage, dénomination du nombre.

---

1. Problématique introductive

On connaît assez bien certaines conséquences de la réforme de 1970, dite des "maths modernes", au niveau de l'enseignement secondaire. Par exemple, De Closets (1996, p. 97) rappelle que dans les terminales C, spécialisées en maths-sciences, le pourcentage des enfants de professions supérieures passa de 20% en 1967-1968 à 39,9% en 1980-1981, tandis que celui des enfants d'ouvrier chutait de 17,9 à 8,8%. Mais, pour ce qui concerne l'école maternelle, l'impact de la réforme n'a, à notre connaissance et sous quelque forme que ce soit, jamais été quantifié.

* Les auteurs voudraient remercier André Flieller pour ses conseils lors de la mise au point de cet article.

Pourtant, parmi les choix didactiques opérés au moment de cette réforme, l'éradication des activités spécifiquement numériques, notamment du comptage (un par un), à l'école maternelle demeurera certainement l'un des plus caractéristiques et des plus caricaturaux. Pour justifier une telle éradication, les réformateurs ont, entre autres, discrédité le comptage. Pour eux, le comptage est un apprentissage verbal inutile puisqu'on peut voir l'équivalence numérique de deux collections par bijection ; de plus, le comptage nécessite la mémorisation de la suite des mots de nombre et l'un des buts de la réforme était précisément de rendre toute mémorisation inutile (cf., Byers & Erlwanger, 1985, p. 263.) Les fonctions (positives) du comptage sont alors réduites à des fonctions sécurisante pour l'enfant ou d'autosatisfaction pour les parents : « Pour des enfants de cinq ans, apprendre à compter jusqu'à dix n'a guère d'utilité (sinon faire plaisir aux parents) », lisait-on encore dans le Monde de l'Education de novembre 1982 (p. 21.)

La psychologie, alors essentiellement piagétienne, n'a pas joué le rôle de garde-fou qu'elle aurait dû jouer[1]. Au contraire, le célèbre test piagétien de conservation a conduit à la conclusion que ce n'est pas la peine d'enseigner les nombres à l'enfant avant 6 ans puisqu'il ne les conserve pas ! Ainsi s'est opérée une convergence d'intérêt entre réformateurs et psychologues. D'autant que ces derniers ont parfois porté un jugement sévère sur les pratiques numériques « aveugles, imposées du dehors, cristallisées par l'exercice répété, … » de l'enfant (cf. Gréco, 1960, p. 150.) Certains pédagogues, ou didacticiens, pouvaient donc étaler en toute liberté leur ignorance du développement des enfants. Par exemple, Marcault-Derouard (1974) observait, dans un livre de *Pédagogie pratique de la mathématique à l'école élémentaire*, que « les enfants du cours préparatoire connaissent tous, ou presque les nombres deux et trois » (p. 52.) On appréciera la prudence de l'auteur qui, ayant affirmé que les enfants de 6 ans connaissent deux et trois — ce qui est effectivement audacieux puisqu'ils sont censés n'apprendre strictement aucun nombre à l'école maternelle — se reprend en laissant ouverte la possibilité que quelques-uns n'arriveraient pas jusqu'à deux ou trois !

La plupart des pédagogues réformateurs ne poussent cependant pas leur ignorance du développement aussi loin. Ils savent bien que l'enfant de 6 ans n'a guère de difficultés à dire qu'il y a, respectivement, 4, 5 ou 6 objets lorsqu'il est confronté à une collection correspondante. Mais comme ils cherchent à nier le rôle du comptage dans cette dénomination des petits nombres — disons jusqu'à 6 —, ils invoquent un processus de perception "globale" ou "directe" pour ces petits nombres. Si l'introspection nous convainc de l'existence d'un tel processus — nous

---

[1] Elle aurait d'autant plus dû le jouer qu'elle a, peu ou prou, engendré la mathématique moderne : cette dernière apparaît en effet comme "fille de Bourbaki et Piaget" selon l'interprétation franco-française (ou suisse) de la réforme par Charlot (1986, p. 28).

n'avons pas besoin de compter pour voir que la collection • • • est formée de trois points — ce processus ne s'étend certainement pas jusqu'à 6 chez des enfants de 5 ou 6 ans (cf., par ex., Fischer, 1991.) En conséquence, les réformateurs de 1970 ont été amenés à exagérer la limite de cette capacité de perception globale ou directe du nombre. Pour valider statistiquement cette exagération, nous avons analysé les données de l'annexe 9 de Fischer (1982) : cette annexe recense une vingtaine[2] de documents pédagogiques publiés entre 1868 et 1978 et précisant la limite de la perception globale directe (quels que soient les noms ou qualificatifs utilisés par les auteurs.)

D'abord, nous avons établi que la corrélation entre l'année de publication du document et la limite de la perception globale directe est positive, forte (rho de Spearman = .71) et significative ($p < .003$.) Ensuite, en comparant les 8 documents antérieurs à 1960 et les 11 documents postérieurs à 1960, nous avons eu confirmation que la moyenne des limites précisées dans les premiers (= 3.4) est bien significativement (t de Student = 5.85 ; $p < .0001$) inférieure à la moyenne des limites (= 5.1) précisées dans les seconds. Les deux analyses statistiques étayent donc l'augmentation de la perception globale directe du nombre à partir des années 1960 et comparativement aux 90 années antérieures. Certes, nous ne pouvons pas écarter, a priori, l'hypothèse de la réalité d'une telle augmentation des capacités perceptives des enfants, une augmentation qui ne serait alors qu'une sorte d'exemplification de l'effet Flynn[3]. Mais une inspection plus fine des documents rapportés dans Fischer (1982) fournit deux arguments permettant le rejet de l'hypothèse d'une augmentation réelle : (1) durant près d'un siècle — du milieu du 19$^{\text{ème}}$ siècle au milieu du 20$^{\text{ème}}$, on n'observe strictement aucune augmentation ; (2) le seul auteur qui apparaisse deux fois dans le tableau de Fischer (1982) a indiqué 5 en 1972 et 4 en 1977, ce qui s'interprète bien mieux en faisant l'hypothèse que la valeur de 1972 était exagérée qu'en faisant l'hypothèse d'un développement phylogénétique en dents de scie. Nous considérons donc que les observations statistiques précédentes traduisent une "exagération" des capacités réelles de l'enfant, une exagération qui justifiait le — et complétait les arguments en faveur du — non-apprentissage du comptage en maternelle.

Quelques observations incidentes ou souvenirs anecdotiques de l'un d'entre nous (JPF), qui a participé (involontairement) à cette réforme de l'enseignement des mathématiques au début des années 1970, illustrent combien les pratiques

---

[2] Nos analyses statistiques portent sur 19 documents exactement car nous n'y avons pas inclus un document qui ne précise la limite de la perception du nombre que pour les adultes.

[3] L'effet Flynn stipule que « des cohortes de naissance testées au même âge et dans les mêmes conditions à l'aide d'une même épreuve d'intelligence obtiennent des scores moyens qui s'ordonnent comme leur année de naissance » (Flieller, 2001, p. 43).

frisaient l'absurde. Par exemple, lorsqu'il a commencé à enseigner à l'Ecole Normale, un de ses collègues, professeur de psychopédagogie, participait à une recherche qui évitait d'utiliser les mots de nombres pendant les deux premiers trimestres de Cours Préparatoire : ce n'est qu'au troisième trimestre, lorsque l'élève avait construit le nombre à force d'exercices ensemblistes de bijection et autres relations d'équivalence ou d'ordre que l'enseignant lui révélait que la propriété commune de toutes les collections en bijection avec les doigts d'une main s'appelle “cinq” et s'écrit “12” au pays du trois (secondairement “5” au pays du dix.) Ou aussi, en visite dans une grande section de maternelle où une élève institutrice de deuxième année effectuait son stage en responsabilité, JPF a pu observer que la stagiaire décrivait une course de trois voitures, affichées au tableau, en parlant de la voiture de gauche, du milieu et de droite. Lors de la discussion, lorsqu'il lui a fait remarquer que la distinction gauche/droite n'est probablement pas bien maîtrisée par tous les élèves de 5 ans et qu'elle aurait pu parler plus simplement de la première, de la deuxième et de la troisième voiture, la stagiaire a objecté qu'elle a respecté la seule consigne que lui avait laissée la titulaire de la classe, à savoir de ne pas utiliser de vocabulaire numérique car l'Inspectrice de la circonscription l'avait formellement interdit.

L'hypothèse fondamentale que nous faisons — bien que l'école soit loin d'être le seul lieu où les jeunes enfants acquièrent des connaissances numériques — est que ces pratiques (ou plutôt non-pratiques !) extrêmes, qui ont caractérisé la réforme de 1970 et qui n'ont plus cours aujourd'hui, doivent avoir laissé des traces suffisamment fortes pour être observables. En outre et même si nous n'arrivions pas à observer quantitativement ces traces, nous pouvons aussi faire l'hypothèse que le bouleversement des méthodes — notamment le rejet du comptage — a entraîné des changements qualitatifs dans le processus de dénomination des nombres. Ce changement n'est toutefois pas celui, à savoir moins de comptage en 1980 comparativement à 2000, qu'un raisonnement simple et direct suggère[4]. Expliquons pourquoi.

D'une part, la procédure de comptage, étroitement liée à celle du pointage avec le doigt, est une procédure relativement primitive ou naturelle. Cela au point que la psychologue américaine Rochel Gelman (cf., Gelman & Gallistel, 1978, p. 208) a pu la présenter comme un schème au sens piagétien, à l'instar du schème de la succion par exemple. D'autre part, le processus de perception (ou aussi de saisie) simultanée (ou par groupes) des nombres supérieurs à 2 ou 3 est, quant à lui, développementalement plus avancé (cf., par ex., Kern, 1965, résumé dans Fischer, 1984, p. 106 et ss.) Maintenant, nous pouvons imaginer ce qui va se passer en cas d'absence ou d'insuffisance des pratiques numériques : c'est le processus

[4] Le raisonnement est juste, mais comme il s'appuie sur deux prémisses — l'inutilité du comptage et l'existence d'une perception directe du nombre jusqu'à 6 — erronées, la conclusion peut quand même être fausse. En l'occurrence, elle l'est.

développementalement primitif qui va être mis en œuvre au détriment du processus développementalement le plus avancé. En conséquence, notre hypothèse est que, comparativement à 2000, la fréquence relative de l'utilisation du comptage, pour dénommer un nombre donné à un âge donné, devrait être plus grande en 1980 qu'en 2000.

2. Méthode

Pour approcher empiriquement l'impact de la réforme de 1970 sur les connaissances numériques des jeunes enfants nous disposons de trois recherches. Nous allons les dater de, respectivement, 1920, 1980 et 2000. Ces trois dates correspondent (1) approximativement aux observations de Beckmann (1923), (2) précisément aux observations de Fischer (1981 ou 1982) et (3) quasi-parfaitement aux observations de Bocéréan, Fischer et Flieller (en préparation)[5]. Ces trois recherches ont en commun d'inclure une épreuve de dénomination des nombres sur des enfants de 3 à 5 ans 1/2 partagés en groupes d'âge d'une demi année. Cette épreuve de dénomination a été présentée sous deux formes différentes, notées B et F car, respectivement, introduites par Beckmann (1923) et Fischer (1981.)

Dans cette partie nous décrirons d'abord, l'une après l'autre, ces deux formes ; puis, nous préciserons comment nous comptons comparer indirectement ces deux formes non directement comparables ; enfin, nous analyserons la comparabilité des échantillons d'enfants testés respectivement en 1920, 1980 et 2000.

L'épreuve de dénomination de 1920. Beckmann (1923) a considéré que l'acte de dénomination d'un nombre — répondre le nom usuel du nombre en réponse à la question "Combien ?" — est l'un des quatre actes numériques basiques. Les trois autres sont : l'acte de production (l'enfant doit donner ou prendre un nombre donné, par ex. "trois", d'objets), l'acte de distinction (l'enfant doit distinguer deux nombres, par ex. "deux" et "trois") et l'acte de reconnaissance (l'enfant doit trouver un nombre, par ex. "trois", sur une planche comme celle illustrée sur la figure 1.) La technique de Beckmann est une technique ascendante qui commence à 2 et détermine la limite supérieure de la dénomination de l'enfant, les nombres n'étant testés que jusqu'à 5. Comme le suggère la figure 1, les collections de points noirs représentant chaque nombre, sont présentées sous

[5] Les observations de Beckmann (1923) auxquelles nous nous référons sont les premières d'un travail gigantesque que Beckmann a certainement dû étaler sur plusieurs années : la date de 1920, bien qu'arbitraire, nous paraît donc raisonnable pour un travail publié en 1923 ; les observations de Fischer (1981 ou 1982) ont été faites durant la première demi année civile 1980 ; enfin, les observations de Bocéréan et al. (en préparation) ont été faites durant le dernier trimestre civil 2000 et les deux premiers de 2001. (Dans les calculs numériques, nous utiliserons un écart de 20.75 ans entre les observations de 1980 et celles de 2000.)

différentes configurations (quatre) : une angulaire et une autre quelconque (elles apparaissent sur la planche de la figure 1), une linéaire et une autre figurale régulière (e.g., quatre en carré) sur une deuxième planche.

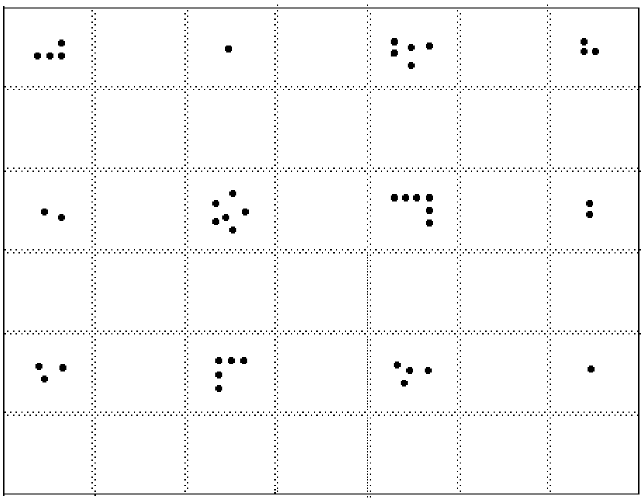


Figure 1 : Une planche ayant servi à l'épreuve B de dénomination des nombres (reconstruite et adaptée d'après Beckmann, 1923, et utilisée par Bocéréan et al., en préparation).

L'épreuve de dénomination de 1980. On présente à l'enfant des jetons en bois dans une boîte circulaire et dans des configurations qui sont approximativement celles de la figure 2 (pour les nombres > 2.) Les nombres de jetons et l'ordre de présentation varient en fonction de l'âge des enfants : pour les enfants de 5 ans, 7, 5, 3, 6 et 4 ; pour les enfants de 4 ans, 5, 3, 1 facultatif, 4 et 2, et pour les enfants de 3 ans, 3, 1, 4 et 2.

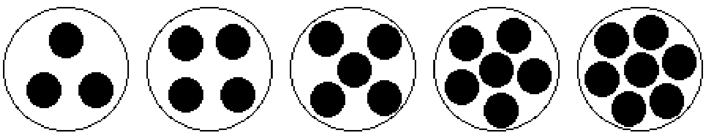


Figure 2 : Les configurations des nombres 3 à 7 dans l'épreuve F de dénomination.

On demande à l'enfant combien il y a de jetons dans la boîte sans lui suggérer de compter. Si l'enfant se trompe, on lui demande s'il est sûr et on l'encourage, si on a l'impression que l'échec est accidentel, à reconsidérer sa réponse. Pour chaque nombre correctement dénommé, l'expérimentateur note les comportements extériorisés de l'enfant (commentaire ou comptage oral, pointage du doigt ou des yeux, mouvement des lèvres, extension des doigts) de manière à pouvoir juger s'il a compté ou non.

La comparabilité des épreuves pratiquées en 1920, 1980 et 2000. En 2000, nous avons repris quasiment à l'identique les épreuves de 1920 et de 1980.

Pour l'épreuve de 1920, la description de son matériel par Beckmann (1923) est suffisante pour que notre reconstruction des planches (cf. la figure 1 pour un exemple) puisse être considérée comme fidèle. Beckmann ayant utilisé les quatre sortes de collections (linéaires, figurales régulières, angulaires et quelconques), la technique ascendante et le codage de la réussite que nous avons utilisés en 2000, à savoir dénommer correctement pour un même nombre les quatre formes de sa représentation (voir Fischer & Bocéréan, soumis, pour une description précise de la procédure), semblent assurer une bonne comparabilité.

La comparabilité de l'épreuve de 1980 avec celle de 2000 est garantie par la présence d'un même expérimentateur et chercheur dans les deux recherches[6]. La seule petite variante introduite en 2000 concerne le matériel : des pièces de monnaie réelles (1/2 franc), de même dimension, ont été substituées aux jetons de bois. Cela parce que l'épreuve de dénomination a toujours été posée, en 2000, à la fin d'un ensemble d'épreuves s'appuyant sur un matériel pauvre (dés vierges) et peu motivant pour de jeunes enfants[7].

Les approches de la notion de progrès et de sa dépression en 1980. En indiçant les deux formes B et F de l'épreuve de dénomination par l'année de leur mise en œuvre, nous disposons des données B_{1920}, F_{1980}, B_{2000} et F_{2000}. Ayant argumenté la comparabilité de B_{1920} et B_{2000} d'une part, de F_{1980} et F_{2000} d'autre part, et considérant que nos observations en 1980 sont — temporellement et compte tenu des délais et modes de diffusion dans la lourde machinerie de l'éducation nationale — idéalement placées, il subsiste néanmoins, dans la perspective d'une quantification de l'impact de la réforme de 1970, un problème essentiel. Ce problème est que nous ne disposons pas de la même forme de l'épreuve aux trois moments d'observation. Pour contourner ce problème, nous utiliserons deux approches.

La première approche est une approche graphique (voir figures 3 et 4) permettant de voir s'il y a bien eu, en 1980, une dépression dans la performance en dénomination des nombres chez les jeunes enfants. Pour cette approche, l'indice le plus simple du progrès pourrait sembler être la différence entre les moyennes des

---

[6] La recherche 2000 utilise deux expérimentateurs (JPF et CB) qui ont interrogé 200 enfants (40 dans chaque groupe d'âge) chacun : aucune différence significative n'est apparue entre les deux.

[7] Observons d'ailleurs que les jetons de 1980 étaient souvent appelés des “pièces” ou des “sous” par les enfants. En outre, la valeur des pièces ne semble avoir dérangé aucun enfant en 2000.

observations aux deux dates concernées (e.g., 1980 et 2000.) Mais cet indice a l'inconvénient — majeur dans la présente analyse — de dépendre de la procédure spécifique d'obtention des données qui n'est pas la même, nous venons de le rappeler, dans l'étude 1920-2000 que dans l'étude 1980-2000. Pour néanmoins permettre une comparaison des progrès mis en évidence par ces deux études, nous utiliserons une différence des moyennes standardisée, la standardisation consistant simplement à diviser la différence des moyennes par l'écart type commun des observations aux deux dates impliquées dans l'évaluation du progrès (l'écart type commun est la racine carrée de la moyenne pondérée des variances des deux échantillons impliqués.) Cet indice, souvent noté d par référence à Cohen (1969 par exemple) sera noté g par référence à Hedges et Olkin (1985, p. 78) : il peut être présenté comme une mesure en écarts types mais gagne ici à être vu comme un indice sans unité (*unitless* : cf. Richardson, 1996, p. 14), un nombre "pur" libéré de l'unité de mesure originelle (cf. Cohen, 1969, p. 18.) Vu ainsi, l'indice g permet en effet une comparaison des progrès dans des études différentes[8], comparaison qui n'aurait pas de sens avec des mesures ne renvoyant pas à la même unité de mesure.

Dans la seconde approche, plus statistique, nous régresserons (linéairement, sans constante) d'abord les scores B_{2000} sur les scores F_{2000} ; puis nous utiliserons l'équation de régression pour prédire des scores, notés ${}^{P}B_{1980}$ à partir des scores F_{1980}. De cette façon, nous disposons de données d'une épreuve de dénomination B pour les trois moments d'observation, données qui sont alors directement comparables.

La comparabilité des échantillons de 1920, 1980 et 2000. A une époque où l'on s'intéressait moins à la représentativité des échantillons, Beckmann (1923) ne décrit pas précisément le sien, ni, a fortiori, celui de ses 210 sujets ayant l'âge requis pour les présentes comparaisons. Néanmoins, il indique que « le choix des sujets s'est fait de manière à avoir des enfants de tous les milieux » et que cela a été possible par un choix approprié dans les instituts (23 au total) s'occupant des enfants. Parmi ces derniers, on trouve un orphelinat, des instituts de protection, des garderies populaires, des garderies privées des villes de Göttingen, Brême et Cassel, et encore des CP, municipaux ou de land, de Göttingen et des environs. Le fait que cette population soit allemande ne semble pas trop gênant. D'une part, parce que la Moselle était encore, à l'époque, imprégnée par la culture allemande (puisque allemande de 1871 à 1919) ; d'autre part, parce que les performances observées par Descoeudres (1921) sur des enfants (suisses) de langue française sont similaires à celles de Beckmann, en tout cas aux âges de 4 et 5 ans. Beckmann aurait donc vraisemblablement obtenu, en 1920 et en Moselle, des résultats comparables à ceux qu'il a obtenus en Allemagne.

[8] Comme g est un estimateur biaisé de la différence moyenne standardisée dans la population (cf., par ex., Richardson, 1996), il convient de préciser que nous n'utilisons cet indice qu'à des fins descriptives.

Pour ce qui concerne maintenant les échantillons mosellans de, respectivement, 160 et 400 enfants de 3 ans à 5 ans 1/2 des observations de 1980 et de 2000, ils sont décrits assez précisément dans Fischer (1982) et dans Bocéréan et al. (en préparation.) Dans chacune des deux observations, les enfants ont notamment été classés en trois couches sociales : favorisée, intermédiaire et non favorisée. Nous avons donc pu contrôler, d'une part que l'échantillon de 2000 est représentatif de la population française, d'autre part que cet échantillon se distribue sur les trois couches sociales d'une manière comparable à l'échantillon de 1980

($\chi^2(2) = 1.21$, $p > .50$)[9].

3. Résultats

Dans les analyses de la dépression des performances en 1980 — graphiques ou statistiques — nous faisons toujours l'hypothèse théorique que le progrès est linéaire sur le long terme (du moins de 1920 à 2000.) Une telle hypothèse est étayée par l'analogie avec l'évolution du QI moyen des Américains au test de Wechsler : cette évolution, de 1920 à 1990, décennie par décennie, fait en effet apparaître une progression approximativement linéaire (voir Flynn, 1998, figure 2, p. 37)[10].

Analyse de la dépression hypothétique de 1980 sur les enfants de 3 ans à 5 ans 1/2. Pour l'approche graphique, la figure 3 révèle une dépression d, à peine perceptible, de la performance. Cette petite dépression traduit le fait que l'indice g du progrès s'affiche, sur 80 ans (de1920 à 2000), à 0.65 alors que, sur 20 ans (de1980 à 2000), il s'affiche à 0.19 (soit un peu plus d'un quart de .65).

---

[9] En fait, le pourcentage des enfants de classe favorisée (resp. non favorisée) de l'échantillon 2000 est légèrement supérieur (resp. inférieur) à celui de l'échantillon 1980, ce qui reflète certainement l'évolution sociologique générale de la population française.

[10] Si le progrès n'était pas (approximativement) linéaire, deux autres possibilités simples seraient envisageables : (1) le progrès s'est accéléré au cours des dernières décennies, ce qui serait gênant pour nos analyses mais est peu probable, vu que les principaux facteurs susceptibles de contribuer à l'effet Flynn (cf. note 3) s'exercent depuis le début du 20ème siècle ; (2) le progrès s'est ralenti au cours des dernières décennies ce qui ne pourrait que contribuer à renforcer les résultats obtenus.

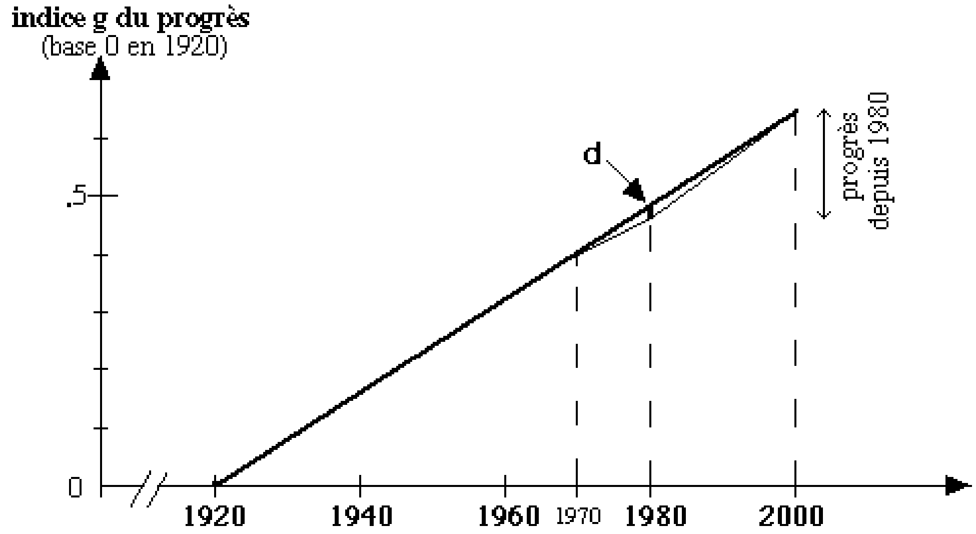


Figure 3 : Visualisation de la dépression hypothétique **d** des performances en dénomination des nombres (en 1980, suite à la réforme 1970) chez les enfants de 3 ans à 5 ans ½.

Pour l'approche statistique, les scores ${}^{P}B_{1980}$ ont pu être prédits grâce à une équation de régression dont le coefficient de corrélation associé R = .96 est très élevé. La moyenne des ${}^{P}B_{1980}$ prédits est 2.41, alors que celle des B_{1920} = 1.78 et celle des B_{2000} = 2.86. Pour vérifier la fiabilité statistique de la dépression, nous avons testé si la moyenne des ${}^{P}B_{1980}$ prédits est significativement inférieure à une valeur théorique ${}^{t}B_{1980}$ = 2.58 interpolée linéairement à partir des deux autres : t(159) = -1.41, p = .08, test unilatéral. La différence n'est donc que marginalement significative dans le sens prédit.

Analyse de la dépression hypothétique de 1980 sur les enfants de 4 ans 1/2 à 5 ans 1/2. A la fois le caractère peu accentué de la dépression et l'hypothèse, tout à fait en accord avec notre interprétation qu'elle serait due à l'absence ou à la moindre pratique d'activités numériques à l'école maternelle, nous ont incité à procéder à une analyse restreinte aux enfants des deux groupes d'âge les plus âgés. Pour ces derniers, la dépression devrait en effet s'amplifier car, à l'âge de 5 ans (et en 2000), ils ont souvent déjà effectué deux années de maternelle (ce qui est beaucoup moins le cas pour les enfants de 4 ans et exclu pour ceux de 3 ans.)

Pour l'approche graphique, la figure 4 révèle une dépression d effectivement plus profonde que celle de la figure 3. Cette dépression, très nette, traduit le fait que l'indice g du progrès s'affiche, sur 80 ans (de1920 à 2000), à 1.05, alors que, sur 20 ans (de1980 à 2000), il s'affiche à 0.47 (soit considérablement plus que le quart de 1.05).

Pour l'approche statistique, les scores $^{p}B_{1980}$ ont pu être prédits grâce à une équation de régression dont le coefficient de corrélation associé R = .97 est très élevé. La moyenne des $^{p}B_{1980}$ prédits est 3.35, alors que celle des B_{1920} = 2.79 et celle des B_{2000} = 4.11. Pour vérifier la fiabilité statistique de la dépression, nous avons testé si la moyenne des $^{p}B_{1980}$ prédits est significativement inférieure à une valeur théorique $^{t}B_{1980}$ = 3.77 interpolée linéairement à partir des deux autres : t(63) = -2.09, p = .02, test unilatéral. La différence est donc clairement significative dans le sens prédit.

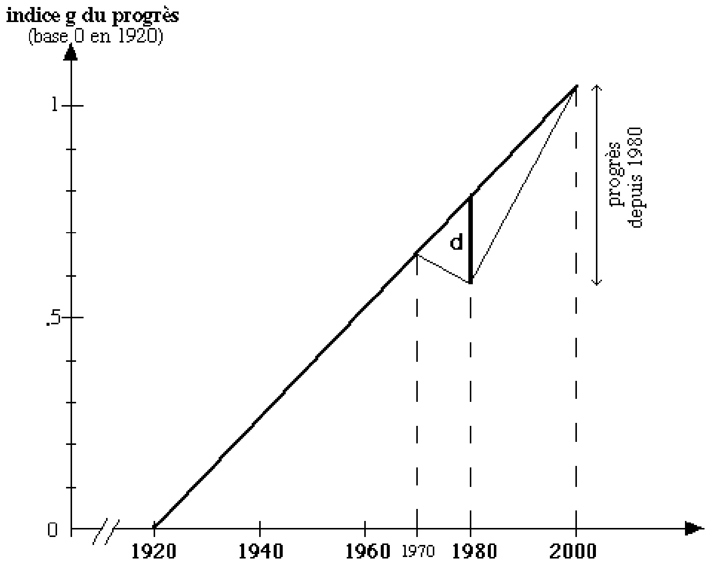


Figure 4 : Visualisation de la dépression hypothétique **d** des performances en dénomination des nombres (en 1980, suite à la réforme de 1970) chez les enfants de 4 ans ½ à 5 ans ½.

Analyse de l'évolution qualitative du processus de dénomination de 1980 à 2000. Pour rendre compte de l'évolution du processus de dénomination de 1980 à 2000, de l'importance du comptage plus précisément, nous présentons, côte à côte, les pourcentages de dénomination (correcte) par comptage pour les deux dates dans le tableau 1. On peut y lire, par exemple, que, à 4 ans 9 mois (± 3 mois) et pour le nombre 4, 67% des enfants ont utilisé le comptage en 1980, alors que nous n'en avons observé que 30% en 2000. De manière générale, il apparaît, sur ce tableau 1, que dans 14 des 19 cases pertinentes le pourcentage de comptages de1980 est bien **supérieur** à celui de 2000, alors que le pattern inverse ne s'observe que dans 4 cases. Un test unilatéral, de signes ou de rangs (Wilcoxon, échantillons appariés), confirme notre hypothèse d'une plus grande fréquence (relative) du comptage en *1980* comparativement à 2000 : p < .025. De plus, si on exclut les 3 cases contenant des pourcentages calculés sur moins de 10 sujets — ce qui semble d'autant plus indiqué que l'un des pourcentages provient d'un seul sujet —, le test unilatéral de rangs atteste encore plus nettement de la significativité statistique de notre observation[11] : p < .01.

Nombre → GA / Dates->	2 *1980*-2000	3 *1980*-2000	4 *1980*-2000	5 *1980*-2000	6 *1980*-2000	7 *1980*-2000
3 ;3 ± 3	***6*** - 2	***50*** * - 21	*50* * - **100***			
3 ;9 ± 3	*4* - **10**	***70*** - 41	***100*** * - 74			
4 ;3 ± 3	***13*** - 10	*32* - 32	***67*** - 60	*70* - **88**		
4 ;9 ± 3	***17*** - 9	***35*** - 22	***67*** - 30	***71*** - 52		
5 ;3 ± 3		***43*** - 21	***48*** - 35	***81*** - 54	***79*** - 69	*88* - **92**

* Pourcentages calculés à partir d'un effectif de moins de 10 sujets.

Tableau 1 : Pourcentages de réussites par comptage dans la dénomination des nombres. (Epreuve F) en fonction du nombre, de l'âge et de la date de l'observation (le % supérieur est en **gras**).

4. Discussion et conclusion

La présente recherche a été motivée par une opportunité historique. La réforme de 1970 réalise en effet une quasi-expérience correspondant à une expérience que la déontologie ne permettra plus jamais — nous l'espérons ! — de

[11] En dépit de ce résultat statistique global, un expert a remarqué que, dans le GA 4;3, notre observation n'était nullement évidente. Or, le GA 4;3 de 2000, probablement par les hasards de l'échantillonnage, s'est avéré un peu faible comparativement aux deux GA (3;9 et 4;9) adjacents (voir, par ex., Fischer et Bocéréan, soumis.) On peut donc observer que cette relative faiblesse générale du GA 4;3 en 2000 s'accompagne d'une fréquence relative d'utilisation de la stratégie de comptage non inférieure à celle de 1980 : cette observation locale va bien dans le sens du primitivisme du comptage et de son infériorité hiérarchique par rapport à d'autres formes d'appréhension, plus directes, du nombre.

réaliser : priver (scolairement) des enfants de tout apprentissage numérique jusqu'à l'âge de 6 ans ! Nos méthodes d'approche de la quantification de l'impact de la réforme de 1970 sur les connaissances numériques, la dénomination des premiers nombres plus précisément, des jeunes enfants reposent cependant sur plusieurs choix théoriques ou approximations, comme la linéarité du progrès ou la comparabilité des échantillons. Le résultat obtenu pour l'ensemble des élèves (de 3 à 5 ans 1/2), à savoir une "dépression" marginalement significative ($p < .10$) et légèrement perceptible (cf. figure 3), va cependant dans le sens de notre prédiction. Qui plus est, et surtout, l'impact plus marqué au niveau des enfants les plus âgés (4 ans 1/2 à 5 ans 1/2) — un impact significatif ($p < .025$) et très net (cf. figure 4) —non seulement confirme la pertinence ou l'acceptabilité de nos choix ou approximations, mais aussi atteste d'une certaine sensibilité de notre approche : en effet, cet impact s'accorde avec notre interprétation générale d'une influence de l'enseignement scolaire en maternelle, une influence d'autant plus grande que les enfants en bénéficient plus longuement (i.e. pour les enfants les plus âgés, enfants qui ont quasi-sûrement tous été scolarisés à 3 ans[12].) Plus généralement, d'un point de vue méthodologique, notre approche étaye la validité des recherches intergénérationnelles (cf., Flieller, 1989, pour une synthèse des problèmes que posent ces recherches).

Sur le plan pédagogique, nous avons insisté, en introduction et pour justifier notre hypothèse qualitative d'une dépression des performances en 1980, sur les errements caricaturaux de certains réformateurs. Mais d'autres considérations, anecdotiques ou personnelles, conduisent à nuancer un peu ces errements ou, tout au moins, leurs conséquences. Par exemple, il est clair que l'expérience directe de la réforme de 1970, telle que l'un d'entre nous (JPF) a pu la vivre, est particulièrement extrême : d'abord, en participant à un stage d'adaptation fondamental à l'enseignement en Ecole Normale, dont la formatrice en mathématiques était l'une des principales réformatrices[13], il n'a pu avoir qu'une information initiale très partiale ; ensuite, en enseignant lui-même les "maths

[12] Nous disposons d'une statistique du ministère qui fait état de 100% d'enfants scolarisés à 3 ans en 1995 (MEN, 2001).

[13] Par exemple, dans un des ses ouvrages de 1967, qui figure dans notre analyse de la limite de la perception globale directe du nombre, elle avait fixé cette limite à 6, la plus haute valeur parmi les 19 recensées dans notre analyse. Par ailleurs, lorsqu'on connaît les nombreuses lignes que JPF a pu consacrer à l'analyse empirique (e.g., Fischer, 1987) ou théorique (e.g., Fischer, 1992) du passage de la dizaine (ou de la "cinquaine" : voir Fischer, 1998), il est quelque peu ironique de rappeler l'enseignement qu'elle avait pu prodiguer sur ce thème au cours de ce stage : « 7+5 est le cardinal d'un ensemble de 7 éléments réuni avec un ensemble de 5 éléments, tout comme 3+2 est le cardinal d'un ensemble de 3 éléments réuni avec un ensemble de 2 éléments : le **passage de la dizaine ne se pose donc pas**. » (Cité de mémoire).

modernes” aux élèves instituteurs — et en les visitant, consécutivement, en stage de responsabilité — il ne pouvait logiquement voir que les conséquences de son enseignement, i.e. l’absence d’activités numériques en maternelle ; enfin, parce que les maîtres d’application en Ecole Normale, qui devaient être les fers de lance de la réforme (à l’école élémentaire), ont probablement été aussi les plus extrêmes dans leur éradication des activités numériques en maternelle. D’ailleurs, une enseignante “tout venant” de maternelle, rencontrée au cours de la recherche 2000 et déjà en place à la fin des années 1970, nous a expliqué qu’elle — et d’autres institutrices de base — n’ont jamais cru un mot au discours des réformateurs. Par ailleurs, nous devons essayer de ne pas tomber dans le travers de certains réformateurs que nous avons dénoncés : ce n’est pas parce que les nombres ne sont pas enseignés à l’école que les enfants ne les apprennent pas du tout ! Tout cela peut expliquer la valeur quantitative — somme toute assez modeste — de l’impact que nous avons observé.

Cet impact quantitativement modeste s’accompagne cependant d’une évolution qualitative que la théorie — d’une manière très détournée il est vrai — laissait prévoir : l’hypothèse que, à âge et nombre comparables, les enfants 2000 utiliseraient la stratégie de comptage dans une proportion moindre que les enfants 1980 s’est en effet clairement confirmée ($p < .01$.) Ce constat, surtout lorsque sa formulation est inversée — les enfants comptaient proportionnellement davantage en 1980 qu’aujourd’hui — est alors proprement renversant pour les réformateurs : en voulant le discréditer, ils ont en fait renforcé l’utilisation du comptage par les enfants ! Remarquons cependant que cette supériorité de la fréquence relative du comptage en 1980 est plutôt la conséquence de la limitation de la perception globale directe du nombre que du discrédit jeté sur le comptage. En effet, la limitation de cette perception à 3 et le non-développement (ou le moindre développement) d’autres formes d’appréhension du nombre (l’appréhension figurale, l’appréhension kinesthésique ou motrice sur les doigts, les procédures plus sophistiquées), ont contraint beaucoup d’enfants, en 1980, à recourir au processus de dénombrement probablement le plus primitif — le comptage — qu’ils avaient acquis “spontanément” pour reprendre un mot de Piaget (1953, p. 74).

D’ailleurs l’analyse des patterns de stratégies à l’épreuve de dénomination B de 2000 apporte un élément de confirmation à l’hypothèse d’une antériorité développementale du comptage pour les nombres supérieurs à 2. Au cours de cette épreuve nous avons noté, lors de la première présentation et pour chaque nombre réussi, la stratégie de dénomination pour chacun des 400 enfants. Ensuite, dans l’analyse, nous avons classé ces stratégies dans l’une de trois classes : Comptage Explicite, Comptage Implicite (non explicite mais laissant quelques traces extérieures : mouvement de lèvres, pointage du doigt, …) et Appréhension apparemment Directe (apparemment car nous ne pouvons pas exclure un comptage parfaitement intériorisé ou une forme d’appréhension plus sophistiquée.)

Nous définirons d'abord un pattern comme le (n-1)-uplet décrivant la suite des stratégies d'un enfant ayant réussi à dénommer les nombres jusqu'à n (= 3, 4 ou 5.) Par exemple, l'enfant qui se voit attribuer le pattern (AD, CI, CE) a Appréhendé apparemment Directement le nombre 2, Compté Implicitement pour 3 et Compté Explicitement pour 4 (et échoué à 5) ; l'enfant qui a pour pattern (AD, AD) a Appréhendé Directement les nombres 2 et 3 (et échoué à 4), etc… Ensuite, nous introduisons la hiérarchie AD > CI > CE et dirons qu'un pattern est ordonné si une quelconque stratégie n'est jamais suivie par une stratégie d'ordre supérieur. Ainsi, les deux exemples précédents sont ordonnés, alors que (CE, AD) ne le serait pas.

Avec ces définitions, nous pouvons constater que, à une exception près, tous les 222 patterns — ceux des enfants ayant au moins dénommé les nombres 2 et 3 — sont ordonnés. Qui plus est, comme le suggère le seul pattern (AD, AD, CI, AD) qui fait exception, un pattern constitué par un quadruplet (resp. un triplet) contient trois (resp. deux) passages (d'une stratégie à la suivante) pouvant violer l'ordre postulé : nous pouvons donc observer que la hiérarchie AD > CI > CE est respectée pour 462 des 463 passages pouvant la contredire.

Cette observation massive s'accorde parfaitement, pour les nombres supérieurs à 2, avec une théorie de l'intériorisation progressive du comptage (cf. Fischer, 1981) [14]. Pour un nombre précis, comme 4 ou 5, tout se passe comme si l'enfant commençait par compter les collections le représentant, d'abord explicitement, puis de manière de plus en plus intériorisée, avant d'appréhender apparemment directement leur nombre. L'analyse des patterns ne permet cependant pas de dire si cette Appréhension apparemment Directe est un comptage un par un parfaitement intériorisé, un comptage partiel très rapide et de ce fait imperceptible, une association entre une forme et le nombre (e.g., carré-quatre), voire un calcul implicite (deux et deux c'est quatre.) Néanmoins, pour des nombres comme 4 ou 5, elle suggère fortement que l'Appréhension apparemment Directe est une conséquence du comptage et permet de conclure, de manière presque sûre, que le comptage est développementalement antérieur à l'Appréhension Directe. En outre, l'analyse de Fischer et Bocéréan (soumis) suggère que même pour 3 le comptage est une procédure développementalement peu avancée : nous avons en effet montré que parmi les enfants (de 3 à 5 ans 1/2) qui dénomment les nombres jusqu'à 5, celui qui n'utilise pas le comptage pour dénommer 3 a de fortes chances d'avoir une meilleure performance à un ensemble d'épreuves numériques que celui qui l'utilise.

[14] En revanche, elle va plutôt à l'encontre d'une explication de l'appréhension du nombre en termes de "style cognitif" (Riding, 1997) qui postulerait que certains enfants appréhendent globalement/simultanément les nombres, alors que d'autres (non inférieurs dans leur développement) les appréhenderaient séquentiellement par comptage.

L'un des fondements de notre hypothèse que, paradoxalement, la fréquence relative des comptages allait augmenter entre 1980 et 2000 se trouve donc largement confirmé par les analyses de l'épreuve de dénomination B de 2000. Le résultat obtenu — à âge et nombre comparables la proportion de comptages dans les dénominations réussies est, en général, plus importante en 1980 qu'en 2000 (cf., le tableau 1) — apparaît donc moins surprenant. Il montre que, lorsque les pratiques numériques sont moindres (comme en 1980), non seulement les performances numériques des élèves s'en ressentent (ce qui est assez évident), mais en outre que, à performances égales, les élèves risquent d'utiliser des stratégies développementalement moins avancées.

Ce dernier point paraît important sur le plan didactique. D'autant que notre observation est certainement généralisable à d'autres apprentissages scolaires majeurs. Nous pensons par exemple à la multiplication arithmétique. Une fréquentation insuffisante de situations multiplicatives pourrait contribuer à maintenir certains élèves dans une conception de la multiplication liée à l'addition répétée. Une telle conception est certes suffisante pour des calculs (e.g., 7x4) ou problèmes (e.g., 4 rangées de 7 salades, c'est 7 salades + 7 salades + 7 salades + 7 salades, donc 7 salades quatre fois) élémentaires, mais ne permet pas de conférer à la multiplication un sens intrinsèque dont Pluvinage et Rauscher (cités dans Fischer, 1992, p. 212) ont pu souligner le rôle positif. Nous pensons aussi à la lecture pour laquelle une pratique insuffisante pourrait contribuer à maintenir certains élèves dans un recodage phonologique coûteux au point d'entraver la mémorisation de l'orthographe des mots (Ouzoulias, Fischer & Brissiaud, 2000) et, surtout, la compréhension.

Enfin, dans le cadre du colloque "*Argentoratum*", nous voudrions suggérer plus généralement que l'impact de la réforme de 1970, que nous pensons avoir mis en évidence, pourrait illustrer l'assertion de François Pluvinage (cf. sa contribution) selon laquelle ce sont « principalement des améliorations globales (ici une pratique numérique "rétablie" en maternelle en 2000 comparativement à 1980) qui déterminent des progrès sur des apprentissages précis » (ici la dénomination des nombres 3, 4 et 5).

BIBLIOGRAPHIE

BECKMANN H. , 1923, Die Entwicklung der Zahlleistung bei 2-6 jährigen Kindern. *Zeitschrift für Angewandte Psychologie,* 22, 1-72.

BOCÉRÉAN C., FISCHER J.-P. & FLIELLER A., en préparation. Comparaison à long terme (1921-2001) des connaissances numériques de l'enfant de 3 à 5 ans et demi.

BYERS V. & ERLWANGER S., 1985, Memory in mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics,* 16, 259-281.

CHARLOT B., 1986, Histoire de la réforme des "maths modernes"; idées directrices et contexte institutionnel et socio-économique. *Bulletin de l'APMEP,* 352, 15-31.

COHEN J., 1969, *Statistical power analysis for the behavioral sciences.* New York : Academic Press.

DE CLOSETS F., 1996, *Le bonheur d'apprendre et comment on l'assassine.* Paris : Seuil.

DESCOEUDRES A., 1921, *Le développement de l'enfant de deux à sept ans.* Neuchâtel : Delachaux & Niestlé (3ème éd. revue, 1946).

FISCHER J.P., 1981, Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2, 277-302.

FISCHER J.P., 1982, *L'enfant et le comptage.* Strasbourg : IREM.

FISCHER J.P., 1984, *La dénomination des nombres par l'enfant.* Strasbourg : IREM.

FISCHER J.P., 1987, L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie,* 80, 17-24.

FISCHER J.P., Le subitizing et la discontinuité après 3. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), 1991, *Les chemins du nombre,* 235-258, Lille : Presses Universitaires.

FISCHER J.P., 1992, *Apprentissages numériques : la distinction procédural/déclaratif,* Nancy : Presses Universitaires.

FISCHER J.P., 1998, La distinction procédural/déclaratif : une application à l'étude de l'impact d'un "passage du cinq" au CP. *Revue Française de Pédagogie,* 122, 99-111.

FISCHER J.P. & BOCÉRÉAN C., soumis. Les modèles du développement numérique à l'épreuve de l'observation.

FLIELLER A., 1989, Les comparaisons de cohortes et de générations dans l'étude psychométrique de l'intelligence. *Psychologie Scolaire,* 68, 47-64.

FLIELLER A., 2001, Problèmes et stratégies dans l'explication de l'effet Flynn. In M. Huteau (Ed), *Les figures de l'intelligence*, 43-66, Paris : E.A.P.

FLYNN J.R., 1998, IQ gains over time : Toward finding the causes. In U. Neisser (Ed), *The rising curve : Long-term gains in IQ and related measures*, 25-66, Washington : APA.

GELMAN R. & GALLISTEL C.R., 1978, *The child's understanding of number.* Cambridge : Harvard University Press.

GRÉCO P.,. Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant. In P. Gréco, J.B. Grize, S. Papert & J. Piaget (Eds),1960, *Problèmes de la construction du nombre* (pp.149-213.) Paris : PUF.

HEDGES L.V. & OLKIN I., 1985, *Statistical methods for meta-analysis.* Orlando : Academic Press.

KERN A. (Ed), 1965, *Die Idee der Ganzheit in Philosophie, Psychologie, Pädagogik und Didaktik.* Freiburg : Herder.

Marcault-DEROUARD I., 1974, *Pédagogie pratique de la mathématique à l'école élémentaire.* Paris : Sudel.

MEN, 2001, *Repères et références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche.* Vanves : Ministère de l'Education Nationale, Direction de la programmation et du développement.

OUZOULIAS A., FISCHER J.-P. & BRISSIAUD R., 2000, Comparaison de deux scénarios d'appropriation du lexique écrit. *Enfance,* **4**, 393-416.

PIAGET J., 1953, How children form mathematical concepts. *Scientific American,* 189, 74-79.

Richardson J.T.E., 1996, Measures of effect size. *Behavior Research Methods, Instruments, & Computers,* **28**, 12-22.

RIDING R.J., 1997, On the nature of cognitive style. *Educational Psychology,* **17**, 29-49.

Charalambos LEMONIDIS

L'ENSEIGNEMENT DES PREMIERES NOTIONS ARITHMETIQUES SELON L'ANALYSE DES DIFFERENTES REPRESENTATIONS DES QUANTITES

Abstract. Several representations of arithmetical quantities play important role in teaching and knowledge of early arithmetic concepts. Those representations may appear in various forms like: iconic, symbolic, etc. These different expressions on the one hand refer to different teaching situations and on the other they create different calculation strategies and another type of understanding in behalf of students. In this study we accomplish a detailed analysis of different arithmetical representations and we compare them with the calculation strategies of the students. Finally, we present empirical data of two groups of students. The experimental group which been taught with emphasis to the different representations of arithmetic quantities has much better performance in the execution of simple calculation in relation with the other group which been taught with the traditional teaching.

Résumé. Les différentes représentations des quantités arithmétiques jouent un rôle très important pour l'enseignement et l'apprentissage de premières notions arithmétiques. Ces représentations peuvent apparaître sous des formes différentes, telles que : l'iconique, le symbolique, etc. Ces différentes expressions impliquent, d'une part, des situations différentes d'enseignement, et d'autre part, elles impliquent des procédures de calcul différentes et un autre type de compréhension de la part des élèves. Dans le présent travail nous réalisons une analyse détaillée des différentes représentations arithmétiques ainsi que la mise en parallèle de ces représentations avec les procédures de calcul des élèves. A la fin, nous présentons, les résultats d'une expérimentation menée devant deux groupes d'élèves. En ce qui concerne la réussite aux opérations simples, le groupe expérimental, qui a reçu un enseignement régulier concernant les différentes représentations des quantités arithmétiques, a eu des résultats bien supérieurs au deuxième groupe, à qui on a enseigné avec des méthodes classiques

Mots Clés : Premiers apprentissages numériques, représentations arithmétiques, procédures de dénombrement, opérations, congruence, classe expérimentale.

1. Introduction

L'apprentissage des notions arithmétiques, au début de la scolarité, est un domaine très important. L'enseignement des premières notions arithmétiques est une procédure sensible qui exige des maniements délicats car, à moins que les élèves aient déjà des acquis préexistants, et mises à part les habiletés qui diffèrent d'un élève à l'autre, leurs attitudes sont influencées et transformées par les situations didactiques proposées. C'est à dire que, pour les jeunes élèves, la difficulté et les procédures cognitives utilisées diffèrent selon qu'ils effectuent

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 101 – 115.

l'addition avec les doigts, mentalement, à partir des illustrations d'objets ou avec les objets eux-mêmes.

Dans notre bibliographie nous rencontrons des recherches qui analysent et classifient les différentes sortes de problèmes de type additif (G. Vergnaud, 1982, Carpenter & Moser 1983, Carpenter, Hiebert & Moser 1981, Riley, Greeno & Heller 1983). D'autres recherches analysent et inventorient les différentes procédures que les élèves utilisent pour la résolution de simples additions ou soustractions (Carpenter, T.P., Moser, J. M., 1982, Steffe, L.P., Cobb, P., 1988, Fuson, K.C., 1992). De ces recherches en découlent trois grandes catégories des procédures qui peuvent être utilisées dans les opérations de l'addition et de la soustraction.

1.1. Premier niveau

Les enfants utilisent les objets ou leurs doigts pour construire un modèle direct de l'opération de l'addition et de la soustraction. Ils regroupent et comptent tous les objets qu'ils doivent additionner ou retirent et comptent les objets qui restent quand il s'agit de soustraction. Pour ces procédures, on proposera l'appellation de **procédures à matériaux,** et on distinguera celles pendant lesquelles les enfants utilisent leurs doigts (**doigts**) de celles pendant lesquelles les enfants utilisent des objets (**objets**) pour modéliser l'opération.

1.2. Deuxième niveau

À ce niveau les enfants peuvent compter avec des mots-nombres en utilisant la chaîne numérique verbale par opposition au niveau précédant où les élèves comptaient seulement des objets. Ils peuvent également réduire le comptage des premiers termes. Ces procédures seront appelées par la suite **procédures de comptage**. Plus particulièrement, concernant l'addition (p. ex. 3+5), il se peut que les enfants commencent à compter un par un dans un ordre ascendant. Il se peut qu'ils partent du plus grand nombre (5),6,7,8 ou du plus petit (3),4,5,6,7,8. Dans ce comptage, ils peuvent utiliser leurs doigts pour compter **(Comptage A**. **Doigts)** ou ne pas utiliser leurs doigts **(Comptage S**. **Doigts)**.

1.3. Troisième niveau

Les procédures de ce niveau sont appelées **procédures de récupération.** Dans cette catégorie de procédures on distingue deux cas : Des procédures de **récupération directe**, pendant lesquelles l'enfant a recours à un résultat qu'il connaît par cœur (p. ex. valeur de la somme 7 + 7), c'est-à-dire qu'il connaît l'opération et son résultat, immédiatement récupérable de sa mémoire de longue durée. Il y a également des procédures de **récupération d'opérations**, pendant lesquelles, l'enfant, pour arriver à trouver le résultat d'une opération, récupère de sa mémoire d'autres opérations connues sur la base desquelles il construit la réponse. Par exemple, pour l'opération 7+7, un enfant peut faire 7+3=10, 10+4=14.

Dans ce cas, l'enfant a tiré de sa mémoire les opérations 7+3=10, 10+4=14, 4+3=7 et, en les combinant, a construit la réponse.

Bien sûr la distinction de ces trois niveaux n'est pas absolue. On peut rencontrer d'autres procédures qui combinent des comportements relevant de deux niveaux différents, par exemple, des procédures **de calcul avec les doigts**, pendant lesquelles l'enfant calcule le résultat (3ème niveau), mais le vérifie en même temps en se servant de ses doigts (2ème niveau).

J. P. Fischer et F. Pluvinage (1988) ont appliqué la technique de mesure des Temps de Réponse à des calculs élémentaires (opérations arithmétiques sur les petits entiers naturels) à la fin de l'école élémentaire (élèves d'environ 11 ans). Certains de ces résultats sont utilisés dans le travail présent.

Des recherches ont été réalisées (Carpenter & Moser, 1983, De Corte & Verschaffel, 1987), pour examiner, en relation directe avec les problèmes additifs, le changement des différentes procédures de la part des élèves dans l'exécution des opérations d'addition et soustraction. Un facteur important, qui n'est ni analysé ni examiné à fond, mais qui détermine la différenciation des procédures et plus généralement la compréhension des notions arithmétiques, est la présentation sémiologique des quantités arithmétiques. Dans ce travail nous faisons l'effort d'analyser les différentes représentations des quantités arithmétiques participant à l'organisation des nombres et des opérations. Pour cette analyse, nous avons été inspirés par les travaux de R. Duval (1995, 1996, 1999). Ces travaux nous ont aidés, d'une part, à analyser et classer les différentes représentations, et d'autre part, à examiner les situations dans lesquelles il y avait ou pas de la congruence entre les modes de représentation et les procédures utilisées par les élèves. L'existence ou pas de la congruence entre les modes de représentation des quantités et les procédures, influence le type de compréhension des élèves et plus particulièrement leur comportement cognitif dans les différentes situations.

Dans le présent travail on essayera de répondre aux questions suivantes : Quels sont les différents modes de représentation des quantités, au moyen desquels on présente habituellement dans l'enseignement les nombres et les opérations ? De quelle manière ces modes de représentation des quantités arithmétiques influencent-ils la compréhension par les élèves de l'addition et la soustraction et l'emploi des procédures opératoires ? Dans quelles situations y a-t-il de la congruence entre les représentations et les procédures que les élèves utilisent ? Quelles situations ralentissent ou, au contraire, accélèrent l'apprentissage et la compréhension des élèves ?

2. Les différents modes de présentation des quantités arithmétiques

2.1. Les objets de la numération

On utilise différents objets matériels pour représenter les quantités dans les procédures arithmétiques. Les quantités utilisées peuvent être continues ou discrètes. Pour les quantités discrètes, l'unité de mesure est contenue dans la quantité (*un* objet), tandis que les quantités continues nécessitent une unité de mesure extérieure et arbitrairement déterminée. Dans le présent travail on s'occupe de quantités discrètes. En tant qu'objets de numération, on peut même considérer les doigts de la main. On peut distinguer deux catégories d'objets : 1) des objets qui sont *organisés selon une structure*. 2) des objets présentés *sans aucune structure*. Une collection d'objets a une structure quand, en dehors de la distinction unitaire des ses éléments, elle contient des groupes d'objets, considérés comme des entités et des unités de mesure. Par exemple, de tels ensembles d'objets sont les doigts de la main, le boulier, les dés, etc. On peut avoir des ensembles qui contiennent peu d'objets (deux, trois ou quatre) et dans ce cas le regroupement a pour base l'appréhension perceptive immédiate, ou *subitizing*. Les ensembles peuvent aussi contenir plus de 10 objets (2×10, 3×10, 100, etc.), c'est à dire, deux ou trois lignes d'un boulier, un bloc de 100 unités. Il faut, même dans la catégorie des objets organisés selon une structure, distinguer des objets comme le boulier, qui sont des instruments et qui acceptent des maniements et des calculs (par déplacements et regroupements) de ceux qui, comme les dés, n'acceptent pas des maniements. Le premier groupe d'objets, auquel appartient le boulier, est partiellement isomorphe à un système de numération avec un nombre de boules par ligne (équivalent à une base n). Les dés ne font que mobiliser le *subitizing* d'une collection d'éléments. Par la suite on va parler de **présentation matérielle** à propos des situations dans lesquelles on utilise des objets matériels pour présenter les quantités arithmétiques. D'habitude, ce sont ces objets là qui sont considérés comme des *objets de comptage*.

2.2. Analyse des différentes représentations des quantités arithmétiques

Pour les premières activités de comptage et même les premières opérations additives, la compréhension des systèmes de numération de position en base n n'est pas nécessaire. Celle-ci ne devient nécessaire qu'avec de plus grands nombres. Un traitement fondé par exemple sur la numération décimale ne peut se faire que dans le mode d'une production écrite. En revanche les activités de comptage d'objets matériels ou de traits ou le dénombrement de petites collections ne requièrent qu'une production orale et mentale. Et même si on utilise les noms de nombres en référence au système de numération décimale, les propriétés de ce système ne sont pas toutes nécessaires et son fonctionnement sémiotique n'est pas perçu par les élèves. Le recours à l'écrit ne remplit ici qu'une simple fonction de trace ou de matériau.

Les activités de comptage ainsi que les opérations additives sur de petits nombres relèvent de mathématique purement orale. L'écriture et les systèmes de numération de position ne sont nécessaires à ce niveau d'activité.

Pour pouvoir distinguer et classer les différentes représentations des quantités arithmétiques on va utiliser certains critères de R. Duval (1999). Premièrement, nous allons utiliser le **critère formel** qui est « *la présence ou l'absence de ressemblance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté* ». Avec ce critère de la ressemblance, nous pouvons distinguer deux grandes catégories : les représentations iconiques et les représentations symboliques.

A) Pour les *représentations iconiques*, le contenu de la représentation présente une relation de ressemblance avec l'objet représenté. On se rapporte aux différentes situations arithmétiques qui sont représentées avec les photos, les dessins, les croquis, etc. Ainsi, dans la représentation iconique, les images représentent les objets de numération dans leur entité physique. D'habitude dans les représentations iconiques il y a la possibilité du comptage des objets. Excepté dans le cas où les images présentent des objets dont certains sont cachés. Les illustrations sont très utilisées dans la pratique scolaire, par exemple dans les manuels scolaires.

On considère un autre critère de R. Duval (1999), le **critère réel** qui est celui du mode de production de la représentation. R. Duval distingue deux types de systèmes permettant de produire des représentations : Les systèmes sémiotiques avec leurs règles propres de production pertinente. Les systèmes physiques ou organiques avec leurs processus propres de production. Sur la base de ce critère nous pouvons séparer les dessins, les croquis ou les esquisses, que l'on peut faire des objets, et les photos, que l'on peut prendre avec un appareil.

B) Pour les *représentations symboliques*, le contenu de la représentation ne présente aucune relation de ressemblance avec l'objet représenté. Mais entre ces représentations, il est important de distinguer celles qui donnent accès à un comptage de celles qui ne donnent pas un tel accès.

1) Dans le cas des représentations symboliques qui donnent accès au comptage, on utilise comme objet de numération des symboles comme les points, les traits, etc. N'y sont pas représentées les caractéristiques spécifiques des objets, par exemple la couleur, la forme, le volume etc., mais seulement les caractéristiques qui aident à leur comptage. Il n'est pas sans importance que les symboles aient une structure ou pas. Des points à disposition arbitraire sont un exemple de symboles sans structure, tandis que les points dans la disposition que l'on voit sur les dés ont une structure organisée.

2) Comme représentations symboliques qui ne donnent pas accès au comptage nous pouvons distinguer les suivantes :

- Les représentations **langagières**. Les expressions langagières exprimant les quantités arithmétiques peuvent être orales ou écrites. Par exemple, des expressions orales sont les phonèmes des mots-nombres ou l'énoncé oral de la suite des nombres. Des quantités arithmétiques langagières écrites peuvent être les mots-nombres écrits, le mot 'trois' par exemple. On doit souligner que la langue naturelle, dans son expression orale, est un moyen de communication facile, que les enfants possèdent très tôt.
- Les représentations par des **chiffres**. Les quantités arithmétiques sont représentées par des chiffres et le signifiant de la quantité n'a aucun rapport avec le signifié. Dans le cas des chiffres, on représente les quantités par écrit dans une forme tout à fait abstraite.

2.3. Les fonctions que peuvent remplir les différentes représentations

Outre la distinction des différents types de représentations possibles par rapport aux systèmes qui permettent de les produire, if faut prendre en compte les différentes fonctions auxquelles leur production par les différents registres sémiotiques peut répondre. R. Duval distingue les fonctions des représentations lorsqu'elles sont produites comme autosuffisantes ou lorsqu'elles sont produites à titre de représentation auxiliaire.

Dans une situation autosuffisante, les représentations peuvent remplir trois fonctions qui sont fondamentales pour le fonctionnement cognitif au niveau de la conscience du sujet : fonction de communication, fonction de traitement et fonction d'objectivation.

Les représentations auxiliaires peuvent remplir les fonctions suivantes :

2.3.1. Apport d'informations complémentaires

La représentation auxiliaire apporte des informations qui ne sont pas contenues dans la représentation principale ou qui ne peuvent pas être inférées à partir de son seul contenu. Très souvent aux situations arithmétiques un dessin ou des croquis qui représente une quantité des objets accompagne un texte.

2.3.2. Interprétation explicative

Par exemple, un dessin ou croquis de la quantité remplace un chiffre ou un mot-nombre dans l'énoncé.

2.3.3.Sélection d'éléments pertinents

Par exemple, si la représentation principale contient un énonce du problème additif, la représentation auxiliaire sélectionne et présente les éléments pertinents pour le calcul.

2.3.4. Exemple

Le contenu de la représentation principale correspondant a une catégorisation de formes, de propriétés ou de traits pouvant être rencontrés dans des contextes multiples, la représentation auxiliaire instancie en quelque sorte la représentation principale.

2.3.5. Illustration

Cette fonction correspond a un changement de registre particulier : Par exemple, si la représentation principale appartenant à un registre de type discursif (énonce) ou symbolique (calcul écrit symboliques), la représentation auxiliaire appartient à un registre de type iconique.

2.3.6. Matériau (substitut d'objet)

La représentation auxiliaire sert de matériau pour des opérations dont l'effectuation est nécessaire pour la compréhension de ce que la représentation principale représente. Très souvent les représentations auxiliaires avec des images, matérialisent les chiffres ou les calculs, et servent à l'opération de comptage.

2.4. La congruence du mode de la représentation des quantités et des procédures arithmétiques utilisées par les élèves

Pour les jeunes enfants, la construction cognitive du nombre dépend, en grande partie, du mode qui a été utilisé pour représenter les quantités. Par exemple, pour la présentation matérielle et pour les représentations iconiques de grandes quantités, non organisées selon une structure, on utilise la procédure du dénombrement des objets pour faire la numération. Pour les petites quantités ou pour les grandes quantités organisées, la numération se fait par *subitizing* ou avec la procédure mixte du *subitizing* et du dénombrement. Lorsqu'il s'agit de la représentation des chiffres, la numération se fait obligatoirement à un niveau abstrait.

Il existe des représentations qui favorisent certains types de procédures de calcul ou de compréhension des nombres. On peut dire que quelques représentations sont congruentes avec certaines procédures arithmétiques, tandis que quelques-unes ne le sont pas. Lorsque les représentations et les procédures arithmétiques ne sont pas congruentes alors on a besoin de transformations mentales et d'adaptations. Ce fait précisément, c'est à dire l'activité d'adaptations mentales, coûte cher, et quelquefois, crée des difficultés supplémentaires aux élèves. Dans la suite, nous présenterons et analyserons les situations pour lesquelles il existe une congruence entre les représentations et les procédures arithmétiques, ainsi que celles pour lesquelles il n'en existe pas.

Lorsqu'on a affaire à des situations dans lesquelles les quantités sont présentées avec *du matériel sans structure***,** *des représentations iconiques sans structure et des représentations symboliques qui donnent accès au comptage***,** les procédures à matériel doivent être utilisées de préférence, ainsi que les procédures de comptage. L'existence du matériel, surtout dans une forme sans structure, nous oblige à passer par une procédure de certitude ou par un dénombrement des quantités de chaque terme de l'opération. Il est clair que les situations ci-dessus sont congrues aux premier et deuxième niveaux des procédures (les procédures à matériel et les procédures de comptage). Les élèves faibles qui travaillent aux deux premiers niveaux ne peuvent éviter l'emploi des objets ou des doigts. Pour les élèves travaillant au troisième niveau, l'existence même des objets les oblige à passer par le dénombrement pour faire la numération de la quantité et travailler par la suite avec les nombres. Ainsi, si, par exemple, des élèves capables de travailler dans un niveau abstrait (le 3ème) étaient mis dans des situations où ils devraient utiliser des objets, ils feraient des pas en arrière.

Quant nous avons des situations qui présentent *des matériels ou des représentations iconiques organisées selon une structure*, c'est à dire si une numération directe est possible, alors les situations mènent vers une conception des quantités comme des nombres et des procédures mentales de calcul sont ainsi favorisées. C'est à-dire qu'il y a une congruence avec le deuxième et troisième niveau des procédures. Dans ces procédures ou les élèves utilisent les nombres en tant que tels et ils n'ont pas besoin de la matérialisation ou du comptage pour les concevoir. Si quelques élèves sont capables de travailler au premier niveau, avec les procédures à matériel, en leur offrant des situations avec du matériel possédant une structure organisée, on les pousse à travailler dans un niveau plus élevé (*du calcul sur les objets*).

Pour les quantités arithmétiques qui s'expriment avec des représentations *symboliques qui ne donnent pas accès au comptage (représentations langagières et chiffres)*, on suppose que les élèves peuvent directement concevoir les nombres qui sont représentées sous la forme d'expression orale ou écrite et utiliser le troisième niveau des procédures mentales. Ainsi on peut dire qu'il y a congruence avec ce niveau là. Mais en général, les procédures qui vont être utilisées sont conformes au niveau de l'élève. C'est à dire qu'il est possible que les trois groupes de procédures soient tous utilisés. Par exemple, si un élève ne peut pas utiliser les nombres à un niveau abstrait, alors il peut manipuler l'énoncé d'un problème ou d'une opération arithmétique au premier niveau des procédures à matériel. Il va expliquer chaque quantité du problème à l'aide des objets matériels. Les énoncés avec une représentation langagière exigent une reconstruction des données du problème. Ainsi au premier niveau des procédures, c'est à dire à celui des procédures à matériel, il n'y a pas de congruence directe parce que les nombres doivent être traduits sous forme d'objets matériels ou de doigts. Même au deuxième niveau, celui des procédures de comptage, il n'y a pas congruence parce que les nombres doivent se traduire en des pas de montée ou de descente.

3. Résultats expérimentaux d'un nouvel enseignement

Au cours de l'année universitaire 1997-1998 on a effectué un enseignement expérimental avec la 1ère classe (C.P.) d'une école élémentaire (âge des enfants : 6 ans). Pour l'expérimentation nous avions constitué deux groupes : le groupe expérimental (les élèves de deux classes qui ont suivi un enseignement expérimental) et le groupe témoin (élèves de deux classes qui ont suivi un enseignement classique).

Actuellement l'enseignement des mathématiques en Grèce est influencé par le mouvement des 'Mathématiques Modernes'. C'est à dire qu'il y a une séparation entre les notions pré-arithmétiques et les notions arithmétiques, les notions pré-arithmétiques étant basées sur la théorie des ensembles. On a encore en Grèce l'emploi du manuel scolaire unique dans tout le pays. En ce qui concerne les différentes manières de présenter les notions arithmétiques, on peut dire que c'est la présentation illustrée et symbolique du livre qui domine et qui constitue le principal et presque unique moyen d'enseignement.

L'enseignement expérimental a été une proposition nouvelle, tant du point de vue du contenu, que du point de vue du mode de l'enseignement (Lemonidis, 2001). Nous avons cherché et nous avons utilisé comme point de départ de notre enseignement les connaissances arithmétiques acquises des enfants. On a insisté sur les calculs mentaux. L'analyse, ainsi que la synthèse des nombres dans une somme, a été une des caractéristiques de notre enseignement. En ce qui concerne les matériels utilisés, on a plutôt travaillé avec des matériels organisés en structure, et pour le commencement sur la base de cinq et de dix (p. ex. le boulier bicolore). Au cours de cet enseignement et pour la présentation des situations arithmétiques, on a utilisé les diverses expressions conformes au niveau cognitif des élèves. Notre but a été la conversion d'une représentation en une autre afin de réussir à créer des situations didactiques fertiles. On a essayé de proposer des situations didactiques conformes à la «zone proximale de développement » des élèves et capables d'avancer leur apprentissage.

3.1. Présentation du comportement des élèves

Dans la suite on présentera certains résultats concernant le progrès de deux groupes d'élèves (groupe expérimental et groupe témoin) et qui se rapportent aux procédures utilisées par les élèves dans les opérations de l'addition et de la soustraction. Cet examen a été réalisé dans la première classe (C.P.) et à la fin de l'année scolaire. Les élèves ont été interrogés individuellement, une interview durant ente les 30' et 45' minutes. Toutes les questions ont été posées oralement aux élèves. Dans cette interview on a noté les réponses des élèves et les procédures qu'ils utilisaient dans leurs calculs. Devant chaque élève, il y avait de petits cubes en plastique prêts à être utilisés dans leurs calculs**.** L'examinateur essayait de comprendre les procédures utilisées par les enfants pendant leurs calculs, grâce à des manifestations repérables : Il observait s'ils utilisaient leurs doigts et comment ils s'y prenaient, ainsi que le temps de réponse. Si la procédure utilisée n'était pas évidente il leur demandait de la lui décrire.

En général les élèves du groupe expérimental (G.E) ont présenté plus de progrès que les élèves du groupe témoin (G.T) dans l'ensemble de la matière enseignée : nombres, système arithmétique, opérations de l'addition et de la soustraction (mentales ou écrites) et résolution des problèmes. Pour les opérations mentales on a proposé aux élèves neuf additions et huit soustractions.

			Procédures de Récupération		Procédures de Comptage		Procédures à matériaux	
Opérat	Groupes d'élèves	**Réussite**	Récupérat. Directe	Récupérat. d'operat.	Compt. S. doigts	Comptage A. doigts	Doigts	Objets
4+4	Gr. tém.	**29 (100%)**	25 (86%)		1 (3,5%)		7 (10,5%)	
	Gr. exp.	**30 (97%)**	28 (93,5%)	2 (6,5%)				
9+9	Gr. tém.	**24 (83%)**	12 (50%)	1 (4%)	1 (4%)	7 (29%)		3 12,5%)
	Gr. exp.	**29 (93,5%)**	25 (86%)	3 (10,5%)		1 (3,5%)		
2+7	Gr. tém.	**28 (96,5%)**	1 (3,5%)	7 (25%)	4 14,5%)	10 (35,5%)	4 (14,5%)	2 (7%)
	Gr. exp.	**30 (97%)**	9 (30%)	15 (50%)	4 13,5%)	2 (6,5%)		
7+3	Gr. tém.	**28 (96,5%)**	6 (21,5%)	1 (3,5%)	7 (25%)	13 (46,5%)	1 (3,5%)	
	Gr. exp.	**29 (93,5%)**	15 (51,5%)	7 (24%)	3 10,5%)	3 (10,5%)		
6+5	Gr. tém.	**27 (93%)**	8 (29,5%)	3 (11%)	4 (15%)	9 (33,5%)	1 (3,5%)	1 (3,5%)
	Gr. exp.	**30 (97%)**	7 (23,5%)	14 (46,5%)	6 (20%)	2 (6,5%)		1 (3,5%)
9+8	Gr. tém.	**22 (76%)**	1 (4,5%)	4 (18%)	4 (18%)	7 (32%)	2 (9%)	4 (18%)
	Gr. exp.	**27 (87%)**	2 (7,5%)	17 (63%)	3 (11%)	4 (15%)		1 (3,5%)
10+6	Gr. tém.	**29 (100%)**	16 (55%)		3 10,5%)	7 (24%)	1 (3,5%)	1 (3,5%)
	Gr. exp.	**30 (97%)**	27 (90%)		2 (6,5%)			
14+4	Gr. tém.	**24 (83%)**	2 (8,5%)	4 (16,5%)	7 (29%)	6 (25%)	1 (4%)	4 (16,5)
	Gr. exp.	**28 (90,5%)**	11 (39,5%)	15 (53,5%)		1 (3,5%)		1 (3,5%)
12+7	Gr. tém.	**21 (72,5%)**		3 (14,5%)	5 (24%)	8 (38%)		5 (24%)
	Gr. exp.	**28 (90,5%)**	2 (7%)	13 (46,5%)	5 (18%)	4 (14,5%)		4 14,5%)
17+3	Gr. tém.	**26 (89,5%)**	2 (7,5%)	3 (11,5%)	8 (31%)	8 (31%)	1 (4%)	4 (15,5%)
	Gr. exp.	**27 (87%)**	6 (22%)	14 (52%)	4 (15%)	1 (3,5%)	1 (3,5%)	1 (3,5%)

Tableau 1 : Taux de réussite et procédures utilisées, par les deux groupes, aux additions.

Si on considère la réussite sur les neuf additions, les élèves du groupe témoin ont une réussite en moyenne de 7,89, tandis que les élèves du groupe expérimental une réussite de 8,29. Cette différence de la moyenne est statistiquement importante selon le test de Mann Whitney avec p=0,05.

Selon le tableau ci-dessus on remarque que les procédures utilisées par les élèves du groupe expérimental pour les additions sont beaucoup plus avancées que celles utilisées par les élèves du groupe témoin. C'est à dire les élèves du groupe expérimental utilisent plus des procédures de récupération (récupération immédiate et récupération des opérations), moins des procédures de comptage et encore moins des procédures à matériaux.

Les élèves du groupe expérimental utilisent avec un plus grand pourcentage la procédure de la *récupération immédiate* des opérations de la mémoire de longue date dans les opérations suivantes : doubles sommes (9+9), somme des nombres à un chiffre plus petite de 10 (2+7), somme des nombres à un chiffre égale à 10 (7+3), somme de type 10+n (10+6), somme de type 1n+n (14+4), et somme d'une dizaine entière d'un nombre à deux chiffres avec un nombre à un chiffre (17+3). Les sommes en question sont fondamentales et elles sont très souvent utilisées pour le calcul d'autres sommes, par conséquent les élèves doivent bien les connaître afin qu'ils puissent facilement les récupérer de la mémoire de longue date.

En plus les élèves du groupe expérimental utilisent souvent la procédure de la récupération d'autres opérations pour la construction de la somme dans les opérations suivantes : 2+7, 7+3, 9+8, 14+4, 12+7 et 17+3. Quand les élèves du groupe expérimental utilisent la procédure de la récupération d'opérations, ils font des combinaisons d'opérations bien plus variées que les élèves du groupe témoin.

3.2. Soustractions

Les élèves ont été également examinés oralement sur huit soustractions.

			Procédures de Récupération		Procédures de Comptage		Procédures à matériaux	
Opérat°	Groupes d'élèves	**Réussite**	Récupérat. Directe	Récupérat. d'operat.	Comptage S. doigts	Comptage A. doigts	Doigts	Objets
9-2	Gr. tém.	**28 (96,5%)**	7 (25%)	1 (3,5%)	6 (21,5%)	12 (43%)	2 (7%)	
	Gr. exp.	**29 (93,5%)**	10 (34,5%)	9 (31%)	6 (20,5%)	3 (10,5%)		1 (3,5%)
8-5	Gr. tém.	**26 (89,5%)**	2 (7,5%)	2 (7,5%)	7 (27%)	12 (46%)	2 (7,5%)	1 (4%)
	Gr. exp.	**30 (97%)**	13 (43,5%)	7 (23,5%)	4 (13,5%)	4 (13,5%)	1 (3,5%)	1 (3,5%)
10-4	Gr. tém.	**29 (100%)**	7 (24%)	3 (10,5%)	2 (7%)	14 (48,5%)	3 (10,5%)	
	Gr. exp.	**30 (97%)**	13 (43,5%)	11 (36,5%)	4 (13,5%)	1 (3,5%)		1 (3,5%)
16-6	Gr. tém.	**24 (83%)**	10 (41,5%)	4 (16,5%)	1 (4%)	4 (16,5%)		5 (21%)
	Gr. exp.	**29 (93,5%)**	23 (79,5%)	3 (10,5%)	1 (3,5%)			2 (7%)
14-7	Gr. tém.	**21 (72,5%)**	3 (14,5%)	3 (14,5%)		9 (43%)		6 (28,5%)
	Gr. exp.	**29 (93,5%)**	1 (3,5%)	16 (55%)	4 (14%)	2 (7%)		6 (20,5%)
18-6	Gr. tém.	**19 (65,5%)**		2 (10,5%)	5 (26,5%)	6 (31,5%)		6 (31,5%)
	Gr. exp.	**26 (84%)**	3 (11,5%)	13 (50%)	1 (4%)	2 (7,5%)		6 (23%)
17-9	Gr. tém.	**21 (72,5%)**	1 (5%)	2 (9,5%)	2 (9,5%)	7 (33,5%)		9 (43%)
	Gr. exp.	**30 (97%)**		19 (63,5%)	3 (10%)	1 (3,5%)		6 (20%)
16-11	Gr. tém.	**19 (65,5%)**	4 (21%)		1 (5,5%)	3 (16%)		11 (58%)
	Gr. exp.	**23 (74,5%)**		10 (43,5%)		2 (8,5%)		11 (48%)

Tableau 2 : Taux de réussite et procédures utilisées, par les deux groupes, aux soustractions.

En ce qui concerne la réussite totale, c'est à dire la réussite dans les huit soustractions, les élèves du groupe témoin ont un succès, en moyenne, de 6,44 tandis que les élèves du groupe expérimental ont un succès de 7,29. Cette différence de la moyenne est statistiquement importante selon le test de Mann Whitney avec p=0,008.

Quant aux procédures utilisées par les élèves de deux groupes, dans la réalisation des soustractions, on peut dire que, les élèves du groupe expérimental utilisent des procédures beaucoup plus avancées que les élèves du groupe témoin. Les élèves du groupe expérimental utilisent la procédure de récupération directe à un niveau supérieur, par rapport aux élèves du groupe témoin, aux opérations 8-5, 10-4 et 16-6. Ces soustractions là sont essentielles et elles sont utilisées dans le calcul d'autres soustractions, plus complexes. Ainsi, il est important que les élèves connaissent ces opérations et les récupèrent directement de leur mémoire.

En plus, les élèves du groupe expérimental utilisent beaucoup la procédure de la récupération d'autres opérations pour le calcul des résultats. Cette procédure est utilisée statistiquement beaucoup plus souvent par les élèves du groupe expérimental dans toutes les soustractions qui ont été proposées, sauf dans la soustraction 16-6, pour laquelle 79,5% de ces élèves ont utilisé la procédure de récupération directe.

Lorsque les élèves du groupe expérimental utilisent la procédure de la récupération d'autres opérations, ils utilisent une plus grande variété de combinaisons d'opérations que les élèves du groupe témoin.

4. Résultats-propositions pour l'enseignement

On a pu analyser et distinguer les différents modes d'expressions avec lesquels on peut présenter les quantités en situations arithmétiques. Ayant comme point de départ les différentes représentations des quantités arithmétiques, ainsi que les procédures que les élèves utilisent, on a pu distinguer les différentes situations et examiner le niveau de leur congruence avec les capacités cognitives des élèves.

Les quantités arithmétiques donc, peuvent être représentées différemment : représentations iconiques, langagières, chiffres, etc. Ces représentations créent différents modes de communication et de compréhension pour les élèves. Par exemple, les mots-nombres énoncés oralement, à l'aide du langage naturel, sont compris dès le plus jeune âge et on peut, en les utilisant, communiquer facilement. Au contraire, les nombres écrits en chiffres exigent un niveau d'abstraction plus élevé et sont utilisés plus tard par les élèves. Ces représentations sont congrues à certaines procédures utilisées par les élèves dans leurs calculs, mais pas à d'autres. Supposons que, dans la représentation des quantités avec des symboles qui n'ont pas de structure (par exemple des points disposés arbitrairement), on demande aux élèves de compter des quantités. La situation est congrue aux procédures du premier et du deuxième niveau, dans lesquelles on retrouve le comptage un par un. En revanche, si la représentation des quantités est dotée d'une structure (exemple de la disposition des points sur les faces d'un dé) alors la situation est congrue au troisième niveau, dans lequel les nombres sont directement utilisés.

Il en résulte que, pour l'enseignement des premières notions arithmétiques, il est important que les différentes représentations des quantités arithmétiques soient connues, ainsi que les influences cognitives de ces représentations sur l'esprit des élèves. Les enseignants, pour leur part, doivent connaître ces différentes représentations et aussi pouvoir s'en servir, afin qu'ils puissent créer des situations didactiques qui coïncident avec le niveau des élèves pour arriver à contribuer à l'évolution de l'apprentissage. De la théorie découle que, pour que l'apprentissage évolue et que les élèves conquièrent de plus en plus de capacités arithmétiques évolutives, les situations qui leur sont proposées correspondent aux caractérisations suivantes : mobiliser des représentations arithmétiques congrues aux procédures que l'élève utilise ou encore des représentations se rapportant à un niveau supérieur, au cas où l'élève serait capable de s'en servir. Avec un traitement convenable, une situation arithmétique peut se rapporter à un niveau d'abstraction beaucoup plus élevé que celui d'origine. C'est par exemple le cas si l'on a à faire à une situation avec des objets matériels ou des images, représentés par des traits, et qu'on pose des questions aux élèves sur certains objets ou traits cachés (situation cachée-apparente). Les élèves n'ayant pas sous les yeux tous les objets à compter sont obligés de chercher mentalement et d'engager cette réflexion dans la voie d'une certaine abstraction. De même, une situation qui se rapporte à un niveau de procédures plus élevé que celui qu'expriment les quantités arithmétiques, est la procédure *du calcul sur les objets*. Dans cette procédure, les élèves utilisent des objets, mais sous une forme organisée. Quand ils utilisent alors les objets avec une structure ou en correspondance avec les doigts, ils ne les comptent pas un à un, mais ils mobilisent les nombres entiers comme au troisième niveau, à la seule différence près qu'ils utilisent des objets pour les présenter. On a remarqué dans les résultats expérimentaux qu'un enseignement sur les notions arithmétiques ayant les caractéristiques qui ont été mentionnées a des effets positifs sur les élèves. Il les pousse plus vite vers des niveaux de réflexion abstraite et les rend plus adroits dans le maniement des situations arithmétiques.

BIBLIOGRAPHIE

CARPENTER T.P., HIEBERT J. and MOSER J.M., 1981, Problem Structure and First-Grader children's Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, (1), 27-39.

CARPENTER T.P., MOSER J.M., 1982, The development of addition and substraction problem-solving skills. In Carpenter, T.P. - Moser, J.M. - Romberg, T.P. (Ed.). *Addition and Sustraction. A cognitive perspective*, Hillsdale, Erlbaum.

CARPENTER T.P., MOSER J.M., 1983, The acquisition of addition and subtraction concepts. In Lesh, R. - Landau, M. (Eds.) : *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, 7-44.

DE CORTE E., VERSCHAFFEL L., 1987, The effect of semantic structure on first-graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 18, 363-381.

DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuells*, Berne : Peter Lang.

DUVAL R., 1996, Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des mathématiques*, 16/3, 349-382.

DUVAL R., 1999, Conversion et articulation des representations analogiques. *IUFM Nord Pas de Calais. Seminaires de recherche.*

FISCHER J. P., et PLUVINAGE F., 1988, Complexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9/2, 133-154.

FUSON K. C., 1992, Research on whole number addition and subtraction. In D. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 243-275, New York : Macmillan.

LEMONIDIS Ch., 2001, Une nouvelle proposition d'enseignement de mathématiques pour les premières classes de l'école élémentaire. Thèmes in Education, No 3. Athènes.

STEFFE L.P., COBB P., 1988, *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York : Springer-Verlag.

RILEY M.-S., GREENO J.-G., HELLER J.-I, 1983, Development of children's problem-solving ability in arithmetic, In H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*,153-196, New York : Academic Press.

VERGNAUD G., 1982, A classification of cognitive tasks and operations of thougth involved in addition and subtraction problems In Carpenter, T.P. - Moser, J.M. - Romberg, T.P. (Eds.), *Addition and Sustraction. A cognitive perspective.* Hillsdale, Erlbaum.

Kallia PAVLOPOULOU et Tasos PATRONIS

APPROPRIATION DES ÉCRITURES SYMBOLIQUES À PROPOS D'UN PROBLÈME DONNE EN LANGUE NATURELLE

Abstract. A mathematical word problem was proposed to a «multi-cultural» class of 7th grade. Many of the symbolic expressions of the solutions adopted by the pupils, have, a typical similarity with arithmetic mononyms and polynomials. In this communication we analyse these symbolic forms and we try an interpretation within a framework for Communicative Action offered by Habermas

Résumé. Un problème formulé en langue naturelle a été proposé à des élèves de cinq classes de 5ème d'une école «multi-culturelle». Plusieurs écritures symboliques utilisées par les élèves pour exprimer leurs solutions du problème présentent une similarité avec des monômes et des polynômes numériques. Dans cet article nous analysons ces écritures et nous essayons de faire une interprétation dans le cadre théorique de l'Activité Communicationelle de Habermas.

Mots clés : Activité communicatinnelle, jeu mathématique, école "multi-culturelle", compréhension d'énoncés, expression en langue naturelle et expression symbolique.

---

1. Prélude

En présentant une recherche comme celle-ci, il faut plutôt commencer par les choix les plus fondamentaux. Il s'agit d'analyser les réponses d'un ensemble «multi-culturel» d'élèves de 12 - 13 ans (parmi eux, des enfants d'émigrés et aussi de tsiganes) à propos d'un problème bien connu qui ressemble à un jeu sans but précis.

La maîtresse joue avec ses élèves le jeu suivant. Chaque élève doit échanger une pièce de cent drachmes de la maîtresse contre des pièces de monnaie de valeur inférieure, sans utiliser des pièces d'une drachme[1]. Combien d'élèves peuvent jouer à ce jeu, si chaque élève doit échanger la pièce de cent drachmes d'une manière différente des autres élèves ? [2]

Il est nécessaire de justifier notre démarche. Pourquoi ce jeu, au moment où notre vie est dominée par une rationalité instrumentale, une «activité rationnelle par rapport à une fin» ? Est-ce que nous ne dépensons pas notre temps (et aussi le

[1] C'est-à-dire, on peut utiliser seulement des pièces de 2, 5, 10, 20 et 50 drachmes. Ceci fait maintenant partie de l'histoire de la Grèce et de l'Europe !
[2] Cet énoncé de problème est une adaptation d'un énoncé trouvé dans [7] et [9].

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 117 – 130.

temps du lecteur) sans raison, au moment où il y a d'autres buts didactiques prioritaires ?

Les Mathématiques, sans constituer simplement un «jeu de symboles», ne tirent pas leur origine uniquement de recherches profitables. Le *jeu* est considéré comme ayant contribué à la genèse de l'activité mathématique [2]. Ainsi, nous avons été amenés à trouver dans la bibliographie un problème mathématique ayant la forme d'un «jeu» qui n'est pas trivial, mais qui est lié à un contexte habituel pour les enfants et important du point de vue pratique. Le contexte culturel des transactions d'argent, ainsi que les pratiques de mesure en général, a été d'une importance particulière dans l'évolution de la notation arithmétique au Moyen Age et dans les Temps Modernes avec l'invention de la notation décimale des fractions par Simon Stevin. Polya qui s'est aussi occupé du problème que nous avons proposé aux élèves, a présenté une «technique» qui raccourcit beaucoup la procédure de la solution, en introduisant, comme une variable $n \leq 100$, une somme arbitraire qu'on peut composer en additionnant quelques pièces de monnaie (cf.[10]). Mais il faut examiner cette expérience plus précisément, et dans un cadre plus complexe et plus propre que celui de «la vie pratique» ou «les Mathématiques» tout simplement.

2. Cadre théorique et question principale de la recherche

Habermas, dans son fameux article [5b], compare deux types d'activité sociale. Il s'agit, d'une part, de l'activité «communicationnelle» qui prend place, par exemple, à l'intérieur des institutions d'une société, et d'autre part, de l'activité «rationnelle par rapport à une fin» qui prend pour réaliser un objectif le chemin le plus économique dans des conditions données. Notre époque est marquée par une expansion dramatique des systèmes d'activité rationnelle par rapport à une fin, qui transforme aussi la structure de l'activité communicationnelle (voir aussi [6]).

Cette analyse pourrait être appliquée aussi dans le cas des institutions scolaires. D'une part on a *l'activité communicationnelle* qui est une interaction médiatisée par des symboles et qui se conforme à des normes sociales de façon obligatoire. Par analogie, on peut considérer l'interaction médiatisée par les «symboles» du langage de l'enseignement des Mathématiques, comme par exemple les «mots-clés» dans la résolution des problèmes ou les symboles +, -, x, :, = dans l'enseignement de l'Arithmétique et de l'Algèbre au niveau élémentaire. Ainsi, le *contrat didactique* considéré dans la théorie de la Didactique est l'analogue des normes sociales «qui définissent des attentes de comportements réciproques et doivent être nécessairement comprises et reconnues par deux sujets agissants au moins» ([5b], p.22), dans le cas où les sujets considérés sont un «enseignant» et un «enseigné».

D'autre part, on a l'activité «rationnelle par rapport à une fin», qui se conforme à des modèles d'action (ou heuristiques) instrumentales. Cette activité est déterminée par des systèmes d'activité rationnelle techniques, économiques ou politiques, indépendamment du monde «vécu» (comme Habermas le nomme) des groupes sociaux et culturels ou des individus socialisés ([5a], pp.77-81). Contrairement à ce monde «vécu», qui est construit de façon <<perspectiviste>>, c'est-à-dire en se dirigeant *vers* (ou en agissant *à propos de*) quelque chose ou quelque but plus ou moins éloigné, l'activité instrumentale cherche à obtenir un résultat spécifique par des moyens donnés et par le chemin le plus court possible (processus «means-ends»).

Habermas dans [5a], soutient que pour le monde «vécu», l'importance du «progrès scientifique» ne peut être estimée qu'indirectement, c'est à dire en vivant les conséquences les plus efficaces de la science et la technique au niveau pratique. Ceci pose le problème de l'enseignement des «applications» de la science (et des Mathématiques en particulier) de façon à ce que les connaissances scientifiques et technologiques ne soient pas attachées au contexte des normes institutionnelles et par conséquence perdent leur sens (cf.[8]).

Notre choix était de proposer aux élèves le problème formulé plus haut en langue naturelle comme un «jeu», pour faire mieux apparaître le caractère communicationnel de l'activité des élèves : il n'y a pas ici une seule solution ou une solution optimale à trouver, comme dans l'activité rationnelle par rapport à une fin, et il faut introduire une nouvelle règle d'action et notamment essayer de trouver toutes les solutions possibles.

	INSTITUTIONS SCOLAIRES ET «MONDE VECU» SOCIO-CULTUREL (ACTIVITE COMMUNICATIONNELLE)	**SYSTEMES D'ACTIVITE RATIONNELLE PAR RAPPORT A UNE FIN**
Situations	Agir en direction de (ou à propos de) quelque chose/but plus ou moins éloigné	Obtenir un résultat spécifique par des moyens donnés et par le chemin le plus court possible
Règles orientant l'Action	Normes Sociales, Règles du «Jeu».	Règles Techniques, Modèles d'Action Instrumentale
Caractère Sémiotique de Communication de l'Action	?	Formulation et Raisonnement via un Langage Indépendant du Contexte - Utilisation des Systèmes de Signes

Tableau 1

La question principale de notre recherche apparaîtrait comme la tâche de «remplir» le tableau ci-dessus (Tableau 1), qui est un arrangement spécial de [5b] (p.24) dans le cas des institutions scolaires. Quel serait le caractère sémiotique de communication des actions des élèves dans une situation-problème comme celle que nous leur avons proposée ? C'est-à-dire, nous nous intéressons à analyser et interpréter, dans le cadre théorique de l'activité communicationnelle de Habermas, les *moyens sémiotiques* (langage, symboles) et surtout la *manière dont les élèves les utilisent* afin d'exprimer leurs solutions au problème donné.

3. Réalisation de la recherche et variables expérimentales

Notre recherche a été réalisée dans un quartier urbain auquel nous nous référons par la suite en utilisant le nom «CITY». Ce quartier a été choisi à cause de sa composition «multi-culturelle» qui est relativement stable depuis plusieurs années ([1], pp.215-318). L'énoncé du problème, présenté en introduction, a été donné à tous les élèves de 5ème (nombre total 69) d'un collège de CITY. Le problème a été distribué aux élèves par leurs propres professeurs de mathématiques, sans notre présence et sans aucune explication ni du problème, ni des raisons de la recherche. Cette manière de «présentation» avait quelques conséquences que nous verrons plus loin.

Une variable expérimentale dans notre recherche est *la valeur de la pièce de monnaie que chaque élève doit changer*. Dans l'énoncé du problème on se réfère à une pièce de monnaie de 100 drachmes. Les pièces de monnaie de valeur inférieure qui peuvent être utilisées sont les pièces de 2, 5, 10, 20, 50 drachmes. Les enfants, afin de répondre à ce problème, doivent trouver un grand nombre (196) de combinaisons différentes de monnaies. Ceci n'est pas habituel chez les enfants de cet âge et cela pour deux raisons : a) les problèmes donnés à la classe ont habituellement une seule solution et b) cette solution dérive d'habitude d'opérations entre des nombres donnés explicitement dans l'énoncé. Dans notre cas, aucun nombre n'est donné explicitement à l'énoncé du problème. Ainsi, nous avons pensé à répéter la même expérience en présentant le même énoncé, mais en quatre temps consécutifs, en variant chaque fois la pièce de monnaie utilisée par la maîtresse. Nous avons donc demandé aux élèves de changer dans un premier temps une pièce de 10 dr. contre des pièces de monnaie de valeur inférieure (problème qui a deux solutions). Dans un deuxième temps, nous avons posé le même problème pour une pièce de monnaie de 20 dr., dans un troisième temps pour une pièce de monnaie de 50 dr. et dans un quatrième temps pour une pièce de monnaie de 100 dr. L'analyse de cette dernière expérience n'est pas encore terminée.

Une autre variable expérimentale est *le langage de l'énoncé*. Dans notre recherche l'énoncé est présenté en langue purement naturelle, une présentation pas habituelle pour les élèves, car la plupart de problèmes donnés à l'école utilisent le langage «mixte».

Une dernière variable est *le choix de donner explicitement (ou non) dans l'énoncé la valeur des pièces de monnaie qu'on peut utiliser* pour la résolution du problème (c'est-à-dire dans notre cas, expliciter ou non qu'on peut utiliser les pièces de 2, 5, 10, 20, 50 dr.). Toutes ces pièces dérivent implicitement de l'expression : «…contre des pièces de monnaie de valeur inférieure, sans utiliser des pièces d'une drachme … ».

Pour estimer les stratégies des élèves et leur attitude devant un problème donné en langue proprement naturelle, nous avons posé une question supplémentaire : «Quelle est la différence entre le problème donné et les problèmes que vous résolvez habituellement en classe ? ». Quelques mois plus tard et après avoir rassemblé et analysé les réponses, nous avons visité le collège pour faire une observation de la classe. Nous avons suivi les cours de mathématique et de grec moderne, en réalisant de surcroît des interviews de groupes d'élèves et de professeurs de la classe.

4. Paramètres de l'activité communicationnelle des élèves

L'analyse de nos données expérimentales est faite suivant quelques paramètres importants de l'activité communicationnelle des élèves, qui nous permettront de répondre à la question principale de notre recherche. Ces paramètres sont la compréhension de l'énoncé, la perception et la symbolisation des «unités structurelles» du problème et la variété des expressions des solutions.

4.1. Compréhension de l'énoncé

La compréhension d'un texte ne dépend pas seulement des facteurs centrés sur le processus cognitif du lecteur ou les caractéristiques propres du texte, mais aussi des conditions «communicationnelles» de la lecture. Comprendre (ou non) un texte pourrait signifier *interpréter le texte suivant (ou contre) les intentions de son auteur ou* encore *décoder son «message».* Une autre possibilité serait de *ne pas vouloir* comprendre ce qu'on est en train de lire, soit parce qu'on n'en a pas envie, soit parce qu'on interprète mal les intentions de l'auteur. La compréhension donc d'un texte est en rapport direct avec *l'intentionnalité*, une dimension plutôt négligée par les recherches relatives à l'éducation mathématique[3].

Parmi les 69 copies des élèves de CITY il y en a 13 sans aucune solution et 11 qui ont «mal entendu» l'énoncé du problème donné, c'est-à-dire qu'ils ont décodé l'énoncé contre l'intention de son auteur. La question «Combien d'élèves peuvent jouer à ce jeu, si chaque élève doit changer la pièce de cent drachmes d'une manière différente des autres élèves ? » est dense et facilement mal entendue par les élèves. Un parcours unique et rapide du texte, sans retours en arrière, peut être insuffisant pour la compréhension de la question, car les représentations développées par l'organisation rédactionnelle du texte ne sont pas congruentes à celles requises par le niveau cognitif (cf.[4]). En lisant rapidement cette question on peut comprendre que la pièce de cent drachmes ne sera pas changée par *un* élève chaque fois, mais par *plusieurs*, et en plus que chaque élève doit contribuer la même somme d'argent ! Ainsi, la phrase «combien d'élèves peuvent jouer à ce jeu» est interprétée comme la participation simultanée des élèves à un jeu différent qui

[3] A part quelques exceptions, comme dans [3] et aussi dans [11], [12].

consiste à une simple répartition (division) de la pièce de cent drachmes en des parties égales et non comme la recherche de toutes les combinaisons possibles des pièces de 2, 5, 10, 20 et 50 dr. afin d'obtenir une pièce de 100 dr. Les cinq réponses présentées ensuite, correspondent exactement à une telle interprétation (six autres sont aussi du même type) :

«Chaque élève peut donner une pièce de cinquante drachmes.» [No3]

«2 élèves, chacun donnera 50 drachmes.» [No58]

«Il y aura 5 élèves qui participeront au jeu. Chacun donnera 20 drachmes.» [No55]

«5 élèves pourront donner 20 drachmes chacun. Ainsi que 2 élèves, chacun une pièce de 50.» [No56]

«10 drachmes, 10 élèves.»[No57]

En examinant les réponses à la question «Quelle est la différence entre le problème donné et les problèmes que vous résolvez habituellement dans la classe ? », nous avons observé une homogénéité étonnante parmi les réponses des 13 élèves sans aucune solution et les 11 qui ont «mal entendu» l'énoncé du problème donné (au total 24 élèves). A cette dernière question un seul élève parmi les 24 répond :

«Il était plus difficile et plus joli. Je ne l'ai pas résolu car je n'ai pas pu.»

Tous les autres élèves donnent des réponses comme les suivantes :

«Nous ne pouvons pas résoudre ce problème car il a des mots et pas de nombres.»

«Ce problème est théorique et sans nombres. Il est hors de la réalité en comparaison de ce que nous faisons en classe.»

Ce dernier type de réponses est connu dans la bibliographie anglophone sous le terme *«number consideration strategies»* (cf. [7], [9]). Mais une telle description est très générale et ne répond pas à la question d'interprétation de ce comportement -un comportement typique mais qui peut être lié à plusieurs raisons différentes, chaque fois qu'elle est exprimée par des élèves.

Nos données expérimentales présentent à ce point une particularité qui n'est peut-être pas due au hasard : la majorité des élèves (22 sur 24) qui n'ont pas donné de réponse ou ont «mal entendu» l'énoncé du problème appartiennent à une seule classe parmi les cinq de 5ème du collège de CITY. Il paraît que dans cette classe (à laquelle nous nous référons par la suite en utilisant le nom «A_0») prédominait une intentionnalité négative à l'égard de ce problème et de notre recherche. L'homogénéité des réponses précédentes se présente ici pas seulement dans leurs formes, mais surtout dans la relation particulière qui existe entre la manière dont le problème a été donné à la classe, la forme du problème et la forme des réponses et des solutions (quand elles existent).

Ensuite, nous présentons une interview que nous avons réalisée pendant notre visite au collège de CITY, avec deux élèves de la classe A_0, codés par <u>A</u> et <u>B</u> (jeune garçon tsigane). Cette discussion éclaircit les conditions communicationnelles dans lesquelles le problème a été proposé aux élèves et leur réaction :

CHERCHEUR : Vous avez écrit que vous ne pouviez pas résoudre le problème «car il a des mots et pas de nombres». Qu'est-ce que vous vouliez dire ?
A : S'il avait des nombres, il nous paraîtrait plus facile.
B : S'il nous montrait le nombre des élèves, nous pourrions dire que p.ex. s'il y avait cinq élèves, chacun donnerait une pièce de vingt drachmes.
CHERCHEUR : Quand le professeur vous a donné le problème, qu'est-ce que vous avez pensé ?
A : Il était … brusque.
CHERCHEUR : C'est-à-dire ?
A : Je préfère être préparé à l'avance.
CHERCHEUR : Si tu voyais ce problème dans un magazine, serait-il différent ?
A :Monsieur, s'il était dans un magazine, nous pourrions le prendre chez nous, le lire ?
B : Oui, parce que comme il a été donné comme une épreuve, nous n'avions pas de temps pour réfléchir … Nous étions angoissés …
CHERCHEUR : Vous l'avez vu donc comme une épreuve ?
B (en souriant) : Oui.

D'après les réponses de A nous voyons que la forme du problème, mais surtout les conditions communicationnelles dans lesquelles le problème a été proposé aux élèves n'étaient pas bien acceptées par les élèves de A_0. Suivant les paroles de A, personne ne peut soudain demander aux élèves de répondre à quelque chose sans qu'ils soient préparés. L'élève B est encore plus clair : il s'agit de diviser la pièce de cent drachmes en autant de parties que le nombre des enfants qui jouaient au jeu. Donc il était nécessaire que le nombre des enfants qui jouaient au jeu soit donné aux élèves pour qu'ils puissent trouver la monnaie que chacun contribuait, comme quotient de la division.

Parmi les 11 élèves qui ont décodé l'énoncé de la manière indiquée plus haut, un seul n'avait pas le grec comme langue maternelle. Dans l'ensemble de notre échantillon (69 élèves) il y avait 12 élèves qui n'avaient pas le grec comme langue maternelle. Nous ne pouvons pas donc prétendre que ce problème donné en langue naturelle a posé des difficultés spécifiques aux élèves qui n'avaient pas le grec comme langue maternelle.

4.1.1. Nombre des solutions données par élève

Contrairement aux problèmes habituels rencontrés à l'école, la réponse au problème donné implique un grand nombre (total :196) de solutions partielles (c'est-à-dire, de manières de changer la pièce de monnaie de cent drachmes). Nous avons compté le nombre des solutions partielles données par chaque élève et nous avons analysé ce paramètre à l'aide du logiciel statistique SPSS[4]. La moyenne du

[4] Nous avons créé le Box Plot des deux variables : *nombre des solutions par élève* et *minorité linguistique*, et d'après lequel nous avons obtenu les données qui suivent.

nombre des solutions des élèves qui n'avaient pas le grec comme langue maternelle est 7 et des autres 9 et l'amplitude est respectivement Xmax-Xmin = 21-0 = 21 et Xmax-Xmin = 35-0 = 35. La variance des moyennes des deux populations nous a conduit, dans un deuxième temps, à un test d'hypothèse pour que nous puissions contrôler si la langue maternelle et la nationalité étaient des facteurs essentiels en ce qui concerne le nombre des solutions de chaque élève. Nous avons donc contrôlé si :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$, c'est-à-dire, les moyennes des deux populations sont les mêmes
$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$, les moyennes sont différentes.

En appliquant le t-Test au seuil 0,05 nous avons eu comme résultat que l'hypothèse H_0 ne peut pas être exclue. Nous pouvons donc conclure que les moyennes des deux populations ne diffèrent pas significativement.

4.2. Perception et symbolisation des «unités structurelles» du problème

Les pièces de monnaie qui peuvent être utilisées pour le change de la pièce de cent drachmes ont été apparemment perçues par les élèves comme si elles étaient des «unités structurelles» du problème. Plusieurs élèves ont inventé des manières différentes pour exprimer les unités structurelles (2, 5, 10, 20, 50) afin de les distinguer des coefficients numériques qui déterminent les nombres des unités structurelles utilisées.

Unités structurelles dans un cercle ou rectangle : Ce symbolisme est le plus habituel et il est utilisé par 26 élèves (p.ex. No13, No44).

Usage des parenthèses : Deux fois seulement nous rencontrons ce type de notation.

No46 : $5(2) + 2(5) + 1(10) + 1(20) + 1(50) = 100$

Forme exponentielle : Il est intéressant de noter l'utilisation des «puissances» pour la distinction des unités structurelles. Les unités structurelles se présentent comme des «exposants» et à la place de la base est le nombre qui précise la quantité des unités structurelles, comme le coefficient numérique à un monôme.

No40 : $5^{20} = 100$

$5^{10} + 2^{10} + 5^{2} = 100$

Différence de taille : Les unités structurelles sont écrites plus grand ou moins grand que les coefficients numériques.

No41 : $3.20 + 4.10 = 100$

$50 + 2.20 + 10 = 100$

$50.2 = 100$

4.3. Variété d'expressions des solutions

Les expressions des solutions données par les élèves ont plusieurs formes. Nous pouvons distinguer deux catégories principales en fonction de l'expression :

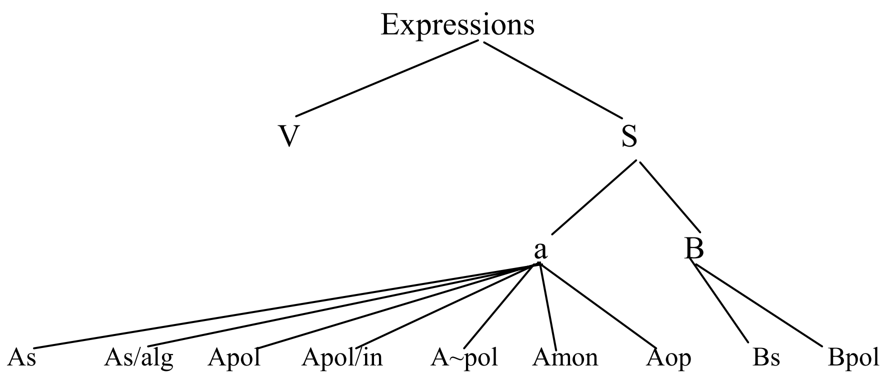
expressions en langue naturelle (notée par «V» à la suite) et *expressions symboliques* («S»). Le premier type d'expressions concerne une description verbale des solutions proposées. Dans notre recherche ce type est utilisé seulement par les élèves qui ont décodé l'énoncé contre nos intentions.

La plupart des expressions adoptées implique l'usage d'écritures symboliques «mathématiques» (opérations, nombres, indices ou «exposants», «égalité») au cours de la résolution du problème. Il est intéressant de souligner que la majorité des élèves (48 sur 69) a utilisé des expressions ou formes «algébriques» («A») pour décomposer la pièce de cent drachmes en des monnaies de valeur inférieure. Deux élèves seulement ont décomposé la pièce de cent drachmes en mettant une forme auprès de l'autre («B»).(p.ex. No44, No12).

No44 : 50dr 20dr 20dr 10dr = 100
20dr 5dr 5dr 10dr 10dr 50dr = 100

No12 : $10\cdot2$, $4\cdot5$, $10\cdot1$, $2\cdot50$
$5\cdot2$, $6\cdot5$, $2\cdot20$
$10\cdot5$, $1\cdot10$, $2\cdot20$
$2\cdot50$

A la suite nous présentons une classification des expressions utilisées par les élèves.



V : expressions en langue naturelle
S : expressions symboliques
A : expresions «algébriques»
B : une forme auprès de l'autre
As : sommes numériques en forme horizontale
As/alg : procédure algorithmique de l'addition (en forme verticale)
Apol : «polynômes» numériques, où les unités structurelles sont multipliées par des coefficients numériques.
Apol/in : «polynômes» numériques, où les unités structurelles sont inexistantes.

A~pol : «polynômes» numériques, où les unités structurelles données sont respectées, mais il n'y a pas de réduction des termes semblables.
Amon : utilisation isolée de «monômes».
Aop : combinaison d'opérations «algébriques»
Bs : une forme auprès de l'autre sans utiliser le symbole de l'addition.
Bpol : n-uplet non ordonné de «monômes».

Environ la moitié d'élèves (32/69) a donné des solutions sous formes des «polynômes» numériques en utilisant comme unités structurelles les cinq monnaies (2, 5, 10, 20, 50) multipliées par des coefficients numériques. Il y a des copies où toutes les solutions suivent le même type d'expressions (p.ex. No43) et d'autres qui n'ont pas d'homogénéité dans l'expression de leurs solutions.

No43 : $100 = 50 \cdot 2$
$100 = 5 \cdot 10 + 25 \cdot 2$
$100 = 25 \cdot 2 + 1 \cdot 50$

Certains élèves, afin «d'arriver» au nombre 100 en utilisant différentes combinaisons de pièces de monnaie, écrivent aussi des «polynômes» numériques, mais en utilisant des *unités structurelles inexistantes*, lesquelles ne correspondent pas à de vraies monnaies («Apol/in»). Certaines fois, ces unités structurelles inexistantes sont mises dans un cercle! (p.ex. No6).

No6 : 1x70 + 1x30 = 100
1x80 + 1x20 = 100
[30, 70, 80 sont des unités structurelles inexistantes]

Dans d'autres copies nous rencontrons des expressions qui ressemblent à des polynômes mais sans avoir fait la réduction des termes semblables et donc il existe des répétitions de la même unité structurelle («A~pol») (p.ex. No5).

No5 : 1x50 + 1x50 = 100
2x20 + 2x20 + 1x20 = 100
5x10 + 5x10 = 100
10x5 + 10x5 = 100

Quelquefois, nous distinguons l'utilisation des «monômes» isolés dans un ensemble de différents types d'expression («Amon»). Plus souvent (9 sur 69) les élèves utilisent des sommes numériques en forme horizontale («As») (p.ex.No18). De cette manière, les élèves ne mettent pas les unités structurelles dans un cercle puisque tous les nombres utilisés correspondent à des pièces de monnaie. Il n'y a pas de coefficients numériques, contrairement aux expressions qui ressemblent à des «polynômes». La procédure algorithmique de l'addition (en forme verticale) est rencontrée dans trois copies seulement. Ces trois cas sont des élèves qui ont mal entendu l'énoncé.

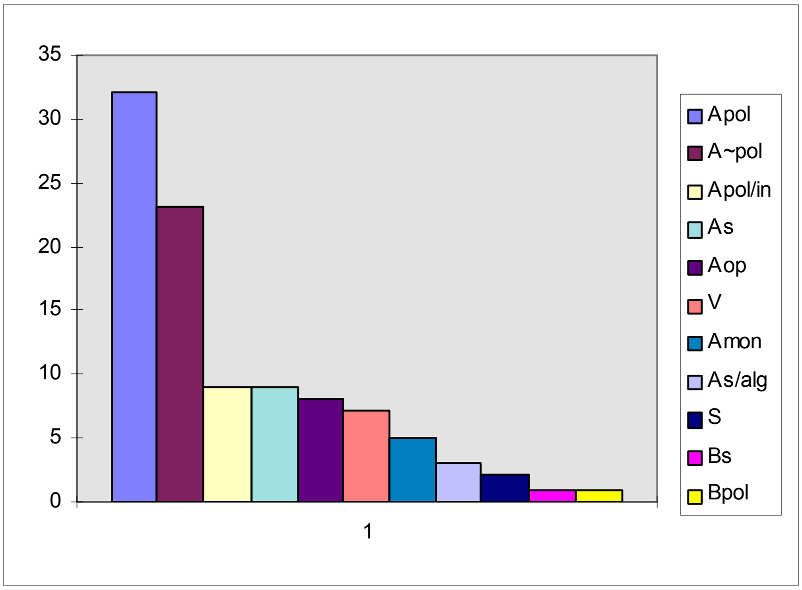
No18 : $50 + 20 + 20 + 10 = 100$
$50 + 20 + 20 + 5 + 5 = 100$

Dans quelques copies nous rencontrons des combinaisons d'opérations «algébriques» («Aop») afin «d'arriver» aux cent drachmes de la maîtresse. Il y a des fois où les expressions des solutions se caractérisent par une créativité étonnante! (p.ex.No1).

No1 : $50 + 50 = 100$
$5\cdot(10) + 2\cdot(5) + 10 + 20 + 5\cdot 2 = 100$
$50 + 20 + 10 + 5\cdot 2 + 2\cdot 5 = 100$
$10 : 2 + 5\cdot 5 + 10\cdot 7 = 100$
$10\cdot 10 = 100$
$5^{10} + 100 : 5 + 10\cdot 3 = 100$

Le tableau suivant présente les fréquences de toutes manières d'expressions des solutions utilisées par les élèves.

Apol	A~pol	Apol/in	As	Aop	V	Amon	As/alg	S	Bs	Bpol
32	23	9	9	8	7	5	3	2	1	1



5. Interprétation

Le même problème a été aussi donné à un grand nombre de classes de 5ème dans différents quartiers d'Athènes, ainsi que dans d'autres villes en Grèce. La recherche est en cours et l'analyse comparative n'est pas encore terminée, mais on peut déjà dire que les résultats de l'école de CITY présentent une plus grande quantité d'expressions symboliques (en comparaison des expressions en langue naturelle) et une plus grande richesse d'expressions symboliques. D'où viennent ces formes et comment les enfants les adoptent-ils ? Ici nous allons nous limiter à une interprétation dans le cadre théorique qui précède, en utilisant les données que nous avons rassemblées pendant l'observation du cours des mathématiques chez les mêmes élèves, quelques mois plus tard, et d'après des interviews avec leurs professeurs. Dans une des classes où nous avons suivi le cours des mathématiques, le professeur en enseignant les fonctions élémentaires insistait sur la forme symbolique «algébrique» des énoncés, par exemple :

PROF. : Quand nous regardons la forme de la fonction [il écrit au tableau : $y = ax^1$] et l'exposant est 1, elle représente une droite (?) Une autre forme est $y = a x + b$. Par exemple [il écrit au tableau : $y=2x+1$].

De plus, d'après l'observation du cours de grec moderne et l'interview de la professeur de grec, il nous paraît qu'il n'y avait pas de difficulté à la *communication orale* (en grec), mais au contraire, il y avait de ladifficulté à la *formulation écrite* et l'orthographe.

Dans la situation de résolution du problème que nous avons proposé, les normes sociales orientant l'action des élèves n'étaient pas différentes des normes habituelles (il fallait «produire» des réponses comme on fait toujours à l'école), mais les règles du «jeu» ne fonctionnaient plus : il fallait non seulement trouver *plusieurs* (et pas, comme d'habitude, une seule) *solutions*, mais aussi inventer *des modes de codification* (et en même temps d'*expression*) de ces solutions. Nous interprétons les écritures symboliques adoptées par les élèves comme des moyens sémiotiques dans cette direction, c'est-à-dire pour *codifier* et en même temps *communiquer* leurs solutions du problème donné. Les élèves se sont *appropriés* des écritures symboliques de manières variées et les utilisent avec une grande ou petite cohérence, par exemple en tenant compte des «unités structurelles» du problème. Ainsi, la plupart des écritures symboliques utilisées ou inventées par les élèves, dans le «monde vécu» de cette école, dérivent «indirectement» de l'enseignement. Les élèves sont influencés par leurs professeurs, mais pas vraiment de la manière dont ces derniers ambitionnaient.

En conclusion, on pourrait dire que les écritures adoptées fonctionnent pour les élèves comme des «systèmes de codification» ré-inventés (mais dans un sens plus ou moins différent du sens habituel de ces écritures en Algèbre) à cause de la difficulté de s'exprimer par écrit en grec. Ainsi, la langue symbolique des

Mathématiques vient comme une aide de l'expression et de l'organisation de la communication spontanée, mais non parce que ceci a été poursuivi directement par les enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ASTRINAKIS, 1971, *Cultures des Jeunes* (en grec), éd. Papazisis.

[2] A. BISHOP, 1998, "Mathematics Education in its Cultural Context", *Educational Studies in Mathematics* 19, 2, 179-191.

[3] P. COBB, 1986, "Contexts, goals, beliefs, and learning mathematics", *For the Learning of Mathematics* 6, 2, 2-9.

[4] R. DUVAL, 1991, "Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 4, 163-196.

[5a] J. HABERMAS, 1973, "Progrès technique et monde vécu social", dans J. Habermas, *La Technique et la Science comme "Idéologie"*, éd. Gallimard, 75-96.

[5b] J. HABERMAS, 1973, "La technique et la science comme 'idéologie' ", dans J. Habermas, *La Technique et la Science comme "Idéologie"*, éd. Gallimard, 3-74.

[6] J. HABERMAS, 1987, "Explications du Concept d'Activité Communicationnelle", dans J. Habermas, *Logique des Sciences Sociales et autres essais*, Presses Universitaires de France.

[7] J. GAROFALO, "Number-consideration strategies students use to solve word problems", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 14, 2 (1992), 37-50.

[8] C. KEITEL, 1989, "Mathematics Education and Technology", *For the Learning of Mathematics*, 9.1, February.

[9] LESTER, F.K., GAROFALO, J. and KROLL, D.L.,1989, "Self-Confidence, interest, beliefs, and metacognition : Key inflences on problem-solving behavior", in D. Mc Leod & V. Adams (Eds.) *Affect and mathematical problem solving : A new perspective,* 75-88, New York : Springer-Verlag.

[10] G. POLYA, 1957, *How to solve it*, Princeton University Press.

[11] O. SKOVSMOSE, 1994, *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, Kluwer publ.

[12] O. SKOVSMOSE, 1990, "Mathematical Education and Democracy", *Educ. Studies in Mathematics*, 21, 109-128.

Michalis KOURKOULOS et Marie-Anne KEYLING

ELEMENTS SUR LE COMPORTEMENT DES ÉLEVES CONCERNANT L'AUTOCORRECTION DANS LES ALGORITHMES DE L'ALGEBRE ÉLEMENTAIRE : LES STRATEGIES DE LOCALISATION DES ERREURS

Abstract. Selfcorrection constitutes a deciding factor for the learning of elementary algebra's algorithms. Strategies of localisation of mistakes used by pupils seem to be an important point of their selfcorrection procedures. In this paper, we analyse the strategies of mistakes' localisation that we identified in our work on selfcorrection with pupils in France and In Greece.

Résumé. L'autocorrection constitue un facteur décisif pour l'apprentissage des algorithmes de l'algèbre élémentaire. Les stratégies de localisation des erreurs, que les élèves emploient, s'avèrent être une partie importante de leurs procédures d'autocorrection. Dans cet article, nous analysons les stratégies de localisation des erreurs que nous avons pu identifier lors de notre travail expérimental au sujet de l'autocorrection avec des élèves en France et en Grèce.

Mots-clés : autocorrection, contrôle, stratégies de localisation des erreurs, algèbre élémentaire.

---

1. Introduction

Les activités d'autocorrection sont relativement peu étudiées dans la recherche didactique jusqu'à aujourd'hui. Toutefois, les travaux existants indiquent que ce sont des activités très fructueuses dans l'apprentissage des sujets concernés (voir Pluvinage 1983, Régnier 1983, Sowder J. 1992, Kourkoulos 1997, Kourkoulos et Keyling 2001).

Durant les activités d'autocorrection les élèves activent et associent souvent des informations contenues dans leurs nouvelles et anciennes connaissances. Dans certains cas, ils associent aussi des informations qui proviennent de différents cadres (Douady 1984) ou des informations dont la mise en relation nécessite des changements de registres (Duval 1995). La comparaison des informations associées, amène fréquemment les élèves à repérer des incompatibilités et à réfuter des idées erronées. Dans d'autres cas, la mise en relation des informations durant l'autocorrection aide les élèves à clarifier différents aspects du sujet examiné (Kourkoulos 1998, Kourkoulos et Tzanakis 2000).

Dans les algorithmes de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaire l'autocorrection apparaît être une activité complexe. Les élèves, pour pouvoir trouver et corriger d'eux-mêmes les erreurs d'un exercice, doivent disposer de

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 131 – 152.

critères de contrôle globaux[1] et locaux et les activer. Ils ont aussi besoin de développer une stratégie de localisation des erreurs. Enfin quand une erreur est trouvée, ils doivent formuler des propositions alternatives et contrôler si elles sont correctes. Ainsi malgré leur fertilité, les activités autocorrectives sont assez souvent complexes et sans l'aide appropriée de l'enseignement, la capacité d'autocorrection n'est accessible qu'aux bons élèves (Kourkoulos 1998, Kourkoulos et Keyling 2001).

2. Aspects essentiels de l'autocorrection dans les algorithmes algébriques

Les résultats, qui seront présentés dans cet article concernent essentiellement les stratégies de localisation des erreurs que les élèves emploient dans les algorithmes de l'algèbre élémentaire. Ils font partie de la composition de l'ensemble des résultats de notre travail expérimental[2] sur l'autocorrection depuis 1995. Toutefois, avant de passer à l'analyse des stratégies de localisation des erreurs (3ème partie), nous présenterons quelques éléments sur les résultats obtenus concernant les autres aspects essentiels de l'autocorrection dans les algorithmes algébriques élémentaires.

On peut considérer comme essai d'autocorrection tout essai des élèves pour mieux comprendre les différentes tâches de l'algorithme qu'ils ne savent pas faire correctement. Une conséquence d'une définition aussi large serait de mettre dans le thème de l'autocorrection l'ensemble de l'apprentissage du sujet examiné. Concernant notre travail, nous avons préféré nous concentrer sur la période qui suit

---

[1] Un critère de contrôle global est utilisé pour contrôler si l'ensemble de l'exercice est correct (p.ex. la vérification des solutions d'une équation). Un critère de contrôle local est utilisé pour contrôler une partie limitée du traitement de l'exercice (p.ex. contrôler une opération arithmétique, ou une application de la distributivité, qui est utilisée dans la résolution d'une équation).

[2] Notre travail expérimental concerne l'autocorrection des algorithmes de l'algèbre élémentaire ainsi que de certains algorithmes de l'arithmétique (multiplication et division des entiers et des décimaux, calculs avec des nombres relatifs, priorité des opérations, calcul littéral, résolution d'équations du 1er degré). Ce travail a été réalisé en France et en Grèce. Une partie des expériences a été réalisée par le groupe de l'IREM de Strasbourg qui a travaillé sur l'emploi du logiciel "Arithm" en classe. Le groupe a été coordonné par Keyling M.-A, les membres du groupe ont été: Bayart C., Gos C., Roesch G., Ostermann O., Wambst M., Ziegler M.

Une grande partie du travail effectué, est du travail d'observation du comportement des élèves ayant suivi l'enseignement habituel, et elle a été menée essentiellement auprès des élèves de 11-15 ans. Une autre partie contient des interventions expérimentales d'enseignement. Les interventions d'enseignement au sujet des algorithmes de l'algèbre élémentaire ont été réalisées avec et sans l'emploi du logiciel éducatif "Arithm". Le lecteur, qui voudrait voir l'analyse des différentes parties du travail expérimental effectué peut voir entre autres Kourkoulos 1997, 1998, Kourkoulos Keyling 2001, Keyling et al, à paraître.

l'enseignement introductif des algorithmes. C'est donc la période où l'algorithme enseigné commence à en devenir un aussi pour les élèves (une procédure connue d'avance dont l'application conduit à la solution des problèmes déterminés).[3]

Nos observations, pour tous les algorithmes examinés, ont montré que nous commençons à trouver dans les classes un nombre significatif d'élèves qui réussissent à s'autocorriger à la fin de la période d'enseignement de base de l'algorithme. Plus précisément, à la fin de cette période, on peut distinguer trois catégories d'élèves quant à leur capacité d'autocorrection :

(i) Une minorité qui dispose déjà un système de critères de contrôle et de procédures d'autocorrection assez développées leur permettant d'autocorriger l'ensemble de leurs erreurs. Ces élèves sont en mesure de repérer et de corriger même les inévitables erreurs d'inattention occurrentes lors des applications de l'algorithme. Il s'agit donc d'élèves qui peuvent être certains, quand c'est nécessaire[4], que leurs applications de l'algorithme sont correctes.

(ii) Une autre partie des élèves disposent et activent certains critères de contrôle mais ceux-ci ne leur permettent pas de contrôler et de corriger l'ensemble de leurs erreurs.

(iii) Enfin, une 3ème partie des élèves apparaît comme disposant de très peu de capacité de contrôle. Ces élèves réalisent rarement des autocorrections.

Lors de la période consacrée à la consolidation de l'apprentissage de l'algorithme, on observe une augmentation du nombre d'élèves qui appartiennent aux deux premières catégories. Pourtant ayant quitté le collège, où selon le programme officiel l'enseignement des algorithmes algébriques élémentaires est achevé, seule une minorité d'élèves appartient à la première catégorie. (P.ex. Sur 4 classes de début seconde (108 élèves de la ville d'Héraklion) que nous avons examinées, 38% des élèves étaient en mesure d'autocorriger leurs erreurs

---

[3] Notre travail expérimental concerne aussi bien la période d'enseignement de base des algorithmes que la période d'assimilation. En revanche, il ne concerne pas l'enseignement introductif des algorithmes. On peut aussi considérer des activités relatives à l'autocorrection pour la période de l'enseignement introductif, mais elles sont sensiblement différentes des activités d'autocorrection qu'on peut réaliser pendant la période de l'enseignement de base et la période d'assimilation. Leurs différences sont dues d'une part au fait que la construction d'un nouvel algorithme est un travail en grande partie heuristique et d'autre part au fait que pendant l'enseignement introductif des algorithmes de l'algèbre élémentaire, on introduit souvent de nouvelles symbolisations et/ou de nouveaux emplois des symboles déjà connus.

[4] Le contrôle détaillé de la justesse des applications relativement longues des algorithmes (p.ex. développement des polynômes, résolution d'équations) a un certain "coût" (en termes de temps et de travail), qui peut devenir important pour les élèves. Ainsi les élèves disposant les capacités de s'autocorriger ne le font pas toujours, mais ils le font quand ils jugent qu' il est important d'être certains que leurs applications soient correctes (p.ex. quand l'enseignant demande qu'ils vérifient leur travail, quand il s'agit d'un examen etc).

concernant la résolution des équations du 1^er degré ne contenant pas de fractions, de même 30% des élèves pour le développement des polynômes.) Ces faibles pourcentages sont dus à l'absence de travail systématique au sujet de l'autocorrection dans l'enseignement actuel[5]. L'enseignement actuel considère comme satisfaisantes les performances des élèves, sur les algorithmes algébriques, s'ils ne font pas fréquemment des erreurs dans leurs applications. Parmi les élèves qui satisfont à ce critère une partie appartient à la catégorie (i), mais une autre partie non-négligeable appartient à la catégorie (ii). (Ces élèves ne font pas fréquemment des erreurs, mais quand ils en font, dans bon nombre de cas ils n'ont pas les moyens de les trouver et de les corriger.) Cette différence entre les deux groupes d'élèves est encore un élément important dont l'enseignement actuel ne tient pas compte.

Au lycée les algorithmes algébriques élémentaires sont considérés comme connus et ne font pas l'objet d'un enseignement spécifique, pourtant ils sont souvent employés dans le traitement d'autres problèmes (algébriques ou extra-algébriques). Malgré l'absence d'enseignement spécifique, durant cette période on observe une amélioration significative au sujet de l'autocorrection des élèves dans les algorithmes en question. (P.ex. Nous avons examiné les élèves des 4 classes mentionnées ci-dessus deux ans plus tard-en fin de première- et on a trouvé que cette fois 60% des élèves étaient en mesure d'autocorriger leurs erreurs concernant la résolution des équations du 1^er degré ne contenant pas de fractions, 56% des élèves étaient en mesure d'autocorriger leurs erreurs concernant le développement des polynômes).

Des activités d'autocorrection adéquates organisées par l'enseignement peuvent aider la majorité des élèves à former des critères de contrôle des algorithmes enseignés. La production d'un critère de contrôle et son utilisation par les élèves, afin de faire moins d'erreurs, constituent d'eux-mêmes une évolution significative concernant l'apprentissage de l'algo-rithme ; mais dans la plupart des cas le bénéfice d'apprentissage des élèves ne se limite pas au précédent. Pendant la procédure de production d'un critère de contrôle, on observe souvent :

Une amélioration de la compréhension d'éléments partiels de l'algorithme. (P.ex. Dans les activités d'autocorrection sur les polynômes, si on introduit l'emploi du modèle de surfaces de rectangles comme critère de contrôle des applications la distributivité, on observe une diminution des erreurs mais aussi une meilleure compréhension de la propriété.)

Une amélioration de la compréhension d'éléments partiels du critère de contrôle

---

[5] Le fait que les possibilités des élèves au sujet de l'autocorrection restent sous-exploitées dans l'enseignement, actuel est aussi confirmé par les améliorations réalisées par les élèves lors des enseignements expérimentaux que nous avons effectués à ce sujet (Voir réf. 7, 10).

(p.ex. Lors des enseignements expérimentaux, au sujet des multiplications et divisions mentales des décimaux par des puissances positives et négatives de 10, nous avons utilisé comme procédure de contrôle la procédure suivante : transformation des décimaux en fractions, exécution de l'opération avec les algorithmes des fractions, transformation du résultat en décimal (voir réf. 8). L'emploi de ce système d'autocorrection a conduit à des améliorations significatives des élèves non-seulement sur les calculs mentaux examinés mais aussi sur les algorithmes de multiplication et de division des fraction.).
Une amélioration de la compréhension des caractéristiques du problème traité par l'algo-rithme et/ou de la solution qu'il offre (p.ex. en utilisant la vérification de la solution de l'équation non seulement sur l'équation initiale mais aussi dans les équations intermédiaires du traitement, les élèves prennent conscience du fait que la solution de l'équation doit rendre vraies toutes les égalités intermédiaires du traitement et non seulement l'égalité initiale).
Changement(s) sur l'algorithme lui-même. (P.ex. Lors des activités d'autocorrection sur les équations du 1er degré des élèves en prenant conscience des difficultés qu'ils rencontrent sur le traitement de fractions qui contiennent une somme au numérateur, ils ajoutent une parenthèse, mathématiquement inutile, au numérateur [(3x+5)/7], afin d'éviter des erreurs et de faciliter le contrôle des applications de la distributivité sur ces fractions. Bon nombre d'élèves adoptent aussi une écriture plus analytique pour faciliter le contrôle des parties de l'algorithme pour lesquelles ils prennent conscience qu'ils rencontrent des difficultés).

On peut se demander s'il serait possible que les élèves apprennent à appliquer les algorithmes en question de façon systématiquement correcte et que l'autocorrection des erreurs devienne inutile. A ce sujet, on doit noter au moins deux phénomènes auxquels les élèves ne peuvent pas faire face quand ils ne disposent pas des critères de contrôle et des procédures d'autocorrection suffisamment élaborés.

- Les erreurs d'inattention, qui arrivent fréquemment et conduisent à l'échec l'application de l'algorithme, si elles ne sont pas corrigées,
- les défauts de mémorisation des règles syntaxiques des symboles manipulés.

Il est inévitable que ces deux phénomènes se produisent en l'absence de critères de contrôle et de procédures d'autocorrection. Ceci peut s'expliquer par la prise en compte de l'analyse de R. Duval sur les registres de représentation et de traitement. La production de ces phénomènes, en absence de systèmes descontrôle, est caractéristique du fait que les élèves travaillent dans un registre de type discursif symbolique[6]. L'emploi de l'analyse de R. Duval montre aussi que la nécessité

[6] Les traitements dans les registres discursifs symboliques, exigent une grande attention à la forme des signes et à celle des combinaisons de signes que l'on manipule. Aussi, toute erreur est d'habitude fatale pour l'ensemble du traitement. Or, en pratique, il est impossible

d'un système de contrôle suffisamment élaboré, pour faire face à ces phénomènes, est étroitement liée à une des grandes différences entre les traitements dans les registres discursifs symboliques par rapport aux traitements dans les registres discursifs de type verbaux : l'inversion du rapport forme-contenu dans l'identification des unités de sens manipulées.

Un facteur qui s'avère important pour la compréhension des procédures d'autocorrection et du fonctionnement des critères de contrôle dans celles-ci, est le ″coût ″ d'application de ces critères.

- Il y a des critères de contrôle dont la longueur et la difficulté d'application sont comparables à ceux de l'exercice à contrôler (p.ex : la vérification de la division, la vérification de la solution d'une équation du 1er degré; cette dernière peut devenir plus longue et plus difficile pour l'élève que la résolution de l'équation dans le cas où l'équation ne contient pas de fractions mais la solution trouvée en est une),
- d'autres critères de contrôle sont brefs et faciles à appliquer, du moins pour les élèves entraînés à leur application (p.ex : calcul de l'ordre de grandeur du résultat d'une opération arithmétique, critère du reste de la division[7], calcul du degré d'un produit de polynômes). Ces critères peuvent être appliqués mentalement par les élèves,
- enfin il y a des critères dont le coût se situe à un niveau intermédiaire (p.ex. calcul de la constante ou du coefficient du monôme de plus haut degré

---

que les élèves (ou même des adultes) conservent l'attention exigée de façon ininterrompue. Ainsi, il est inévitable que des erreurs d'inattention se produisent et il devient nécessaire de posséder des critères de contrôle et des procédures d'autocorrection suffisamment élaborés pour y remédier et assurer la justesse du traitement.

Pour appliquer les algorithmes enseignés plus facilement (et pas trop lentement) les élèves sont amenés à appliquer les règles de manipulations des symboles sans faire référence aux éléments de sens qui ont permis de les produire et/ou aux éléments des sens qui les justifient. Or si l'élève se livre au jeu d'application des règles de manipulations des symboles sans retrouver de temps à autre les liens entre ces règles et des éléments de sens qui les justifient, il est certain que des défauts et des confusions à la mémorisation de ces règles vont se produire. (Ceci, d'autant plus que les règles utilisées dans les algorithmes algébriques sont multiples et il y a souvent des ressemblances dans leurs formes). L'emploi des critères de contrôle rétablit les liens entre les règles des manipulations des symboles et des éléments de sens qui les justifient, et permet à l'élève de remédier (ou de prévenir) les défauts de mémorisation de ces règles. (Selon le cas, un critère de contrôle permet d'établir des liens entre la règle de manipulation des symboles et des éléments de sens de la règle qui sont internes ou externes au registre algébrique).

[7] Le critère du reste de la division ($r < d$) est important parce que d'une part son application est très rapide et facile, et d'autre part il peut s'appliquer non seulement au reste final de la division (critère global) mais aussi aux restes qui apparaissent dans les étapes intermédiaires de la division (critère local).

d'un produit de polynômes, approximations plus précises que l'ordre de grandeur du résultat d'une opération). Ces critères peuvent s'appliquer mentalement ou non selon l'habileté de l'élève et l'exercice traité.

Notre travail d'observation du comportement des élèves, nous a montré que : Les élèves qui contrôlent fréquemment leur travail et qui procèdent spontanément à des autocorrections, sont des élèves qui disposent de critères de contrôle de bas coût d'application. En revanche, ceux qui ne disposent pas de tels critères de contrôle, arrivent rarement à réaliser des autocorrections et le font encore plus rarement de façon spontanée. Parmi ces derniers élèves, on en trouve qui sont capables d'appliquer des critères de haut coût d'application, si le professeur le demande (tels que la vérification de la division ou la vérification de la solution d'une équation). Mais comme ils ne disposent pas du reste de moyens nécessaires pour arriver à trouver et à corriger leurs erreurs, leurs essais d'autocorrection d'habitude échouent. La longueur et la difficulté de l'application de ces critères, combinées avec le fait qu'ils ne suffisent pas pour obtenir un traitement correct du sujet, amènent ces élèves à abandonner leur emploi sauf dans le cas où celui-ci serait demandé par le professeur.

Les élèves, qui arrivent fréquemment à s'autocorriger dans les algorithmes relativement longs (tels que la division, le développement des polynômes,…) disposent d'un certain nombre de critères de contrôle globaux et locaux de bas coût d'application qui leur permettent d'obtenir facilement des indications sur la justesse de l'ensemble ou des parties du traitement effectué. Si l'emploi d'un de ces critères indique qu'il y a erreur(s), les élèves en question sont en mesure d'activer des moyens de contrôle et d'autocorrection plus étendus et plus complets[8] (autres critères de contrôle, procédures de localisation des erreurs, ...).

Les éléments présentés précédemment, évidemment, ne signifient pas que l'enseignement doit négliger l'apprentissage des critères de contrôle de haut coût d'application, qui permettent souvent de mieux comprendre des aspects essentiels de l'algorithme enseigné. Ils montrent la nécessité pour l'enseignement de s'occuper de façon systématique de la question des critères de contrôle de bas coût

---

[8] Les critères de contrôle de bas coût d'application sont souvent des "critères insuffisants" (des conditions nécessaires mais pas suffisantes) ou des critères de nature probabiliste ("si j'obtiens dans une division un quotient entier, il y a de fortes chances que ceci soit correct", voir Kourkoulos et Tzanakis 2000). Malgré ce "défaut", leur facilité d'application leur donne un rôle critique dans les procédures d'autocorrection. Par ailleurs on trouve des élèves qui disposent de réseaux de critères de contrôle de bas coût d'application et qui laissent passer inaperçues très peu d'erreurs.

d'application. Dans la situation actuelle le sujet, n'est pas fréquemment pris en charge par l'enseignement. Dans ces cas les élèves doivent produire eux-mêmes les critères de contrôle de bas coût d'application qui sont nécessaires pour construire un système de contrôle efficace concernant l'algorithme enseigné. Or, cette tâche, une grande partie des élèves n'arrive pas à l'accomplir.

3. La localisation des erreurs

Quand les élèves appliquent des algorithmes relativement longs, ils peuvent découvrir l'existence d'erreur(s) en utilisant des critères de contrôle dans deux situations différentes :

- en appliquant un critère de contrôle local juste après l'accomplissement d'une tâche limitée de l'exercice (p.ex. contrôler une application de la distributivité ou une opération arithmétique juste après son exécution, dans le cadre de la résolution d'une équation),
- en appliquant un critère de contrôle global à la fin de la résolution de l'exercice (p.ex. en vérifiant la solution d'une équation). (Voir Pluvinage F. 1983).

Dans le premier cas l'élève doit activer les moyens nécessaires seulement pour corriger la tâche en question. Dans le deuxième cas deux problèmes se rajoutent : d'une part trouver où est l'erreur (localisation de l'erreur) et d'autre part, après avoir trouvé et corrigé l'erreur, suivre et corriger ses conséquences dans le reste du traitement. Face au problème de la localisation de l'erreur nous observons trois types de comportements d'élèves :

3.1. (A) Eviter le problème de la localisation

En barrant l'ensemble du traitement effectué et en recommençant dès le début. Ce comportement est très fréquent parmi les élèves faibles, surtout parce qu'ils ne disposent pas de procédures de localisation d'erreurs (voir réf.10). Mais on l'observe aussi parmi des élèves qui sont capables de s'autocorriger. Une raison, qui conduit des élèves de cette catégorie à choisir d'éviter la localisation de l'erreur, est l'estimation du coût du travail à faire. Ils estiment qu'il est plus rapide de refaire l'exercice que de rechercher et de corriger l'erreur et ses conséquences. Cette estimation dépend de la longueur et de la complexité, d'une part de l'algorithme à refaire et d'autre part de la procédure de localisation de l'erreur qu'ils envisagent d'entreprendre. Il faut noter ici que cette estimation n'a pas un caractère forcement stable pour les algorithmes en question. Ainsi en travaillant avec des élèves de 1ère, nous avons souvent observé de bons élèves, qui ayant effectué un long calcul sur des polynômes ou en trigonométrie, ont réalisé qu'ils ont fait une erreur et ont choisi dans un premier temps de refaire le calcul ; mais, après avoir effectué une partie du calcul, ils ont changé de stratégie et sont retournés à l'ancien travail pour le corriger (évidemment le choix "barrer et refaire" est rarement envisageable quand on traite des algorithmes sensiblement plus longs. P.ex. il est rare que quelqu'un, qui a écrit un programme d'ordinateur de quelques centaines de lignes, choisisse de le refaire parce qu'il contient quelques erreurs).

Un cas particulier pour lequel les élèves choisissent fréquemment de refaire le travail plutôt que de chercher l'erreur, est l'algorithme de la division. L'algorithme contient des éléments qui changent de statut pendant le traitement : le reste d'une étape intermédiaire devient partie du dividende de l'étape suivante. Ainsi ces restes deviennent difficiles à identifier après la fin de la division. En outre, l'organisation spatiale de l'algorithme rend difficile de retrouver dans la division terminée quel chiffre du quotient correspond à chaque dividende intermédiaire. En plus, suivant la manière de travailler de l'élève, il peut y avoir des éléments de l'algorithme qu'il calcule mentalement, ainsi il ne peut pas retrouver de trace écrite de ces calculs après la fin de la division. (Voir aussi réf 4).

3.2. (B) Contrôler sélectivement certaines parties du traitement effectué

Souvent lors de séances d'autocorrection avec des élèves, nous avons observé le comportement suivant. L'élève, ayant fini le traitement d'un exercice, s'aperçoit qu'il y a erreur(s) dans son travail, soit par l'application d'un critère de contrôle global, soit par une indication externe (indication du professeur, solution correcte donnée d'avance,...). Alors, il examine seulement certaines parties de son traitement, qu'il juge comme les plus probables pour être incorrectes. Les interviews effectuées avec des élèves présentant ce comportement montrent que ces élèves attribuent un **indice de confiance** aux différentes tâches qu'ils effectuent (il y a des tâches pour lesquelles ils ont plus confiance, qu'ils les réalisent correctement et d'autres pour lesquelles ils en ont moins). Cet indice de confiance est un facteur important, souvent le seul, qui les conduit à sélectionner les parties du traitement qu'ils vont réexaminer.

Afin de mieux expliquer le fonctionnement et les caractéristiques de l'indice de confiance il est intéressant de présenter quelques exemples des comportements d'élèves.

Exemple(1) : Durant une séance consacrée à l'autocorrection au sujet du développement des polynômes, en fin d'année de 4$^{\text{ème}}$, l'élève avait développé le polynôme de la manière suivante :

$$(1)\quad 6x^2 + 3(x^2+5) -11x + 5(x +2)$$

$$(2)\quad 6x^2 + 3x^2+15 -11x + 5(x +2)$$

$$(3)\quad 6x^2 + 3x^2+15 -11x + 5x +10$$

$$(4)\quad 9x^2 + 15 -11x + 5x +10$$

$$(5)\quad 9x^2 +25-16x$$

$$(6)\quad 9x^2 -16x + 25$$

Comme il a été demandé par le professeur au début de la séance, il a fait la vérification en remplaçant x par une valeur numérique. Il a choisi 2 comme valeur numérique : $6*2^2 + 3(2^2+5) -11*2 + 5*(2 +2)=…=49$, $9*2^2 -16*2 +25=…=29$. Après avoir vu que les résultats n'étaient pas les mêmes, il est allé directement à la ligne (4) de son traitement ; il l'a un peu examinée ainsi que la ligne (5), puis il a barré le -16x de la ligne (5) et l'a remplacé par +6x. Après réflexion, il a changé le signe + en signe -. Ensuite il a modifié, en conséquence, la dernière ligne. Enfin, il a refait la vérification sur la nouvelle expression obtenue : $9*2^2 -6*2 +25=…=49$. L'observateur lui a demandé "Comment as-tu fait pour trouver tout de suite où était l'erreur ?" L'élève : " C'est là où il y a des moins et des plus que je me trompe, enfin ...je ne me trompe pas toujours, quand même ! "

Avec un autre élève, dans une situation similaire, l'observateur a posé la même question après la correction de son erreur. L'élève : "Quand il y a ces signes moins et plus, je sais que là je peux me tromper, c'est à dire ... je me trompe là, mais seulement quand je fais vite".

(a) L'indice de confiance qu'un élève attribue à une tâche, a souvent le caractère d'une opinion relativement stable pour une période d'apprentissage, tel est le cas des élèves ci-dessus.

(b) Dans d'autres cas, il a un caractère conjoncturel. Lors des essais d'autocorrection d'un exercice, l'élève se rappelle des tâches du traitement initial sur lesquelles il a rencontré des difficultés. Ainsi il leur attribue un bas indice de confiance et il les contrôle prioritairement. Les indices de confiance de type conjoncturel apparemment influent sur la formation des indices de type stable. Quand l'élève rencontre fréquemment des difficultés sur la réalisation d'une tâche et lui attribue un bas indice de confiance de type conjoncturel, il s'agit d'une situation qui constitue un facteur puissant conduisant l'élève à attribuer à cette tâche un bas indice de confiance de type stable.

En revenant aux indices de confiance relativement stables, il est intéressant de souligner que, nous avons repéré deux types des motifs pour lesquels les élèves attribuent à une tâche un bas indice de confiance de ce type.

(a1) Il y a les cas où l'élève croit qu'il ne sait pas effectuer de façon satisfaisante une tâche et à cause de ce fait il attribue au résultat qu'il obtient, un bas indice de confiance.

Exemple (2) : après la vérification d'une équation Jean cherchait où il y avait erreur et il a examiné d'abord les produits des relatifs. Après avoir réussi à autocorriger son erreur il a expliqué : "…quand il y a des multiplications avec de signes je ne sais pas bien faire et je me trompe souvent,...donc j'ai pensé que c'est sur ce -3*(-5) et sur le +2*(-3x) que j'ai pu me tromper…"

Dans la plupart de ces cas, les opinions des élèves sont fondées (nous avons observé rarement des élèves qui disaient ne pas savoir bien faire une tâche et qui l'effectuaient correctement de façon systématique). En revanche leurs opinions peuvent être plus ou moins précises. (Ainsi un élève, qui fait des erreurs sur les additions de relatifs mais fait correctement les multiplications et les divisions, peut avoir l'idée générale que toute opération où il y a des nombres positifs et négatifs est un endroit où il risque de faire une erreur, ou alors peut avoir une idée plus précise et savoir que le problème concerne uniquement les additions.)

Ce type d'opinions d'élèves sur leur savoir peut être très utile aussi bien à l'autocorrection des erreurs qu'à la remédiation du problème qui les produit.

Exemple (2 suite) : Les erreurs de Jean sur la multiplication, concernaient le cas où les deux nombres avaient des signes différents ; il mettait au résultat le signe du nombre ayant la plus grande valeur absolue. En revanche il multipliait correctement deux nombres ayant le même signe (il s'agit donc d'un transfert erroné d'une partie de la règle d'addition des relatifs sur la règle de la multiplication). Au début de la période, où nous l'avons observé, il avait l'idée que son défaut concernait en général la multiplication des relatifs. Après avoir travaillé un certain nombre d'exercices en s'autocorrigeant, il s'aperçut que le problème concernait plus précisément la multiplication de deux nombres de signes différents. Par la suite, en observant les résultats, de ses autocorrections il a pu rectifier la partie incorrecte de la règle de multiplication qu'il appliquait.

Nous avons observé, aussi, des cas similaires où les élèves ne sont pas arrivés à autocorriger les parties incorrectes des règles syntaxiques des symboles qu'ils utilisaient. Mais, même dans ces cas, la conception du fait qu'ils ne savent pas effectuer correctement telle ou telle tâche rendait les élèves demandeurs d'explications sur le problème repéré et aussi plus attentifs et intéressés quand l'enseignant fournissait les explications demandées.

Il y a aussi des élèves faibles qui n'arrivent pas à effectuer correctement plusieurs tâches fondamentales pour l'application des algorithmes algébriques (opérations des relatifs, distributivité produits des monômes,….). D'habitude, ces élèves n'ont pas d'opinions relativement précises sur les types des tâches qu'ils n'arrivent pas à effectuer correctement. En revanche, ils expriment des opinions générales indiquant qu'ils croient ne pas pouvoir traiter correctement une large catégorie de problèmes ("les équations…ce n'est pas souvent que j'arrive à trouver la réponse correcte", "Ces exercices de factorisation je ne sais pas les faire" ou encore plus général "…quand il y a des x, je ne sais pas faire…"). Ce type d'opinions, malgré leur intérêt pédagogique et psychologique, ne peut jouer qu'un rôle indirect concernant les procédures d'autocorrection et l'apprentissage spécifique des éléments de base des algorithmes algébriques. Il faut aussi noter qu'il y a d'autres parties dans l'apprentissage de ces élèves, qui doivent être accomplies avant qu'ils arrivent à la formation d'indices de confiance qui soient opérationnels dans les procédures d'autocorrection.

(a2) Quand les élèves appliquent les algorithmes de l'algèbre élémentaire, il est inévitable que des erreurs d'inattention se produisent, de façon plus ou moins fréquente, même par les élèves ayant appris à les appliquer correctement (voir partie 2). Parmi les élèves ayant de bonnes performances dans l'application des algorithmes examinés, nous avons observé que certains disposaient d'indices de confiance qui ne concernaient pas des tâches qu'ils croyaient ne pas savoir effectuer correctement (d'ailleurs pour la plupart de ces élèves, il n'existait pas de telles tâches). Ces indices de confiance concernaient les tâches que les élèves considèrent comme les plus probables pour que des erreurs d'inattention se produisent. (Par exemple, après la vérification arithmétique d'un développement de polynôme l'élève cherchait où il y avait erreur et a examiné d'abord les opérations des relatifs. Après la fin de l'autocorrection nous avons discuté avec lui et il a expliqué concernant la priorité de sa recherche sur les opérations des relatifs : " …quand je fais vite c'est là où il y a des plus et des moins que je me trompe souvent...je veux dire…ce n'est pas que je ne sache pas faire ses opérations mais si je fais vite la je peux faire une bêtise…". Dans une situation similaire, l'élève a cherché ces erreurs en examinant d'abord le développement du produit de deux parenthèses : …+(x-3)($2x^2$-4)+… Après, en discutant avec lui il avait dit : "J'ai cherché d'abord ça parce que les parenthèses avec des "moins" c'est dangereux. …moi je sais multiplier des parenthèses, mais si je ne fais pas attention c'est dangereux pour faire une erreur, en plus qu'il y avait de moins dedans..")

Ce type d'indice de confiance, on le trouve plus fréquemment parmi les bons élèves et vers la fin de l'enseignement des algorithmes algébriques élémentaires (fin 3ème). Il apparaît aussi assez fréquemment chez les élèves plus âgés. (Ayant examiné individuellement les 23 élèves d'une classe de première, nous avons pu repérer sept d'entre eux qui disposaient de tels indices de confiance, concernant le développement et la factorisation des polynômes ainsi que la résolution des équations du 1er et du 2ème degré. Tous les sept étaient des élèves bons ou moyens.)

Les indices de confiance qui concernent les erreurs d'inattention sont un des moyens que des élèves développent afin de faire face à l'inévitable occurrence de ces erreurs lors de l'application des algorithmes algébriques.

Contrôler sélectivement les parties du traitement de l'exercice qui ont un indice de confiance plus bas que les autres, est une stratégie de localisation des erreurs qui peut donner des résultats beaucoup plus rapidement que les autres stratégies (A ou C), à condition que ces endroits soient peu nombreux. Pourtant, les parties sélectionnées sont celles que l'élève considère comme les plus probables pour contenir des erreurs et il n'est pas certain qu'elles contiennent des erreurs. Ainsi, il arrive que cette recherche n'aboutisse pas à la découverte d'erreurs. Dans ce cas, on a observé deux types des comportements d'élèves :

– l'élève cherche d'abord s'il y a erreur(s) sur un petit nombre d'endroits de l'exercice, qu'il juge comme les plus dangereux pour qu'une erreur soit commise. Si cette recherche ne s'avère pas fructueuse, il change de stratégie et il effectue (A) (barrer et recommencer) ou (C) (recherche systématique de chaque partie de l'exercice),

- l'élève cherche d'abord les parties de l'exercice qui ont le plus bas indice de confiance. S'il ne trouve pas d'erreurs, il continue avec un deuxième ensemble de parties qui ont un indice de confiance moins bas que les précédentes. Il peut continuer ainsi avec un troisième ensemble de parties de l'exercice. Ce deuxième type de comportement montre que l'élève dispose d'indices de confiance de différents niveaux, qui conduisent dans les faits à un classement des différentes parties de l'exercice selon leur risque de contenir une erreur.

Exemple(3) : sur ce type de comportement : Un élève de 3ème, durant une séance consacrée à l'autocorrection, avait développé : $-7x^4+4x^3 +3x- (2x^2 +13)(x^2+3x+4)$, de la manière suivante

$$-7x^4+4x^3 +3x- (2x^2 +13)(x^2+3x+4)$$
$$-7x^4+4x^3 +3x-(2x^4+6x^3+8x^2 + 13x^2+42)$$
$$-7x^4+4x^3 +3x-2x^4-6x^3-8x^2 - 13x^2-42$$
$$-9x^4-2x^3 +3x-21x^2 -42$$

Après le développement, il a fait la vérification en remplaçant x par 3 dans la première et la dernière ligne du traitement (la calculatrice a été utilisée). Après avoir constaté que les deux résultats ne coïncidaient pas, il a examiné d'abord la ligne 3 et la ligne 4 du traitement. Ne trouvant pas d'erreur, il a examiné ensuite la ligne 1 et la ligne 2. Là, il a repéré qu'il n'avait pas multiplié 13 par 3x dans le développement des parenthèses. Alors il a ajouté 39x dans la parenthèse de la ligne 2, et il a modifié en conséquence les lignes 3 et 4 et il a obtenu :

$$-7x^4+4x^3 +3x-2x^4-6x^3-8x^2 -39x - 13x^2-42$$
$$-9x^4-2x^3 -36x-21x^2 -42$$

Avant d'effectuer la 2ème vérification, l'observateur lui a demandé : "Comment as-tu fait pour trouver le 39x qui manquait…et puis, pourquoi tu as d'abord cherché dans les dernières lignes et après à la première et la deuxième ?" <u>Elève</u> : "Bah …là j'ai fait des additions et des soustractions avec des négatifs,… quand il y a des opérations avec des négatifs je me trompe parfois, si je ne fais pas attention, donc je me suis dit que c'était plutôt là qu'il fallait que je cherche, puis comme je n'ai rien trouvé j'ai cherché dans les parenthèses et j'ai trouvé que j'avais oublié de multiplier le 13 par le 3x…".

Par la suite, l'élève fait à nouveau la vérification arithmétique de son résultat, et constate à nouveau que ceci n'est pas correct. Elève : "Puisque j'ai corrigé…il doit y avoir une deuxième erreur …et vous ne m'avez rien dit…", Obs. : "C'est parce qu'il faut que tu trouves tout seul ".

Cette fois-ci l'élève examine d'abord la 1ère et la 2ème ligne (produit des parenthèses) mais il n'arrive pas à trouver erreur. Il continue en examinant les lignes 3 et 4 et ensuite, il réexamine les lignes 1 et 2 mais à nouveau il n' arrive pas à trouver l'erreur. A ce point il abandonne sa recherche et demande de l'aide. Elève : "Moi je ne trouve rien et j'ai bien cherché, …où est cachée cette erreur enfin ?" Obs. : "D'abord, dis-moi où est ce que tu as cherché cette fois-ci ?" Elève " D'abord j'ai cherché les parenthèses mais cette fois en détail…" Obs. : "Qu'est que ça veut dire en détail,.. la première fois tu n'avais pas cherché en détail ?" Elève : "Ee.. Non.. J'avais regardé en vitesse, j'avais regardé si j'avais tout multiplié et j'ai trouvé que j'avais oublié de multiplier 13 par 3x…" Obs. : " Et la deuxième fois qu'as-tu cherché en plus ?" Elève : "La deuxième fois j'ai cherché en détail…si j'ai bien multiplié les x, je veux dire les x au carré et les autres nombres qu'on met en dessus des x… si je les ai mis correctement" Obs. : "Et après ?" Elève : "Après j'ai cherché à nouveau les additions et les soustractions avec les négatifs". Obs. : "Mais pourquoi cette fois-ci as-tu examiné les opérations avec les négatifs après avoir examiné le produit des parenthèses ?" Elève : " Eee… C'est que la première fois je les avais bien cherchées et je n'avais rien trouvé à corriger … la seule chose que j'ai mis en plus est le -39x et j'ai fait bien attention, +3x-39x fait bien -36x. Mais même la seconde fois que j'ai cherché, je n'ai rien trouvé à refaire…" [9]

---

[9] Cette partie du dialogue montre, que, concernant le produit des parenthèses, l'élève a réalisé sa recherche à deux niveaux afin de trouver des erreurs. Dans la première partie de son travail, il a effectué un contrôle rapide mais partiel et ayant trouvé une erreur il a arrêté sa recherche. Après que la vérification lui a montré l'existence d'une seconde erreur, il est revenu au produit des parenthèses et il a effectué un examen plus approfondi, conscient de l'insuffisance de son premier contrôle. En revanche, concernant les opérations des relatifs (lignes 3 et 4), il a effectué un examen détaillé de la première partie de sa recherche (le fait que les opérations avec des relatifs sont considérées par l'élève comme un sujet comportant plus de risques pour y commettre des erreurs, joue probablement un rôle à la différence de la façon dont il a examiné ces deux parties de l'exercice).

Effectuer dans un premier temps un contrôle rapide et partiel sur une partie de l'exercice et y revenir, si besoin il y a, pour un examen plus approfondi, est une attitude que nous avons aussi observée chez d'autres élèves. Dans certains cas ce comportement a un caractère systématique : l'élève examine chaque partie de l'exercice de façon rapide (et éventuellement incomplète), ensuite s'il n'arrive pas à trouver les erreurs, il revient pour les réexaminer de façon plus approfondie. Apparemment il s'agit d'un comportement dont le but est d'obtenir le repérage et la correction des erreurs avec le moindre coût. Toutefois l'efficacité de ce comportement dépend des critères de contrôle partiel dont l'élève dispose ainsi que de la formation de ces indices de confiance.

Elève : "Alors vous allez me dire maintenant où est cette erreur ?" Obs. : "Tu as bien cherché le produit des parenthèses ?" Elève : "Oui j'ai fait très attention mais je n'ai rien trouvé …" Obs. : "As tu regardé les produit des nombres ?, je veux dire les 2*3 , 3*13…, sont-ils corrects ?" Elève : " Ah non,… je n'ai pas regardé à ça , mais c'est trop simple,… je ne crois pas que je me suis trompé là" Obs. : " Regarde quand même!" L'élève examine les produits des coefficients et trouve que 13*4 fait 52 et non pas 42. Elève : " Une erreur si bête!… et ça m' a pris tant de temps pour la trouver!.."

Le travail de l'élève et la discussion avec lui, montrent la présence d'indices de confiance de 3 niveaux. Le plus bas indice de confiance concernait les opérations des relatifs. L'indice de confiance qui concernait le produit de parenthèses était plus haut que le précédant. Toutefois il indiquait qu'une erreur dans cette partie n'était pas exclue. Enfin, le plus haut l'indice de confiance concernait les simples opérations arithmétiques et il indiquait qu'une erreur dans cette partie était improbable. C'est à cause de cet indice de confiance que l'élève ne vérifie pas les multiplications arithmétiques et n'arrive pas à trouver l'erreur sans l'aide de l'observateur.

Ce dernier phénomène, nous l'avons observé chez bon nombre d'élèves. Quand ils font des erreurs dans des parties de l'exercice auxquelles ils attribuent un haut indice de confiance, ils ont des difficultés pour les découvrir. Certains, malgré des examens répétés du traitement effectué, échouent dans leur recherche. D'autres, après des examens répétés du traitement, abandonnent la stratégie (B) et passent à la stratégie (C). Ainsi ils arrivent à repérer ces erreurs. Toutefois, leur manque de souplesse quant au changement de stratégie de localisation des erreurs fait que le coût de découverte de ces erreurs reste élevé.

Les phénomènes présentés précédemment montrent que l'indice de confiance est un élément metacognitif (voir réf. 13), que les élèves disposent à différents niveaux d'élaboration. Pour bon nombre d'entre eux il joue un rôle important dans leurs procédures d'autocorrection, puisqu'ils l'utilisent comme le critère déterminant de leur recherche pour la localisation des erreurs.

3.3. (C) Contrôler systématiquement tout le traitement effectué

La forme de base de cette stratégie de localisation des erreurs est la suivante : l'élève commence au début du traitement de l'exercice (par ex. résolution d'équation, développement des polynômes), il décompose chaque ligne en des parties qui peuvent être traitées et contrôlées indépendamment et il contrôle les traitements effectués sur ces parties. Il y a des élèves qui emploient cette procédure comme leur stratégie initiale pour la localisation des erreurs. On en a aussi observé d'autres qui recourent à cette procédure quand, auparavant, ils ont fait d'autres essais d'autocorrection qui n'ont pas abouti. En fait, il est nécessaire, pour l'élaboration d'un système d'autocorrection efficace, que l'élève dispose de cette stratégie, au moins dans sa forme de base. C'est, parce que dans un cas de figure ou dans un autre (par ex. quand il n'arrive pas à repérer ses erreurs avec l'emploi d'autres stratégies) il devra contrôler de façon systématique la justesse de chaque partie de l'exercice.

Pour les élèves faibles, et pour bon nombre d'élèves moyens, décomposer des applications des algorithmes longues de quelques lignes ou plus, en parties (unités de calculs) pouvant être traitées indépendamment, et ensuite contrôler les traitements effectués sur ces parties, est une tâche qu'ils ne peuvent pas réaliser, sans l'aide appropriée de l'enseignement. Un phénomène intéressant observé à ce sujet est le suivant : quand nous indiquons aux élèves une région plus restreinte (par ex. une ligne de l'algorithme) dans laquelle il faut rechercher les erreurs, bon nombre de ceux qui n'y arrivaient pas, réussissent à trouver et à corriger leurs erreurs. Dans des activités d'autocorrection que nous avons expérimentées nous avons exploré ce phénomène. Un élément essentiel de l'aide offerte aux élèves a été de leur indiquer des régions de leur traitement plus ou moins restreintes (une partie d'une ligne, une ligne, quelques lignes), dans lesquelles il fallait rechercher leurs erreurs. L'étendue des régions indiquées était adaptée aux caractéristiques des élèves. Ces régions devaient être à la fois assez restreintes pour qu'ils arrivent à trouver et à corriger leurs erreurs et assez étendues afin que leur recherche conserve un degré de difficulté qui les pousse à faire évoluer leurs stratégies de localisation et de correction des erreurs. Ce type d'aide a permis à bon nombre d'élèves moyens et faibles de trouver et de corriger leurs erreurs, entrant ainsi dans le jeu de l'autocorrection dont ils étaient exclus jusque-là, tout au moins pour les algorithmes examinés.

Au fur et à mesure que leurs stratégies de localisation et de correction des erreurs s'amélioraient, nous avons augmenté l'étendue des régions indiquées, jusqu'à ce qu'ils soient en mesure de rechercher leurs erreurs dans tout l'exercice.

Dans un premier temps nous avons expérimenté des activités d'autocorrection où les professeurs offraient ce type d'aide sans l'assistance de l'ordinateur, et il était nécessaire de disposer d'un professeur par groupe de trois à cinq élèves[10]. Par la suite, en tenant compte de l'analyse du comportement des élèves, nous avons construit un logiciel ("Arithm") pouvant offrir une partie de l'aide nécessaire aux élèves lors des activités d'autocorrection. Une fonction essentielle du logiciel est d'indiquer à l'élève des régions plus ou moins restreintes[11] de son traitement de l'exercice, dans lesquelles il doit rechercher ses erreurs. Nous

[10] Les activités d'autocorrection nécessitent des interventions individuelles, fréquentes surtout auprès d'élèves moyens et faibles. Ceci est particulièrement vrai pour ce type d'aide, dont l'offre systématique à chaque élève demande beaucoup de temps de la part des enseignants.

[11] L'étendue des régions que le logiciel indique à l'élève est réglée par le professeur afin qu'elle soit adaptée aux caractéristiques de l'élève. Pour la même raison, c'est le professeur qui règle l'accès de l'élève aux autres types d'aide que le logiciel peut offrir.

avons réalisé des activités d'autocorrection assistée par le logiciel, d'une part dans un enseignement avec 3 classes expérimentales et 4 classes témoins, en Grèce, en classe de 4ème, au sujet des équations du 1er degré, et d'autre part, en travaillant, à Strasbourg, avec des petits groupes[12] d'élèves (7 à 12 élèves) moyens et faibles, dans le cadre d'activités de soutien. Dans tous les cas examinés le logiciel s'est avéré fort utile puisqu'il a permis de réaliser nos activités d'autocorrection en ayant un seul professeur par classe (ou par groupe d'élèves)[13]. Après le travail réalisé sur l'autocorrection, les résultats des groupes de travail à Strasbourg et ceux des classes expérimentales en Grèce, ont été améliorés de façon significative. (Voir réf. 10)

Toutefois, les progressions observées chez les élèves ne sont pas homogènes : il y en a qui ont présenté des améliorations importantes et d'autres qui ont peu progressé. L'analyse du travail des élèves a montré que, aussi bien leur amélioration concernant l'apprentissage de l'algorithme examiné que l'évolution des stratégies de localisation des erreurs et d'autocorrection sont fortement liées à leur capacité à décomposer un algorithme en unités de calcul pouvant être traitées et contrôlées indépendamment. Ce sujet présente d'importantes difficultés pour bon nombre d'élèves moyens et faibles. Au début du travail expérimental certains de ces élèves réalisent de telles décompositions mais elles sont souvent erronées puisqu'elles ne respectent pas les règles de priorité des opérations (p.ex. Un élève avait écrit que $2x+4x-9x(x+1)2+ 6x+11x = 3x(x+1)2+17x$ et il essayait de contrôler si $2x+4x-9x$ est égal à $-3x$). D'autres considèrent la transformation d'une ligne en la suivante seulement comme une transformation de l'ensemble de la ligne et ne font aucune décomposition, même dans les cas où leur transformation contient plusieurs tâches ou des tâches complexes. Aussi, beaucoup d'entre eux, peu de temps après la fin de la transformation d'une ligne, ne peuvent pas identifier les tâches qu'ils ont réalisées pour effectuer cette transformation.

– Malgré le travail effectué, une partie de ces élèves n'est pas arrivée à dépasser ces difficultés. Ces élèves n'arrivent pas à décomposer leurs propres écrits (applications des algorithmes) en unités de calculs qui peuvent être contrôlées et traitées indépendamment. Or, cette capacité est

[12] A Strasbourg, nous avons travaillé avec 5 groupes de 4ème, pendant 4-6 séances, sur les nombres relatifs et les expressions arithmétiques mettant en jeu les priorités des opérations. Nous avons travaillé avec aussi 1 groupe de 4ème, pendant 4 séances, et avec 3 groupes de 3ème, pendant 6-8 séances, au sujet du développement et de la réduction des polynômes. Concernant le traitement des polynômes nous avons effectué encore un enseignement avec 3 classes expérimentales et 4 classes témoins, en 3ème, mais l'analyse des résultats de cet enseignement n'est pas encore achevé.

[13] Avec l'assistance du logiciel dans la plupart des cas les élèves arrivent à trouver et à corriger leurs erreurs sans l'aide du professeur. Ceci libère du temps précieux au professeur, qui peut se consacrer alors à fournir l'aide nécessaire aux élèves qui n'arrivent pas à trouver et à corriger leurs erreurs malgré l'assistance du logiciel.

étroitement liée à la capacité de considérer une expression algébrique (ou arithmétique) comme étant composée d'unités de calculs (élémentaires ou plus complexes) liées entre elles par les règles de priorités des opérations. Il s'agit donc d'une capacité qui a un caractère fondamental pour l'apprentissage de l'algèbre. A la fin du travail expérimental, les élèves en question ont de meilleurs résultats dans les exercices demandant un calcul élémentaire (p.ex. une opération sur les relatifs) ou plusieurs opérations mais alors d'un seul type (p.ex. somme ou produit de plusieurs relatifs). En revanche, ils n'arrivent pas à traiter correctement des expressions plus complexes,

- une autre partie des élèves progresse lentement mais de manière significative dans la décomposition des algorithmes en unités de calculs qui peuvent être traitées et contrôlées indépendamment. La progression de ces élèves dépend sensiblement du temps qu'on a consacré au travail dans leur groupe. S'ils ont une durée de travail suffisante, ils font apparaître une évolution significative dans leurs stratégies de localisation des erreurs et d'autocorrection. En parallèle, ils progressent de manière significative aussi bien dans le traitement des exercices simples que dans celui des exercices complexes. (Il y a même des élèves de cette catégorie qui, à partir d'un certain moment, ont fait apparaître une très forte évolution, indiquant un déblocage de la compréhension du sens et de l'organisation des expressions algébriques),
- une autre partie des élèves n'a pas de difficultés importantes pour décomposer une expression algébrique en unités de calculs qui peuvent être traitées indépendamment mais ils n'ont pas incorporé ce type de travail dans leurs procédures de localisation des erreurs. Ces élèves réalisent une progression importante même quand ils travaillent pendant une période relativement courte (4-5 heures) sur des activités d'autocorrection assistées par le logiciel ("Arithm") : ils apprennent à utiliser de façon systématique la décomposition des transformations effectuées en unités de calculs qui peuvent être contrôlées indépendamment afin de localiser leurs erreurs. Ceci provoque une amélioration significative de leurs procédures d'autocorrection. Ils présentent aussi une amélioration importante du traitement des exercices simples et encore plus pour celui des exercices complexes sur le sujet examiné.

Il est aussi important de signaler que, l'apprentissage effectué dans le traitement d'un sujet (p.ex. expressions arithmétiques) concernant la décomposition de l'algorithme en unités de calculs indépendantes et la stratégie de localisation des erreurs qui en découle, s'est transféré et réinvesti dans le traitement d'autres sujets (p.ex. calculs littéraux, résolution d'équations).

3.4. Variantes de la stratégie C (contrôler systématiquement tout le traitement)

La vérification arithmétique des transformations des polynômes, ainsi que la vérification des équations, permet de vérifier aussi la justesse des lignes intermédiaires du traitement, sans être obligé de commencer au début du traitement et sans avoir à décomposer les lignes testées en unités de calculs qui les constituent. Parmi les élèves à qui on a enseigné cette possibilité, on en trouve qui, quand la vérification globale du traitement leur indique l'existence d'erreur(s), continuent en vérifiant une ligne à peu près au milieu du traitement (p.ex. l'élève vérifie la ligne 3 ou 4 de son traitement qui a six lignes). En discutant avec ces élèves nous avons constaté qu'ils font ceci dans l'espoir d'éviter l'examen détaillé d'une de deux parties de l'exercice.

Ensuite ils examinent la partie (ou les parties) qu'ils identifient comme contenant une (des) erreur(s). Dans certains cas, ils font ceci en commençant du début vers la fin de la partie examinée et en décomposant chaque ligne en des unités de calcul qui peuvent être traitées et contrôlées indépendamment. Dans d'autres cas ils continuent à utiliser la vérification arithmétique des lignes intermédiaires de la partie examinée, jusqu'à ce qu'ils repèrent deux lignes successives où la transformation de l'une en l'autre contienne une (des) erreur(s) et c'est seulement à ce moment qu'ils décomposent la première des deux lignes en unités de calculs afin de les contrôler. Dans les deux cas il s'agit de stratégies qui contrôlent systématiquement tout le traitement effectué, mais elles sont plus évoluées que la forme de base de cette stratégie (3.1.). En effet le nouvel élément introduit (la vérification de la ligne intermédiaire), permet de faire des économies substantielles dans le travail de contrôle des tâches qui composent les transformations d'une ligne à l'autre.

Sur d'autres problèmes en mathématiques, surtout quand leur traitement est long, on retrouve chez des élèves l'idée d'organiser le travail de contrôle en partageant le traitement effectué en grandes parties, dont certaines (ou toutes) peuvent être contrôlées globalement et indépendamment des autres. Ceci permet de faire des économies substantielles sur les contrôles de tâches locales. (P.ex. Dans les problèmes de mise en équation(s), on trouve des élèves qui vont vérifier d'abord la résolution de l'équation et ensuite, une fois que la justesse de la résolution est assurée, ils vont passer au contrôle du travail de mise en équation).

On peut remarquer ici, que dans certains cas (comme le traitement des polynômes ou la résolution des équations) la séparation du traitement en parties à contrôler est assez malléable (l'élève peut sélectionner la ligne du traitement qu'il veut pour effectuer une vérification intermédiaire). Dans d'autres cas, les endroits où le traitement peut être séparé en grandes parties à contrôler sont restreints; ils dépendent en fait de la structuration de la résolution du problème (tel est le cas dans la mise en équation(s) des problèmes, mais aussi quand nous voulons contrôler et corriger les erreurs d'un programme d'ordinateur

François Pluvinage nous a fait remarquer que le partage en grandes unités à contrôler est une pratique très répandue non seulement en mathématiques mais également dans des domaines comme l'électronique, l'informatique ou la mécanique. En fait, elle devient nécessaire, pour des raisons d'économie du travail de contrôle et de correction, dès qu'il s'agit de rechercher les erreurs ou les défauts dans un algorithme long ou dans une construction faite de plusieurs parties élémentaires.

4. Discussion

– L'organisation des activités d'autocorrection adéquates dans l'enseignement des algorithmes de l'algèbre élémentaire peut jouer un rôle important pour leur apprentissage. Ces activités aident les élèves à mieux comprendre différents aspects de l'algorithme. Elles contribuent aussi à l'élaboration par les élèves des systèmes d'autocorrection efficaces. L'existence de ces systèmes est nécessaire pour la stabilité de l'apprentissage des algorithmes enseignés. Elle est aussi nécessaire pour que les élèves puissent assurer la justesse de leurs applications et faire face aux erreurs qui se produisent inévitablement quand ils travaillent dans un registre comme celui de l'algèbre, qui est un registre discursif de type symbolique. Enfin, la réalisation de telles activités aide les élèves faibles et une grande partie des élèves moyens à entrer dans le jeu de l'autocorrection, dont ils restent exclus dans la situation d'enseignement actuel,
– les stratégies de localisation des erreurs sont une partie importante des procédures d'autocorrection des algorithmes de l'algèbre élémentaire. Les éléments que nous avons présentés montrent que ces stratégies présentent certains aspects spécifiques à l'algorithme examiné mais ils ont des caractéristiques fondamentales qui sont communes. Par ailleurs, ces communes caractéristiques concernent aussi les stratégies de localisation des erreurs (ou des défauts) rencontrées dans des domaines extra-mathématiques.

L'analyse de ces caractéristiques explique le fait que, les progrès réalisés sur les stratégies de localisation des erreurs, durant l'enseignement d'un algorithme, se transfèrent et se réinvestissent dans l'apprentissage des algorithmes suivants. Elle montre aussi que l'apprentissage et l'évolution de ces stratégies peuvent s'échelonner durant l'enseignement des différents algorithmes de l'algèbre élémentaire. Pourtant, l'enseignement actuel ne traite pas de façon systématique le sujet de l'autocorrection en général et, dans ce cadre, la question des stratégies de localisation des erreurs n'est pratiquement pas prise en compte. En conséquence leur apprentissage ne s'effectue que de façon très insuffisante pour une grande partie des élèves. Ces élèves n'arrivent pas à construire des procédures d'autocorrection efficaces, qui sont un facteur décisif pour l'apprentissage des algorithmes examinés.

BIBLIOGRAPHIE

(1) DOUADY R., 1984, Le jeux des cadres, Doctorat, Université Paris VII.

(2) DUVAL R., 1995, Semiosis et pensée humaine, Ed. Péter Lang, Berne.

(3) FILLOY E., ROSANO T., 1985, "Obstructions on the acquisition of elementary algebraic concepts and teaching strategies" P.M.E. 134 – 147.

(4) KAKLAKIS G., 1999, Possibilités d'autocorrection des élèves de 6ème sur l'algorithme de la division, Mémoire de Maîtrise, DSE de l'Université de Crète.

(5) KEYLING et al, à paraître, L'emploi du logiciel "Arithm" en classe, IREM de Strasbourg.

(6) KIERAN C., 1990, Indroducing Algebra : A functional approach in a computer environment 14th I.C.P.M.E., Mexico, vol II, 51-59.

(7) KOURKOULOS M., 1997, Self-correction and the use of educational software in learning the algoritms of arithmetic and algebra, (in greek) acts of the 1st C.I.T.S, 31-58.

(8) KOURKOULOS M., 1998, Caractéristiques des critères de contrôle utilisés par les élèves à l'application des algorithmes de l'Arithmétique et de l'Algèbre, 224-236, Acts of 1st C.D.M., Ed. Univ. de Crète et IFA.

(9) KOURKOULOS M., Tzanakis K., 2000, Estimation and checking procedures as fundamental aspect of the conception and learning of mathematics algorithms, 264-285, Acts of 2nd C.D.M., Ed. Univ. de Crète.

(10) KOURKOULOS M., KEYLING M.-A., “Self-correction in algebraic algorithms with the use of educational software : an experimental work with 13-15 years old pupils”, 5th International Conference on Technology in Mathematics Teaching , July 2001, Klagenfurt Austria, proceedings' Editor : öbv & hpt, Vienna, Vol. 1, 301-305 on paper version, 8 pages on cd-rom version.

(11) PLUVINAGE F., 1983, Variations des questions, questionnaires à modalités, actes of 4th I.C.M.E., 465-477.

(12) REGNIER J.C., 1983, "Etude didactique des tests autocorrectifs en trigonométrie" Thèse de doctorat, U.L.P.

(13) SCHOENFELD A., 1992, Learning to think mathematically : Problem solving, Metacognition, and sense making in Mathematics, Handbook of Research in Mathematics Teaching (H.R.M.T.), an NCTM project, Ed. D.G. Grouws, Macmillan Publishing Company, NY, 334-370.

(14) SOWDER J., 1992, Estimation et number sense, H.R.M.T., 371-390.

(15) VERGNAUD G., CORTEZ A., 1990, "From arithmetic to algebra : Negotiating a jump to learning process." Proceedings of 14th I.C.P.M.E., Mexico, Vol 2, 27-35.

Richard CABASSUT

ARGUMENTER OU DEMONTRER : CONTINUITE OU RUPTURE DIDACTIQUE ? LES EFFETS D'UNE DOUBLE TRANSPOSITION[1]

Abstract. We approach the works on proof with the theoretical frame of Chevallard's anthropological theory of didactics. So it is possible to interpret mathematical teaching of proof as a double transposition, one of mathematical knowledge and the other one of social knowledge. In this interpretation there is also a didactical continuity between argumentation and demonstration as will be shown by examples taken from mathematical textbooks. We try to explain this continuity with the notions of "function of validation".

Résumé. On aborde les travaux sur la démonstration à l'aide du cadre théorique de l'anthropologie du didactique proposée par Chevallard. On peut alors interpréter l'enseignement de la démonstration en mathématiques comme le lieu d'une double transposition, celle du savoir mathématique et celle du savoir social. Dans cette interprétation, il y a alors continuité didactique entre argumenter et démontrer, comme l'illustreront des exemples issus de manuels scolaires de mathématiques. On essaie d'expliquer cette continuité avec les notions de « fonction de la validation ».

Mots-clés : preuve, démonstration, validation, théorie anthropologique, transposition, contrat, comparaison France Allemagne, international.

Comme le rappelle Hanna [Hanna 2000, p. 10], depuis plusieurs années, l'enseignement de la démonstration est en question aux Etats-Unis, et notamment avec les standards du Conseil National des Professeurs de Mathématiques (NCTM) de 1989 et de 2000. Knuth [Knuth 2000, p. 1] estime que ces standards *« atténuaient le rôle de la preuve dans les mathématiques scolaires, choisissant en revanche de porter l'attention sur le raisonnement »*. Ross [Ross 1998, pp. 252-255] rappelle les positions de ce conseil : *« le but le plus important de l'enseignement des mathématiques est d'enseigner aux étudiants le raisonnement logique. Cette capacité fondamentale n'est pas seulement mathématique [...] On devrait faire ressortir que le fondement des mathématiques est le raisonnement. Tandis que la science vérifie à travers l'observation, les mathématiques vérifient à travers le raisonnement logique... Des résultats peuvent être validés dans un petit nombre de cas directement, mais les étudiants doivent reconnaître que tout ce qu'ils ont dans ce cas c'est l'évidence d'une conjecture, jusqu'à ce que le résultat ait été rigoureusement établi... La chose importante est d'être honnête : si seulement des illustrations ou un argument de plausibilité sont proposés, les étudiants doivent se rappeler qu'une raison logique ou une démonstration est*

---

[1] Clin d'œil à l'article fondamental de Duval : *Argumenter, Démontrer, Expliquer : continuité ou rupture cognitive ?* Revue Petit x, n°31, 37-61, 1992.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 153 – 174.

nécessaire. Ce point ne devrait pas être perdu maintenant que la technologie propose des moyens d'exploration des idées mathématiques et d'examen des conjectures. Bien sûr, le développement des démonstrations doit se faire davantage d'après leur valeur éducative que d'après la correction formelle.» Ces propos de Ross rappellent que le raisonnement logique n'est pas un monopole des raisonnements mathématiques et qu'il existe d'autres formes de raisonnements que le raisonnement logique, notamment les raisonnements par illustration, par plausibilité, par observation ou par exploration. Montrons que le cadre de la théorie anthropologique du didactique permet de prendre en compte ces variétés de raisonnements.

1. Le cadre de la théorie anthropologique du didactique

1.1. Raisonnement, institution, logique, théorie

Nous adoptons la conception du raisonnement développée par Blanché [Blanché 1995, pp. 1-8] : « un **raisonnement**, c'est d'abord une certaine activité de l'esprit, une opération discursive pour laquelle on passe de certaines propositions posées comme prémisses à une proposition nouvelle, en vertu du lien logique qui l'attache aux premières : en ce sens c'est un processus qui se déroule dans la conscience d'un sujet selon l'ordre du temps […]. Pour se préciser et se communiquer, le raisonnement devra bientôt s'extérioriser dans le langage parlé, et quand enfin il se stabilisera par l'écriture, il sera devenu une sorte de chose impersonnelle et intemporelle, objet pour une analyse structurale […]. Raisonner, c'est inférer une proposition, appelée conclusion, à partir de certaines autres prises comme prémisses […] L'office de la **logique** est de déterminer les conditions de validité d'une inférence.»

Pour étudier un raisonnement il est bon de préciser à suite des travaux de Chevallard [Chevallard 1992, 1999] :

- dans quel contexte d'**institution**[2] il a été produit (vie quotidienne, cours de mathématiques, cours de sciences de la vie et de la terre, laboratoire de mathématiques, manuel de classe) ; le type *d'institution* permettra parfois de mieux préciser le type de *langage* ou la *logique* utilisés ; car si nous concevons qu'un raisonnement utilise *une* logique, celle-ci n'est pour autant ni unique ni explicite,

[2] « institution » est pris dans son sens général : chose (règle, usage, organisme) établie ; Chevallard [Chevallard 1992, 87-88] va jusqu'à parler d'« institution de la vie quotidienne ».

- dans quel cadre *théorique* il est situé : la **théorie**[3] à laquelle est rattaché un raisonnement fixe les règles d'inférence (et à ce titre englobe la logique attachée à ce raisonnement), leurs conditions d'utilisation et par là même les critères permettant de déterminer si l'application d'une règle est correcte ou incorrecte ; la théorie définit également les objets manipulés par le raisonnement (proposition, prémisse, conclusion, …) ; elle définit le vrai, le faux, notamment en définissant des vérités premières admises et les règles d'inférence qui permettront d'étendre la vérité à d'autres propositions. Bien entendu, la théorie n'est pas toujours définie explicitement. La connaissance des *institutions* où la théorie est mise en œuvre permet donc de mieux la préciser.

1.2. Tâche, technique, technologie, théorie

Nous appellerons raisonnement de validation ou **validation**[4], un raisonnement qui infère (par une règle[5] d'inférence) la connaissance de la vérité d'une proposition à partir d'autres propositions données, dont on suppose connaître la vérité. La connaissance de la vérité peut être qualifiée de certaine ou de plausible, avec éventuellement un degré de plausibilité. La logique et la théorie rattachées au raisonnement de validation précisent la qualification de la connaissance de la vérité. Lorsque la connaissance de la vérité est certaine, nous appellerons la validation **démonstration** ou preuve[6] ; lorsqu'elle est plus ou moins

[3] « théorie » est pris dans son sens général : ensemble des idées ou des intuitions concernant un domaine particulier ; Chevallard [Chevallard 1999 p. 227] conçoit la théorie comme le niveau de « justification-explication-production » des technologies et des techniques qui ont permis d'effectuer certaines tâches au sein d'une institution

[4] Nous empruntons le terme validation à Balacheff [Balacheff 1988 p. 32]. Nous étudions ici les raisonnements de validation, et non pas la validation des raisonnements. Nous ne nous intéressons pas aux raisonnements non valides, c'est-à-dire qui ne respectent pas la logique à laquelle ils se réfèrent. Nous étudierons donc dans cette étude des raisonnements valides du point de vue d'une certaine logique. C'est pourquoi ces raisonnements seront extraits de manuels scolaires ou en références à des programmes officiels d'enseignement, qui proposent en général des raisonnements valides.

[5] Nous n'effectuons pas la subtile distinction de Blanché [Blanché 1968, 1996, p. 72] entre règle et loi.

[6] Nous utiliserons indifféremment les deux mots *démonstration* et *preuve* qui sont traduits bien souvent par le même mot *Beweis* en allemand et par le même mot *proof* en anglais. A la différence de Balacheff [Balacheff 1988 p. 30] nous ne limiterons pas le mot démonstration aux institutions mathématiques ou d'enseignement des mathématiques. Dans ces derniers cas nous préciserons *preuve mathématique* ou *démonstration mathématique*.

plausible nous l'appellerons **argumentation**. Cette définition s'inspire des travaux de Toulmin[7] [Toulmin 1958, 1993].

Nous allons étudier le **type de tâche** « valider la vérité d'une proposition donnée à partir de prémisses dans une institution donnée » ou en abrégé le genre de tâche *validation*. On rappelle que l'institution précise la théorie dans laquelle on se place, et notamment la vérité et la logique considérées.

Une tâche de validation s'accomplit en utilisant une ou plusieurs techniques. Une **technique**[8] est l'application[9] d'une règle d'inférence aux prémisses pour en inférer la conclusion. Lorsqu'une tâche de validation n'utilise qu'une seule technique on pourra l'appeler pas de validation : on peut donc décomposer une tâche de validation en pas de validation.

Dans le cas où la règle d'inférence est un énoncé-tiers de la forme « si conditions alors conclusion », la technique prend en charge ce que Duval [Duval 1995, p. 244] appelle la « vérification des conditions » par les prémisses et « le détachement de la condition de l'énoncé-tiers » appliqué en conclusion de la validation.

Une **technologie**[10] est une justification de la technique : elle est constituée de la règle d'inférence, de la validation de la règle d'inférence et de tout ce qui est nécessaire à cette validation (autres prémisses, définitions, autres règle d'inférence, …).

Une **théorie**[11] propose des justification des technologies utilisées. Elle précise notamment la logique utilisée. On peut se limiter à une théorie locale,

---

[7] Toulmin [Toulmin 1993, p. 184] propose « la distinction entre arguments nécessaires et probables : c'est-à-dire entre les arguments dont la garantie nous autorise à avancer sans équivoque la conclusion (qui peut donc être accompagnée du qualificatif modal « nécessairement ») et ceux dont la garantie ne nous habilite qu'à tirer une conclusion provisoire (nuancée par le mot « probablement »), sujette à de possibles exceptions (« vraisemblablement ») ou conditionnelle (« pourvu que… ») ».

[8] Pour Chevallard [Chevallard 1999, p. 225], une *technique* est « une manière d'accomplir, de réaliser les tâches ».

[9] On distingue donc l'application d'une règle, qui relève de la technique, de la règle elle-même qui relève de la technologie.

[10] « On entend par technologie, et on note généralement θ, un discours rationnel […] ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. » [Chevallard 1999, p. 226]. C'est au niveau de la technologie que se situe la garantie ou règle d'inférence de Toulmin [Toulmin 1993, p. 120]. *« Une deuxième fonction de la technologie est d'expliquer, de rendre intelligible, d'éclairer la technique »* [Chevallard 1999, p. 226].

[11] « A son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la théorie, Θ ». [Chevallard, 1999, p. 227].

comme proposée par Stein [Stein 1986, p. 12], dans laquelle on développe uniquement ce qui est nécessaire à la compréhension de la technique. Illustrons notre propos dans différentes institutions.

1.2.1. Dans des institutions sociales

Chevallard déclare [Chevallard 1999, p. 225] : « Le point crucial à cet égard, dont on découvrira peu à peu les implications, est que la théorie anthropologique du didactique situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. » Dans ces institutions sociales on peut débattre sur des lois, des règles, des contrats, des coutumes, des savoirs, des problèmes concernant des communautés données.

On peut d'abord considérer l'« institution de la vie quotidienne » [Chevallard 1992, 87-88] dans laquelle on peut développer, à propos de la validation, une « théorie de la vie quotidienne » [Stein 1986, p. 14] fondée sur une « logique de la vie quotidienne » [Stein 1986, p. 14]. De nombreux auteurs ont étudié cette logique sous différents noms : logique naturelle [Grize, 1996, *Logique naturelle et communication*], logique en action [Toulmin 1993 p. 181], logique appliquée [Toulmin 1993 p. 315], logique pratique [Toulmin 1993 p. 320], logique de la pratique [Bourdieu 1980, p. 134], le raisonnement pratique [Audi,1989].

On peut également étudier d'autres logiques dans d'autres institutions : en droit [Perelman 1963, Haarscher 1994], dans les sciences expérimentales [Carnap, Chalmers, Hempel], en philosophie [Perelman 1952]…

Nous réserverons de préférence le qualificatif *social* pour une institution, un savoir, une théorie, une logique qui n'ont pas de rapport direct avec le savoir mathématique[12].

Nous allons proposer quelques exemples de règles d'inférence utilisées dans **les validations sociales** : de ce fait nous désignerons ces règles sous le nom d'arguments. La modalité de la vérité de la conclusion (vrai certainement ou vrai plausiblement) sera fixée suivant l'institution, la logique et la théorie considérées.

Argument d'autorité [Perelman, Olbrechts-Tyteca 1976, p. 410-417]

Si une autorité (reconnue dans l'institution) affirme qu'une proposition est vraie, alors la proposition est vraie (certainement ou plausiblement).

C'est au niveau que se situe le fondement de la garantie de Toulmin [Toulmin 1993, p. 128].

[12] Il est cependant bien clair que les institutions mathématiques ou d'enseignement des mathématiques sont des institutions sociales. Mais comme nos travaux portent sur l'enseignement des mathématiques il nous a paru plus simple de regrouper sous le terme *social* ce qui n'est pas en rapport direct avec le savoir mathématique, et de réserver le terme *mathématique* à ce qui est en rapport direct avec le savoir mathématique.

« Les autorités invoquées sont fort variables : tantôt ce sera « l'avis unanime » ou « l'opinion commune », tantôt certaines catégories d'hommes, « les savants », « les philosophes », « les Pères de l'Eglise », « les prophètes » ; parfois l'autorité sera impersonnelle : « la physique », « la doctrine », « la religion », « la Bible » ; parfois il s'agira d'autorités nommément désignées [Perelman, Olbrechts-Tyteca 1976, p. 413].»

Par exemple, en classe de mathématiques, le professeur ou le manuel scolaire sont des autorités et leurs affirmations sur le savoir mathématique sont supposées vraies : c'est une clause du contrat didactique dans la classe. Dans la même classe de mathématiques les élèves pourront invoquer l'autorité du plus grand nombre. Dans ce cas cette autorité n'est pas reconnue dans l'institution *classe de mathématiques* ; par contre elle peut être reconnue dans l'institution *groupe des élèves*. On voit donc que chaque institution possède sa propre logique qui peut conduire à des vérités différentes.

Argument pragmatique [Perelman,Olbrechts-Tyteca 1976, p. 358-364]

Perelman et Olbrechts-Tyteca appellent « argument pragmatique celui qui permet d'apprécier un acte ou un événement en fonction de ses conséquences […]. Cependant, hors les cas où cause et effet peuvent être considérés comme la définition l'un de l'autre […] l'événement à apprécier ne sera qu'une cause partielle, ou une condition nécessaire. Pour pouvoir transposer sur lui tout le poids de l'effet, il faudra diminuer l'importance et l'influence des causes complémentaires, en les considérant comme des occasions, des prétextes, des causes apparentes». [Perelman Olbrechts-Tyteca 1976, p. 358, p. 361-362].

L'argument pragmatique est la base du raisonnement expérimental dans les sciences, où une hypothèse est validée si ses conséquences sont vérifiées expérimentalement. Oléron précise [Oléron, 1996, p. 106-107] : « A défaut de pouvoir être strictement vérifiée, une hypothèse peut se présenter comme plus ou moins *plausible* […]. Divers facteurs de plausibilité ont été mentionnés : la simplicité, l'ampleur du champ d'application, la similitude avec des interprétations acceptées, l'intelligibilité des mécanismes invoqués. Ce peuvent être des raisons pour accepter une interprétation, mais ce ne sont pas des preuves au sens strict du mot. »

On peut considérer que la vérification expérimentale d'une affirmation portant sur un objet par la réalisation matérielle de l'objet relève de ce type d'argumentation. On utilise la conséquence suivante : si une proposition portant sur un objet est vraie, alors elle sera vraie sur toute réalisation matérielle de cet objet. C'est le cas en géométrie lorsqu'on construit pratiquement une figure à l'aide d'instruments ou de logiciels de dessin et que l'on vérifie, visuellement ou par mesure, l'affirmation sur l'objet réalisé. C'est également le cas lorsqu'on vérifie une égalité d'aires par manipulation et recomposition de surfaces. On rejoint ici les preuves pragmatiques de Balacheff [Balacheff 1988, p. 54].

Argument par induction [Perelman, Olbrechts-Tyteca 1976, p. 471-499]

Perelman et Olbrechts-Tyteca [Perelman, Olbrechts-Tyteca 1976, p. 471] analyse "les liaisons qui fondent le réel par le recours au cas particulier. Celui-ci peut jouer des rôles fort divers : comme exemple, il permettra une généralisation ; comme illustration, il étayera une régularité déjà établie ; comme modèle, il incitera à l'imitation. »

On peut distinguer différents types d'induction :

- l'induction incomplète[13] : on vérifie une propriété sur un nombre de cas jugé suffisant ou sur un cas considéré comme suffisamment général ou générique pour entraîner la plausibilité de la vérité de la propriété dans tous les cas,
- l'induction statistique : on s'appuie sur les modèles probabilistes pour en déduire la probabilité de la vérité d'une proposition (statistique inférentielle) à partir d'une vérification sur un échantillon,
- l'induction expérimentale : on généralise à tous les cas la vérification expérimentale effectuée sur un nombre fini de cas.

1.2.2. Dans des institutions mathématiques

Nous appellerons institutions mathématiques des institutions dont la fonction est l'élaboration du savoir mathématique, par exemple les départements mathématiques des universités, les centres de recherche en mathématiques, mais aussi les institutions qui organisent la communication et les échanges dans la communauté des mathématiciens. Nous parlerons de **mathématiques savantes** en nous référant aux mathématiques hors des institutions sociales où elles ont été produites, dans leur fonctionnement propre et autonome, comme corpus de connaissances. Cette conception traverse l'histoire des mathématiques de Platon, pour qui les mathématiques existent indépendamment des êtres humains, jusqu'aux formalistes, pour qui il n'y a pas d'objets mathématiques : « les mathématiques consistent seulement en axiomes, définitions théorèmes - en d'autres mots des formules » [Davis 1985, p. 309]. On pourra utiliser comme illustration approximative (et approchante) de ces mathématiques savantes les mathématiques et des démonstrations savantes, celles que l'on trouve dans les traités théoriques de Bourbaki.

Nous appellerons **mathématiques sociales** les mathématiques conditionnées par une institution sociale, conditions par exemple sur la réception, la production

[13] on peut classer dans cette catégorie l'empirisme naïf, l'expérience cruciale et l'exemple générique proposés par Balacheff [Balacheff 1988, pp. 56-58].

ou le traitement de ces mathématiques. On envisage bien entendu les paramètres socio-culturels mais aussi des paramètres plus individuels (psychologiques, cognitifs,...). Certains auteurs parlent d'ethnomathématiques [IREM de Montpellier, 1993, pp. 535-580]. Un débat philosophique pourrait conduire à discuter la position que toutes les mathématiques sont sociales ; en effet les mathématiciens professionnels, les **savants** mathématiciens, forment une communauté sociale qui valide les connaissances du corpus des mathématiques. L'histoire des mathématiques illustre les variations de conception de cette communauté, comme le précise Barbin [IREM de Besançon, 1989, p. 5] à propos de la démonstration : « Situer la démonstration dans l'histoire, c'est aussi se garantir de la « méprise » qui consiste à croire que la démonstration est univoquement définie, c'est être obligé de penser sa diversité. Les fondements de la démonstration se transforment, la signification de la démonstration se modifie, les formes de la démonstration changent, le sentiment de l'évidence varie avec l'histoire ». Nous n'ouvrirons pas ce débat ici.

Dans une démonstration mathématique, les différentes règles d'inférence utilisées peuvent être produites par la théorie logique utilisée ou par la théorie mathématique dans laquelle on se situe ; elles auront différents statuts : axiomes, théorèmes, propriétés…

1.2.3 Dans des institutions didactiques

« Dans la plupart des univers culturels contemporains, l'intention didactique, relative à un savoir déterminé, est cristallisée en institutions ayant, vis-à-vis de ce savoir, une mission d'enseignement, et définissant, pour ses membres, relativement à ce savoir, deux positions majeures : celle d'enseignant, celle d'enseigné. » [Chevallard]. Nous appellerons **institutions didactiques** ces institutions, par exemple une classe de Gymnasium allemand, une classe lycée français, le système éducatif d'enseignement secondaire du Bade-Wurtemberg…

Nous appellerons **mathématiques didactiques** les mathématiques conditionnées par une institution sociale particulière à savoir une institution d'enseignement. Dans notre étude, nous nous limiterons à l'enseignement secondaire. Ces mathématiques didactiques prennent souvent leur origine dans les mathématiques savantes.

Nous appellerons **validation didactique** une validation dans une institution didactique.

Nous parlerons enfin de **techniques didactiques** pour les techniques utilisées dans l'enseignement des mathématiques.

Cette restriction à l'enseignement des mathématiques est très importante. Nous ne nous intéresserons pas *a priori* aux techniques didactiques de validation développées dans l'enseignement du français à propos de l'argumentation, ou dans l'enseignement de la philosophie à propos de la dissertation, ou dans l'enseignement des sciences physiques à propos de la méthode expérimentale...

Une technique didactique de validation de la vérité mathématique d'une proposition est donc une technique qui permet, dans une institution didactique où les mathématiques sont enseignées, de valider la vérité mathématique d'une proposition.

Nous rappelons un terme important du contrat en situation d'enseignement, dans le cas d'une validation didactique : le professeur est en mesure, dans la plupart des cas (car on peut imaginer une conjecture pour laquelle le professeur n'arrive pas à se prononcer), de garantir la vérité mathématique d'une proposition. Nous appellerons cette clause du contrat *« référence à l'autorité du professeur »*, et l'application de cette clause sera appelée « *argument d'autorité du professeur* ». Cette clause de contrat n'existe pas pour une démonstration mathématique. Ceci ne veut pas dire que dans la communauté des mathématiciens il n'y a pas des mathématiciens dont l'autorité permet de recommander un article pour une revue ou de placer un auditoire dans une situation de confiance, avec baisse de vigilance. Mais cette référence à l'autorité du mathématicien ne peut être un argument pour la démonstration mathématique. Cet argument d'autorité est utilisé lorsque le professeur énonce un théorème et déclare la démonstration admise, ou encore lorsque, lors d'une démonstration, il « tire de son chapeau » une propriété-secours, qu'on admet, et qui permet de poursuivre la démonstration. Nous verrons des exemples plus loin.

Une technique didactique peut être :

- une technique mathématique, par exemple si dans une classe donnée tous les élèves ont accès à cette technique mathématique,
- une technique sociale, notamment pour remplacer une technique mathématique non disponible,
- une combinaison des deux types de techniques.

Tietze [Tietze 1997, p. 159] écrit : « Il est important pour l'enseignement des mathématiques qu'on n'admette pas seulement la démonstration mathématique comme justification, mais qu'on s'expose à de multiples formes de justifications. En outre il faut encourager la mise au premier plan de la forme dialoguée de justification. »

1.3. L'hypothèse de la double transposition

1.3.1. Transposition didactique

Le passage des mathématiques savantes aux mathématiques didactiques a été étudié par Chevallard sous le nom de **transposition didactique** : « un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d’enseignement. Le « travail » qui d’un objet de savoir à enseigner fait un objet d’enseignement est appelé la transposition didactique [Chevallard, 1985, p. 39]. »

De manière générale on pourrait parler de transposition d’un savoir d’une institution dans une autre. Lorsque l’institution d’arrivée est une institution didactique, on parlera de transposition didactique.

1.3.2. Le savoir social

Cependant l’école n’a pas pour seule fonction d’opérer la transposition didactique du savoir savant mathématique ou plus généralement de savoirs savants d’autres disciplines. Elle doit permettre à l’élève d’acquérir des **savoirs sociaux**.

Ainsi **en France** « la mission du lycée est de permettre à tous les élèves... d’acquérir les savoirs fondamentaux et d’accéder aux capacités de jugement et aux formes culturelles et patrimoniales qui les inscrivent dans la collectivité nationale et européenne et, plus généralement dans l’histoire des hommes... L’acquisition des connaissances qui sont la base de toute formation intellectuelle doit permettre, dans toutes les disciplines, de développer le sens de l’effort, l’attitude de probité intellectuelle, de recherche honnête de la vérité, de respect de l’opinion d’autrui... Tous les enseignements doivent favoriser l’indépendance intellectuelle, solliciter l’imagination, développer l’intérêt et la curiosité des élèves, obtenir leur participation active en encourageant les productions individuelles et collectives sous toutes leurs formes. [Ministère, 1999, p. 4]».

En Allemagne, dans le Bade-Wurtemberg, « on peut transmettre les qualifications clés futures comme l’autonomie, la conscience de la responsabilité, la capacité à travailler en équipe, et la compétence méthodique » [Ministerium, 4/1994, p. 5].

Nous faisons l’hypothèse qu’il y a également une transposition didactique de ces savoirs sociaux dans des savoirs scolaires. Et la classe de mathématiques est également un lieu de cette transposition, c’est-à-dire qu’un objet mathématique enseigné peut être utilisé comme objet d’enseignement d’un savoir social, d’un savoir mathématique savant et éventuellement d’une combinaison des deux savoirs.

Une conséquence de cette double transposition est qu’il peut y avoir interaction entre ces transpositions.

Nous faisons l’hypothèse que l’enseignement de la démonstration en mathématiques est le lieu d’une double transposition, celle de la validation sociale et celle de la validation mathématique.

Pour vérifier cette hypothèse nous allons observer des exemples de validations didactiques dans des manuels scolaires où vont cohabiter des techniques sociales et des techniques mathématiques de validation. Nous ferons des hypothèses sur les fonctions assignées aux différentes techniques.

2. Exemples issus de manuels scolaires

Nous nous proposons d'observer les techniques de validation utilisées dans un exemple concernant la validation de la proposition : la circonférence P d'un cercle de rayon r vaut $2\pi r$ et l'aire A d'un disque de rayon r vaut πr^2 .

2.1. Un exemple de validation par des techniques sociales

Dans un livre[14] français de 6ème on propose l'activité ci-jointe

À la recherche de π

Matériel : un rouleau de papier adhésif, feutre, ciseaux, règle graduée...

A. Expériences, mesures et calculs

1. *Mesurer le diamètre d du rouleau de papier adhésif.*
Tracer, au feutre, un trait, juste au début du ruban **(fig. 1)**.

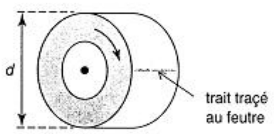


fig. 1

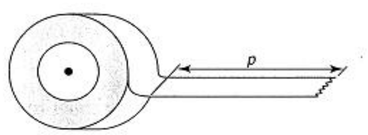


fig. 2

Dérouler le ruban jusqu'au trait, puis le fixer sur une feuille.

2. *Mesurer la longueur p du ruban déroulé* **(fig. 2)**.
Compléter ce tableau avec différentes valeurs obtenues dans la classe.

Périmètre (cm) $p =$					
Diamètre (cm) $d =$					
$p \div d \approx$					

B. Conclusion

1. *Que constate-t-on dans ce tableau ?*
2. *Compléter la phrase :*

Le périmètre d'un cercle est égal à son diamètre multiplié par ...

3. *Compléter la formule :* $\boxed{p = \pi \times \ldots}$ avec $\boxed{\pi \approx \ldots}$

[14] *Le nouveau Pythagore 6ème*, Edition Hatier, 1996, pp. 208-209.

Analyse des technologies utilisées et de leurs fonctions

On a d'abord un *argument pragmatique* qui permet, après différentes mesures de constater qu'il est plausible que $d \div p$ soit constant. (question B1).

On affirme par un *argument d'autorité* que ce rapport est constant. On conclut l'activité par un argument d'autorité suggérant la formule : $p = 2\pi r$. Nous supposons qu'il s'agit de l'autorité du livre éventuellement renforcée par celle du professeur conduisant l'activité.

Cette validation est la succession de techniques sociales appliquant un argument pragmatique et un argument d'autorité.

Il n'y a pas de techniques mathématiques utilisées.

Nous faisons l'hypothèse que l'argument pragmatique a pour *fonction de persuasion* au niveau de la plausibilité de la propriété, alors que l'argument d'autorité a pour *fonction de persuasion* au niveau de la certitude de la propriété en s'appuyant sur le contrat didactique implicite qui affirme l'autorité du professeur ou du manuel scolaire.

L'argument de plausibilité renforce l'argument d'autorité ; il permet à l'élève de participer à la validation, et en ce sens a plus de force psychologique que l'argument d'autorité qui tout seul aurait laissé l'élève inactif.

Enfin une étude du programme de $6^{\text{ème}}$ montrerait qu'aucune technique mathématique n'est disponible pour participer à cette validation.

2.2. Quelques exemples de validations avec des techniques sociales et des techniques mathématiques

2.2.1. Exemple allemand

Dans un livre[15] allemand de classe 10 (15-16 ans) on propose l'activité suivante. La traduction du théorème proposé dans cette activité est :

Théorème : On note A l'aire d'un disque de rayon r.

Le rapport $\dfrac{A}{r^2}$ est le même pour tous les disques.

Observons le texte la validation proposée dans le manuel.

« Pour vérifier notre conjecture, nous considérons deux polygones réguliers de même nombre n de sommets inscrits dans deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2. Comme ces deux polygones sont semblables, leur aires A_1 et A_2 sont dans le rapport :

[15] Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe Baden-Würtemberg, Klasse 10, Lambacher Schweizer, Ernst Klett Verlag.

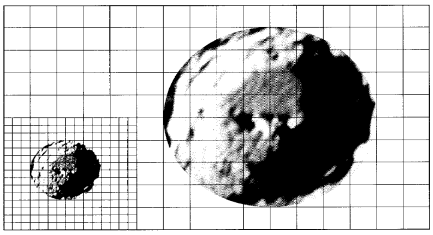
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \text{ ou } \frac{A_2}{r_2^2} = \frac{A_1}{r_1^2}.$$

Cela signifie que, pour un n fixé, le quotient de l'aire d'un polygone à n côtés inscrit dans un cercle de rayon r et l'aire d'un carré de côté r est le même pour tous les cercles. Comme l'aire d'un polygone à n côtés diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques :

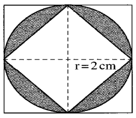
Théorème : Le rapport $\frac{A}{r^2}$ est le même pour tous les disques.

IV Kreisberechnung

1 Die Kreiszahl π

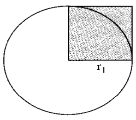


1 Die beiden Bilder zeigen den Mondkrater „Kopernikus" auf zwei verschiedenen Mondkarten.
a) Kann man den Bildern entnehmen, wie groß die Fläche des Kraters in Wirklichkeit ist?
b) Wie viele der eingezeichneten Quadrate liegen ganz in der Kraterfläche?
Warum sind es auf beiden Karten gleich viele?
c) Gib für den Flächeninhalt des Kraters einen Näherungswert in der Flächeneinheit „1 Quadratfläche" an.
d) Wie lautet der Näherungswert in der Einheit „1 Radiusfläche"?



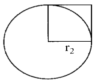
Bisher haben wir Flächeninhalte von Vielecken berechnet. Nun versuchen wir, Flächeninhalte von krummlinig begrenzten Flächen zu bestimmen. Die wichtigste derartige Figur ist der Kreis.
Der Flächeninhalt des Kreises auf dem Rand ist kleiner als 16 cm², aber größer als 8 cm².
Vergleicht man den Flächeninhalt A eines Kreises mit dem Flächeninhalt r^2 des Radiusquadrates, so stellt man fest: Bei allen Kreisen ist

$$2r^2 < A < 4r^2 \qquad \text{oder} \qquad 2 < \frac{A}{r^2} < 4.$$

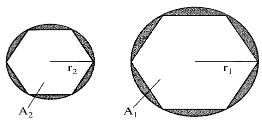


Die Schranken 2 und 4 hängen nicht von r ab; wir können daher vermuten: Bei allen Kreisen ist der Quotient $\frac{A}{r^2}$ die **gleiche** (zwischen 2 und 4 gelegene) Zahl, bzw: Bei allen Kreisen ist der Flächeninhalt **dasselbe** Vielfache von r^2.
Um die Vermutung zu überprüfen, denken wir uns regelmäßige Vielecke derselben Eckenanzahl n in zwei Kreise einbeschrieben. Da diese n-Ecke ähnlich sind, gilt für ihre Flächeninhalte A_1 und A_2:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{oder} \quad \frac{A_2}{r_2^2} = \frac{A_1}{r_1^2}.$$



D. h.: Bei festem n ist der Quotient aus n-Eck-Inhalt und Inhalt des Radiusquadrats bei allen Kreisen gleich.
Da sich der Inhalt eines n-Ecks bei hinreichend großer Eckenzahl vom zugehörigen Kreisinhalt nur beliebig wenig unterscheidet, muss in gleicher Weise auch für die Kreisinhalte gelten:

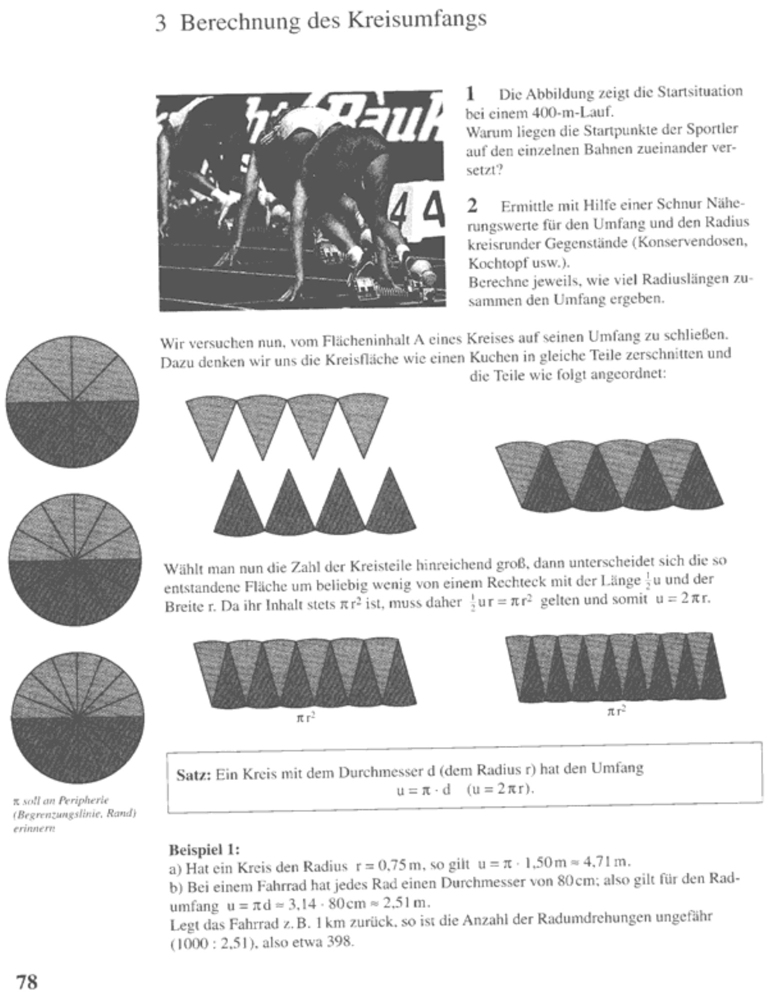


Satz: Der Quotient $A : r^2$, d. h.:
(Flächeninhalt des Kreises) : (Flächeninhalt des Radiusquadrates)
ist bei allen Kreisen gleich.

74

On définit le nombre π comme étant ce rapport constant.

Plusieurs méthodes sont proposées pour déterminer une valeur approchée de π (méthode d'Archimède,...)[16] On établit ensuite le « théorème de la circonférence du cercle »[17].



3 Berechnung des Kreisumfangs

1 Die Abbildung zeigt die Startsituation bei einem 400-m-Lauf.
Warum liegen die Startpunkte der Sportler auf den einzelnen Bahnen zueinander versetzt?

2 Ermittle mit Hilfe einer Schnur Näherungswerte für den Umfang und den Radius kreisrunder Gegenstände (Konservendosen, Kochtopf usw.).
Berechne jeweils, wie viel Radiuslängen zusammen den Umfang ergeben.

Wir versuchen nun, vom Flächeninhalt A eines Kreises auf seinen Umfang zu schließen. Dazu denken wir uns die Kreisfläche wie einen Kuchen in gleiche Teile zerschnitten und die Teile wie folgt angeordnet:

Wählt man nun die Zahl der Kreisteile hinreichend groß, dann unterscheidet sich die so entstandene Fläche um beliebig wenig von einem Rechteck mit der Länge $\frac{1}{2}u$ und der Breite r. Da ihr Inhalt stets πr^2 ist, muss daher $\frac{1}{2}ur = \pi r^2$ gelten und somit $u = 2\pi r$.

πr^2 πr^2

π soll an Peripherie (Begrenzungslinie, Rand) erinnern

Satz: Ein Kreis mit dem Durchmesser d (dem Radius r) hat den Umfang
$$u = \pi \cdot d \quad (u = 2\pi r).$$

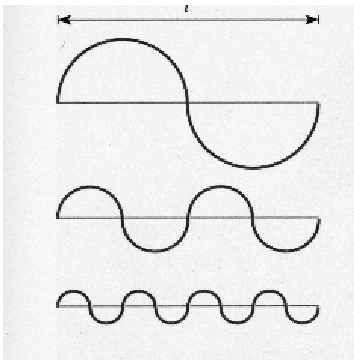
Beispiel 1:
a) Hat ein Kreis den Radius $r = 0{,}75\,m$, so gilt $u = \pi \cdot 1{,}50\,m \approx 4{,}71\,m$.
b) Bei einem Fahrrad hat jedes Rad einen Durchmesser von 80 cm; also gilt für den Radumfang $u = \pi d \approx 3{,}14 \cdot 80\,cm \approx 2{,}51\,m$.
Legt das Fahrrad z. B. 1 km zurück, so ist die Anzahl der Radumdrehungen ungefähr (1000 : 2,51), also etwa 398.

78

[16] Pages 75, 83, 84.
[17] Pages 78 et 79.

On décompose le disque en secteurs de même angle que l'on recompose de manière à former une figure approchant un parallélogramme, comme suggéré par la figure jointe.
« On choisit un nombre de secteurs suffisamment grand pour que l'aire de la surface recomposée diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire d'un rectangle de longueur une demi-circonférence et de largeur un rayon ». Comme l'aire du rectangle recomposé est l'aire du disque, et comme on a précédemment établi que l'aire du disque vaut π fois le carré du rayon, on en déduit que la circonférence du cercle vaut π fois le diamètre.

On signale cependant par la figure ci-dessous qu'une ligne ondulée peut approcher de plus en plus un segment de droite sans pour autant que la longueur de la ligne ondulée approche la longueur du segment.



Analyse des technologies utilisées et de leurs fonctions

Pour la formule sur l'aire du disque, on commence avec une *technologie mathématique* (théorème sur le rapport des aires de polygones semblables), suivie d'un *argument d'induction* incomplète (suggestion d'une approximation de l'aire d'un disque par un polygone inscrit à n côtés) s'appuyant sur un *argument pragmatique* (vérification visuelle sur un exemple) et complétée par un *argument d'autorité* (énoncé de l'extension au disque de la propriété des polygones). Cependant dans le passage à la limite (induction et argument d'autorité), par le traitement du cas particulier de manière générique, avec la notation n, on essaie de préparer le passage à la limite, comme le montre la formulation « comme l'aire d'un polygone à n côtés diffère aussi peu qu'on le souhaite de l'aire du disque correspondant pour n suffisamment grand, on doit avoir de la même façon également pour les aires de disques ».

On voit ici la cohabitation d'une technologie mathématique disponible et de technologies sociales (argument par induction, argument d'autorité) lorsque les technologies mathématiques sur les limites ne sont pas disponibles.

Nous faisons l'hypothèse que les technologies sociales, présentes pour remplacer les technologies mathématiques absentes, ont pour fonction de préparer à l'enseignement des limites, ce que nous appellerons une *fonction propédeutique*[18].

Elles ont aussi une *fonction d'explication*[19] : expliquer l'idée de la démonstration (par recours aux arguments pragmatique et d'induction), qui est le passage à la limite.

Les arguments pragmatiques et d'autorité remplissent également une *fonction de persuasion* au niveau respectivement de la plausibilité et de la certitude de la propriété par rapport à des technologies mathématiques non disponibles.

Pour la formule de circonférence, un *argument pragmatique* (étude de recompositions de la figure), suivi d'un *argument d'induction* incomplète (passage à la limite suggéré par plusieurs cas), d'une technologie mathématique (formules de l'aire d'un parallélogramme et de l'aire d'un disque), complétés par un argument d'autorité (qui énonce la propriété de la circonférence du cercle). Comme précédemment, nous faisons l'hypothèse que les technologies sociales ont pour fonction de préparer à l'enseignement des limites, ce que nous appellerons une *fonction propédeutique*[18]. Elles ont aussi une *fonction d'explication*[19] : expliquer deux idées de la démonstration (par recours aux arguments pragmatique et d'induction) : le passage à la limite après recomposition et utilisation du résultat précédent sur l'aire du disque.

[18] Nous justifierons cette hypothèse lors de l'étude des programmes.

[19] La fonction d'explication propose un « aperçu sur pourquoi c'est vrai [Hanna 2000, p. 8] ».

2.2.2. Exemple français

Dans le manuel[20] de 5ème de la même collection que le précédent manuel de 6ème, on propose l'activité reproduite en page suivante.

4 Aire d'un disque

Entre nous

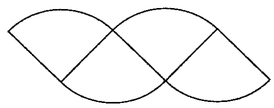
Objectifs :
• Utiliser la formule du périmètre du cercle
• Découvrir la formule de l'aire d'un disque.

Remarques :
• Un peu de patience : la formule est au bout.
• Les collages sont plus aisés et plus propres avec du papier autocollant.

A. Découpage et collage

1. *Dessiner et découper 4 disques de mêmes dimensions.*

2. *Couper le premier disque en 4 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 4 secteurs.*



3. *Couper le second disque en 8 secteurs identiques et coller tête-bêche ces 8 secteurs.*

4. *Même travail avec 16 secteurs (et avec 32 si vous voulez).*

B. Formule

1. *À quoi ressemble la figure obtenue en collant tête-bêche des secteurs nombreux et très fins ?*
En déduire une formule pour calculer l'aire d'un disque.

2. Un disque compact fait 12 cm de diamètre.
Peu importe son air ! Calculer son aire.

Analyse des technologies utilisées et de leurs fonctions

On a des techniques analogues à l'exemple allemand, avec recomposition des secteurs.

Les deux seules différences portent sur la structure de la démonstration :

- on a commencé par valider la formule du périmètre et c'est cette formule qu'on utilise pour valider la formule de l'aire ; sans doute parce que, ne disposant pas de la technologie sur le rapport des aires de figures semblables utilisée dans la validation allemande, il n'était pas aisée de mettre en place un argument pragmatique pour mesurer les aires ; par contre cet argument paraît plus facile à mettre en place pour mesurer les périmètres ; on voit donc que la disponibilité de technologies mathématiques peut influencer l'ordre de présentation dse validations,
- on n'a pas formulé l'induction du passage à la limite sous forme générique (comme dans le cas allemand) : nous faisons l'hypothèse que c'est l'absence de fonction propédeutique à l'enseignement des limites qui explique cette absence ; une explication pourrait être l'éloignement des

[20] *Le nouveau Pythagore, 5ème*, Edition Hatier, 1997, p. 172.

classes de $6^{ème}$ et $5^{ème}$ par rapport à la classe de $1^{ère}$ où sont introduites les limites.

3. La recherche de justification de l'utilisation de techniques

3.1. Continuité didactique entre argumentation et démonstration

Nous avons justifié la présence de techniques sociales d'abord par l'absence de technologies mathématiques. On peut assurer la continuité de la validation, en remplaçant, dans des démonstrations mathématiques incomplètes, les technologies mathématiques absentes par des technologies sociales.

Mais cette continuité ne se limite pas à la fonction première de validation de l'argumentation et de la démonstration, elle s'étend à d'autres fonctions[21] de la démonstration qui peuvent être assumées par l'argumentation lorsque la démonstration mathématique n'est pas possible : nous avons vu des exemples avec les fonctions d'explication, propédeutique ou de persuasion. On peut voir dans [Cabassut 2002] d'autres exemples, notamment avec la fonction culturelle.

3.2. Justification des technologies

On peut chercher dans les théories didactiques la justification des technologies didactiques employées en distinguant deux niveaux pour les théories didactiques.

Le niveau des programmes et de leurs accompagnements permet de préciser les technologies didactiques disponibles et les fonctions assignées à ces technologies. Par exemple le programme[22] de classe 10 de Bade-Wurtemberg précise pour ce qui concerne le cercle et le disque : « Les élèves comprendront le problème des déterminations de la circonférence et de l'aire du cercle[…]. Ils reçoivent un point de vue sur comment une considération propédeutique des limites permet le calcul. » Ces programmes insistent avec force sur les arguments de plausibilité. Les programmes indiquent également les théories mathématiques et didactiques auxquelles ils se réfèrent. Ces programmes permettent donc d'expliquer et de justifier l'articulation entre validation sociale et validation mathématique. Notre programme de recherche porte d'abord sur l'étude de cette articulation dans les programmes d'enseignement des mathématiques de 1970 à 2002 en France et en Bade-Wurtemberg. Nos premiers résultats montrent une articulation croissante avec le temps entre le social et le mathématiques. Ensuite nous avons étudié cette articulation dans les programmes de mathématiques et ceux des autres disciplines pour la période actuelle : notre observation montre la part

---

[21] Nous renvoyons aux articles [De Villiers 1990],[Hanna 2000], et [Cabassut 2002].

[22] MINISTERIUM für Kultus und Sport Baden-Würtemberg *Bildungsplan für das Gymnasium,* Lehrplanheft 4/1994, Neckar-Verlag, 4/1994.

importante des techniques d'argumentation et leurs renvois à des situations interdisciplinaires pouvant impliquer l'enseignement des mathématiques.

Au niveau plus général de la noosphère, c'est-à-dire au niveau des concepteurs de programmes, des associations de professeurs de mathématiques, des didacticiens des mathématiques, nous étudions comment le discours produit peut expliquer les phénomènes de transposition dans la validation didactique.

3.3. Le cadre de la théorie anthropologique

Le cadre de la théorie anthropologique nous paraît bien adapté pour décrire d'une part les influences entre le social et le mathématiques dans la validation, d'autre part en montrant l'influence des institutions, notamment par l'observation de deux pays différents. Notre programme de recherche étudie notamment des productions de démonstration d'élèves des deux pays dans un contexte d'évaluation pour laquelle les technologies mathématiques disponibles sont les mêmes : les premières observations montrent des différences de contrat et de coutume [Balacheff *Le contrat et la coutume* 1988.2] entre les pays que nous essayons d'expliquer par des différences d'institutions et de théories didactiques.

BIBLIOGRAPHIE

AUDI Robert, 1989, *Practical Reasoning,* Routledge, London.

BALACHEFF Nicolas, 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège,* Thèse, université Joseph Fourier de Grenoble.

BALACHEFF Nicolas, 1988.2, *Le contrat et la coutume deux registres des interactions didactiques,* in Actes du premier colloque franco-allemand de didactique, 15-26, La pensée Sauvage.

BLANCHE Robert, 1968, 1996, *Introduction à la logique contemporaine,* Armand Colin-Masson, Paris.

BLANCHE Robert, 1995, *Raisonnement,* in Encyclopédie Universalis, CDROM.

BOURDIEU Pierre, 1980, *Le sens pratique,* Les éditions de Minuit. Paris.

CABASSUT Richard, 2002, *Pourquoi démontrer ? Un exemple allemand sur les aires et les volumes pour entrer dans le processus de preuve et d'explications*, in revue Repères n°47.

CARNAP R., 1966, *Philosophical Foundations of Physics,* Martin Gardner, Basic Books, New York.

CHALMERS Alan, 1976, 1982, *What is this thing called science ?,* University Of Queensland Press, Sta Lucia.

CHALMERS Alan, 1987, *Qu'est-ce que la science ?* La découverte. Paris.

CHEVALLARD Yves, 1985, *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné,* La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1992, *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique,* revue Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 12 n°1, 73-112.

CHEVALLARD Yves, 1999, *Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques,* in Vingt ans de didactique des mathématiques en France, La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1999.2, *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique,* Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.19 n°2, 221-266.

DAVIS Philip J. et HERSH Reuben, 1985, *L'univers mathématique,* Gauthier-Villars.

DAVIS Philip J. et HERSH Reuben, 1982, *The mathematical experience,* Birkhäuser, Boston.

DE VILLIERS Michael, novembre 1990, *The role and the function of proof in mathematics,* Pythagoras n°24, 17-24.

DUVAL Raymond, 1995, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.

GRIZE J.B., 1996, *Logique naturelle et communications,* Paris, Presses Universitaire de France.

HANNA Gila, 2000, *Proof, explanation and exploration : an overview,* Educational Studies in Mathematics 44, 5-23.

HAARSCHER Guy, 1994, *Chaïm Perelman et la pensée contemporaine* Bruylant, Bruxelles.

HEMPEL Carl, 1966, *Philosophy of Natural Science,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

HEMPEL Carl, 1972, 1996, *Eléments d'épistémologie,* Armand Colin/Massson, Paris.

IREM DE BESANCON, 1989, *La démonstration mathématiques dans l'histoire,* Actes du 7ème colloque inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, IREM de Besançon.

IREM DE MONTPELLIER, 1993, *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique,* Actes de la première université d'été européenne, IREM de Montpellier.

KNUTH *Eric,* mai-juin 2000*, The rebirth of proof in school mathematics in the United-States*, in International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, 12 août 1999, *Mathématique 2nde,* Bulletin Officiel Hors série n°6.

MINISTERIUM FÜR KULTUS UND SPORT Baden-Würtemberg, 4/1994, *Bildungsplan für das Gymnasium,* Lehrplanheft 4/1994, Neckar-Verlag.

OLERON Pierre, 1996, *Le raisonnement,* Presses Universitaires de France, Paris.

PERELMAN Chaïm, 1952, *De la preuve en philosophie* in Mélanges G. Smeth, Librairie encyclopédique, Bruxelles.

PERELMAN Chaïm, OLBRECHTS-TYTECA Lucie, 1970, *Traité de l'argumentation, la nouvelle réthorique* Editions de l'Université de Bruxelles, 1976. 1969, Th*e New Rhetoric : A Treatise on Argumentation*, University of Notre Dame Press, London.

ROSS Kenneth, March 1998, *Doing and proving : the place of algorithms and proof in school mathematics,* American Mathematical Monthly, 252-255.

STEIN Martin, 1986, *Beweisen,* Texte zur mathematische-naturwissenschaftlich-technischen Forschung und Lehre, Band 19, Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfurth.

TIETZE Uwe-Peter, KLIKA Manfred, WOMPERS Hans, FÖRSTER F., 2000, *Mathematiksunterrichts in der Sekundarstufe II, Band I,* Vieweg.

TOULMIN S.E., 1958, *The Uses of Arguments,* Cambridge, University Press.

TOULMIN S.E., 1993, *Les usages de l'argumentation,* (traduction), Presses Universitaires de France, Paris.

richard.cabassut@alsace.iufm.fr
IREM de Strasbourg
DIDIREM de Paris 7

Janine ROGALSKI et Marc ROGALSKI

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES MODES DE TRAITEMENT DE LA VALIDITÉ DE L'IMPLICATION PAR DE FUTURS ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES

Abstract. The paper presents a set of results about how do advanced mathematics students (applying to be mathematics teachers) process with specific implication cases. The aim is to identify, if they exist, the kinds of organisation in the use of logic in theirs evaluating the truth value of implications. Several types of implications were used, for identifying factors involved in the management of the premise. Students' profiles were defined depending on the orientation of their answers to factual not computable implications with (always) false premise: 'Logic' ('*the assertion is true as the hypothesis is false*'), 'Relevance' ('*the assertion is stupid*', '*non sense*'), 'Falseness' ('*hypothesis always false, then assertion false*'), 'ND' (non dominant type of answer). The profiles were related to answers to other types of implications, including computable (mathematical) implications, with premise always false or predicates false for some values ("*hors-sujets*": Legrand, 1990). Two populations were compared (107 students in 1999, 71 in 2001). Globally, the distribution of profiles was similar in the two groups ; answers to most of mathematical items differ depending on the profile. The "*logic*" profile was the only one with stable correct responses: it was a minority. Profiles seem to be relatively stable individual properties, enabling some qualitative anticipation as regarding their answers to a series of tests. Even if advanced mathematics students were more logical than subjects questioned in psychology experiments, the frequency of inefficient profiles ('f*alseness*' and '*ND*') led to discuss how profiles could be changed, through scholar teaching and during teachers training.

Résumé. On présente un ensemble de résultats sur une étude concernant le traitement d'implications particulières par des étudiants préparant le concours de recrutement de professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire (CAPES). Le but est d'identifier, s'ils existent, des types de structuration de l'usage de la logique dans une de ses fonctions : l'évaluation de la validité d'implications. Des implications de différents types ont été utilisées. On a défini des profils à partir des réponses à un ensemble d'implications non calculables à prémisse toujours fausse et mis en relation ces profils avec les réponses à d'autres catégories d'implications, dont des implications (à contenu mathématique) calculables, à prémisse toujours fausse, ou comportant des "hors-sujet" (Legrand, 1990). On a comparé deux populations (107 étudiants passant le test en 1999, 71 en 2001). Globalement, on observe une distribution analogue des quatre profils dans les deux tests ; des résultats différenciés selon les profils (de la même manière dans les deux populations) sur la plupart des items à contenu mathématique ; un profil "logique" est le seul stable dans les réponses correctes : il est minoritaire. On relève une utilisation significative de la contraposition dans les deux populations en ce qui concerne les items comparables (un étudiant sur deux l'utilise au moins une fois). Les profils que nous avons définis nous paraissent des propriétés des sujets qui permettent certaines anticipations qualitatives pour certaines épreuves. Nous discutons de la manière dont ces propriétés des sujets pourraient évoluer, en particulier à travers les processus d'enseignement universitaire et lors de la formation des maîtres.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 175 – 203.

Mots clés : Didactique des mathématiques, formation des enseignants, logique, raisonnement, erreur.

1. Introduction

Nous présentons un premier ensemble de résultats d'une étude de nature empirique faite sur deux groupes d'étudiants licenciés de mathématiques entrant dans la préparation au Capes de mathématiques à l'Université de Lille, la plus nombreuse en septembre 1999 (test 1: 107 étudiants) et la deuxième en septembre 2001 (test 2 : 71 étudiants).

La motivation de l'étude réside pour nous dans l'importance, pour des enseignants de mathématiques en collèges ou lycées, de savoir distinguer dans les "erreurs de raisonnement" des élèves celles qui proviennent directement de la mauvaise compréhension des mathématiques enseignées, et celles liées à un maniement erroné de la logique en oeuvre en mathématiques ; par exemple, un certain nombre d'élèves et d'étudiants pensent spontanément, en actes, que $P \Rightarrow Q$ et $nonP \Rightarrow nonQ$, "c'est pareil", ou que la négation - souvent d'ailleurs dénommée "contraire" - de $\forall x\ P(x)$ est $\forall x$ non $P(x)$, ou distinguent mal une implication et sa réciproque " dire $P \Rightarrow Q$ et dire $Q \Rightarrow P$ c'est dire la même chose" (Une étude extensive sur de bons élèves du niveau de 4ème - 8th grade - met en particulier ce point en évidence: Küchemann & Hoyles, 2002). L'origine de ces erreurs est souvent plus cachée, et nous faisons l'hypothèse que les enseignants ne seront vraiment aptes à les détecter et à proposer des remédiations éventuelles que si eux-mêmes ont des idées claires sur le sujet (cf Durrand-Guerrier, 1996; Durrand-Guerrier et al., 2000). Ce sont donc ces idées que nous nous proposons d'étudier sur ces futurs enseignants.

Précisons ce que nous entendons par "idées". Nous ne cherchons pas à repérer, comme c'est la dominante dans les études de psychologues sur le raisonnement à partir du travail pionnier de Wason (Wason, 1966), des modèles généraux de processus de raisonnement logique. Nous voulons essentiellement mettre en lumière, s'ils existent, divers types de structuration plus ou moins inconsciente de l'usage de certains aspects de la logique, en en détectant des schèmes d'utilisation. De plus, la qualité de mathématicien des sujets étudiés, et la nature assez mathématique des tests proposés, font que les très nombreux résultats classiques des psychologues sur le caractère rationnel ou pas des humains (Stanovich, 1999 ; Stanovich & West, 2000) nous paraissent peu pertinents pour ce que nous cherchons à voir. Par exemple, et bien qu'il ne s'agisse pas d'une question directement formulée mathématiquement, les taux de succès au test classique de sélection de cartes de Wason (cf annexe) sont incomparablement plus élevés dans les deux populations étudiées que dans toutes les populations sur lesquelles les psychologues ont travaillé, y compris des universitaires scientifiques (Kern, Mirels

& Hinshaw, 1983; Tweney & Yachinin, 1985, Politzer, 2001).

Dans un premier temps, et c'est l'objet du travail présenté ici, nous nous sommes concentrés sur l'implication, et en particulier sur les divers modes de traitement de la validité de l'implication que ces étudiants "avancés" pratiquent.

Nous avons laissé de côté pour l'instant l'étude de "modes de raisonnement mathématiques" plus globaux, que nous reprendrons éventuellement plus tard : nous travaillons plutôt sur "le pas de raisonnement" au sens de R. Duval (1991), mais en prenant en compte aussi bien des pas de raisonnement sans quantificateurs, qu'avec un ou plus d'un quantificateur (voir à ce sujet les travaux de V. Durand-Guerrier et ceux de M. Legrand). Échappent ainsi à notre étude l'ensemble du processus de démonstration, les méthodes de recherche d'une démonstration, et les processus de recherche de conjectures. Un certain nombre de travaux sont consacrés à cet aspect des choses (Balacheff, 1987 ; Boero, 2000 ; Dreyfus, 1997 ; Hanna, 2000 ; Raffali & David, 2002), et il faudra sans doute développer des études sur les liens entre les activités "raisonner", "chercher", "démontrer", d'une part, et l'utilisation de la logique, de l'autre. Nous pensons néanmoins que le "pas implicatif" en mathématiques est une forme d'inférence constamment présente dans tous les raisonnements heuristiques et toutes les argumentations en jeu dans une recherche mathématique, bien avant la mise en forme rigoureuse de la démonstration. Anticipant sur les résultats qui suivent, nous ajoutons qu'il faudra aussi s'engager dans une prise en compte du contexte d'ensemble de ces activités de raisonnement (niveau des sujets -élèves, étudiants, enseignants-, visée du travail mathématique, contenu mathématique et rapports des sujets à ce contenu mathématique, types d'implications en jeu, visée didactique elle-même).

Dans cet article, nous étudions en particulier les modes de traitement par les étudiants des implications à hypothèse fausse. Pourquoi nous intéressons-nous à cet aspect ? Nous avançons plusieurs raisons.

(1) La situation de l'implication à hypothèse fausse est à peu près la seule qui met fortement en évidence le saut qualitatif entre d'une part une certaine logique usuelle, naturelle, en mathématique, où on se contente souvent de déduire une propriété universellement vraie d'une autre, en utilisant une implication dont l'hypothèse est donc, par l'objectif même qui est visé, vraie, et d'autre part une logique formelle dont la nécessité intervient de façon plus cachée en mathématiques, au point que souvent les étudiants ne se rendent pas compte qu'elle y est plus qu'on ne le pense à l'oeuvre.

(2) La deuxième raison est que justement cet aspect formel de la logique est plus présent qu'on ne le pense dans les mathématiques courantes. Donnons-en quelques exemples.

(*) D'abord, la véracité de $P \Rightarrow Q$ quand P est fausse est nécessaire à la cohérence des raisonnements, en particulier dans les raisonnements par contraposition ou par l'absurde, puisque pour montrer que $A \Rightarrow B$, on va être amené à montrer que nonB$\Rightarrow$nonA, alors même, évidemment, que B peut être vraie, donc nonB fausse !

(*) De plus, les modes usuels de recherche d'une preuve utilisent souvent des conditions suffisantes : "pour prouver Q, il suffirait qu'on ait P, car P$\Rightarrow$Q" : alors même qu'on ne sait pas encore que P est vraie (et il se peut qu'elle se révèle fausse !), il faut "avoir confiance" dans cette implication.

(*) Dans certaines preuves par récurrence, il peut être facile de montrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, sans savoir si P_0 est vraie, ou P_1, … et c'est parfois à partir d'un n assez grand que cela va marcher. Là encore, il faut être sûr de la véracité de l'implication, même si P_n est (éventuellement) fausse. C'est d'ailleurs exactement ce qui se passe dans l'un des items proposés dans nos tests.

Voici un exemple qui cumule les trois situations. On veut prouver que "*pour tout* $n \geq 0$ 4^n+1 *n'est pas divisible par 3*". Voici un raisonnement assez standard qui demande un certain degré de formalisme : "*sinon, il existe un* $k \geq 0$ *tel que 3 divise* 4^k+1 *; évidemment* $k>0$ *(3 ne divise pas 2 !). Mais alors il est facile de prouver que 3 divise* $4^{k-1}+1$ *; par récurrence "descendante", on retrouve que 3 divise 2, ce qui est absurde*". Ainsi, toutes les implications du raisonnement de la récurrence descendante sont de fait à hypothèse et conclusion fausses ! (Bien sûr, on peut faire une preuve directe par récurrence "montante", mais la preuve de $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ se fait naturellement par contraposée, et on utilise encore une implication à hypothèse (et conclusion) fausse ; prouver sans contraposée $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ demande un peu d'astuce : écrire P_n sous la forme $4^n+1 = 3k+\varepsilon$, $\varepsilon = 1$ ou 2, multiplier par 4 ...)

(*) Il y a des cas où la seule preuve connue de A consiste à montrer que non A$\Rightarrow$A (c'est le cas d'un pas indispensable dans la preuve - pourtant très élémentaire quant aux connaissances mathématiques en jeu - du théorème de Cantor : il n'y a pas de surjection de X sur P(X)).

(*) Enfin, il y a des raisonnements, en particulier dans certaines récurrences, qui commencent par : "*Si* $n=0$*, il n'y a rien à montrer ; si* $n \geq 1$*...*" qui laissent souvent les étudiants perplexes : que signifie ce "il n'y a rien à montrer" dans une "démonstration" ?

Il ne nous paraît donc pas sans objet d'étudier chez de futurs enseignants le fonctionnement de l'implication à hypothèse fausse. Nous verrons d'ailleurs dans cette étude à quel point un nombre important d'étudiants sont déstabilisés lorsqu'il prennent conscience que dans l'implication universelle "$\forall$ x P(x) $\Rightarrow$Q(x)" il peut y avoir des x pour lesquels P(x) est fausse : voir plus loin la question des "hors-sujet".

Détaillons maintenant les hypothèses qui sous-tendent l'exploitation empirique des données recueillies. La première hypothèse que nous avons faite est qu'on peut avoir accès aux schèmes d'utilisation de l'implication présents dans la population étudiée et aux effets de ces schèmes en dépouillant les réponses des étudiants à des items qui, soit sont des questions de validation d'implications dont l'hypothèse est toujours fausse, soit attirent l'attention des sujets sur la valeur de la ou des variables qui rendent fausse l'hypothèse - les "hors-sujet" de M. Legrand (1990).

La méthode choisie est la suivante. Nous avons fait passer un test non anonyme aux étudiants en cours d'inscription au Capes au mois de septembre, réunis dans un amphithéâtre, pendant une durée de 4 heures (bien sûr, certains sujets sont restés moins longtemps). Le test n'était pas un test à but sélectif, mais visait à être utile aux enseignants pour savoir "où en étaient les étudiants" sur cette question du raisonnement mathématique : cela était explicitement dit aux étudiants. (Un petit biais existe d'ailleurs : les étudiants auxquels nous avons eu affaire à cette période étaient ceux qui n'avaient plus de seconde session d'examen à passer en septembre pour finir leur licence, donc une population peut-être légèrement meilleure que celle formée de la totalité des étudiants inscrits en octobre à la préparation au Capes.) Les items des deux tests étaient très variés, allant de questions concernant en apparence la vie courante à d'autres très mathématiques (on pourra voir en annexe 2 les items analysés ici).

La deuxième hypothèse faite, pour le dépouillement, est qu'on peut détecter l'éventail des structurations des modes de validation de l'implication par l'étude des conjonctions de réponses à certains types d'implication présents dans plusieurs items. Ceci nous a amené à établir une typologie de nos diverses implications au moyen de catégories prenant explicitement en compte les contenus mathématiques ou non mathématiques, tant des assertions en jeu que des modes de validation possibles. Nous avons ainsi distingué :

- les implications "*calculables*", à des degrés variés (et donc à contenu mathématique) : "$H_n \Rightarrow H_{n+1}$", "si 1=2 ..", "si $(x^2+1) \leq 0$", les deux items à contenu polynomial,
- les implications "*arbitraires*", correspondant à la définition d'une "règle" (en général non mathématique) : "Wason", "Radford",
- les implications de "*contrat social*" : "les bonbons de la maîtresse",
- les implications "*factuelles*", *non calculables*, où les assertions P et Q (hypothèse et conclusion) sont des données immédiatement saisissables par le sujet, pratiquement sensibles, et qui peuvent éventuellement être à contenus mathématiques "routiniers" pour les sujets : "Triangle", "Circuit", "Labyrinthe".

Nous n'avons pas proposé d'implications sans lien de sens entre P et Q (du type : "si 1=2 alors les escargots ont des ailes"?).

2. Les résultats au premier test : existence de profils types, corrélations de ces types avec le succès à certains types d'items

Nous avons lors du dépouillement du test proposé à la première population (Rogalski & Rogalski, 2001) classé les sujets selon quatre profils de comportement, avec variantes pour les trois premiers, en croisant les réponses à la validation de trois implications de type factuel (voir annexe 2) à hypothèse fausse (en fait : toujours fausse, dans la mesure où il y a une variable universellement quantifiée, parfois cachée) : le circuit électrique de Marc Legrand (Legrand, 1990), le labyrinthe d'Evapm étudié par V. Durand-Guerrier (1996), et le triangle.

Le choix de ces items comme permettant de tester ces profils repose sur leur aspect factuel ou "matériel", leur immédiate intelligibilité par les sujets, l'absence de référence à des connaissances mathématiques non routinisées (autres qu'immédiates pour les sujets considérés), et la non-calculabilité de l'implication : la proposition "conclusion" ne peut être dérivée de l'hypothèse par un calcul, qui permettrait aux étudiants de dérouler un schème d'enchaînement de calculs simples. Aussi bien le sens des propositions que la valeur de vérité de l'hypothèse et de la conclusion sont aisément évaluables par référence aux propriétés des objets en jeu (pour les sujets adultes cultivés de la population concernée).

Les profils obtenus sont les suivants :

Logique stable (10 sujets)
(réponse du type : "*l'implication est vraie" -en général avec l'argument "parce que l'hypothèse est fausse"* - dans les 3 items)

Logique instable (9 sujets)
(la même réponse dans 2 items sur 3)

Pertinent stable (9 sujets)
(réponse du type : "*l'implication est stupide", "elle n'a pas de sens"*, dans les 3 items)

Pertinent instable (14 sujets)
(la même réponse dans 2 items sur 3)

Non conditionnel stable (22 sujets)
(réponse du type : "*l'assertion est fausse car l'hypothèse est fausse"*, dans les 3 items)

Non conditionnel instable (23 sujets)
(la même réponse dans 2 items sur 3)

Sans dominante (20 sujets)
(tous les autres types de réponses ou de distribution de réponse aux 3 items, incluant les non réponses éventuelles).

Le terme "non conditionnel" est choisi pour rendre compte du fait que ces étudiants ne conçoivent pas la vérité de l'implication comme un lien conditionnel entre les valeurs de vérité des propositions.

Bien sûr, la question qui se pose alors est la pertinence de cette définition des profils : sont-ils un moyen de prédiction statistique au succès ou à l'échec aux autres items ? Y a-t-il corrélation avec le succès au Capes ? En ce qui concerne la population du test 1, la réponse à ces deux questions est développée dans (Rogalski & Rogalski, 2001), et c'est chaque fois : oui !

Plus précisément (ainsi que le montrent les tableaux en annexe 1), les pourcentages de succès à l'item à implication calculable "$H_n \Rightarrow H_{n+1}$" est supérieure à 65 % dans les trois premières catégories de sujets (et même à près de 80 % dans les deux catégories "stables"), et nettement plus bas (entre 35 % et 48 %) pour les autres. Les pourcentages de succès aux deux items sur Wason et sa variante Radford sont supérieures à 55 % dans les trois premières catégories, et même à 65 % dans les deux catégories "stables", et inférieurs à 42 % dans les autres. Les pourcentages de succès à l'item portant sur un contrat social (la maîtresse) sont encore plus discriminants : 63 % en moyenne pour les deux catégories "logique", et inférieurs à 30 % dans les autres, et même seulement 10 % pour la catégorie "pertinent stable".

Enfin, une corrélation analogue existe pour l'admissibilité au Capes, en référence aux taux moyens au niveau national et dans l'académie de Lille, ainsi que le montre la figure 1 ci-dessous.

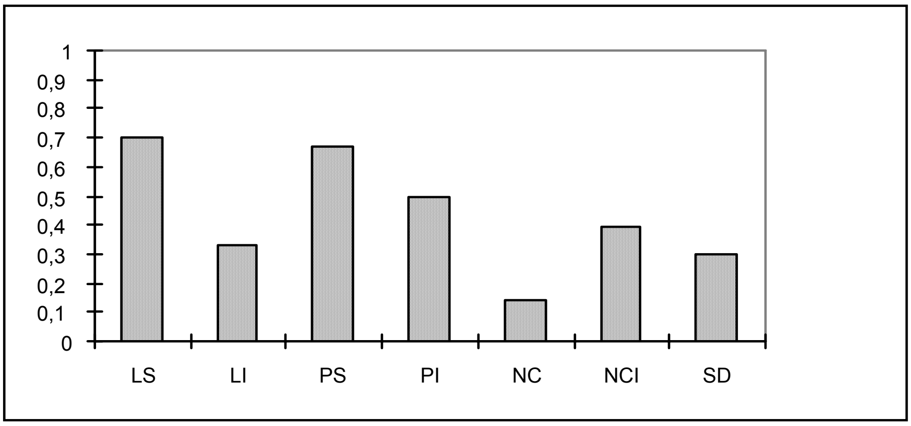


Figure 1 : Pourcentage des étudiants admissibles en fonction de leur profil.

Au total, 38,3% des étudiants de la population concernée par le test1 sont admissibles (alors que les pourcentages d'admissibles au niveau national et au niveau de l'Académie de Lille se situent autour de 28,5%). Les pourcentages sont nettement plus élevés pour les sujets à profil *logique* ou *pertinent* stable, et nettement plus bas pour le profil *non dominant* ; les autres profils s'éloignent peu ou pas du pourcentage général.

3. Confirmation des résultats au deuxième test

Nous nous sommes naturellement demandé si les résultats obtenus avec le premier test étaient relatifs à la population particulière testée, ou s'il y avait stabilité d'une population à une autre (comparable). Nous avons donc recommencé l'opération test en septembre 2001, exactement dans les mêmes conditions, avec un texte reprenant, parmi d'autres, les mêmes items que ceux étudiés dans le premier dépouillement (avec parfois quelques différences de formulation dont nous voulions tester l'effet, en particulier l'introduction de la forme "*si… alors…*", dans certains items). Disons tout de suite que cette modification a été sans effet sur l'item "triangle" ce qui nous a permis de le garder pour la définition des profils, avec les deux autres implications non calculables à prémisse fausse (de formulation inchangée).

Nous avons construit les mêmes catégories avec les mêmes trois items, et aussi étudié la corrélation entre ces catégories et le succès aux mêmes autres items que dans le premier test. La population ayant baissé (moins de candidats au Capes ?), nous avons dû opérer des regroupements pour éviter des dispersions qui auraient rendu les résultats peu significatifs ; précisément, nous avons regroupé les catégories "stable" et "instable" de même type en une seule catégorie ; nous travaillons donc à partir d'ici avec quatre catégories ou quatre profils : "Logique", "Pertinent", "Non conditionnel", et "Sans dominante".

La répartition en catégories de la population testée est alors semblable à celle obtenue avec la première population, ainsi que le montre le tableau 1 ci-dessous.

PROFIL	TEST 1 (N=107)	TEST 2 (N=71)
LOGIQUE	17,7	21,1
PERTINENT	21,5	23,9
NON CONDITIONNEL	42	39,4
SANS DOMINANTE	18,7	15,5

Tableau 1 : Distribution -en pourcentage-des étudiants selon leur profil de réponse aux implications "non calculables à prémisse fausse".

Remarque : il y a un peu plus de profils "logique" ou "pertinent" dans la population des étudiants du test 2, mais la différence des distributions est très faible.

Les distributions des réponses sur chacun des trois items sont également très proches pour les deux tests, avec la même dominante des profils non conditionnels autour de 40%. Il en est de même pour les distributions et à l'item de contrat social ("les bonbons de la maîtresse")-avec le tiers de réponse de type pertinence où l'étudiant décrit un univers pour lequel l'hypothèse redevient vraie-, et pour l'implication calculable ($H_n \Rightarrow H_{n+1}$) -avec plus de 40% de réponses correctes, et un même taux de confusion avec la démonstration de H_n par récurrence (14%).

De plus, comme le montrent les tableaux 2a, 2b et 2c ci-dessous, les corrélations entre ces catégories et les succès aux mêmes autres items sont elles aussi globalement semblables, à des détails près qui s'expliquent par les variations de formulation, avec cependant quelques différences locales qui soulèvent des questions sur lesquelles nous reviendrons dans la discussion.

	LOGIQUE	PERTINENCE	NON CONDITIONNEL	SANS DOMINANTE
IC: ($H_n \Rightarrow H_{n+1}$)				
TEST 1	73,7	56,5	46,7	35
TEST 2	73,3	29,4	28,6	54,5

Tableau 2a : Pourcentages de réponses correctes à l'implication calculable à prémisse fausse ($H_n \Rightarrow H_{n+1}$) selon les profils des étudiants, pour chacune des deux populations.

	LOGIQUE	PERTINENCE	NON CONDITIONNEL	SANS DOMINANTE
Contrat social				
TEST 1	63,2	21,7	26,7	20
TEST 2	60	35,3	35,7	18,2

Tableau 2b : Pourcentages de réponses correctes (selon la logique mathématique) à l'item de contrat social selon les profils des étudiants, pour chacune des deux populations.

	LOGIQUE	PERTINENCE	NON CONDITIONNEL	SANS DOMINANTE
Sélections (Wason & Radford)				
TEST 1	68,4	52,2	37,8	30
TEST 2	66,7	52,9	60,7	36,4

Tableau 2c : Pourcentages de réponses correctes aux items de sélection (Wason & Radford) selon les profils des étudiants, pour chacune des deux populations.

Remarques

- Le *profil logique* se comporte de manière similaire dans les deux tests,
- les réponses correctes à l'item de *contrat social* sont assez voisines pour les deux tests, dans tous les profils,
- on observe une différence marquée dans les réponses correctes à l'*item calculable* (H_n=>H_{n+1}) pour le *profil non conditionnel*, qui donne nettement plus de réponses correctes dans le test 1 que dans le test 2, alors que la situation est inversée pour les réponses correctes aux deux *items de sélection* (Wason & Radford). Nous verrons plus loin que ce dernier résultat est largement attribuable à l'importance d'utilisation de la contraposée dans l'item Wason dans la formulation classique en "si .. alors",
- pour l'*implication calculable* on observe en fait des différences entre les deux tests pour tous les profils non logiques ; cela ne peut être interprété sans considérer plus précisément la nature des réponses sur l'ensemble de l'item.

Toutefois les différences ne sont guère significatives sur le plan statistique (les Khi2 sur la distribution des réponses donnent $.05<p<.10$, sauf pour la différence pour le profil non conditionnel dans les épreuves de sélection, où $p<.05$). Si on compare les réponses correctes à la fois aux items de sélection et à l'implication calculable, on trouve des résultats qui ne diffèrent pas significativement entre les deux tests, et qui contrastent fortement le profil logique aux autres.

Nous n'avons pas encore à la date de rédaction de ce papier les moyens de comparer avec l'admissiblité et le succès au Capes aux niveaux national et académique, nous ne pouvons faire qu'une comparaison des deux populations (test 1 et test 2) selon les profils (tableau 2d).

	LOGIQUE	PERTINENCE	NON CONDITIONNEL	SANS DOMINANTE
TEST1				
admissibles	53	52	35	31
reçus	26	30	16	25
TEST2				
admissibles	66,7	52,9	53,6	45,5
reçus	33,3	17,6	28,6	27,3

Tableau 2d : Pourcentages d'admissibles et de reçus au Capes selon les profils.

Globalement, il n'y a pas une différence marquée entre les deux populations pour l'admission (22,5 %pour le test1 vs 26,8% pour le test 2), alors qu'elle est forte pour l'admissibilité, nettement plus importante dans le test 2 (près de 55%). Le profil "logique" est dans les deux cas le plus performant. Il apparaît en revanche des différences pour les autres profils. Le profil "non conditionnel" a de bien meilleures performances dans le test 2. Quant au profil "pertinent", il présente le plus faible pourcentage de reçus.

Il n'est pas évident de savoir à quoi peut être due la forte atténuation, du test 1 au test 2, de la différence entre les profils pour l'admissibilité au CAPES. Une hypothèse, mais que nous n'avons pas testée, serait que la diffusion pendant l'année 2000 des résultats au test 1 et de leur analyse auprès des enseignants du CAPES a pu avoir un effet sur les enseignants, qui, même inconsciemment, seraient plus intervenus sur les questions de logique : cela pourrait expliquer partiellement une certaine atténuation des différences entre profils entre le passage du test 2 en septembre 2001 et l'écrit du CAPES en mars 2002 ?

4. Étude de points plus spécifiques

Les tests comportaient 20 items dans le premier passage, et 18 dans le second. De nombreuses questions pouvaient ainsi être étudiées, concernant par exemple : l'usage des quantificateurs (en particulier en rapport avec la notion de contre-exemple et dans des items utilisant des polynômes du second degré dépendant de plusieurs paramètres) ; les corrélations éventuelles entre les profils et certains items très mathématiques (différence entre suite numérique non majorée et suite tendant vers $+\infty$, par exemple) ; l'effet de certaines formulations "à l'envers" ("nul n'est P s'il n'est Q", "parmi les rationnels, seuls les décimaux peuvent avoir 2 développements décimaux illimités différents" ?). Dans un premier temps, nous avons étudié quatre questions : quelle est l'utilisation de la contraposée ? y a-t-il des effets des changements de formulation ? comment sont traitées les différentes implications calculables à hypothèse toujours fausse ? que se passe-t-il quand on attire l'attention des étudiants sur l'existence de "hors sujet" (au sens de M. Legrand, c'est à dire des x pour lesquels l'hypothèse P(x) est fausse).

4.1. L'utilisation de la contraposée pour valider une implication

Sur l'ensemble des 8 items identiques ou à formulation voisine figurant dans les deux tests, nous avons comparé l'usage de la contraposée. Les résultats sont les suivants, en pourcentage des étudiants :

Utilisent la contraposée	0 fois	1 fois	2 fois	3 fois	4 fois
Test 1	59 %	27 %	12 %	2 %	--
Test 2	45 %	24 %	24 %	5,6 %	1,4 %

Tableau 3 : Utilisation de la contraposée dans les deux tests (sur les items communs).

Au total, 41 % des sujets utilisent au moins une fois la contraposée lors du premier test, et 55% lors du deuxième test. Le fait qu'un étudiant sur deux, en moyenne, utilise au moins une fois la contraposée est un résultat qui contraste avec une remarque figurant dans (Deloustal-Jorrand, 2000) sur l'absence d'utilisation de la contraposée. Mais son étude clinique concernait un petit nombre d'étudiants, et par ailleurs on peut faire l'hypothèse que les implications à absence de lien sémantique ne déclenchent pas l'usage de la contraposée, même (ou surtout ?) chez des étudiants de mathématiques.

Par ailleurs, il faut noter que la quasi totalité de l'augmentation d'une population à l'autre entre les deux tests est concentrée dans la réponse à l'item "Wason", dont la formulation avait été changée.

Types de tâches d'évaluation d'implication	Test 1 N=107	Test 2 N=71	Ensemble N=178
Implication non calculable (sur 3 items)	3,1	3,7	3,3
Implication calculable ($H_n \Rightarrow H_{n+1}$)	7,5	4,2	6,2
Vérification de règle : sélection de cartes (Wason)	7,5	29	**
Vérification de règle : évaluation de procédures	4,7	10	6,8
Évaluation de contre-exemples	23,4	32,4	27

Tableau 4 : Pourcentage (par item) d'utilisation explicite de la contraposition dans quatre types de situations d'évaluation d'implications dans les deux tests.

** Le fort effet, sur ce seul item, de la différence de formulation ne donne pas de sens à un regroupement des populations des deux tests.

L'évaluation de contre-exemples conduit à une relativement forte utilisation de la contraposition, alors que les autres items d'évaluation d'implication présentent un taux faible (hors Wason avec la formulation "si …alors…"). Si on considère dans chacun des tests le pourcentage d'utilisation de la contraposition dans l'item de sélection de Wason selon le profil des étudiants, on trouve une faible utilisation pour tous les profils dans le test 1 (de 4 à 13%), et une utilisation relativement importante dans le test 2, qui contraste les profils "logique" et "non conditionnel" (de 33% à 40%) et les profils "pertinent" et "sans dominante" (autour de 18%). La mise en relation avec la réponse correcte montre qu'un profil "logique" n'a pas besoin de passer explicitement par la contraposition pour répondre correctement (80% de réponses correctes sans utilisation), qu'un profil "pertinent" peut répondre correctement sans utilisation explicite (60%) et qu'entre 40 et 30% seulement des profils "non conditionnel" et "sans dominante" répondent correctement sans utiliser explicitement la contraposition.

4.2. Quelques effets de changement de formulation en "Si ? alors ?"

Trois items ont été modifiés, en introduisant la formulation en "*Si ... alors ...*" :

- "Triangle" version 1 : "tout triangle non aplati du plan dont ... est ..." ; version 2 : "si un triangle a ... alors il est ..."
- "Wason" : version 1 : "derrière une voyelle il y a un chiffre pair" ; version 2 : "si une carte a une voyelle sur une face, alors elle a un nombre pair sur son autre face".
- "Radford" : version 1 : "dans l'urne toutes les boules blanches ont un numéro pair" ; version 2 : "si une boule est blanche alors son numéro est pair".

Les raisons de ces modifications résultent de deux discussions sur la recherche antérieure :

- les travaux de psychologie du raisonnement déductif utilisant l'expression conditionnelle "si ... alors ...", pour comparer notre population de futurs enseignants de mathématiques aux populations de ces travaux nous avons repris leur formulation,
- la formulation avec le terme "tout" ("tout triangle" ou "toutes les boules blanches") pouvaient cantonner des sujets à ne se placer que dans le cas de l'hypothèse vraie, favorisant ainsi a priori un mode d'évaluation de type "pertinent".

Ces changements de formulation ont en fait eu un effet négligeable sur l'item "Triangle" (de 14% à 18% de réponse selon la logique, pas de changement sur les réponses de pertinence ou non conditionnelle) et sur l'item "Radford" (avec davantage de non prise en compte des numéros impairs : de 19% à 30%).

En revanche, le pourcentage des réponses logiques à "Wason" est plus élevé avec la formulation "si …alors …" -il passe de 48% à 67%-, bien que la non prise en compte du nombre impair reste l'erreur dominante, avec plus de 30% des réponses, ce qui accroît d'ailleurs la différence avec les réponses des sujets des expériences des psychologues. De plus, avec l'usage de la formulation conditionnelle "canonique" "*Si ... alors ...*", les distributions de réponses aux deux versions de la tâche de sélection de cartes "Wason" et "Radford" se rapprochent.

Il semble donc que la formulation "canonique" dans Wason ait contribué à déclencher l'usage de la contraposition -à un niveau voisin de celui de l'item de contre-exemples- chez des étudiants qui n'auraient pas répondu correctement sinon : il s'agit particulièrement des étudiants à profil "non conditionnel", comme le montre le tableau 5.

	LOGIQUE	PERTINENCE	NON CONDITIONNEL	SANS DOMINANTE
TEST 1	10,5	8,7	4,4	10
TEST 2	33,3	24	32	18

Tableau 5 : Utilisation de la contraposition dans la tâche de Wason (implication arbitraire) selon la formulation (test1 : "pour tout ..", test 2 :"si ... alors ...), pour les différents profils.

On observe donc une différence marquée de l'utilisation de la contraposition pour l'item de sélection de Wason pour tous les profils, différence très forte pour le profil "non conditionnel".

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un effet propre au changement de formulation de cet item et non pas d'une différence générale de la population d'étudiants, on a comparé la variation entre le test 1 et le test 2 de l'utilisation de la contraposition dans l'item "Wason" à celle concernant l'ensemble des items communs : on observe bien une augmentation spécifique de l'utilisation pour cet item. De plus, l'augmentation du pourcentage d'étudiants qui utilisent la contraposée pour d'autres items que Wason porte essentiellement sur le profil "non conditionnel". Il semblerait ainsi qu'il y ait une différence (limitée) dans la population des étudiants à profil "non conditionnel" dans le test 2, qui s'ajoute à un effet propre de la formulation, ceci pour tous les profils.

4.3. Les différences entre les implications calculables à hypothèse (toujours) fausse

Dans le test 2, trois items sont de ce type : "$H_n \Rightarrow H_{n+1}$", "Si 1=2 alors 2=3", et "Si $(x^2+1) \leq 0$ alors $(x^2+1)^2 \leq 0$". Ils conduisent globalement à un meilleur succès que les implications "factuelles", non calculables, à hypothèse fausse (on observe de 35% à 66% de réponses correctes pour ces items calculables, et de 18% à 34% de réponses correctes pour les items non calculables).

Toutefois ces items diffèrent de manière importante entre eux : par exemple, l'item qui donne lieu au plus grand nombre de réponses correctes est "Si 1=2 ..", alors que le moins bien réussi est "Si $(x^2+1) \leq 0$ ...". En fait, chacun a ses modes de validation (ainsi dans le premier item, la confusion que font certains étudiants entre l'implication H_n=>H_{n+1} et la démonstration de H_n par récurrence conduit à un type d'erreur qui n'a pas de correspondant pour les deux autres items).

On peut avancer deux interprétations (partiellement concurrentes) :

- soit il y a une disponibilité de l'invariant qui fait passer de 1=2 à 2=3, qui conduit à un taux élevé de réponses correctes, alors qu'il n'y a pas la même accessibilité de celui utilisé dans l'énoncé pour passer de
$$(x^2+1) \leq 0 \text{ à } (x^2+1)^2 \leq 0,$$

- soit il y a une perturbation introduite par le fait qu'un contre argument au calcul proposé ait été introduit dans l'énoncé de ce dernier item.

Toutes les implications calculables, impliquant un minimum de traitement mathématique, sont mieux "réussies" (évaluation positive) par les étudiants à profil *logique*. Si on prend en compte la cohérence des réponses correctes sur les deux derniers items, la différence est particulièrement forte (60% de réponses correctes pour le profil logique, moins de 30% pour tous les autres), le profil "non conditionnel" ayant le plus faible pourcentage de réponses correctes à ces deux items (10,7%). Nous allons voir que les "hors-sujets" élicitent les mêmes types de différences entre profils.

4.4. Les "hors sujet"

Dans la conduite des situations de débat scientifique, M. Legrand a identifié trois types de cas particuliers ou d'événements élémentaires apparaissant dans le débat : des *exemples* qui vérifient l'hypothèse et la conclusion de l'assertion, des *contre-exemples* qui vérifient l'hypothèse et pas la conclusion, et des "*hors-sujet*", qui ne vérifient pas l'hypothèse.

Dans une implication de type "quel que soit x, si P(x) alors Q(x)", il peut y avoir des situations où P(x) est vrai pour certains des x et faux pour d'autres. M. Legrand a proposé d'appeler ces derniers "hors-sujet" pour pouvoir en parler dans les débats, après avoir constaté qu'environ un étudiant sur trois en Deug les assimilait spontanément à des contre-exemples. Cette tendance à traiter ces cas comme des contre-exemples peut conduire ces étudiants à considérer qu'une implication est fausse "quand P(x) n'est pas vraie" (ce qui revient aussi à considérer comme du calcul propositionnel et avec un traitement erroné une affirmation dont la validité devrait être testée dans le calcul des prédicats -cf Durand-Guerrier).

Deux items proposent des implications dans lesquelles existent de tels "hors-sujet" : ils concernent des polynômes du second degré, avec paramètre. Dans un cas (Q5) une question, qui suit la présentation d'un calcul qui permet d'amorcer la validation de l'implication, conduit à identifier un ensemble de valeurs de la variable x pour lequel l'hypothèse est fausse (si l'étudiant y répond sans erreur de technique mathématique). La question suivante porte sur la validité de l'implication. C'est un des items les plus mal réussis dans les implications calculables (environ 20% de réponses correctes), bien qu'il soit d'une forme tout à fait usuelle *a priori* pour un étudiant de mathématique. L'autre item (Q13) qui propose de commenter des réactions d'étudiants est un peu moins mal réussi, mais pose néanmoins problème à une majorité d'étudiants (seulement 41% de réponses correctes).

Si on considère les réponses en fonction des profils, on constate les points suivants :

- les profils "non conditionnel" et "sans dominante" correspondent aux taux les plus bas de réussite, et aucun étudiant à profil "non conditionnel" ou "sans dominante" ne répond correctement à la fois aux deux items de "hors sujet",

- les étudiants à profil "logique" répondent à 87% correctement pour l'item de discussion (n° XIII. 2001), mais un très grand nombre d'entre eux ne répondent pas à la question de l'item V. 2001, montrant l'existence des hors-sujet (conduisant à un faible taux de succès : 33%),
- les étudiants à profil "pertinent' se situent à un niveau intermédiaire.

Alors que les étudiants sont tout à fait susceptibles de "suivre" un calcul montrant que Q(x) est vérifié pour les x vérifiant P(x), ils sont déstabilisés quand on attire leur attention sur l'existence des hors-sujet. Cela nous semble confirmer la fragilité pour nombre d'entre eux du traitement d'une implication en tant que relation entre antécédent et conséquent, fragilité se traduisant par un glissement de l'évaluation de la validité de l'implication à celle de la validité de l'hypothèse (ou de l'antécédent).

5. Discussion des résultats

On a analysé deux séries de questions portant sur l'utilisation de la logique du point de vue de l'une des fonctions de la démonstration, rappelées dans (Hanna, 2000), à savoir l'évaluation. Nous avons particulièrement étudié le traitement de la validité de l'implication par des étudiants se préparant pour être enseignants de mathématiques dans l'enseignement secondaire, en accordant une attention privilégiée aux implications à prémisse fausse, que nous avons catégorisées. Un premier test nous a conduit à définir quatre profils à partir d'évaluation d'implications non calculables à prémisse fausse. Lors d'un second test nous avons, d'une part, cherché à évaluer la stabilité des résultats sur une nouvelle population d'étudiants, et d'autre part analysé des points particuliers : utilisation de la contraposition, effets de changements de formulation d'implications, traitement de diverses implications calculables à hypothèse (toujours) fausse, et enfin traitement des "hors sujet".

Globalement, en ce qui concerne la comparaison des populations, on observe une distribution analogue des quatre profils dans les deux tests, des résultats différenciés selon les profils sur la plupart des items et quant à l'admissibilité au concours de recrutement (CAPES).

- Sur l'ensemble des items, les profils "logique" évaluent plutôt correctement les implications (autour des 3/4 des étudiants à dominante "logique"), indépendamment de la valeur de la prémisse - sauf dans le cas où il y a une articulation avec une technique mathématique utilisant une condition suffisante et conduisant à mettre en évidence des "hors-sujet",
- les profils "logique" et "pertinent" apparaissent l'un et l'autre globalement efficaces lorsqu'il s'agit de produire des inférences habituelles (calculer le

passage de P(x) vraie à Q(x) vraie), comme dans les évaluations d'implications quand on se place dans le cas où P(x) est vraie et qu'on ignore le cas où P(x) est fausse, c'est à dire les "hors-sujet". Nos items montrent qu'attirer l'attention sur l'existence de ces "hors-sujet" déstabilise de nombreux étudiants,

- les profils "pertinent" sont beaucoup moins stables dans la donnée de réponses correctes pour les implications calculables : ils sont déstabilisés par la mise en évidence du caractère non vérifié de la prémisse de l'implication, et ils sont assez peu cohérents dans la donnée de réponses correctes à des items voisins. En revanche, ils sont cohérents dans leur réponse à l'item de contrat social ("les bonbons de la maîtresse") où ils construisent le plus souvent un scénario qui rend l'hypothèse vraie, "sauvant" ainsi le contrat posé par la maîtresse,
- les profils "non conditionnel" (l'implication est fausse quand l'hypothèse est (toujours) fausse) sont ceux qui évaluent le plus de manière erronée les implications fausses même calculables (moins de 30% de réponses correctes pour les items pris individuellement, et autour de 10% pour le traitement des hors-sujet),
- les sujets "sans dominante" se situent -en ce qui concerne les réponses correctes-de façon voisine des sujets à profil "non conditionnel" ou à profil "pertinent", selon les items.

Les contrastes les plus forts entre profils se manifestent quand on considère la cohérence de réponses correctes à des items de même classe portant sur un contenu mathématique : implications calculables à hypothèse visiblement fausse, traitement des "hors sujet", cohérence qui est la plus forte pour les profils "logique" et "pertinent", et la plus faible pour "non conditionnel".

Les tâches de sélection issues de Wason ("Wason" et "Radford") différencient moins les profils "logique" et "pertinent" que les tâches dont l'objet est mathématique. Le profil "sans dominante" est celui où on trouve le moins de réponses correctes. Dans l'item de sélection de Wason, l'expression de la règle sous la forme "canonique" : "si ... alors ..." conduit à supprimer la différence observée entre profils "pertinent" et "non conditionnel", en fait elle va de pair avec une augmentation de l'utilisation explicite de la contraposée. Les relations limitées entre les réponses au test longtemps étudié en psychologie cognitive (Wason et ses variantes) et celles d'évaluation des implications utilisées ici conduisent à converger -malgré les différences de populations- avec les conclusions de ceux des psychologues qui, comme Politzer, sont arrivés à la conclusion que la tâche de Wason n'est pas un indicateur significatif de la "rationalité". Les variations et corrélations que nous avons observées indiquent par ailleurs que la question "les humains sont-ils rationnels ou non ?", ou celle "qui est rationnel ?" (Stanovich, 1999) ne tient guère compte de la diversité des modes d'évaluation : la réduction de la question à "rationnel *versus* non rationnel" ne permet pas de rendre compte des différences observées entre les trois profils autres que celui "logique".

Les similitudes globales des deux populations, et les résultats propres au second test sur le traitement des implications calculables et des hors sujets sont une indication de la pertinence des types de profils définis lors du premier test. Toutefois il serait souhaitable de confirmer à nouveau cette validité en déterminant l'appartenance à ces mêmes catégories au moyen d'items différents de ceux utilisés dans nos tests, et d'étudier leur corrélation avec le succès à d'autres items que ceux que nous avons proposés (mais entrant dans les mêmes types d'implications). Les différences observées pourraient être un indice du fait que les conceptions erronées, qui peuvent conduire à des contradictions, conduisent aussi souvent à des réponses peu stables. Reste à expliquer pourquoi les profils "pertinent" et "logique" sont moins souvent corrects dans le test 2 dans le traitement de l'implication calculable liée à une récurrence, alors qu'ils le sont plus souvent pour l'item de contrat social (et ce, sans se différencier entre eux).

L'ensemble des résultats sur les items étudiés montre donc à la fois l'existence de différences quant à des schèmes globaux d'évaluation d'implications, et des effets des types d'implication considérées. La question de l'articulation entre les modes d'évaluation des implications, d'une part, et l'utilisation de pas implicatifs, tant dans les raisonnements heuristiques ou argumentatifs en mathématiques, que dans la construction de démonstrations (c'est à dire la production d'enchaînement d'inférences valides) appelle, nous semble-t-il, la prise en compte de la diversité qui a été identifiée dans les schèmes d'évaluation d'implication (selon les profils) et des sources de variation liées aux types d'implication (dont la typologie devrait être développée et affinée).

La relation entre le traitement de l'implication par des étudiants, candidats à être enseignants de mathématiques, et leur traitement des objets mathématiques a été évaluée ici seulement à travers les réponses correctes à certains items d'implication calculable, et à des "hors-sujets", et à travers les résultats au concours du CAPES. De manière constante, le profil "logique" manifeste une meilleure compétence. Ce fait semble particulièrement marqué dans des items où il faut traiter ce qui peut apparaître comme une contradiction : qu'il s'agisse de l'item "$H_n \Rightarrow H_{n+1}$", où le conflit possible vient du calcul initial et de la démonstration H_n est fausse pour tout n pour un ensemble de valeurs du paramètre, de l'implication calculable où il faut évaluer la réponse évoquée d'un étudiant ou du hors-sujet sur lequel on attire l'attention de l'étudiant. Dans ces cas, le profil pertinent "résiste" mieux que le profil "non conditionnel", tandis que le profil "sans dominante" présente des taux de réussite très hétérogènes.

5.1. Perspectives sur la formation des maîtres

La question qui se pose naturellement, puisque sont reçus au CAPES, et donc vont devenir enseignants, des étudiants dont l'aptitude à évaluer des implications pose de sérieux problèmes, est de savoir s'il faut tenir compte de ce fait dans la formation en IUFM, en y assurant une formation à ces questions. L'objectif étant, par exemple, de faire passer dans le profil "logique" les étudiants qui sont dans un autre profil ? Deux questions supplémentaires se posent : quel type de formation, si elle est nécessaire ? et : ne peut-on résoudre le problème avant, pendant la formation universitaire (Deug et licence) ?

En ce qui concerne ce dernier point, nous avons fait un sondage auprès d'enseignants de licence à l'Université de Lille 1. Il en ressort que les enseignants ne parlent quasi jamais de questions de logique mathématique avec leurs étudiants, même "en passant", à l'occasion d'un raisonnement un peu délicat. Il n'y a qu'une exception notable : le raisonnement par récurrence semble effectivement être l'objet d'un certain enseignement, car il est réputé donner lieu à de nombreuses erreurs. Mais, par exemple, aucun des enseignants interrogés ne semble faire de commentaire quand il débute une démonstration par "si $x = 0$, il n'y a rien à démontrer ; supposons $x \neq 0$,?", ils ne s'attendent pas à ce que cela puisse poser un problème aux étudiants. En fait, la logique mathématique que les enseignants du supérieur utilisent leur semble tellement naturelle qu'ils n'imaginent pas que ce ne soit pas le cas pour leurs étudiants.

Ici ou là, on a rétabli parfois en DEUG un enseignement de logique "formelle", mais à la lumière de ce qui se passait-il y a 20 ans, on peut douter qu'un tel enseignement puisse avoir un effet réel sur la pratique mathématique des étudiants. Par contre, deux modes d'action peuvent être utilisés apparemment avec un certain succès.

D'une part, un enseignement ayant pour but une utilité immédiate en mathématique, en particulier permettant l'utilisation du débat scientifique avec des raisonnements validables par une collectivité étudiante, en attirant l'attention sur les points essentiels qui distinguent la logique des mathématiciens de la logique "courante" spontanément pratiquée par les étudiants. C'est par exemple le cas de l'activité "Circuit" développée par M. Legrand à différents niveaux des cursus ; on pourra voir à ce propos (Legrand, 1990).

De l'autre, à travers des options spécifiques de DEUG ou de licence, on peut donner un enseignement "culturel" sur la logique, en plongeant les étudiants, d'une part dans l'évolution historique, la philosophie et l'épistémologie des questions de logique (avec lecture de textes et discussions), de l'autre dans les difficultés proprement mathématiques et didactiques qu'on peut rencontrer chez des enseignants et des étudiants ou des élèves. C'est par exemple ce qu'a pratiqué V. Durand-Guerrier à l'Université de Valence ((Durand-Guerrier, 1996), et ce qu'une expérience récente a mis en oeuvre à l'Université de Nice (Pellissier, 2002).

De toutes façons, on peut s'attendre à ce qu'il soit impossible d'obtenir des universitaires mathématiciens, dans un avenir proche, que la totalité des étudiants titulaires de la licence ait une solide compréhension - pour ce qui nous concerne ici - des conditions de validation de l'implication.

Il semble donc indispensable qu'une mise au point sérieuse sur ces problèmes intervienne en formation des maîtres. Deux difficultés apparaissent. D'une part, les étudiants pensent spontanément qu'arrivés à ce stade, "ils savent raisonner", pourquoi en reparler ? D'autre part, cela leur sera-t-il *utile* , soit pour réussir le CAPES, soit (en deuxième année) pour la conduite de leur classe ? Ces deux difficultés ne concernent d'ailleurs pas que les problèmes de logique ? Nous pensons donc qu'il faut, d'abord, déstabiliser les étudiants d'IUFM quant à leurs certitudes sur la logique. L'utilisation de tests analogues à ceux que nous avons fait passer, avec discussion et mise au point collective, nous semble de ce point de vue une approche possible, voire inévitable, pour rendre les étudiants réceptifs. Il n'est pas sûr, alors, que la seule mise au point à l'issue des discussions suffise à restabiliser les étudiants dans un meilleur "profil". Sans doute les deux points signalés plus haut (différences entre logique courante et logique des mathématiques, et aspects culturels et historiques de la logique) seront-ils nécessaires. Mais il faudra sans doute y joindre une action plus spécifiquement didactique : où, dans quels types de raisonnements, sur quels domaines mathématiques, les élèves de lycée et de collège font-ils des erreurs de logiques, lesquelles, et comment mettre en place des remédiations ?

Autrement dit, une intervention efficace en formation des maîtres sur les questions de logique demandera certainement d'engranger un certain nombre de résultats de recherches à mettre en oeuvre au niveau de l'enseignement secondaire lui-même.

BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF N., 1987, Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics,18*, 147-176.

BOERO P., 2000, Entrer dans la culture des théorèmes à 12-14 ans : un défi pour la didactique des mathématiques, In T. Assude & B. Grugeon (Éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, 41-54, Paris : DIDIREM Université ParisVII.

DELOUSTAL-JORRAND V., 2000, L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs, *Petit x, 55*, 35-70.

DREYFUS, T., 1997, Why Johnny can't prove, *Educational Studies in Mathematics, 28*, 85-109.

DURAND-GUERRIER V., 1996, *Logique et raisonnement mathématique*, Thèse de Doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V., 1999, L'élève, le professeur et le labyrinthe, *Petit x, 50*, 57-79.

DURAND-GUERRIER V., LE BERRE M., PONTILLE M. C., REYNAUD-FEURLY, J., 2000, *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques. Éléments d'analyse pour les enseignants*, Lyon : IREM.

DURAND-GUERRIER V., 1996, Conférence à l'Université de Cornell, USA.

DUVAL R., 1991, Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics, 22*, 233-261.

HANNA G., 2000, Proof, explanation and exploration: an overview, *Educational Studies in Mathematics, 44* (1/2), 5-23.

HANNA G., JAHNKE H.E., 1993, Proof and application, *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 421-438.

JOHNSON-LAIRD P.N., Byrne R.M.J, 1991, *Deduction. Hove and London*. UK : Lawrence Erlbaum Associates.

JONES K., GUTIÉRREZ À., MARIOTTI M. A. (Eds), 2000, (Special issue on proof in dynamic geometry environments), *Educational Studies in Mathematics, 44* (1/2).

KERN L. H., MIRELS H. L., HINSHAW V. G., 1983, Scientists' understanding of propositional logic : an experimental investigation, *Social Studies of Science, 13*, 131-146.

KÜCHEMANN D., HOYLES C., 2002, Students' understanding of a logical implication and its converse, In A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *PME26.*

Proceedings of the 26th Annual Conference IGPME, 3-241-3-248, Norwich: SEPD UEA Norwich.

LEGRAND M., 1989, Genèse et étude sommaire d'une situation co-didactique : le débat scientifique en situation d'enseignement. In C. Laborde (Éd.), *Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

LEGRAND M., 1990, "Circuit" ou les règles du débat mathématique. In Commission Inter-Irem Université (CI2U) (Eds.), *Enseigner autrement les mathématiques en DeugA première année*, 129-161, ParisVII : IREM.

PELLISSIER R., 2002, *L'enseignement du raisonnement scientifique*, in *Une expérience d'enseignement à Nice*, publication de la Commission Inter-IREM Université (CI2U), à paraître.

POLITZER G., 2001, *Communication Séminaire Cognition & Activités Finalisées*, juin 2001, Université Paris 8.

RADFORD L., 1985, *Interprétation d'énoncés implicatifs et traitements logiques. Contribution à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée*, Thèse de l'Université Louis Pasteur Strasbourg.

RAFFALLI C., DAVID, R., 2002, Apprentissage du raisonnement assisté par ordinateur, *Gazette des mathématiciens, 92*, 48-56.

ROGALSKI J., ROGALSKI M., 2001, How do graduate mathematics students evaluate assertions with a false premise ? In M. van der Heuvel-Panhuisen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference PME25@NL*, 4.113-4.121, Utrecht, NL : Freudenthal Institute Utrecht University.

STANOVICH K.E., 1999, *Who is rational ? Studies of individul differences in reasoning*, Mahwah, NJ, London : Lawrence Erlbaum Associates.

STANOVICH K.E., WEST R. F., 2000, Individual differences in reasoning : Implications for the rationality debate ? *Behavioral and Brain Science, 23*, 645-726.

TWENEY R.D., YACHININ S.A., 1985, Can scientists rationaly assess conditional inferences ? *Social Studies of Sciences, 15*, 155-173.

WASON P. C., 1966, Reasoning. In B.M. Foss (Ed.), *New horizons in psychology* (Vol.1). Harmondsworth : Penguin.

Annexe 1 : relation entre profils et réponses correctes aux différents types d'implication

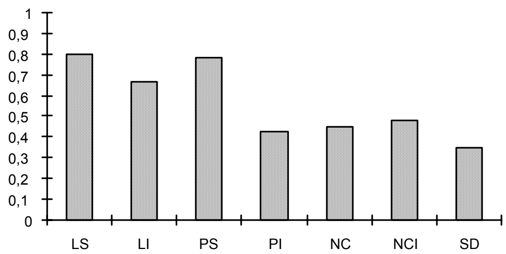


Figure 2 : Pourcentage d'étudiants donnant une réponse correcte à l'*implication calculable* $H_n \Rightarrow H_{n+1}$, selon leur profil.

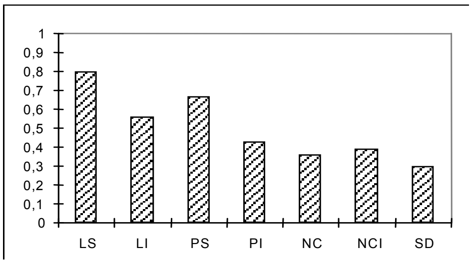


Figure 3 : Pourcentage d'étudiants donnant une réponse correcte aux *implications arbitraires* (sélection de Wason et Radford), selon leur profil.

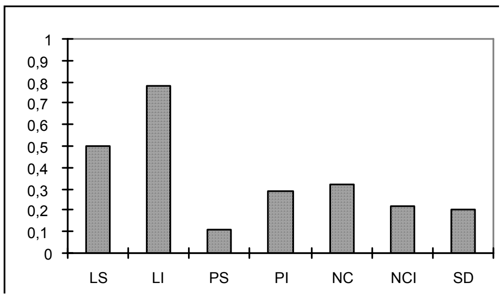


Figure 4 : Pourcentage d'étudiants donnant une réponse selon la logique à l'*implication de contrat social*, selon leur profil.

Annexe 2 : Texte des items des deux questionnaires (1999, 2001) analysés ci-dessus

On donne les numéros des items dans chaque questionnaire, en soulignant ce qui est spécifique de chacun des deux tests.

Avertissement (commun aux deux passations) : *les phrases, assertions, énoncés, ... mathématiques qui figurent dans les exercices suivants sont souvent donnés sous forme naïve, non formalisée, comme on le fait dans un texte mathématique courant, voire dans la conversation de tous les jours. C'est volontairement, et vous devez vous sentir très libre dans vos réponses, qui peuvent (doivent !) comporter beaucoup de commentaires, et même si vous le voulez aller jusqu'à : "cette question est idiote !".*

Assertion calculable à premisse fausse

I. 1999 / 2001

Etant donné $\lambda \in R$, on considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = \lambda, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Soit H_n l'assertion " $u_n \leq f(2^n,3) - 1$".

(a) L'implication " $H_n \Rightarrow H_{n+1}$" est-elle vraie pour certains n ? pour tout n ?

(b) Calculer explicitement u_n en fonction de λ et de n [on pourra poser $u_n = v_n - 1$].

(c) Montrer que si $\lambda > - f(2,3)$ toutes les assertions H_n sont fausses.

(d) Si $\lambda = 10$, que peut-on dire de l'assertion " $\forall n \; H_n \Rightarrow H_{n+1}$ " ?

(e) Soit $P_n(\lambda)$ l'assertion "$u_n = 2^{n+5}(\lambda + 1) - 1$". Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(1) " $\forall n \; \forall \lambda \; P_n(\lambda)$ est vraie" ;

(2) " $\exists \lambda$ tel que $\forall n \; P_n(\lambda)$ est vraie" ;

(3) " $\forall n \; \forall \lambda \; P_n(\lambda) \Rightarrow P_{n+1}(\lambda)$".

Contre-exemples

V. 1999

Confrontés à l'assertion P suivante :

" Si une fonction f de classe C^2 sur R est telle que f et f " soient bornées, alors f ' est bornée ",

deux étudiants de DEUG répondent respectivement :

(1) " L'assertion P est fausse, car la fonction f définie par f(x) = x n'est pas bornée sur R, mais sa dérivée est f ' + 1 qui est bornée " ;

(2) " L'assertion P est fausse, car si $f(x) = x^3$, f et f " ne sont pas bornées, et f ' non plus ".
Que répondrez-vous à l'étudiant (1) ? à l'étudiant (2) ?

II. 2001

Confrontés à l'assertion P suivante :
" Si une fonction f de classe C^2 sur R est telle que f et f " soient bornées, alors f ' est bornée ",
trois étudiants de DEUG répondent respectivement :
(1) " L'assertion P est fausse, car la fonction f définie par f(x) = x n'est pas bornée sur R, mais sa dérivée est f ' + 1 qui est bornée " ;
(2) " L'assertion P est fausse, car si $f(x) = x^3$, f et f " ne sont pas bornées, et f ' non plus ".
(3) <u>"L'assertion est vraie, car si par exemple f(x) = sin x, f et f" sont bornées, et f' est bien aussi bornée"</u>.
Que répondrez-vous à l'étudiant (1) ? à l'étudiant (2) ? <u>à l'étudiant (3) ?</u>

Assertion non calculable à prémisse fausse (triangle)

III. 1999

Que pensez-vous de la véracité de l'assertion suivante ?
<u>"Tout triangle non aplati du plan, dont les médiatrices ne sont pas concourantes, est équilatéral".</u>

III. 2001

Que pensez-vous de la véracité de l'assertion suivante ?
<u>"Si un triangle non aplati du plan a ses médiatrices non concourantes, alors il est équilatéral".</u>

Hors-sujet

V. 2001

On se propose d'évaluer la véracité de l'assertion (A) suivante :

(A) : "$\forall x \in R\ \forall \lambda \in R$, si $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda + 3 \leq 0$, alors $|x| \leq 2|\lambda| + 1$"..

(a) Montrer que l'hypothèse se réécrit sous la forme : $(x - \quad)^2 \leq (\quad - 1)^2 - 4$.
(b) Que se passe-t-il si $-1 < \quad < 3$?
(c) Selon vous, l'assertion (A) est-elle vraie ?

Tâche de sélection de Wason (version classique)

IX. 1999

On dispose de cartes sur lesquelles figurent sur une face une lettre et sur l'autre un <u>chiffre</u>.

On veut tester la règle éventuelle : "derrière une voyelle il y a un chiffre pair". Pour cela on prend un échantillon de 4 cartes, qu'on pose sur la table ; on voit alors la disposition ci-dessous :

$\boxed{\mathrm{E}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\mathrm{K}}$ $\boxed{7}$

Quelle(s) carte(s) exactement doit-on retourner pour savoir si la règle est respectée sur l'échantillon ?

VII. 2001

On dispose de cartes sur lesquelles figurent sur une face une lettre et sur l'autre un nombre.

On veut tester la règle éventuelle : "si une carte a une voyelle sur une face, alors elle a un nombre pair sur son autre face". Pour cela on prend un échantillon de 4 cartes, qu'on pose sur la table ; on voit alors la disposition ci-dessous :

$\boxed{\mathrm{E}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\mathrm{K}}$ $\boxed{7}$

Quelle(s) carte(s) exactement doit-on retourner pour savoir si la règle est respectée sur l'échantillon?

Assertion calculable à prémisse fausse (arithmétique)

XI. 2001

L'assertion "si 1 = 2, alors 2 = 3" est-elle vraie ?

Version "Radford" de la tâche de sélection de Wason

XV. 1999

Dans une urne, on dispose d'un certain nombre de boules numérotées. Les boules sont soit blanches soit noires. On s'intéresse à la question suivante : "est-ce que, dans l'urne, toutes les boules blanches ont un numéro pair ?".

On envisage 4 procédures pour répondre à la question :

procédure 1 : on sort de l'urne les boules de numéro pair, puis on regarde leurs couleurs ;

procédure 2 : on sort de l'urne les boules de numéro impair, puis on regarde leurs couleurs ;

procédure 3 : on sort de l'urne les boules blanches, puis on regarde leurs numéros ;

procédure 4 : on sort de l'urne les boules noires, puis on regarde leurs numéros.

Pour chacune des 4 procédures, choisissez parmi les deux options :

(a) la procédure me permettra sûrement de répondre à la question ;

(b) la procédure risque de ne pas me permettre de conclure.

XII. 2001

Dans une urne, on dispose d'un certain nombre de boules numérotées. Les boules sont soit blanches soit noires. On s'intéresse à la véracité de l'assertion suivante : "dans l'urne, si une boule est blanche, alors son numéro est pair ?".

On envisage 4 procédures pour répondre à la question :

procédure 1 : on sort de l'urne les boules de numéro pair, puis on regarde leurs couleurs ;

procédure 2 : on sort de l'urne les boules de numéro impair, puis on regarde leurs couleurs ;

procédure 3 : on sort de l'urne les boules blanches, puis on regarde leurs numéros ;

procédure 4 : on sort de l'urne les boules noires, puis on regarde leurs numéros.

Pour chacune des 4 procédures, choisissez parmi les deux options :

(a) la procédure me permettra sûrement de répondre à la question ;

(b) la procédure risque de ne pas me permettre de conclure.

Hors-sujet

XIII. 2001

On a posé la question suivante à un étudiant : la proposition (P) suivante est-elle vraie ?

(P) : "$\forall(x, y)\in R^2$, si $y^2 - 2xy + 8x + 9 \leq 0$, alors $|y| \leq 2|x| + 4$".

Il a donné la réponse suivante :

"L'assertion (P) est fausse. En effet, l'hypothèse signifie que l'on a $(y - x)^2 \leq (x - 4)^2 - 25$; mais si $-1 < x < 9$, alors $(x - 4)^2 - 25 < 0$, donc l'hypothèse n'est pas vérifiée, et n'impose donc aucune contrainte à y (on est dans la bande]-1, 9[xR) ; mais la conclusion, dans ce cas, entraînerait sur y la contrainte $|y| \leq 22$, ce qui serait absurde".

Que diriez-vous à cet étudiant ?

Assertion non calculable à prémisse fausse : circuit de Legrand

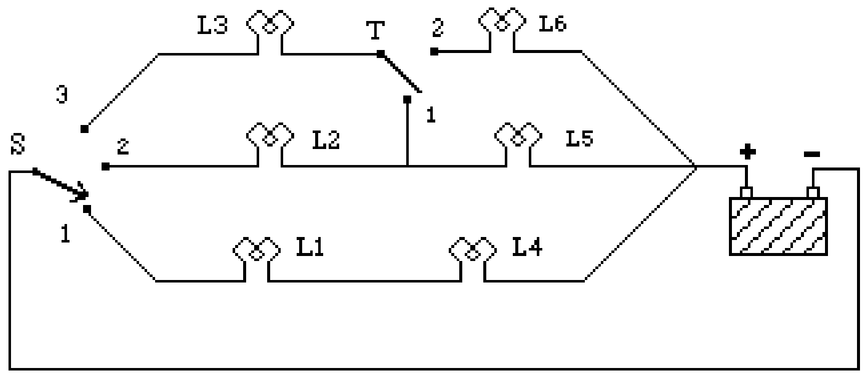
XVII. 1999 / XV 2001

Le circuit électrique ci-dessous comporte six lampes identiques notées L1, …, L6, et deux commutateurs S et T ; S peut prendre trois positions S1, S2, ou S3, et T peut prendre deux positions T1 ou T2.

(a) Que peut-on dire de la vérité de l'assertion suivante

"si L1 est allumée ou si L6 est allumée, alors L3 est allumée ou L4 est allumée" ?

(b) Que peut-on dire de la vérité de l'assertion suivante "si L1 est allumée et si L3 est allumée, alors L2 est allumée et L5 n'est pas allumée" ?



Question de contrat social (les bonbons de la maîtresse)
XVIII. 1999 / XVI 2001

Dans une école primaire, la maitresse donne un jour un problème aux élèves, et leur dit : "cherchez ce problème chez vous ; demain, si quelqu'un a su le résoudre, je vous donnerai des bonbons".

Le lendemain, aucun élève n'a su faire le problème. La maitresse sort un paquet de bonbons et les distribue aux enfants. Ceux-ci protestent : "Ce n'est pas juste, on n'a pas su faire le problème, on n'a pas droit aux bonbons !". Goguenarde, la maitresse leur répond qu'elle a parfaitement respecté le contrat ?

Quels commentaires vous inspire ce récit ?

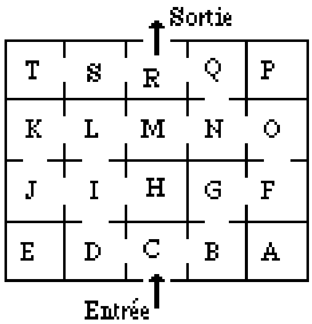
Assertion non calculable à prémisse fausse : labyrinthe de Durand-Guerrier
XIX. 1999 / XVII 2001

Une personne nommée X a traversé le labyrinthe ci-dessous, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte. Les pièces séparées par les portes sont notées A, B, …, T.

Pour chacune des sept phrases suivantes, dire si elle est vraie, si elle est fausse ou si on ne peut pas savoir :

(1) X est passé par T ;
(2) X est passé par N ;
(3) X est passé par M ;
(4) si X est passé par O, alors X est passé par F ;
(5) si X est passé par K, alors X est passé par L ;
(6) si X est passé par L, alors X est passé par K ;

(7) si X est passé par S, il est passé par T.



Assertion calculable à premisse fausse (fonction)

XVIII. 2001

Un étudiant A affirme que la proposition (I)

(I) : $\forall x \in R$, si $x^2 + 1 \leq 0$, alors $(x^2 + 1)^2 \leq 0$

est vraie, et justifie ainsi son affirmation :

"On a $(x^2 + 1)^2 = x^2(x^2 + 1) + (x^2 + 1)$, donc si $x^2 + 1 \leq 0$, alors $x^2(x^2 + 1) \leq 0$, et $(x^2 + 1)^2$ est la somme de deux quantités négatives, donc est négative".

Un étudiant B conteste son affirmation ainsi :

"Mais c'est absurde ! L'hypothèse $x^2 + 1 \leq 0$ n'est jamais vraie, ni la conclusion $(x^2 + 1)^2 \leq 0$! De plus, quel que soit le signe de $x^2 + 1$, son carré est évidemment strictement positif ! Cette assertion est donc complètement fausse !"

Que pensez-vous de ce dialogue ? et de la proposition (I) ?

Janine Rogalski
Laboratoire "Cognition et activités finalisées", Université Paris 8 et CNRS)
Marc Rogalski
(Laboratoire AGAT, Université Lille 1 et CNRS ;
Institut Mathématique de Jussieu, Université Paris 6 et CNRS)
mro@ccr.jussieu.fr

Jean-Claude RAUSCHER

DES ÉTUDIANTS APPRÉCIENT LEUR PASSÉ SCOLAIRE EN MATHÉMATIQUE : QUE NOUS APPRENNENT-ILS ?

Abstract. We present here the main indications which an inquiry, made between 1995 and 2001 with undergraduate students, give us. These students took a course to make them sensitive to the education and the didactics of mathematics. They wrote about their school past in mathematics. The analysis of their writing brings out two oppositions. The first one concerns the mathematical activities in the classroom: for the students they have either a heuristic aspect, or an algorithmic or set in one's way aspect. The second one is about the nature of the mathematics: it changed from "concrete" to "abstract" during the schooling for numerous students. The students claimed the necessity to arrange certain tools to understand and take advantage of heuristic activities. In the center of Raymond Duval and François Pluvinage's works, the question of the articulation between the apprehension or production of semiotic representations and the abstract apprehension of the mathematical objects, appears as a question that the students put when they reflect about their school past in mathematics.

Résumé. Nous présentons ici les principales indications que nous donne une enquête faite auprès d'étudiants de licences entre 1995 et 2001 dans le cadre de cours destinées à les sensibiliser à à l'enseignement et à la didactique des mathématiques. Deux oppositions ressortent de l'analyse du corpus des déclarations des d'étudiants amenés à apprécier leur passé scolaire en mathématique. La première concerne les activités mathématiques en classe, pour lesquelles ils soulignent soit leur aspect heuristique, soit leur aspect algorithmique ou routinier. La deuxième porte sur le caractère des mathématiques : aux yeux de nombreux étudiants, il s'est transformé au fil de leur scolarité de "concret" en "abstrait". Le détail des contenus donnés à cette deuxième opposition et ses confrontations avec la première font entrevoir un besoin exprimé par les étudiants : il faut disposer de certains outils pour comprendre et profiter d'activités heuristiques. La question de l'articulation entre l'appréhension ou la production de représentations sémiotiques et l'appréhension conceptuelle des objets mathématiques, au centre des travaux menés par Raymond Duval et François Pluvinage, apparaît donc comme une question que les étudiants posent aussi lorsqu'ils réfléchissent sur leur passé scolaire en mathématiques.

Mots clés : Enquête, perceptions subjectives, enseignement des mathématiques, évaluation de l'enseignement, activités mathématiques, représentations sémiotiques

---

1. Un point de vue particulier pour évaluer l'enseignement des mathématiques : les perceptions subjectives des apprenants

Que ce soit dans le cadre d'une commande institutionnelle, ou dans le cadre d'une recherche, lorsqu'on veut évaluer l'enseignement d'une discipline, on observe généralement des faits objectifs relatifs aux élèves. L'évaluation des "compétences exigibles" signalées par les programmes, menée par l'A.P.M. régulièrement, et

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 205 – 221.

l'évaluation internationale PISA 2000 réalisée sous l'égide de l'O.C.D.E. (voir site internet signalé dans la bibliographie) pour comparer les acquis des élèves dans le domaine de la compréhension de l'écrit, de la culture mathématique et la culture scientifique ou à une échelle plus petite, les professeurs qui mettent au point une épreuve commune pour évaluer les acquis des élèves d'un niveau, en sont des exemples. Les statistiques concernant les orientations prises par les élèves dans leur cursus en sont un autre. Parfois aussi, ce sont des observations sur les pratiques d'enseignement des mathématiques en classe qui sont menées. Un exemple récent de rapport concernant une telle observation en collaboration avec l'Inspection Générale, l'I.U.F.M. de Rouen et la D.E.P. : "Pratiques d'enseignement des mathématiques observées en classe de sixième" (C.R.D.P. de Haute Normandie).

En revanche, l'appréciation "subjective" des élèves à propos de l'enseignement qu'ils suivent est prise en compte beaucoup plus rarement de façon organisée. Il s'agit pourtant, comme tout le monde le sait, d'une évaluation informelle massivement pratiquée par élèves et anciens élèves dans leurs conversations. Ce sont tantôt la discipline, tantôt son enseignement, tantôt ceux qui le dispensent qui sont évoqués par des mots qui expriment des affects (états affectifs élémentaires) chez ceux qui les prononcent. Exemple : "Depuis que je suis toute petite, j'ai toujours aimé les maths, c'est comme un jeu pour moi". Ce type de déclaration est rarement utilisé.

On peut considérer ces facteurs affectifs comme des causes premières de difficulté ou de réussite des élèves. La thèse de Benoît Mauret (1991), "Nombres et affectivité" en donne un exemple : l'hypothèse est qu'il existe une composante affective mise en jeu par l'élève dans l'apprentissage et l'utilisation des chiffres et des nombres et que cette composante a une influence sur la réussite des élèves dans ce domaine.

On peut aussi les considérer a priori comme donnant des indications sur les conditions d'apprentissage qui ont été données aux élèves en mathématiques. Pour notre part c'est dans cette perspective que nous nous situons : nous faisons l'hypothèse que la prise en compte de telles appréciations pourrait être fort utile pour poser des questions importantes qui permettraient tout autant que l'évaluation des compétences observables des élèves ou l'observation de la pratique des enseignants de questionner notre enseignement et de le réguler. Un exemple nous encourage dans ce sens : il s'agit de l'enquête sur l'initiative de la Société de Mathématiques de France "Mathématiques A Venir : opération “50 lycées” (G.Barbançon, R.Duval, C. Dupuis, F.Pluvinage, 1988.) qui a permis à leurs auteurs de cerner les perceptions des mathématiques par les lycéens, mais aussi de se poser des questions sur l'enseignement des mathématiques reçu par ces lycéens.

2. Quel corpus et quelles questions ?

Les écrits qui sont analysés ici, ont été produit par des étudiants de licence de sciences de l'éducation (LSE), de mathématiques (LM), ou encore de licences pluridisciplinaires à orientation scientifique (LPD) entre 1995 et 2001 dans le cadre de cours destinées à les sensibiliser à la didactique ou à l'enseignement des mathématiques. Ils étaient invités au début de l'année à développer par un écrit ce qu'ils aimaient et ce qu'ils n'aimaient pas en mathématiques et dans l'enseignement qu'ils avaient reçu dans cette discipline (de la maternelle à l'université). Ils étaient aussi invités explicitement à relater des épisodes de leur scolarité, où il y avait eu un changement dans l'appréciation de la discipline ou de son enseignement.

Ces écrits étaient alors destinés à renvoyer aux étudiants la multiplicité de leurs représentations et de leurs vécus dans l'enseignement et de l'analyser.

Ce corpus est ici utilisé à une autre fin. L'hypothèse est que la prise en compte de déclarations "subjectives" d'étudiants se retournant sur leur parcours scolaire et appréciant la discipline mathématique et son enseignement peut tout autant que des évaluations dites "objectives" nous donner des éléments d'évaluation de notre enseignement.

Que nous disent ces étudiants à travers l'expression de leurs approbations ou de leurs inconforts ? Nous essayons de le percevoir à travers une analyse interprétative de leurs réponses.

Ce qu'ils disent nous conforte-t-il dans les orientations et directives des programmes et dans nos pratiques ou au contraire nous fait-il poser de nouvelles questions, envisager des remaniements, des inflexions ? En particulier nous nous réfèrerons en première lecture aux programmes des années 80 qui ont mis en avant un moyen et un but dans l'apprentissage des mathématiques : faire et apprendre des mathématiques, c'est résoudre des problèmes.

3. L'analyse des contenus en terme de catégories, d'oppositions et de ruptures

Pour justifier leurs appréciations les étudiants évoquent :

- les qualités qu'ils attribuent aux mathématiques (ou un de ses domaines) : elles sont qualifiées par exemple de *logiques*, *certaines*, *utiles, lointaines*, *abstraites, concrètes, d'œuvre de l'humanité* etc…,
- les activités qu'ils ont rencontrées : résoudre des problèmes, démontrer, comprendre, appliquer des formules etc…,
- les conditions d'apprentissage : professeur qui juge, qui aide, qui ignore, temps qui manque etc…,

Il s'agit là d'une première catégorisation des contenus. Pour l'affiner et rendre compte de la perception de la discipline et de son enseignement par les étudiants, nous avons dégagé et interrogé les oppositions et les changements dans le temps qu'ils pointent de façon fréquente et les avons référés aux appréciations positives (aime) ou négatives (n'aime pas).

Deux oppositions apparaissent massivement lorsqu'on parcourt les déclarations des étudiants se retournant vers leur passé scolaire.

La première concerne ce que c'est que d'apprendre des mathématiques : il se dégage un pôle d'activités heuristiques *(chercher, résoudre des énigmes, trouver l'astuce, etc…)* opposé à un pôle de tâches routinières ou algorithmiques *(calculer, appliquer une méthode, appliquer des formules etc..)*. On aime ou n'aime pas l'aspect heuristique des mathématiques, on aime ou on n'aime pas l'aspect algorithmique des activités mathématiques. Cette opposition n'apparaît jamais référée à un changement dans le temps.

La deuxième se révèle par la description d'un changement dans le temps. Elle oppose en général deux qualificatifs attribués aux contenus ou activités mathématiques : *concret* et *abstrait*. Qualifiées d'abord de *"concrètes"*, les mathématiques deviennent à un moment *"abstraites"*. Le niveau de scolarité où se situe ce changement est variable entre l'entrée à l'école primaire et la licence. Ce changement signalé est vécu parfois comme une rupture définitive, souvent comme une difficulté importante ou au moins un inconfort dans la progression des apprentissages. Mais lorsque les termes de l'opposition sont précisés par les étudiants, ils apparaissent en fait recouvrir des définitions très différentes.

Nous interrogerons la première opposition en regard des orientations des programmes des mathématiques des années 80 en France. Ces orientations sont-elles perceptibles dans les déclarations des étudiants ? Et comment sont elles appréciées ? Une première conclusion sera ébauchée.

En ce qui concerne la deuxième opposition, nous analyserons la diversité à laquelle elle renvoie chez les étudiants. Complétée par l'analyse des évocations des conditions d'apprentissage et précisée par la considération d'un nouveau corpus obtenu cette année dans une section de licence pluridisciplinaire, cette deuxième lecture nous permettra de revenir sur la première conclusion et de l'affiner. Au-delà de considérations courantes et peut-être secondaires, qu'est ce qui déclenche vraiment les difficultés dans la progression des apprentissages chez les étudiants ?

4. Retour sur une volonté affichée par les programmes : qu'est ce qu'apprendre des mathématiques ?

La première question que nous allons examiner concerne ce que c'est que d'apprendre des mathématiques aux yeux des étudiants se retournant vers leur passé scolaire.

Les déclarations de nos étudiants nous permettent de poser à nouveau une question du même type que celle que se sont posée les auteurs de l'enquête citée plus haut (G.Barbançon, R.Duval, C. Dupuis, F.Pluvinage, 1988.). Cette enquête a été menée en 1988 dans 50 lycées par voie de questionnaire dont l'idée clé était de *"déterminer quelle image les lycéens ont des mathématiques, tant de celles qui leur sont présentées, et qu'ils ont à pratiquer, que celles qui résultent des travaux des spécialistes passés et présents"*. Elle fait en particulier le constat qu'une majorité de lycéens (toutes sections confondues) ne pensent pas qu'un travail mathématique est contrôlable de bout en bout, et que pour une majorité, l'activité mathématique semble exclure tout délai de réflexion ou de recherche, de l'ordre d'une heure, dans la compréhension ou dans la découverte d'une solution. Ce constat amène les auteurs à se poser la question de la déformation de l'activité mathématique que l'enseignement entraîne chez les élèves (p46 du rapport d'enquête). Cette question apparaît intéressante à reformuler dans le cadre de notre propre enquête qui concerne cette fois-ci des étudiants qui ont effectué leur année niveau licence entre 1995 et 2001 donc qui ont donc pour la plupart reçu un enseignement dans la perspective définie dans le milieu des années 80.

La réforme des années 70 semble alors s'enliser dans un enseignement très formaliste, en particulier à cause des immenses problèmes de formation (Louis Legrand, 1977). Dans d'autres pays un mouvement de retour aux mathématiques dites de bases ("back to basic") est amorcé, caractérisé par un retour aux techniques calculatoires, aux apprentissages par cœur des tables etc. (Gérard Vergnaud, 1987). En France, tenant compte des recherches qui se sont développées en particuliers dans les IREM, les programmes sont remaniés mais tentent de préserver l'esprit initial de la réforme.

Le programme des collèges de 1986 (M.E.N., 1990) est représentatif de ces remaniements. Un parti pris explicite sur la nature des connaissances mathématiques que les élèves doivent acquérir y apparaît : *"Une approbation mathématique pour un élève, ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, de résultats, de techniques et de démonstrations : il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir de questions qu'il s'est posées, et qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes"*.

Un geste professionnel important du professeur est souligné : le choix d'activités permettant de donner du sens aux connaissances. *"Dès lors, les enseignants vont avoir à choisir des situations créant un problème, dont la solution fera intervenir des "outils", c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci auront été bien maîtrisées, elles fourniront à leur tour des "outils" qui permettront un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente."*

Les conditions qui font que les activités seront pertinentes sont précisées :
"Les activités choisies doivent :

- permettre un démarrage possible de tous les élèves, donc ne donner que des consignes très simples et n'exiger que des connaissances solidement acquises par tout le monde,
- créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures,
- rendre possible la mise en jeu des outils prévus,
- fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement. On y parvient, par exemple en prévoyant divers cheminements qui permettront de fructueuses comparaisons".

On reconnaîtra dans ces recommandations, l'influence des recherches en didactique des mathématiques, en particulier la prise en compte du développement d'ingénieries didactiques. L'hypothèse est que pour que les élèves intègrent efficacement des connaissances, l'enseignement doit prendre le contre-pied de la méthode *"j'apprends, j'applique"* et doit intégrer dans son organisation des moments où la classe simule une société de chercheurs en activités. (R. Douady, 1986). Cette perspective, ne suscite pas l'unanimité quant à son efficacité. Ainsi, R. Barra, alors directeur de l'IREM de Poitiers, en réponses à Régine Douady (Régine Douady, 1990) écrit : "Je ne crois pas au mot d'ordre selon lequel il faut aller du compliqué au simple, car ce serait la complexité qui ferait sens". Il précise : "Je trouve finalement plus efficace d'entamer les questions par des séquences magistrales dans lesquelles le discours tente de mettre en lumière le pourquoi et le comment, de donner un sens aux termes et aux objets, de faire ressortir les idées fortes, les techniques spécifiques ; les activités, qui ne sont plus alors des activités pour découvrir, ne viennent qu'ensuite (les années où j'ai pratiqué ainsi ne sont pas les plus mauvaises, loin de là)" (Raymond Barra, 1990).

Au delà d'une divergence sur le moment dans la progression où il faut situer les activités heuristiques, nous noterons qu'il y a unanimité des protagonistes du débat de développer les compétences de cet ordre. Et ce que nous retiendrons essentiellement des programmes des années 80 est la promotion explicite d'activités heuristiques dans lesquelles il est nécessaire d'engager les élèves.

Les publications Inter-Irem de cette époque, rassemblant les travaux des I.R.E.M. (l'IREM de Strasbourg y a contribué pour sa part) ont largement relayé cette orientation en rendant compte d'élaborations et de mises à l'épreuve d'activités pour les élèves destinées à développer les apprentissages.

Au-delà de l'influence des ces directives sur les pratiques dans les classes nous nous posons la question de ce qu'ont retenu et perçu nos étudiants de l'enseignement reçu à cette époque.

5. Qu'est ce qu'apprendre des mathématiques pour les étudiants ?

Dans leurs déclarations apparaissent principalement des types d'activités que l'on peut, pour objectiver notre analyse, renvoyer à une taxonomie des objectifs cognitifs telle qu'elle était proposée par Bloom et précisée dans la classification N.L.S.M.A (National Longitudinal Study of Mathematicale Abilities) (Wilson in Bloom, Hasting, Madaus, 1971) adaptée pour s'appliquer spécifiquement aux tâches en mathématiques.

La connaissance par laquelle il s'agit de pouvoir rappeler les contenus étudiés n'est que rarement évoquée. C'est tantôt pour signaler qu'à leurs yeux, la discipline mathématiques requière peu de connaissances à apprendre et tantôt qu'on n'aime pas devoir retenir des "choses" :

"J'aime les maths parce que je n'ai jamais appris à faire des maths, pour moi c'est naturel, je ne l'ai jamais travaillé." (LSE)

"J'aime les maths parce qu'il y a peu de choses à retenir, à apprendre, c'est plus un savoir faire ; ce que je n'ai pas aimé c'est apprendre les tables de multiplication." (LPD)

"Je n'aime pas les maths à cause du problème de mémorisation de formules et surtout problème pour les appliquer." (LSE)

Deuxième éléments dans la taxonomie des objectifs cognitifs, la compréhension où il s'agit de prouver en traduisant, en interprétant ou en extrapolant que les contenus sont compris n'est pas évoquée dans ce sens par les étudiants. Il est parfois utilisé dans son sens plus commun plus vague. Le mot est alors évoqué pour déclarer qu'on aime les mathématiques quand on les comprend ou inversement qu'on ne les aime pas quand on ne les comprend pas. D'autres fois pour dire le plaisir de comprendre :

"J'aime comprendre l'origine de certaines notions apparemment très abstraites tels que l'apparition de N, Q, R mais aussi des dérivées qui s'appliquent au calcul d'une vitesse etc.. et qui ont été inventées dans ce but." (LM)

En revanche les deux derniers éléments de la classification apparaissent très souvent évoqués et opposés par les étudiants. Une dimension d'application où il s'agit d'utiliser des méthodes ou des règles connues pour répondre à des questions posées s'oppose à une dimension heuristique où c'est la méthode de résolution qui est à trouver. Dans ce dernier cas, indépendamment de la présence en mémoire des connaissances nécessaires, on peut "trouver" la réponse plus ou moins vite ou même "sécher".

Les réponses faisant référence à une dimension heuristique sont très nombreuses, tous publics confondus (étudiants de mathématiques et étudiants ne faisant spécifiquement des études en mathématiques) et appellent souvent des appréciations positives :

"Je prenais cela comme un jeu : un problème posé, comment trouver la solution."(LSE)

"Le plaisir de trouver l'astuce qui va résoudre le problème."(LSE)

"En 4ème, un jour (ou plutôt une nuit) j'ai cherché jusqu'au matin la solution d'un problème et j'ai trouvé et j'ai éprouvé une grande joie." (LSE)

"Ce que j'aime dans les maths, c'est le côté défi ; on sait qu'il y a une solution et que notre but est de l'atteindre grâce aux outils (théorèmes, définitions) qui sont à notre disposition; ce que je préfère c'est dans la recherche d'une solution, la mise en place de la démonstration qui conduira au résultat. Le plus drôle c'est que je préfère les exercices qui posent problèmes, on sent la solution toute proche, mais il nous manque un élément qui nous permettra de conclure. Et lorsque la solution est trouvée, on se sent rassuré et content de soi." (LM)

Quelques évocations d'activités heuristiques font référence à des vécus plus douloureux :

"Je n'aime pas les maths quand je "sèche" devant un problème, un énoncé."(LSE)

Ces évocations nous amènent alors vers les déclarations qui évoquent surtout l'utilisation de méthode ou de règles connues, fréquentes mais moins nombreuses que les précédentes :

"J'aime le côté "belle mécanique" lorsque je parviens à la faire tourner." (LSE)

"Je n'aime pas les probabilités car chaque exercice montre trop de différences, il n'y a pas de règles bien définies que l'on peut appliquer à chaque fois de la même façon."(LPD)

"J'aime les mathématiques car elles sont une sorte de mécanisme, on applique une formule plusieurs fois dans plusieurs situations. Un théorème nous permet de résoudre plusieurs problèmes, de démontrer plusieurs propriétés. Par conte lorsqu'on arrive au niveau de la licence, les mathématiques deviennent souvent abstraites, et on ne sait jamais par où commencer pour démonter une propriété. J'aime les mathématiques lorsque je les comprends."(LM)

"Je n'aime pas l'aspect calculatoire (c'est long, pénible et finalement pas très instructif)."(LM)

" Je n'aime pas le côté scolaire de l'enseignement des maths au collège et au lycée. Les profs et les élèves ne semblent voir en général que les résultats à connaître, à assimiler." (LM)

6. Une première conclusion et une nouvelle perspective d'analyse du corpus

A partir de cette première approche, on peut voir qu'aux yeux des étudiants se retournant sur leur vécu scolaire en mathématique, une dimension heuristique importante apparaît. C'est là un premier élément de réponse par rapport aux programmes qui voulaient la promouvoir. Souvent elle est appréciée positivement, plus rarement négativement. Certains étudiants évoquent et apprécient davantage l'aspect plus tranquille des méthodes et algorithmes connus à appliquer.

Mais, pouvons nous avancer des éléments de conclusion en ce qui concerne les conditions favorisant l'efficacité perçue par les étudiants dans leurs apprentissages en mathématiques ? A notre avis, non. Pour deux raisons. La première est que les deux dimensions heuristiques et applicatrices coexistent nécessairement dans les pratiques, indépendamment des méthodes utilisées. L'étude récente sur les "Pratiques d'enseignement des mathématiques observées en classe de 6ème" faite à la demande de l'Inspection générale et de la D.E.P. nous conforte dans cette idée (J. Borreani, P. Tavignot, R. Verdon, 2000). Elle montre que les phases de capitalisation du savoir et d'activités en classe coexistent toujours. Seul l'ordre de ces phases permet de différencier les pratiques.

La deuxième est que les étudiants semblent en général évoquer les deux dimensions en exprimant des appréciations en fonction de leur personnalité qui aime par exemple la sécurité ou au contraire aime relever des défis. Nous retrouvons là des phénomènes relevés par Jacques Nimier (J. Nimier, 1983).

En revanche, les déclarations qui rapportent l'évocation des deux dimensions à un changement dans le temps, nous semblent plus susceptibles de nous donner des indications sur les défauts ou manques qui peuvent entraver aux yeux des étudiants leur progression :

"J'aime les mathématiques car elles sont une sorte de mécanisme, on applique une formule plusieurs fois dans plusieurs situations. Un théorème nous permet de résoudre plusieurs problèmes, de démontrer plusieurs propriétés. Par contre lorsqu'on arrive au niveau de la licence, les mathématiques deviennent souvent abstraites, et on ne sait jamais par où commencer pour démontrer une propriété. J'aime les mathématiques lorsque je les comprends."(LM)

Cette déclaration précise la nature de la difficulté signalée qui fait que les mathématiques deviennent moins confortables. Nous faisons donc l'hypothèse qu'une analyse plus générale de précisions de ce type nous permettra d'avancer dans le repérage des conditions favorisant l'efficacité perçue par les étudiants dans leurs apprentissages en mathématiques.

Pour le moment nous abandonnons donc la distinction entre activités heuristiques et activités applicatives ou algorithmiques pour interroger ces changements de nature qui affectent les mathématiques ou la progression dans les apprentissages aux yeux des étudiants. Cet abandon momentané nous permettra d'analyser plus finement l'articulation entre les deux dimensions que laissent apparaître les déclarations des étudiants.

7. Quelles types d'indications donnent les étudiants sur les défauts ou manques qui peuvent entraver leurs progressions ?

Les conditions, changements ou ruptures qui font que les apprentissages en mathématiques sont ressentis comme inconfortables, difficiles voire impossibles se regroupent principalement en deux catégories de causes.

L'une regroupe des **causes externes à la discipline** elle-même et évoque des conditions d'apprentissage ou d'enseignement qui peuvent être favorables et plus souvent défavorables. Les enseignants sont alors évoqués en première ligne.

L'autre regroupe les évocations de changement de nature de la discipline elle-même telle qu'elle apparaît aux yeux des étudiants

7.1. Evocations de causes externes à la discipline

Parfois ce sont des raisons affectives sans autre précision qui sont évoquées : *"J'étais motivé pour progresser mais bien des enseignants m'ont démotivé."* (LSE)

"Je suis arrivée en licence de math parce que je n'ai jamais eu de professeur de maths qui m'a dégoûtée." (LM)

"En 4ème et 3ème, j'ai commencé à être mauvaise car les rapports avec mon prof de maths n'étaient pas ce que j'attendais." (LSE)

"Je n'aime pas les professeurs qui bâclent, qui sautent des questions. Ceux qui disent c'est trivial, on ne rentre pas dans les détails…"(LM)

"Pour aimer les mathématiques, il faut savoir nous les faire aimer." (LSE)

"Voyant mes notes diminuer, mon père me forçait à bosser les maths, ce qui souvent se passait dans une mauvaise ambiance, ne renforçant absolument pas mon goût pour les maths." (LSE)

Parfois les enseignants sont mis en cause parce qu'ils ne donnent pas le temps nécessaire pour que les apprentissages puissent être menés par l'élève ou l'étudiant :

"On demande d'être rapide dans les raisonnements alors qu'il me faut un grand temps d'assimilation." (LM)

"Je n'aime pas lorsqu'on ne me laisse pas le temps de réfléchir." (LSE)

"Je n'aime pas lorsque je n'arrive pas à suivre un cours, assez vite, lorsque les réponses sont données avant que j'ai eu le temps de mener ma réflexion." (LM)

Enfin, les enseignants peuvent aussi être appréciés en fonction de leurs apports :

"La rigueur du professeur de mathématique est variable et influence la bonne compréhension des concepts chez l'apprenant. Je n'aime pas cet aspect éducatif des maths qui dépend beaucoup du prof." (LM)

"Je veux être prof de maths depuis la 6ème car cette année là notre prof de maths nous a expliqué la démarche qui devait se faire dans notre esprit pour résoudre un problème." (LM)

Cette dernière déclaration nous apporte en l'occurrence déjà une précision sur ce qui fait réellement défauts aux yeux des étudiants pour progresser dans les apprentissages.

7.2. Évocations de mathématiques qui deviennent abstraites

Très souvent ce sont les mots *"abstrait"* ou *"concret"* qui sont utilisés pour signaler un changement ou une rupture dans la progression, l'abstraction sauf exception correspondant en général à une appréciation négative. Dans de rares cas l'étudiant se contentera de ces termes pour qualifier les mathématiques et justifier son appréciation sans autres précisions. Les cas où des précisions sur ce qui est signifié par abstrait ou concret sont données sont heureusement plus fréquents.

Deux types d'indications se dégagent alors : celles qui réfèrent à un extérieur à la discipline et les autres qui concernent, à l'intérieur de la discipline elle-même, la nature des tâches ou des difficultés en jeu.

Le premier type d'indications renvoie à une utilité des mathématiques ou une gratuité qui sont, selon le cas, appréciées ou rejetées :

"J'ai commencé à aimer les maths en 1ère, lorsque j'ai fait de la comptabilité, des maths financières, commerciales. Ces maths sont pour moi concrètes (études de cas tirés de faits réels) et elles me servent dans la vie de tous les jours et future (calculs de longueur de rayons dans les grandes surfaces pour des implantations diverses, nombre de rouleaux pour tapisser une pièce). Bref j'aime les maths quand je vois qu'elles peuvent me servir." (LSE)

"L'esprit acquis en math me permet de mieux appréhender les disciplines plus littéraires." (LSE)

"Ce que j'aime en mathématiques, c'est le côté art avec son aspect inutile et beau avec l'avantage d'être certain (inutile dans une application quotidienne ou scientifique)." (LM)

Le deuxième type d'indications renvoie à la nature des tâches en jeu en mathématiques :

Dans la rubrique "n'aime pas" : *"Pour moi, faire des mathématiques c'est manipuler des chiffres, être dans l'abstraction, entrer dans la logique de quelqu'un d'autre."* (LSE)

"J'ai beaucoup aimé les maths faites au collège et au lycée. Ce n'était pas abstrait. Il suffisait de réfléchir et d'appliquer une méthode. Ce que j'aime aussi beaucoup ce sont les démarches pour résoudre les exercices. C'est clair : on a des hypothèses, on utilise un théorème, une règle et on trouve généralement la

solution. J'aime beaucoup le côté rationnel des maths. Par contre, ce que j'aime beaucoup moins et où j'ai beaucoup plus de mal, c'est avec le côté abstrait des maths que l'on apprend aujourd'hui en licence. J'aime bien me représenter les choses, les visualiser". (LM)

"J'aime les mathématiques car elles sont une sorte de mécanisme, on applique une formule plusieurs fois dans plusieurs situations. Un théorème nous permet de résoudre plusieurs problèmes, de démontrer plusieurs propriétés. Par contre lorsqu'on arrive au niveau de la licence, les mathématiques deviennent souvent abstraites, et on ne sait jamais par où commencer pour démontrer une propriété. J'aime les mathématiques lorsque je les comprends."(LM)

Dans ces cas, comme dans les cas où les étudiants signalaient ce que leurs enseignants leur apportaient ou n'apportaient pas, nous avons alors des indications sur ce qui, au plus près des contenus et des tâches en jeu en mathématiques, fait défaut ou ce qui est indispensable aux yeux des étudiants pour progresser où se sentir à l'aise. Arrivé à ce stade de notre analyse, il nous semblait alors utile d'interroger plus systématiquement la polysémie concernant l'opposition "abstrait/concret" aux yeux des étudiants. C'est à cette fin que nous avons réalisé l'enquête dont le compte rendu est fait dans le paragraphe suivant.

8. Des mathématiques concrètes qui deviennent abstraites : qu'est ce que ça signifie pour les étudiants ?

Nous avons proposé le questionnaire suivant à un groupe d'étudiants de licence pluridisciplinaire de Sciences et Technologie, option biologie-chimie-géologie à l'U.L.P. Strasbourg, donc d'étudiants qui se caractérisent par une formation scientifique non mathématique :

Lorsqu'on interroge des gens sur leur scolarité en mathématiques, certains évoquent l'aspect "abstrait" ou l'aspect "concret" de cette discipline.

Chacun de ces aspects est suivant le cas apprécié ou au contraire rejeté.

1) *Et vous, abstraites ou concrètes, comment voyez-vous et appréciez-vous les mathématiques dans votre scolarité ? Précisez.*
2) *Nombreux sont ceux qui évoquent un moment de leur scolarité où les mathématiques de concrètes sont devenues abstraites à leurs yeux. Avez vous connu de tels passages ? Si oui, pouvez vous les préciser ?*
3) *D'autres encore différencient leur appréciation selon les domaines. Est-ce votre cas ? Précisez.*

Pour analyser leurs réponses nous avons au départ retenu la catégorisation à laquelle nous étions arrivés précédemment, à savoir :

Évocation des conditions d'apprentissage	Évocation de l'encadrement professoral
	Évocation du temps d'apprentissage
Évocation d'un extérieur à la discipline	Évocation d'une utilité externe
	Évocation de la référence au réel
Évocation d'une tâche dans la discipline	

En première lecture cette grille s'est révélée adéquate pour classer les réponses des étudiants. Il faut y ajouter éventuellement une rubrique concernant les évocations d'un domaine de la discipline sans autre précision.

Sur 25 réponses, 4 évoquent des domaines des mathématiques sans décrire une tâche, 18 décrivent des tâches. 7 font référence aux conditions d'apprentissage et 6 évoquent un réel du monde physique. Les classes ne sont pas disjointes.

Majoritairement les étudiants évoquent donc des tâches liées à la discipline pour situer l'opposition *concret/abstrait*. Quelle est la nature de ces tâches ? Quels renseignements nous donnent-elles quant à la perception des étudiants de leur intégration des connaissances en mathématique ? Comprendre ou ne pas comprendre, qu'est ce que cela veut dire pour les étudiants ?

Une lecture plus attentive des réponses nous a fait affiner la rubrique concernant l'évocation des tâches dans la discipline et nous permet de suggérer quelques éléments de réponse. Par leurs descriptions les étudiants évoquent en fait la nécessité de maîtriser des registres, des traitements dans ces registres et des changement de registres.

9. Evocation par les étudiants de la nécessité de maîtriser des registres pour progresser en mathématique

9.1 Évocation d'un mode de traitement, d'un registre

Nous avons rangé dans cette classe toute évocation de "méthodes", de "logiques", de "langages".

"En algèbre, du moment où j'ai compris la méthode à utiliser, il n'y a plus de problème."

"A partir de la 1ère S et de la TS j'avais l'impression que c'était du chinois (à part les fonctions)."

Cette année, l'analyse est devenue à mes yeux assez abstraite, le fait de travailler avec les chiffres avec une toute autre approche me rend plus répulsive à l'utilisation des chiffres. Mais toutefois la démarche est tout à fait intéressante !" (référence à un cours d'arithmétique).

"C'est au niveau de la première que les mathématiques sont devenues plus dures pour moi, avec la probabilité par exemple (logique que je ne comprenais pas forcément)."

9.2. Évocation d'un changement de mode de traitement ou de représentation

"Au passage des chiffres aux inconnues vers la 4ème, les mathématiques sont devenues un peu abstraites."

"J'ai différenciée mes appréciations des mathématiques selon les domaines, notamment entre l'algèbre et la géométrie. Il s'est notamment passé que la géométrie est devenue plus claire au cours des années car j'ai pris du temps à visualiser et à comprendre la géométrie. Et parallèlement, l'algèbre est devenue moins claire par le passage du travail des mathématiques des chiffres aux lettres."

9.3. Évocation de l'application d'un mode de représentation au réel

"La géométrie n'a jamais été un domaine adoré. Je pense que c'est lié aux quelques difficultés que j'ai rencontrée (représentation dans l'espace)"

"J'ai toujours eu plus de mal en géométrie car je n'arrive pas "à voir" dans l'espace. En algèbre, du moment où j'ai compris la méthode à utiliser, il n'y a plus de problème"

Cette lecture plus détaillée nous fait considérer les déclarations des étudiants comme une réponse de leur part à la question qui est traitée par Raymond Duval (1995) sur les apprentissages mathématiques et de façon plus large sur la nature même du fonctionnement cognitif de la pensée humaine. Il s'agit de la question de l'articulation entre la "sémiosis", appréhension ou production de représentations sémiotiques et la "noésis", l'appréhension conceptuelle des objets mathématiques.

Pour les étudiants la compréhension en mathématique semble conditionnée par la possession et la conquête de langages avec des modalités de traitements et de conversions.

A l'appui de cette thèse, des déclarations qui évoquent la référence au réel, pour y situer, non pas le concret, mais la difficulté d'accès :

"Oui, j'ai toujours eu plus de mal en géométrie car je n'arrive pas "à voir" dans l'espace. En algèbre, du moment où j'ai compris la méthode à utiliser, il n'y a plus de problème".

Cette étudiante nous dit que c'est n'est pas l'existence d'une référence au réel qui est gage d'intégration des connaissances en mathématique, mais le fait de disposer d'un mode de traitement de ce réel.

Une dernière déclaration, nous montre que notre nouvelle lecture permet aussi de reprendre la question de l'opposition entre le respect heuristique et l'aspect algorithmique en mathématiques. C'est la possession d'outils (langages, traitements, conversions) qui permet d'entrer dans le monde de l'heuristique :

"En math, il y a toujours des directives bien précises, une logique incontournable, des règles à respecter, c'est une forme de langage, un déchiffrage passionnant où une logique s'installe et reste toujours, pour pouvoir résoudre des énigmes, trouver une solutions" (LES).

10. En conclusion

Que nous permet de conclure, notre prise en compte des déclarations "subjectives " des étudiants se retournant sur leur passé scolaire ?
Et quelles conséquences pouvons-nous en tirer pour nos pratiques dans les classes ?

Les étudiants sont sensibles, et souvent tout à fait favorablement, à l'aspect heuristique développé en mathématiques.

La condition essentielle pour l'intégration des connaissances en mathématiques qu'ils évoquent est la conquête et la possession de langages et de modes de traitements, en particulier pour appréhender le réel.

La possession de tels outils semble aussi parfois aux yeux des étudiants, conditionner l'entrée dans le monde heuristique.

Ces indications nous semblent se joindre aux conclusions des travaux qui ont été menés à l'IREM de Strasbourg sous l'égide de Raymond Duval et François Pluvinage qui nous rendent toujours attentifs à la nécessité de développer la compétence des professeurs à analyser les tâches en jeu dans les divers contenus mathématiques et prendre en compte le mieux possible le développement de différents registres de représentation et de leurs coordinations dans les apprentissages à mettre en place chez les élèves.

Nous avions pour notre part, déjà repéré cette nécessité du côté des professeurs en pointant les effets que pouvait avoir sa prise en compte sur la progression des élèves (JC Rauscher, 1993).

Une deuxième perspective se confirme à partir de notre étude : c'est la potentialité de régulation de l'enseignement et des apprentissages qui résulte de la prise en compte des "opinions" exprimés par les apprenants. Pour notre part, c'est une piste que nous explorons avec l'accompagnement des apprentissages par des écrits à vocation réflexive produits par les apprenant, JC Rauscher (2002) et A Kuzniak, JC Rauscher (2002). Côté enseignant, il s'agit d'un moyen d'évaluation et donc de régulation de l'enseignement. Côté apprenant, il s'agit alors de permettre à l'élève ou à l'étudiant de prendre en main sa progression en prenant conscience des enjeux d'apprentissage.

BIBLIOGRAPHIE

BARBANÇON Gérard., DUVAL Raymond, DUPUIS Claire, PLUVINAGE François, *1988, Mathématiques A Venir : opération 50 lycées ; Les maths et vous,* IREM de Strasbourg.

BARRA Raymond, 1990, A propos d'activités, *in Liaison collège-seconde, 1989-1990*, Bulletin Inter-Irem, 27-30.

BLOOM B.S., HASTING J.T., MADAUS G.F, 1971, *Handbook of formative and summative evalauation of student learning,* New York, Mc Graw Hill.

BORREANI Jacqueline, TAVIGNOT Patricia, VERDON Roseline, 2000, *Pratiques d'enseignement des mathématiques observées en classe de 6ème*, Centre Régional de Documentation Pédagogique de Haute Normandie.

DOUADY Régine, 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet, in *Revue Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Volume 7, n°2, 5-31.

DOUADY Régine, 1990, Les activités dans le processus d'apprentissage des mathématiques en situation scolaire*, in Liaison collège-seconde, 1989-1990*, Bulletin Inter-Irem, 31-34.

DUVAL Raymond, 1995, Sémiosis et pensée humaine, registres sémitiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang, Berne.

KUZNIAK Alain, RAUSCHER JC, Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, Colloque COPIRELEM 2002, IREM de Nantes, 2003.

LEGRAND Louis,1977, *Pour une politique démocratique de l'éducation*, Paris, PUF.

MAURET Benoît, 1991, *Nombres et affectivité*, Thèse, Paris V.

M.E.N., *Mathématiques classes des collèges 6e, 5e, 4e, 3e, Horaires/ Objectifs/ Programmes/ Instructions,* CNDP, 1990.

NIMIER Jacques, *Recherche sur divers modes de relation à l'objet mathématiques*, Thèse de doctorat d'État, Paris X, 1983.

PLUVINAGE François, 1977, *Difficultés des exercices scolaires en mathématique,* Thèse de Doctorat d'État, U.L.P. Strasbourg.

RAUSCHER Jean-Claude, 1993, *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes, le cas de l'enseignement de la géométrie en début de collège,* Thèse, USHS Strasbourg, (publiée par IREM de Strasbourg).

RAUSCHER J-C, 2002, Une production écrite des élèves au service des apprentissages dans le domaine numérique, in *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, Volume 7*, IREM Strasbourg.

VERGNAUD Gérard, 1987, Réflexion sur les finalités de l'enseignement des mathématiques, in *Gazette des mathématiciens*, n°12.

Sites à consulter :

Les facteurs humains dans l'enseignement et la formation d'adultes :

http://perso.wanadoo.fr/jacques.nimier/

Rapports de l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale :

http://www.education.gouv.fr/syst/igen/rapport.htm

Rapport de l'évaluation de l'OCDE nommée PISA :

http://www.pisa.oecd.org/Docs/Download/PISA2001(francais).pdf

Jean-Claude Rauscher
IUFM d'Alsace CeRF-EA 218, IREM de Strasbourg
e-mail : Jc.Rauscher@wanadoo.fr

Saddo AG ALMOULOUD

UNE ÉTUDE DIAGNOSTIQUE EN VUE DE LA FORMATION DES ENSEIGNANTS EN GÉOMETRIE

Abstract. This article presents a diagnostic study of the teaching and learning of geometry in the fundamental levels of the Brazilian school system. An analysis of the Brazilian education system and of the discourse of teachers enabled an identification of some of the factors that serve as the origin of the difficulties teachers face in teaching geometry. The results of the study were used as a source guiding the choice of working hypotheses related to the content of the geometry curriculum and to the didactic variables that should be taken into consideration in the training of teachers involved in research projects.

Résumé. L´article présente une étude diagnostique sur l´enseignement et l´apprentissage de la Gémoétrie au niveau de l´enseignement fondamental brésilien. L´analyse du système éducatif brésilien et du discours des ensignants nous ont permis d´identifier certains des facteurs qui seraient à l´origine des difficultés que les enseignants rencontrent dans l´enseigement de la Géométrie. Les résultats de cette étude ont servi de point d´appui quanto aux choix de nos hypothèses á propos des contenus géométriques et des variables didactiques à prendre em compte dans la formation des enseignants engagés dans le projet de recherche.

Mots clés : Géométrie, Formation des enseignants, Discours du maître, Système éducatif brésilien.

---

1. Introduction

Le travail que nous présentons fait partie d´un projet de recherche (financé par la FAPESP) dont l´objectif est l´étude des facteurs et des stratégies susceptibles d´influencer l´enseignement et l´apprentissage des notions géométriques au niveau des classes de la 5^a à la 8^a de l´enseignement fondamental brésilien (élèves de 11 à 14 ans). Le projet de recherche s´est développé selon les points consécutifs suivants :

- étude diagnostique : tests, interviews individuels et observations,
- élaboration de situations, études de ces situations par le groupe (concepts, constructions géométriques, raisonnement, démonstration),
- activités de formation des enseignants en situation papier-crayon,
- activités de formation avec l´aide de l´environnement informatique (Cabri-géomètre, Logo),
- élaboration et analyse d´activités par les enseignants en formation.

Nous discutons ici, en particulier, le discours des enseignants sur le rôle de la Géométrie dans la formation des élèves, sur son enseignement et son apprentissage. Nous présentons essentiellement les résultats de l´une des phases les plus importantes de l'élaboration du dispositif de formation, ou seja, à savoir l'étude diagnostique d´un groupe d'enseignants en vue de définir les caractéristiques de la formation à leur proposer dans le domaine de la Géométrie pour des élèves de 11 à 14 ans.

L´étude diagniostique du groupe des enseignants à former se fait selon deux volets :

- les représentations des enseignants concernant l´enseignement et l´apprentissage de la Géométrie,
- l´observation des compétences des enseignants sur des contenus géométriques.

Les résultats de cette étude vont contribuer aux choix de nos hypothèses de travail quant aux contenus géométriques et aux variables à prendre en compte dans la formation des enseignants, mais aussi dans le choix des situations d'enseignement/apprentissage de la Géométrie.

2. Système éducatif brésilien et la formation des enseignants

L´analyse du système éducatif brésilien et de l´enjeu de la Géométrie nous a permis d´identifier certains facteurs qui seraient à l´origine des difficultés que les enseignants rencontrent pour l´enseignement et l'apprentissage des savoirs et des connaissances géométriques. À l'origine de ces problèmes, nous identifiions les faits suivants :

À propos de la formation des enseignants :

- les enseignants ont eu une formation de base très précaire en Géométrie,
- les cours de formation initiale n´intègrent pas suffisamment une réflexion profonde sur l´enseignement de la Géométrie,
- les modalités de formation continue, n´ont pas encore atteint leur objectif par rapport à la Géométrie.

À propos des situations d´enseignement :

De façon générale, les situations proposées dans les manuels scolaires et par la majorité des enseignants sont caractérisées par les faits suivants :

- non-coordination des registres de représentation sémiotique (Duval, 1995),
- non-perception du rôle important de la figure dans la visualisation et les phases d´exploration.
- les problèmes proposés par la majeure partie des livres scolaires brésiliens sont de type "algébrique" (peu de travail sur le raisonnement déductif et sur la démonstration),
- le système éducatif brésilien n´impose pas aux divers niveaux d´enseignement un programme officiel et obligatoire de Mathématiques. Il définit la politique générale de l´éducation, des recommandations et

orientations générales sur les méthodes, les savoirs et savoir-faire. Chaque école définit les contenus qu'elle juge importants pour la formation des élèves, et la Géométrie est très souvent laissée de côté,
- le passage de la Géométrie empirique à la Géométrie déductive est quasi-inexistant,
- peu de travail sur la lecture et l´interprétation des textes mathématiques.

Les paramètres curriculaires Nationaux de 1998 mettent l´accent sur :
- l´importance de la Géométrie au niveau du quatrième cycle (7a et 8a séries ou seja, soit des élèves de 13-14 ans),
- l´importance de l´élaboration de situations-problèmes qui favorisent le raisonnement déductif et l´introduction de la démonstration,
- le rôle important de la figure et les principales fonctions d'un dessin : visualisation, résumé d'informations, aide à la preuve et aux conjectures.

Mais la majorité des enseignants de l´enseignement fondamental et de lycée n'est pas préparée pour mettre en œuvre les recommandations et les orientations didactiques et pédagogiques des paramètres curriculaires nationaux.

3. Méthodologie utilisée pour réaliser l´étude diagnostique

Nous avons fait passer à ces enseignants un questionnaire dont la structure est la suivante :
- informations sur les enseignants (formation, âge, sexe…),
- accès à l'information (TV, journaux, revues, etc.),
- méthodologies utilisées pour l´enseignement et l'apprentissage de la Géométrie,
- leurs difficultés et celles de leurs élèves en Géométrie, origine de ces difficultés et les stratégies envisagées pour les résoudre,
- rôle de la résolution de problèmes dans l´apprentissage de la Géométrie,
- analyse didactique des erreurs des élèves.

Nous avons également fait passer aux élèves de ces enseignants un questionnaire dont l´objectif est d´identifier les problèmes que ces derniers rencontrent dans l´acquisition des savoirs et des connaissances (au sens de G.Brousseau) géométriques. Mais cette partie de la recherche ne fera pas l´objet d´étude dans ce texte.

4. Les instruments d´analyse des données multidimensionnelles

Nous présentons essentiellement les résultats de l´analyse de similarité et de la hiérarchie implicative. Au moyen de ces analyses, nous recherchons à synthétiser et structurer les réponses des enseignants afin d'obtenir une typologie de comportements.

Nous utilisons le logiciel CHIC (Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) pour le traitement des données statistiques multidimensionnelles. Ce logiciel développé sous la direction de Régis Gras, traite essentiellement la Classification Hiérarchique (I.C. Lerman), l´implication statistique et la hiérarchie implicative (Gras et son équipe).

L´analyse hiérarchique de similarité permet de constituer sur l´ensemble des variables statistiques étudiées des partitions de moins en moins fines, construites de façon ascendante en arbre à l´aide d´un critère de similarité. Elle permet d´étudier et d´interpréter en termes de typologie et de ressemblance (et de dissemblance) des classes de variables, constituées significativement à certains niveaux et s´opposant à d´autres à ces mêmes niveaux.

Au moyen de l'analyse statistique implicative des données, nous cherchons à dégager des structures implicatives au sens suivant : telle attitude a s'accompagne, de façon conséquente ou non, de telle attitude b. Cette expression s'apparente à l'implication a ➔ b ou à l'inclusion de l'ensemble de ceux qui o*nt a dans l'ensemble de ceux qui ont b. En fait, cette implication ou cette inclusion stricte étant rarement observée, l'analyse implicative devient statistique lorsqu'une mesure estime l' « étonnement » de l'écart entre la relation stricte et la relation observée.*

La hiérarchie implicative de classe permet une analyse de relations intra-classes et inter-classes de réponses. Groupant des réponses dans la mesure où une relation implicative les lie, nous obtenons des classes formées par l'implication.

Pour l'analyse du discours des enseignants, nous avons sélectionné certaines des questions qui nous paraissaient les plus pertinentes. Les variables statistiques (voir les annexes) retenues sont des variables binaires. Elles ont été sélectionnées en nous appuyant sur une analyse qualitative et une analyse statistique descriptive.

5. Analyse du discours des enseignants

Nous présentons, les résultats partiels de l'analyse du discours des enseignants participant au projet. Nous visons essentiellement :

- l'analyse du discours des enseignants par rapport au rôle de la Géométrie dans la formation des élèves, à son enseignement et à son apprentissage,
- l'obtention d'une caractérisation de ces enseignants qui participent à l'analyse,

– l’identification des contenus de Géométrie qu'ils disent enseigner, ainsi que ceux qui posent problème quant à leur enseignement et leur apprentissage.

5.1. Caractéristiques des enseignants participant à la recherche

Le tableau suivant nous donne un aperçu général sur les principales caractéristiques des enseignants participant au projet de recherche.

Les enseignants	
Nombre	24
Âge	Entre 31 et 40 ans
Expérience professionnelle	Enseignent depuis 2 à 5 ans
Formation	Ils ont eu une formation en Géométrie
Méthode utilisée pour travailler la Géométrie en classe	
Cours magistral	15 enseignants
Mettent les élèves en situation de recherche	4 enseignants
Travail en groupe	13 enseignants
Résolution de problèmes	13 enseignants
Utilisent les jeux comme moyen didactique	8 enseignants
Activités expérimentales	7 enseignants
À propos des documents officiels sur l´enseignement des Mathématiques	
Programmes officiels de l'État de Sao Paulo : 12 enseignants les connaissent et 6 s´en ont inspiré	
Expériences Mathématiques (livres scolaires édités par le gouvernement de l'État de Sao Paulo) : 7 enseignants affirment les connaître et 4 disent les avoir utilisés.	

PCN(Paramètres curriculaires Nationaux) : 5 enseignants les connaissent et les utilisent	
Les contenus géométriques qu'ils disent avoir l´habitude d´enseigner	
Quadrilatères	11 enseignants
Similitude des triangles	14 enseignants
Circonférence et Cercle	12 enseignants
Théorème de Pythagore	13 enseignants
Aires et Périmètre	15 enseignants
Relations métriques dans un triangle rectangle	13 enseignants
Théorème de Thalès	11 enseignants
Triangles	15 enseignants
Égalité de triangles	9 enseignants
Transformations géométriques	4 enseignants

5.2. Analyses multidimensionnelles du discours des enseignants : analyse de similarité

Rappelons que notre population est constituée de deux groupes : le groupe de vendredi est constitué d´enseignants qui ont déjà reçu, au cours de leurs formations continues passées, des informations sur les tendances actuelles sur l´enseignement et l´apprentissage des mathématiques. Nos rencontres avec ces enseignants ont lieu tous les vendredis.

Le groupe de jeudi est composé d´enseignants qui affirment n´avoir jamais reçu une formation continue tant du point de vue des contenus mathématiques ni du point de vue didactique et pédagogique. Ils travaillent tous dans la même école. Nos rencontres ont lieu les jeudis.

Le traitement des données par CHIC nous donne l´arbre de similarité (voir annexe 2), dont nous analyserons les principaux blocs. L'annexe 1 donne le libellé des question.

<u>Premier bloc est constitué des variables</u> : 1, 30, 44, 54, 60, 3, 35, 21, 38, 39, 51, 23, 36, 26 et 48.

Il est constitué de trois sous-classes :

<u>Groupe de vendredi</u> : Ce groupe met en évidence l´opinion selon laquelle il est important d´accorder aux élèves une grande autonomie dans la construction de leur connaissance, en opposition avec une attitude plus directive de l´enseignant. Une partie des enseignants semble mettre l´accent sur l´importance des vérifications empiriques des propriétés et des relations géométriques, l´initiation au raisonnement et à la démonstration. Ils semblent être d'accord que la démonstration est d´une extrême importance pour la formation intellectuelle des élèves. À cet effet, elle ne doit pas être abandonnée, mais ils trouvent qu'il est prématuré de l'introduire dans l´enseignement fondamental et qu'elle doit être initiée en début de lycée où les élèves auront plus de maturité pour l´affronter. Nous pensons que cette conception sur l´initiation à la démonstration semble due á certains facteurs parmi lesquels nous citons :

- la Géométrie, en particulier l´initiation au raisonnement et à la démonstration, n´occupe pas une place de choix dans l´enseignement, l´accent est plutôt mis sur les aspects calculatoires de la Géométrie,
- de façon générale, les enseignants de l´enseignement fondamental pointent la Géométrie comme la matière la plus problématique quant à son enseignement et à son apprentissage,
- comme nous l´avons déjà signalé, la plus grande partie des enseignants actuels a eu une formation initiale très précaire en Géométrie,

– les cours de formation initiale, tant des enseignants de l'enseignement fondamental, que de ceux de lycée, n´ont pas encore atteint les résultats escomptés, il en est de même pour les cours de formation continue.

A la deuxième sous-classe contribuent principalement les enseignantes. Elle met en évidence l´opinion selon laquelle le programme de mathématiques doit être exécuté en respectant le rythme des élèves. L´analyse de ce groupe de variables statistiques révèle également que l´usage de la règle et du compas ne paraît pas fondamental pour l´apprentissage de la Géométrie. Mais une partie des enseignants semble admettre que la Géométrie permet à l´élève de réaliser des recherches, de résoudre des problèmes, d´imaginer différentes stratégies de résolution et de les justifier. Ils pensent, de plus, que la Géométrie prépare l´élève à utiliser différents processus et méthodes de résolution d´un problème en analysant leurs différences et leurs points communs.

La troisième sous-classe s'oppose aux deux premières sous-classes que nous venons de traiter. Cette sous-classe met en évidence l´importance de la règle et du compas dans la construction des aptitudes en Géométrie. De plus, il révèle la conception selon laquelle la participation active des élèves à la construction de leur connaissance ne provoque pas nécessairement une perte de contrôle de la classe de la part de l´enseignant. Leur opinion confirme aussi le peu d´intérêt à accorder à l´enseignement/apprentissage de la Géométrie par rapport à d´autres thèmes mathématiques.

Le deuxième bloc met en jeu les variables statistiques : 2, 32, 29, 12, 19, 20, 17, 4, 42, 5, 6, 10 et 9. Elle met en évidence trois sous-classes de variables :

Le groupe de jeudi : Ce groupe est caractérisé par les opinions qui ne semblent pas accepter d'accorder une grande autonomie à l´élève dans la construction de ses connaissances. Mais en même temps révèle qu'il est important de l´encourager à la recherche de solution et à la construction de ses propres connaissances. Répondre ainsi indiquerait que les enseignants en question considèrent qu'accorder une autonomie aux élèves serait un obstacle à la mise en place de certaines connaissances et savoirs. Selon certains enseignants, accorder une certaine autonomie aux élèves serait leur accorder une certaine liberté qui, dans la majorité des cas vécus, provoque un problème lié à la gestion de la classe.

Cette classe met aussi en évidence les contenus géométriques que les enseignants disent enseigner : isométrie de triangles, transformations géométriques, triangles semblables et théorème de Thalès. Mais une analyse de leurs pratiques en classe montre qu´une bonne partie de ces contenus (les transformations géométriques, triangles semblables, par exemple) n´est pas abordée.

Le sexe masculin : Cette sous-classe semble révéler l´opinion selon laquelle la démonstration en Géométrie n´a aucune utilité pratique pour les élèves de l´enseignement fondamental, et qu'elle doit être supprimée des programmes scolaires. Il semble que, pour une partie des enseignants de sexe masculin, la démonstration n'a aucune utilité pour la vie pratique des enfants jusqu´à l´adolescence, et que par conséquent, elle ne doit pas faire l´objet d´enseignement au niveau du cycle fondamental. Son étude doit être initiée en début de lycée. Pour l´enseignement de la Géométrie, il est important de faire travailler les élèves sous forme de recherche, d´activités expérimentales, en utilisant des jeux, mais aussi en faisant des cours magistraux.

Troisième bloc mettant en jeu les variables 7, 8, 45, 57, 11, 13, 14, 16, 15 et 18.

Ce bloc met en évidence l´importance de la résolution de problèmes dans l´apprentissage de la Géométrie, mais cette classe met aussi en évidence l´opinion selon laquelle la Géométrie ne prépare pas les élèves à une attitude réflexive. Elle met aussi en évidence les contenus géométriques qu'ils disent enseigner : quadrilatères, circonférence et cercle, théorème de Pythagore, relations métriques dans un triangle, aires et périmètre. Ces contenus sont caractérisés par leur aspect numérique.

En croisant les réponses des enseignants, nous observons que certains en même temps : « Enseignent en utilisant la résolution de problèmes (variable 8) », sont d´accord que « le travail en Géométrie développe chez l´enfant l´aptitude à rechercher des exemples et contre-exemples, à formuler des hypothèses et à prouver expérimentalement (variable 45) », ne sont pas d´accord avec l´opinion « La Géométrie offre à l´élève la possibilité de réaliser des investigations, résoudre des problèmes, créer des stratégies, les justifier et avoir des arguments sur ses stratégies (variable 39)». Ces discours indiqueraient que les enseignants en questions considèrent comme disjointes les activités d´exploration expérimentale de celles qui entraînent les élèves au raisonnement et les initient à la démonstration. L´existence de cette idée se confirme aussi pour le cas des enseignants qui sont d´accord avec l´opinion 45, mais ne sont pas d´accord avec l´opinion « On ne doit pas abandonner, au cours de toutes les phases de l´enseignement fondamental, les vérifications empiriques de propriétés et de relation, mais qu´on doit aussi favoriser un travail sur des démonstrations simples ».

Nous faisons l´hypothèse que ces opinions sont en étroites relations avec la formation des enseignants, les situations d´enseignement proposées par les manuels scolaires.

5.3. Analyses multidimensionnelles du discours des enseignants : hiérarchie implicative

L'arbre de la hiérarchie implicative (voir annexes 3) met en évidence 14 classes de variables statistiques. Nous analysons celles qui nous semblent les plus pertinentes.

- La classe (16 $\Rightarrow$ 15) $\Rightarrow$30 (classe de cohésion la plus élevée) met en relation les contenus que les enseignants disent enseigner: les relations métriques dans un triangle et le calcul d'aires. Ils se caractérisent par leur aspect algébrique. Les figures géométriques semblent (l'analyse de Manuels scolaires le montre) servir uniquement de support visuel.

L'opinion des enseignants sur l'enseignement de ces contenus est en relation implicative avec leur opinion « être d'accord que la Géométrie permet à l'élève de développer l'esprit de recherche ».

- La classe 10$\Rightarrow$(13 $\Rightarrow$ 18) met en évidence l'enseignement de la « circonférence, du cercle et des triangles ». L'enseignement de ces contenus semble partir d'activités au cours desquelles les élèves participent à la construction de leurs connaissances à partir de situations expérimentales,
- la classe implicative qui regroupe les variables [(20 $\Rightarrow$ 17) $\Rightarrow$ (7 $\Leftrightarrow$ 14)] $\Rightarrow$ [(8 $\Rightarrow$ 57) $\Rightarrow$ 45] est caractérisée par les contenus de Géométrie que certains enseignants disent avoir l'habitude de travailler en classe, ainsi que les méthodes qu'ils disent utiliser pour leur enseignement/apprentissage. Leur discours met l'accent sur l'importance des méthodes prenant en compte l'élève, méthodes pour lesquelles l'élève est acteur de la construction de ses connaissances. C'est un discours qui semble prendre en compte les tendances des recherches actuelles en Didactique des Mathématiques, mais nos observations révèlent que ce discours est différent de la réalité en classe.

Cette dernière observation rejoint celle d'Aline Robert (Robert A. & al., 1989) selon laquelle les pratiques des enseignants sont intimement liées à leurs conceptions sur les Mathématiques et l'enseignement reçu au cours de leur formation.

Ces conceptions sont probablement liées à leurs expériences personnelles, à l'environnement socioculturel présent et passé, à la période de leurs études et à des caractéristiques encore plus personnelles.

La stabilité des conceptions d'un individu présente quelquefois des résistances au changement, à la fois parce qu'un équilibre personnel est à maintenir, mais aussi, parce qu'une partie des conceptions correspond à des convictions (éventuellement implicites, non perçues comme des réponses à des questions, mais admises, de préférence, sans qu'il ait conscience du phénomène ou sans pouvoir argumenter à leur propos).

- Implication : $8 \Rightarrow 57$: la résolution de problèmes liés aux calculs d'aires est associée à la composition et la décomposition de figures. Une partie des enseignants semble mettre l'accent sur les fonctions de la figure (visualiser, faire voir, résumer les informations, aide à la preuve et aux conjectures) pour l'acquisition des connaissances liées au concept d'aire. Nous rapprochons ses idées à celles de Raymond Duval (1995).

L´auteur montre que la résolution de problèmes de Géométrie et l'entrée dans la forme de raisonnement que cette résolution exige, dépendent de la prise de conscience de la distinction des différentes formes d'appréhension de la figure (appréhensions séquentielles, perceptive, discursive et opératoire). L'appréhension opératoire des figures, selon l'auteur, dépend de la prise de conscience des différentes modifications possibles d´une figure (modification méréologique, optique et positionnelle).

Ces modifications sont réalisées psychiquement, graphiquement et mentalement. L'intérêt de fractionner une figure ou de son examen à partir des parties élémentaires est lié à l'opération de configuration intermédiaire. En effet, les parties élémentaires peuvent être regroupées en sous-figures, toutes dans la figure de départ. Cette opération permet alors d'enchaîner immédiatement des traitements tels que les mesures d'aires à partir des sommes des parties élémentaires ou mettre en évidence l'équivalence de deux regroupements intermédiaires.

- La classe implicative $(21 \Leftrightarrow 36) \Rightarrow 60$ semble révéler l'importance de l'utilisation d'instruments, comme la règle et le compas, mais aussi la nécessité pour l'enseignant de prendre en compte les intérêts des élèves.

L'ampliation et la réduction des figures, et les instruments de constructions de figures géométriques, semblent constituer des appuis importants pour l'acquisition de notions géométriques.

- La classe implicative $(2 \Leftrightarrow 26)$ semble mettre en évidence le désaccord de certains enseignants sur l'importance de laisser une certaine autonomie à leurs élèves.

L'analyse des relations implicatives paraît révéler, pour une partie des enseignants, qu'il est prématuré de travailler la Géométrie déductive et que cette dernière doit être initiée seulement en début de lycée. Or, comme nous le savons bien, plusieurs recherches montrent le contraire.

Analysant les causes d'échec des élèves dans une tâche de démonstration en Géométrie, Duval (Duval R. 1995) dit qu'elle met en jeu une activité cognitive spécifique et que son apprentissage n'est pas lié à une situation d'interaction sociale, ni subordonnée à un jeu de pressions internes d'un objet. Elle est un type de processus cognitif autonome avec des caractéristiques spécifiques par rapport à d'autres formes de fonctionnement du raisonnement, comme l'induction, l'argumentation, l'interprétation.

D'un côté, elle articule les énoncés en fonction de leur statut et non en fonction de leur signification, de l'autre, elle se fait en progression par substitution d'énoncés et par enchaînement. L'apprentissage de la démonstration, consiste, pour Duval, prioritairement, à la conscientisation qu'il s'agit d'un discours différent de celui qui est pratiqué dans la pensée naturelle. La compréhension opératoire des définitions et des théorèmes suppose que ceux-ci soient vus comme des règles de substitution. Pour l'auteur, la prise de conscience de ce qui est une démonstration est faite seulement à partir de l'articulation de deux registres, parmi lesquels l'utilisation du langage naturel par l'élève. Cette interaction va surgir de l'interaction entre la représentation non discursive produite et le discours écrit ou oral.

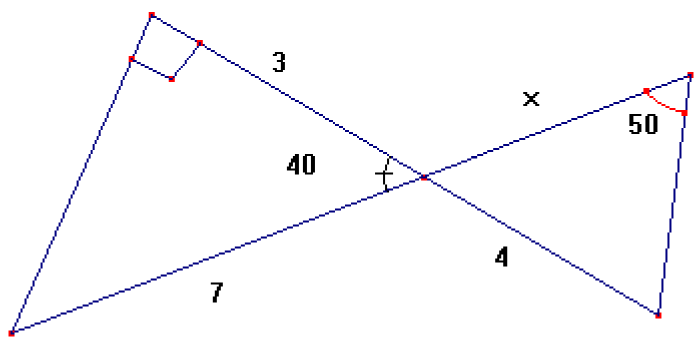
L'apprentissage de la démonstration par les élèves est un processus long, et doit être initié dès l'enseignement fondamental. Pour amener une majorité d'élèves (de collège) à la prise de conscience de la structure profonde de la démonstration, nous pensons que l'enseignement doit prendre en compte plus d'activités de résolution de problèmes, parmi lesquelles nous citons l'exploration guidée ou libre des propriétés d'une figure liée à un énoncé d'un problème et l'aide à la démonstration, permettant non seulement de développer les capacités de raisonnement de l'enfant, mais aussi de comprendre le statut de la démonstration géométrique.

6. Analyse des questions relatives aux contenus

6.1. Analyse de la situation 1

6.1.1. Situation 1

Un enseignant propose à ses élèves le problème suivant : Observe la figure ci-dessous :



Quelle est la valeur de x ?

a) Penses-tu que tes élèves vont répondre que x =.....
b) Justifie ta réponse ?
c) Cite trois difficultés au moins que, à ton avis, les élèves commettent fréquemment face à ce type de situation.
d) Quelles sont les raisons de ces difficultés ?
e) Quelle est l´importance de la figure pour la résolution du problème proposé aux élèves ?
f) Explique comment tu corrigerais cet exercice à tes élèves ?
g) Considères-tu l´énoncé du problème : ( ) Bien formulé ( ) mal formulé ? Propose une autre formulation du problème.

6.1.2. Quelques résultats

Dix-neuf des 24 enseignants ont répondu que leurs élèves ne sauront pas répondre ou ne sauront pas résoudre la question posée. Ils justifient cet état de fait, par celui que la Géométrie est reléguée en dernière position et par la méconnaissance de cette discipline par la majorité des enseignants. L´une des raisons des difficultés que les enseignants soulèvent est liée à l´interprétation de la figure, interprétation qui généralement n´est pas prise en compte dans l´enseignement de la Géométrie.

Les difficultés sont aussi dues, selon certains enseignants, aux facteurs suivants :

- manque de contenu géométrique tels que : congruence des triangles, triangles semblables, proportionnalités, théorèmes de Thalès,
- manque d´habilités et de certaines attitudes comme : réfléchir, être capable de l´abstraction, raisonner, savoir calculer, savoir interpréter,
- la peur des mathématiques, le manque d´intérêt et d´assurance face aux problèmes de Géométrie.

La figure a été considérée très importante dans la résolution du problème, parce qu'elle permet de visualiser les données et les sous-figures pertinentes. Certaines recherches associent la visualisation à l´apprentissage de la Géométrie (Ponte et al., 1998). Ces recherches suggèrent que les compétences du domaine spatial soient travaillées avant celles normalement attendues quant á la Géométrie plane.

L´analyse des résultats de cette situation montre que les difficultés attribuées aux élèves sont en réalité, aussi celles des enseignants à propos de la Géométrie. À la question qui leur demandait de résoudre le problème pour leurs élèves, seuls huit l´ont résolu correctement, et un seulement avait indiqué de façon adéquate les connaissances mobilisables pour la résolution du problème.

Ces résultats confirment celles de Belchior (1994) (cité par Ponte et al (1998)) selon lequel certains enseignants de l'enseignement fondamental et de lycée avaient, dans une tâche de résolution de problèmes de Géométrie, des résultats proches de ceux de leurs élèves.

Par rapport à l´énoncé du problème, le tableau suivant met en évidence les opinions des enseignants sur sa formulation :

	Bonne formulation	Mauvaise formulation	Sans opinion
Nombre d´enseignants	11	5	8

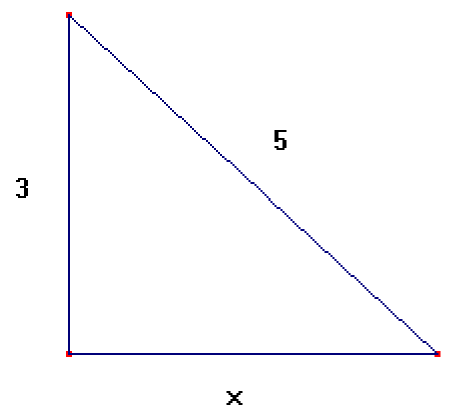
Les enseignants qui pensent que le problème est mal formulé suggèrent qu'il y ait plus d´informations afin que les élèves puissent utiliser le théorème de Pythagore dans la résolution du problème.

6.2. Analyse de la situation 2

6.2.1. Situation 2

Le problème suivant a été proposé aux élèves :

Que peut-on dire de la mesure x du côté du triangle, sachant qu'on s´est servi de la mêm*e unité de longueur pour toutes les mesures ?*



Un de tes élèves a répondu : $x = 4$.

La réponse de ton élève est-elle juste ?

Quelle serait la stratégie que ton élève aurait utilisée pour résoudre ce problème ?

Se tu considères que la réponse de ton élève est fausse, quelle solution pourrais-tu lui proposer ? Justifie ta réponse.

6.2.2 Quelques résultats

Sur les 24 enseignants qui ont résolu cette situation, 16 trouvent que la solution proposée par l´élève est correcte. Six enseignants disent qu'ils ne peuvent la considérer correcte car les informations contenues dans la figure ne permettent pas de considérer le triangle donné comme un triangle rectangle. Dix-sept des enseignants pensent que l´élève a utilisé le théorème de Pythagore pour la résolution du problème. Deux enseignants ont affirmé que l´élève avait utilisé la moyenne arithmétique des mesures pour trouver la valeur de

$$x : \frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4 ,$$

trois enseignants disent que leurs élèves ne pourront pas résoudre le problème, raison invoquée : l´angle droit n´est pas fourni.

La résolution de ce type de situation doit prendre en compte les trois formes de processus cognitifs identifiés par Duval (Duval, R. 1995) et qui ont des fonctions épistémologiques spécifiques :

- la visualisation qui permet l´exploration heuristique d´une situation complexe,
- la construction géométrique au cours de laquelle les actions représentées et les résultats observés sont liés aux objets mathématiques représentés,
- le raisonnement. Suivant l´auteur, l´heuristique des problèmes de Géométrie se réfère à un registre spatial, qui donne lieu à des formes d´interprétation autonomes mettant en jeu les différentes appréhensions de la figure : appréhension séquentielle, perceptive, discursive et opératoire.

6.3 Analyse de la situation 3

6.3.1 Situation 3

On sait d´un quadrilatère qu'il a trois côtés de même longueur.

Henrique dit : Il suffit que ses diagonales se coupent en leur milieu pour qu'il soit un losange.

Carlos Magalhães argumente : Il suffit qu'il ait un angle droit pour qu'il soit un carré.

Pedro Malan dit : Il suffit que le quatrième côté soit le double de l´un des trois côtés pour qu'il soit un trapèze.

a) Qui a raison ?
b) Qui a tort ?
c) Justifie ta réponse ?

6.3.2 Quelques résultats

Le tableau ci-dessous résume les réponses des enseignants :

	A raison	N´a pas raison
Henrique	3	21
Magalhães	14	10
Pedro Malan	11	13

Les justifications de leurs réponses ne s´appuie pas sur des arguments scientifiques, aucune démonstration ou contre-exemple n´est proposé pour valider ou réfuter les réponses des trois élèves. De façon générale, ces enseignants ont eu beaucoup de difficultés à résoudre le problème. L´absence de support visuel (la figure, par exemple) serait l´une des causes des difficultés des élèves à résoudre le problème proposé (selon leurs propres commentaires).

7. Conclusions ET perspectives

L´étude des manuels scolaires, des PCN et les informations obtenues à partir de ce questionnaire révèlent une certaine réalité de l´enseignement de la Géométrie, ainsi que la nécessité d´une formation continue de ces enseignants. Ces résultats nous ont guidés dans le choix de nos hypothèses de travail quant aux contenus géométriques et aux variables à prendre en compte dans la formation des enseignants, mais aussi dans le choix des situations d´enseignement/apprentissage de la Géométrie.

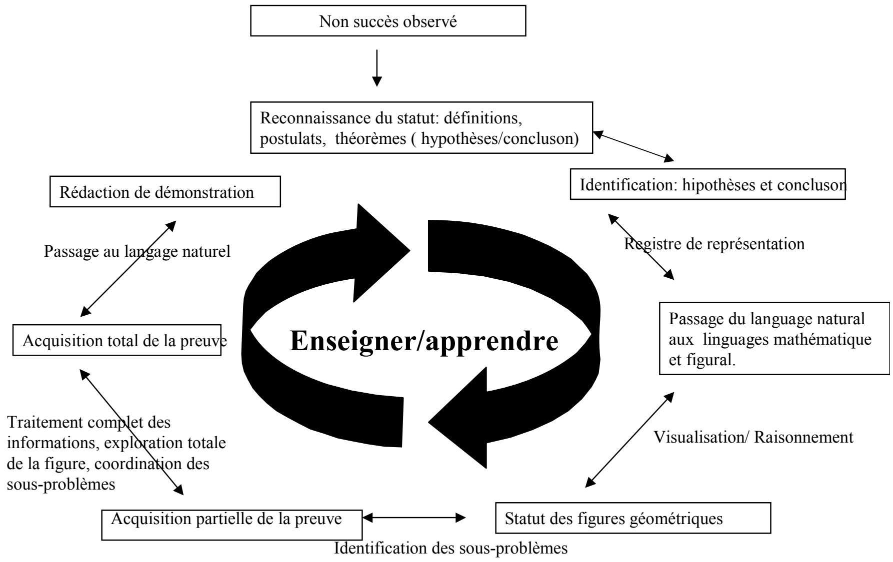
Le travail de formation des enseignants que nous avons entrepris ensuite prend en compte trois aspects qui nous paraissent importants :

- Faire un travail sur les savoirs et les savoir-faire en Géométrie, ayant pour objectif la formation des enseignants participant au projet de recherche ; nous faisons l´hypothèse que cette formation leur permettra, tout au moins en partie, de s´approprier certains savoirs et connaissances géométriques en favorisant un contrôle significatif de ceux-ci au moment de leur enseignement/apprentissage.
- Faire un travail de formation intégrant certains résultats de la Didactique des Mathématiques et ayant pour objectif la construction d´instruments d´analyse des situations didactiques que ces enseignants sont amenés à développer en classe. Nos observations et celles de divers chercheurs montrent que, de façon générale, les enseignants ont un discours prenant en compte certains des résultats des recherches sur l´enseignement et l´apprentissage des mathématiques. Mais, ils semblent éprouver de grandes difficultés à prendre ce discours en compte dans la construction et l´expérimentation de situations de classe.
- une étude des pratiques enseignantes par l´équipe de recherche et une analyse réflexive et constructive par les enseignants de leurs pratiques en

classe. Cette analyse se fait (suivant l´idée de Robert, A. 2001) du point de vue de la construction des connaissances géométriques proposée aux élèves, et en ne tenant compte que des aspects épistémologiques et cognitifs(Robert, p.65). Nous utilisons les expression “ pratiques enseignantes » et “ pratiques en classe“ suivant le sens d'Aline Robert (Robert, 2001) :

Nous réservons l´expression pratiques enseignantes à l´ensemble des activités de l´enseignant qui aboutissent à ce qu'il met en œuvre en classe.

Les pratiques en classe désignent tout ce que dit et fait l´enseignant en classe, en tenant compte de sa préparation, de ces conceptions et connaissances en mathématiques et de ses décisions instantanées, si elles sont conscientes. (Robert 2001, p.66).



Le travail de formation[*] que nous avons mené ensuite s´appuie essentiellement sur les niveaux de compréhension de la Géométrie de Van Hiele (niveau de visualisation, niveau d´analyse, niveau de déduction formelle, niveau de la rigueur) et la théorie des registres de représentation sémiotique de Duval(1995),

[*] Le travail de formation initié en fevrier 2000 a duré deux ans et demi. Les résultats scientifiques de ce projet feront l´objet d´autres publications.

mettant en jeu l´importance de la coordination de différents registres de représentation sémiotique, du rôle de la figure dans la résolution des problèmes de Géométrie, de la lecture et l´interprétation des textes mathématiques, de la constitution d´un réseau sémantique des objets mathématiques et des théorèmes (et/ou définitions) qui peuvent être utilisées dans une démonstration. Le schéma ci-dessus résume le processus de construction des savoirs et des connaissances géométriques que nous avons mis en place chez les enseignants.

BIBLIOGRAPHIE

Brasil Secretaria de Educação, 1998, *Parâmetros curriculares nacionais : Ensino Fundamental – Matemática*, Brasília : MEC, SEF.

Brousseau G., 1986, Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, v.7.2, 33-115.

Duval Raymond, 1995, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.

Gras R., 2001, Les fondements de l´analyse statistique implicative, *Actes des Journées sur la fouille dans les données par la méthode d´analyse implicative*, 23-24 juin 2000, ARDM-IUFM de Caen, 11-32.

Gras R. & al., 1996, *Implication statistique : nouvelle méthode exploratoire de données*, in Gras Régis, Recherche en didactique des mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

Ponte J.P & Al, 1998, *Investigação em educação matemática : implicações curriculares*, Ciências da Educação, v. 22, Lisboa : Instituto de Inovação Educacional.

Robert A., 2001, Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l´exercice du métier d´enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématique,* 21/1.2, 57-80.

SAEB, 1995, *Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica* Secretaria de Desenvolvimento, Inovação e Avaliação Educacional, Instituto Nacional de Avaliação de Estudos e Pesquisas Educacionais, Brasília.

Secretaria de Educação Fundamental, 1998, *Parâmetros curriculares nacionais : Matemática*, Brasília : MEC, SEF.

Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 1996, *Experiências Matemáticas : 7ª série*, Versão preliminary, São Paulo : SE/CENP, 1996.

Van Hiele P, 1980, Levels of Thinking : How to meet them, How to avoid them, paper apresentado no 58º Encontro Anual do NCTM, Seattle.

Van Hiele P., 1986, *Structure and insight : to Theory of mathematics Education* Academic Press inc, London.

Saddo Ag Almouloud –PUC-SP
Rua Marquês de Paranaguá, 111, cep. 01303-050, São Paulo-SP, Brasil
e-mail : saddoag@pucsp.br

Annexe 1

Variables statistiques de l´arbre de similarité de la hiérarchie implicative

1. Groupe de vendredi : enseignants avec lesquels nous travaillons le vendredi
2. Groupe de jeudi : enseignants avec lesquels nous travaillons le jeudi
3. Sexe fémin
4. Sexe masculin
5. Cours magistral
6. Méthode de recherche
7. Travail en groupes
8. Résolution de problèmes
9. Jeux
10. Activités avec expériences

Sous quelle forme enseignent-ils ?

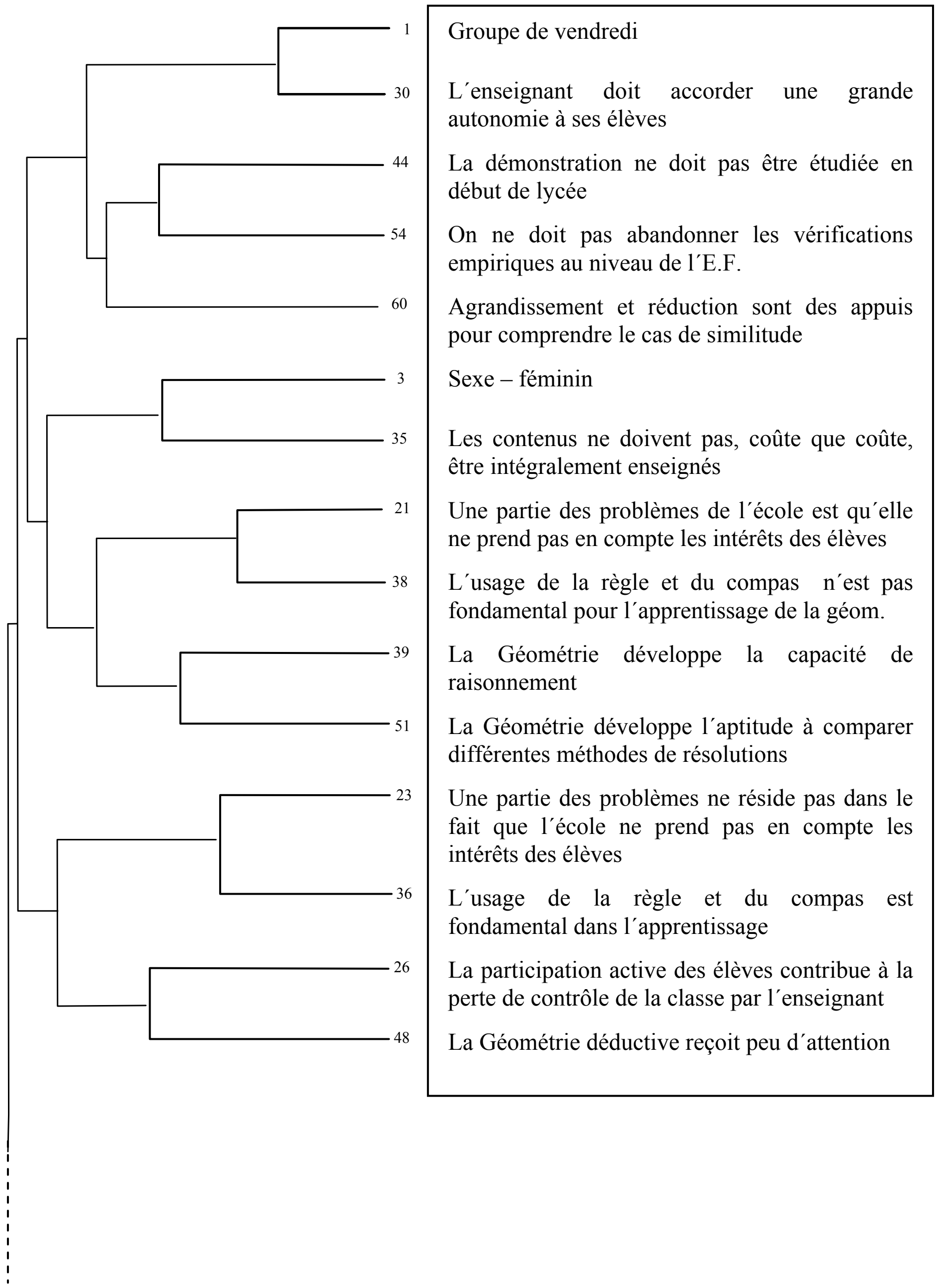
11. Quadrilatères
12. Similitudes de triangles
13. Circonférence et Cercle
14. Théorème de Pythagore
15. Aires et perimètres
16. Relations métriques - triangle
17. Théorème de Thalès
18. Triangles
19. Congruence de triangles
20. Transformations géométriques

Quels contenus enseignent-ils ?

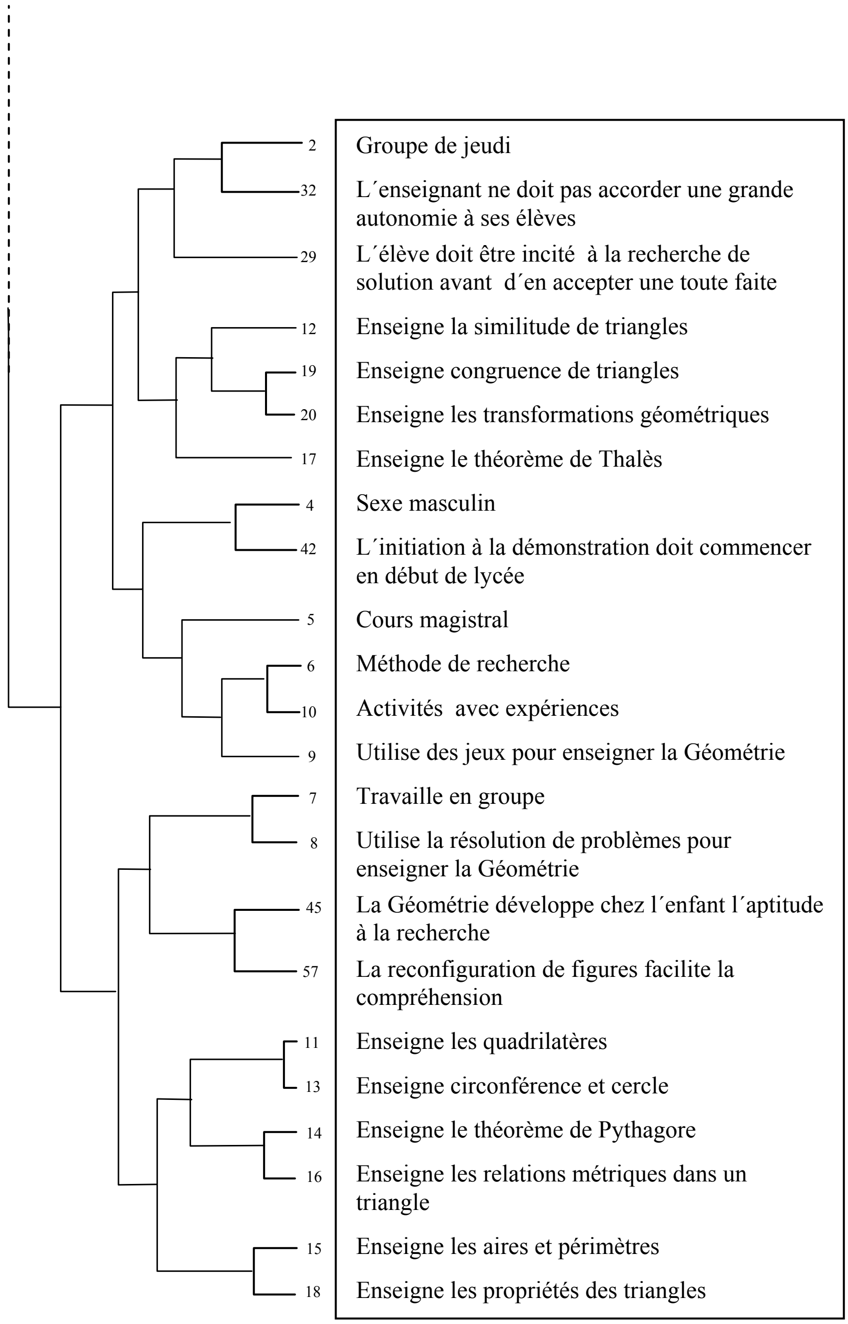
21. Est d´accord que “ une partie des problèmes de l´école est qu´elle ne prend pas en compte les intérêts des élèves ».
23. N´est pas d´accord que “ une partie des problèmes de l´école est qu´elle ne prend pas en compte les intérêts des élèves ».
26. Est d´accord que “ la participation active des élèves contribue à la perte de contrôle de la classe par l´enseignant »
29. Est d´accord que “ En classe, l´élève doit être incité à la recherche de solution d´un problème avant d´en accepter une toute faite ».
30. Est d´accord que ″L´enseignant doit laisser à ses élèves une grande autonomie dans la construction de ses connaissances ».
32. N´est pas d´accord que “ L´enseignant doit laisser à ses élèves une grande autonomie dans la construction de ses connaissances » .
35. N´est pas d´accord que ″Les contenus doivent être, coûte que coûte, intégralement enseignés, puisqu’ils sont prévus dans les programmes″.
36. Est d´accord que ″L´usage de la règle et du compas est fondamental pour l´apprentissage de la Géométrie ″.

38. N´est pas d´accord que “ L´usage de la règle et du compas est fondamental pour l´apprentissage de la Géométrie″.
39. Est d´accord que ″La Géométrie offre à l´elève la possibilité de réaliser des investigations, résoudre des problèmes, créer des stratégies, les justifier et avoir des arguments sur ses stratégies″.
42. Est d´accord que “ La démonstration en Géométrie doit être étudiée en début de lycée″
44. N´est pas d´accord que ″La démonstration en Géométrie doit être étudiée en début de lycée″
45. Est d´accord que ″Le travail en Géométrie développe chez l´enfant l´aptitude à rechercher des exemples et contre-exemples, à formuler des hypothèses et à prouver expérimentalement″.
48. Est d´accord que ″La Géométrie déductive reçoit peu d´attention au niveau de l´Enseignement Fondamental″.
51. Est d´accord que ″La Géométrie développe chez l´élève l´aptitude à comparer différentes méthodes et processus de résolution de problème, en analysant les ressemblances et les différences ″.
54. Est d´accord que ″On ne doit pas abandonner, au cours de toute phase de l´Enseignement Fondamental, les vérifications empiriques de propriétés et de relations, mais qu'on doit aussi favoriser un travail sur des démonstrations simples″.
57. Est d´accord que ″L´exploitation de la composition et la décomposition de figures, facilite la compréhension de calcul d´aires figures planes″.
60. Est d´accord que ″L´agrandissement et la réduction de figures est un appui important pour l´enseignement des cas de similitude″.

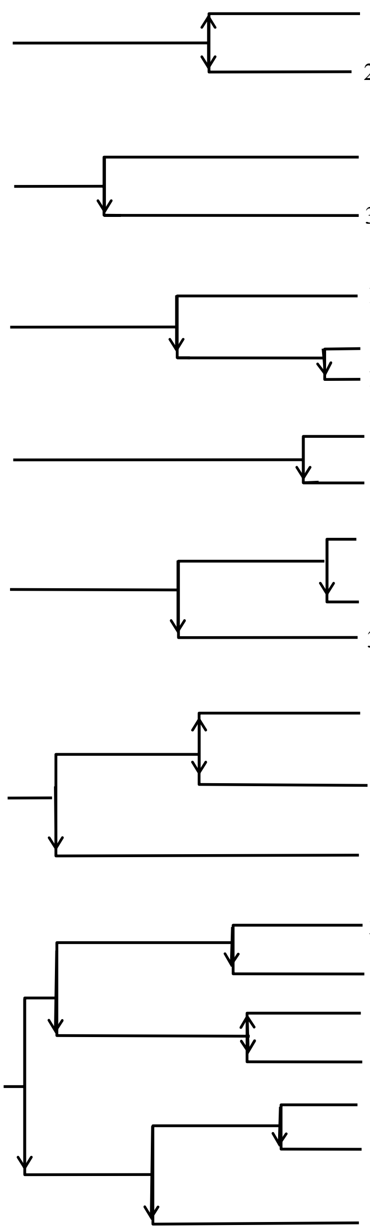
Annexe 2


1 Groupe de vendredi
30 L´enseignant doit accorder une grande autonomie à ses élèves
44 La démonstration ne doit pas être étudiée en début de lycée
54 On ne doit pas abandonner les vérifications empiriques au niveau de l´E.F.
60 Agrandissement et réduction sont des appuis pour comprendre le cas de similitude
3 Sexe – féminin
35 Les contenus ne doivent pas, coûte que coûte, être intégralement enseignés
21 Une partie des problèmes de l´école est qu´elle ne prend pas en compte les intérêts des élèves
38 L´usage de la règle et du compas n´est pas fondamental pour l´apprentissage de la géom.
39 La Géométrie développe la capacité de raisonnement
51 La Géométrie développe l´aptitude à comparer différentes méthodes de résolutions
23 Une partie des problèmes ne réside pas dans le fait que l´école ne prend pas en compte les intérêts des élèves
36 L´usage de la règle et du compas est fondamental dans l´apprentissage
26 La participation active des élèves contribue à la perte de contrôle de la classe par l´enseignant
48 La Géométrie déductive reçoit peu d´attention

Annexe 2 (suite)



Annexe 3



2	Groupe de jeudi
26	La participation active des élèves contribue à la perte de controle de la classe par l´enseignant.
3	Sexe feminin.
35	Les contenus ne doivent pas être intégralement enseignés.
10	Activités avec expérimentation.
13	Enseigne circonférence et cercle.
18	Enseigne les triangles
11	Enseigne les quadrilatères.
5	Cours magistral.
16	Enseigne les relations métriques dans le triangle.
15	Enseigne les aires et périmètres.
30	Géométrie permet à l'élève de réaliser des recherches
21	Une partie des problèmes de l'école est qu'elle ne prend pas en compte les intérêts des élèves
36	L'usage de la règle et du compas est fondamental dans l'apprentissage
60	Agrandissement et réduction sont des appuis pour comprendre le cas de similitude
20	Enseigne les transformations géométriques.
17	Enseigne le théorème de Thalès.
7	Travaille en groupes.
14	Enseigne le théorème de Pythagore.
8	Résolution de problèmes.
57	La reconfiguration de figures facilite le calcul d´aire.
45	Géométrie développe l'aptitude à la recherche.

AUTRES INTERVENTIONS PRESENTEES AU COLLOQUE ARGENTORATUM 2002

Regina DAMM et Sílvia MACHADO, Brésil, Universidade Federal de Santa Catarina et Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Le développement des recherches brésiliennes sur la Théorie de Registres de Représentation Sémiotiques

Un groupe d'enseignants s'était formé à l'Université Fédérale de Santa Catarina dès 1986 pour étudier la diversité des problèmes auxquels l'enseignement des mathématiques doit faire face. Après une phase exploratoire, qui s'appuyait principalement sur l'approche méthodologique, le groupe a ressenti le besoin d'une approche théorique permettant d'analyser l'activité mathématique, de la situer par rapport aux types de connaissances et de décrire les conditions de son apprentissage de l'école primaire au lycée. Les contacts alors pris, sur les conseils de Maria-Laura Leite Lopes, ont amené une partie des membres du groupe à se lancer dans un cycle d'études à Strasbourg, avec l'idée que l'approche cognitive devait être développée, pour dépasser les cadres généraux de Piaget ou de Vygotski, en relation étroite avec les démarches mathématiques dans ce qu'elles ont de spécifique. Nous pouvons dire que dès notre retour (1992), cette approche nous a aidé à aborder des problèmes les plus cruciaux pour l'enseignement des mathématiques au Brésil : la multiplication, les pourcentages, les nombres fractionnaires, la géométrie. Qu'avec cette approche nous avons réussi à avancer dans nos recherches et, point le plus important, à développer tout un travail de formation des enseignants.

Des recherches ont été entreprises à l'UFSC aux niveaux « mestrado » et « doutorado », dont celles de Cátia Maria Nehring (mestrado en 1996 sur la multiplication et les registres de représentation à l'école primaire, doutorado en 2001 sur la Compréhension de textes : énoncés de problèmes multiplicatifs élémentaires de combinatoire) et Cláudia Regina Bolda (mestrado en 1997 sur Géométrie et visualisation : le développement de la compétence heuristique par des reconfigurations). A la **Pontifícia Universidade Católica** de São Paulo, la présentation en 1994 des recherches de Regina Damm sur la compréhension des problèmes additifs a été à l'origine d'un intérêt pour l'analyse de l'activité mathématique en termes de registres de représentation, reflété dans cinq mémoires d'étudiants de la PUC, soutenus entre 1995 et 1997. A la suite de cours présentés par Raymond Duval, invité à la PUC en 1997 et 1999, ce nombre s'est encore accru, puisque 19 des 41 mémoires d'étudiants suivant le programme de la PUC, soutenus entre 1998 et 2001, se réfèrent à la théorie des registres de représentation.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 247 – 251.

Il est important aussi de préciser que 5 des 9 enseignants-chercheurs engagés dans le Programme de la PUC ont entrepris, au cours de l'année 1999, un travail sur les Registres de représentation sémiotique et sur les jeux de cadre de R. Douady. Il s'agissait de dégager ce que ces deux analyses théoriques de l'activité mathématique peuvent avoir de commun mais aussi ce qui constitue leurs apports spécifiques. Tout cela a conduit à la production en 2002 d'un ouvrage sur les recherches de didactique faites au Brésil dans le prolongement de la théorie des registres. Raymond Duval en a écrit le premier chapitre et 10 auteurs y décrivent des recherches qui ont utilisé comme référentiel théorique les Registres de Représentation, ainsi réparties sur le territoire brésilien : 3 de Mato Grosso, 2 de Santa Catarina et 5 de São Paulo. Il est important de relever que d`autres groupes de recherche qui utilisent la théorie de R. Duval au Brésil: à Rio de Janeiro (Maria Laura Leite Lopes développe avec son équipe des recherches sur le raisonnement), à Rio Grande do Sul, Pernambuco.

Cláudia Regina FLORES et Méricles Thadeu MORETTI, Brésil, Universidade Federal de Santa Catarina

Regarder en perspective : analyse de la représentation dans l'espace et ses implications dans la visualisation de figures tridimensionnelles dans l'enseignement de la géométrie

Il y a convergence de plusieurs chercheurs en éducation mathématique pour dire que la visualisation de figures bidimensionnelles et tridimensionnelles est complexe pour la grande majorité de nos élèves. C'est sur la difficulté à regarder et à lire les figures géométriques que le travail que nous avons entrepris prétend réfléchir. Nous cherchons donc, à comprendre la problématique de la représentation de l'espace dans le monde artistique de la Renaissance, basée sur des aspects philosophiques et/ou épistémologiques, en comprenant que les modes de visualisation soient culturels, datés et qu'ils interagissent avec les modes de représentation spatiale. Nous pensons que l'analyse de l'histoire du processus du dessin en perspective est nécessaire particulièrement en Education Mathématique, dès lors que les pratiques éducatives sont fondées sur la culture, les styles d'apprentissage et les traditions.

Mots clés : dessin en perspective; représentation spatiale; visualisation spatiale.

Cet article a été publié en 2002 par la revue Contrapontos, Universidade do Vale do Itajai, S.C. Brasil

Adresse électronique de la revue : contrapontos@cehcom.univali.br.

Jean Pierre FRIEDELMEYER & Jean DHOMBRES

Avantages et désavantages du biais historique dans la pratique de l'enseignant de mathématiques

Résumé : Il est devenu de mode, aujourd'hui, de vanter une présentation systématique d'histoire dans l'enseignement des mathématiques ; aussi bien les grandes bourgeoises glorifiaient les richesses d'antant en distribuant aux pauvres les habits passés de mode. Le rôle de l'historien des mathématiques ne se résume pas à collectionner des textes anéantis dans leur ancienneté par le refus du commentaire, la peur de l'interprétation et leur difficulté. Ces textes dépassent presque toujours le niveau attendu pour une classe, et l'histoire n'a pas à masquer ce dépassement. Jean Dhombres nous invite à toujours discuter l'avantage prévisible du biais historique dans l'enseignement ; à l'enseignant, compte tenu de son expérience, de mesurer l'avantage réel pour les élèves. L'histoire ne saurait lui imposer ses méthodes. L'histoire enrichit sa réflexion. Et il nous en fait la démonstration par divers exemples.

On pourra lire : Jean Dhombres, Bulletin de l'APMEP « Réflexions intempestives sur l'enseignement et l'histoire : la composition des fonctions », n° 439, Mars-avril 2002

Jean-Pierre Friedelmeyer, partant d'un problème posé au Rallye Mathématique d'Alsace 2002, montre comment la solution de ce problème peut être éclairée et simplifiée par une connaissance actualisée des quatre premiers livres des Eléments d'Euclide.

On en trouvera le détail dans l'article à paraître dans la revue Repères IREM n° 53 (automne 2003) sous le titre : Le professeur de mathématiques d'aujourd'hui peut-il encore apprendre quelque chose d'Euclide ?

Gérard KUNTZ, IREM de Strasbourg, avec Michelle KITTEL

De la possible influence de l'environnement informatique sur l'enseignement des mathématiques. Etude d'un exemple

L’article relate les évolutions d’un énoncé visant à préciser la notion de fonction à partir d’une situation géométrique en environnement CABRI. Soumis à une classe de Seconde, à des PLC2, à des formateurs en mathématiques et en informatique, aux comités de rédaction d’un colloque et de revues, il a subi à chaque étape enrichissement et approfondissement. C’est un bel exemple de travail collaboratif.
Le problème consiste à étudier l’évolution de deux aires définies à partir d’une situation géométrique. Il conduit à préciser la notion de fonction. Les changements

de cadres sont nombreux et complexes. Le problème peut être proposé de la Troisième à la Terminale (avec des buts et des développements adaptés).
L'usage d'un logiciel pour traiter le problème en élargit considérablement l'intérêt pédagogique. Le choix du logiciel (géométrie dynamique ou grapheur) modifie les notions mathématiques proposées à l'attention des élèves.
Mots-clés : Fonction, représentations graphiques, Cabri, travail collaboratif, variable didactique, évolution d'un énoncé, traitement d'informations.
Cet article a été publié dansla revue peti x, 2002, n°60, 26-59 sous le titre Trois diques dans un rectangle – Variations mathématiques et informatiques autour d'un énoncé.

Ana L. MESQUITA, Université de Lille

Le role essentiel de la construction d'objets dans l'articulation de registres en situations tridimensionnelles

Ce travail est issu d'une étude longitudinale sur l'utilisation d'une géométrie « à trois dimensions » à l'école primaire ; il a été développé dans une école primaire de Lille, depuis 1997/1998, avec la cohorte d'élèves qui commençaient leur scolarité à cette période.

Dans cette étude, une priorité est donnée à l'action et à l'espace dans les premiers apprentissages géométriques, ce qui justifie l'importance que nous donnons aux activités de construction d'objets et à d'autres activités de manipulation matérielle et symbolique. Deux "composantes" de l'espace sont à privilégier, en début de scolarité : d'un côté, l'espace physique, en tant que "lieu où les corps peuvent se mouvoir librement" d'un autre côté, l'espace sensible, correspondant aux perceptions sensorielles.
L'analyse des résultats expérimentaux de cette recherche est encore en cours.
On pourra lire : A/L/ Mesquita, A. Régnier, S. Rossini et J. Vandenbossche, 2001, *l'espace et la géométrie à l'école : Essai d'étude longitudinale,* Rapport du projet de recherche R/RIU/98/079, IUFM Nord-Pas-de-Calais, Lille.

César E. MORA LEY et Alejandro Muñoz DIOSDADO, Mexique, UPIBI-Instituto Politécnico Nacional

Atelier de Mathématique pour le développement de la maturité scolaire

L'intervention a présenté les principaux résultats provenant d'un rapport d'une recherche intitulée "Atelier de capacités verbales et mathématiques pour le développement de la maturité mathématique", réalisée avec des étudiants de première année de la filière *génie* de l'Institut Polytechnique National du Mexique (étudiants de 17 à 19 ans). Le projet de recherche répondait à des lacunes dans les connaissances nécessaires chez les étudiants arrivant au niveau supérieur, principalement en mathématiques. Les auteurs, s'inspirant de Feuerstein, ont émis l'hypothèse que le nœud du problème peut se trouver dans un manque de maturation des étudiants, qui n'ont pas développé les fonctions basiques pour l'apprentissage scolaire, telle la psychomotricité, la perception, le langage et les fonctions cognitives. Diverses études de la maturation avec étudiants des premières années de génie ont été réalisées pour diagnostiquer le type de difficultés mathématiques qui se présentent, et on trouve des manques dans la pensée opératoire concrète, dans la transition entre la pensée et le concret formel, dans la pensée logique et la logique formelle. Les lignes de travail auxquelles les activités réalisées conduisent sont : (1) Chercher une méthodologie pratique pour déterminer les divers niveaux de maturation cognitive. (2) Evaluer et redessiner le contenu scolaire du cours d'introduction à l'analyse et du cours de Calcul Différentiel et Intégral, de telle manière qu'y soient incluses des activités pour développer des capacités de la pensée.

Pour consulter une référence à l'orientation des travaux qui ont fait l'objet de la recherche présentée :

Muñoz-Diosdado, A., Arce-Viveros, A La maduración para el aprendizaje de la Matemática in *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 14, 432-437, 2001.

PARTICIPANTS AU COLLOQUE ARGENTORATUM 2002

Mouloud ABDELLI, *Algérie, Constantine*
Robert ADJIAGE, *France, Strasbourg*
Saddo AG ALMOULOUD, *Brésil, S. Paulo*
Elisabeth ARBOGAST, *France, Strasbourg*
Mohamed ATLAGH, *France, Strasbourg*
Pierre BELMAS, *France, Créteil*
Gérard BETREMIEUX, *France, Strasbourg*
Jeanne BOLON, *France, Versailles*
Nicole BOPP, *France, Strasbourg*
Cathy BURCK, *France, Strasbourg*
Richard CABASSUT, *France, Strasbourg*
Christine CAMBAS, *France, Strasbourg*
Michel CAMBAS, *France, Strasbourg*
Tania CAMPOS, *Brésil, Sao Paulo*
Claire CHAUVIERE, *France, Strasbourg*
Michel DE COINTET, *France, Strasbourg*
Regina DAMM, *Brésil, Florianopolis*
Werner DAMM, *Brésil, Florianopolis*
Jean DHOMBRES, *France, Paris*
André DIDIERJEAN, *France, Strasbourg*
G. DIDIERJEAN, *France, Strasbourg*
Jérôme DINET, *France, Poitiers*
Ghislaine DUFOURD, *France, Strasbourg*
Claire DUPUIS, *France, Strasbourg*
Raymond DUVAL, *France, Lille*
Marie-Agnès EGRET, *France, Strasbourg*
Florence FAUVET, *France, Strasbourg*
Jean-Paul FISCHER, *France, Nancy-Metz*
C. Regina FLORES, *Brésil, Florianopolis*
André FRICK, *France, Strasbourg*
J.P. FRIEDELMEYER, *France, Strasbourg*
Sylvie FRIZOT, *France, Strasbourg*
Gérard FROSSARD, *France, Dijon*
Athanasios GAGATSIS, *Chypre, Lefkosia*
Bernard GERROLDT, *France, Strasbourg*
Yves GIRMENS, *France, Montpellier*
Georges GLAESER, *France*
Lucia GRUGNETTI, *Italie, Parme*
Anne-Joëlle GUELLER, *France, Strasbourg*
Dominique GUIN, *France, Montpellier*
Ismenia GUZMAN, *Chili, Valparaiso*
Sébastien HACHE, *France, Lille*
Thierry HATT, *France, Strasbourg*
Fernando HITT, *Mexique, Mexico*
M.-L. HOFFMEYER, *France, Strasbourg*
Catherine HOUDEMENT, *France, Rouen*
Sandrine HUBER, *France, Strasbourg*
François JAQUET, *Suisse, Neuchâtel*
Claudine KAHN, *France, Strasbourg*
Marie-Anne KEYLING, *France, Strasbourg*
Gérard KUNTZ, *France, Strasbourg*
Alain KUZNIAK, *France, Strasbourg*
D.LAHANIER REUTER, *France, Lille*
Guillaume LAMBERT, *France, Strasbourg*
Mirène LARGUIER, *France, Montpellier*
Jean LEFORT, *France, Strasbourg*
Annick LEGLANTIER, *France, Strasbourg*
M.L. LEITE LOPES, *Brésil, Rio de Janeiro*
C. LEMONIDIS, *Grèce, Thessalonique*
M. T. LIENHARDT, *France, Strasbourg*

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 253 – 254.

Silvia MACHADO, *Brésil, Sao Paulo*
Charles MANTEAUX, *France, Strasbourg*
Ana MESQUITA, *France, Lille*
C. Eduardo MORA LEY, *Mexique, Mexico*
Philippe MORANDO, *France, Strasbourg*
A. MUNYAZIKWIYE, *France, Strasbourg*
Fabienne NEITER, *France, Strasbourg*
Guy NOËL, *Belgique, Mons*
Yolande NOËL, *Belgique, Mons*
Olivier NOËL, *France, Strasbourg*
Jean-Claude ORIOL, *France, Grenoble*
Gabriel OSTER, *France, Strasbourg*
Kallia PAVLOPOULOU, *Grèce, Athènes*
Sylvie PELLEQUER, *France, Montpellier*
Agnès PEROZ, *France, Strasbourg*
Marie-Jeanne PERRIN, *France, Lille*
Jean PERRIN, *France, Strasbourg*
François PLUVINAGE, *France, Strasbourg*
Maryvonne PRIOLET, *France, Lyon*
Jean-Paul QUELEN, *France, Strasbourg*
J.-C. RAUSCHER, *France, Strasbourg*
Jean-Claude REGNIER, *France, Lyon*
Nadja ACIOLY- REGNIER, *France, Lyon*
Gilles ROBERT, *France, Strasbourg*
Michel ROCHE, *France, Montpellier*
Janine ROGALSKI, *France, Paris*
Marc ROGALSKI, *France, Paris & Lille*
S. ROUSSET-BERT, *France, Strasbourg*
M.-O. SAUVANAUD, *France, Strasbourg*
O. Schladenhaufen, *France, Strasbourg*
Marguerite SCHMIDT, *France, Strasbourg*
Anne SCHULTZ, *France, Strasbourg*
Christian SCHULTZ, *France, Strasbourg*
Pierre SCHWARTZ, *France, Strasbourg*
Catherine SIMBSLER, *France, Strasbourg*
André STOLL, *France, Strasbourg*
Rudolf STRAESSER,*Allemagne, Bielefeld*
Laurence STUPFLER, *France, Strasbourg*
Chantal TIECHE, *Suisse, Neuchâtel*
C. TRUJILLO-MUNOZ, F*rance, Strasbourg*
Emile URLACHER, *France, Strasbourg*
Nicolas VEBREL, *France, Strasbourg*
Claudine VERGNE, *France, Montpellier*
Serge VERSTEEGH, *France, Strasbourg*
E. VIEILLARD BARON, *France, Strasbourg*
Brigitte WENNER, *France, Strasbourg*
Cathy WIATR, *France, Strasbourg*
C. WINSDOERFFER, *France, Strasbourg*
Moncef ZAKI, *Maroc, Fès*