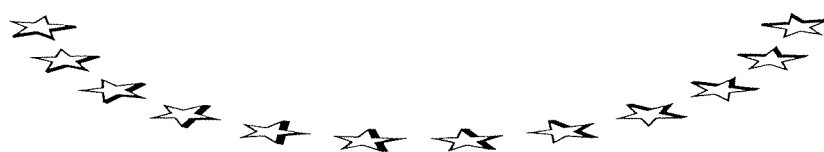


LES ETOILES DE

2000 - 2003

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES



Éducation
nationale



présentées par
l'Inspection Pédagogique Régionale,
les Equipes de Professeurs,
l'Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
de Strasbourg.

FASCICULE 7
EDITION FRANCAISE

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Sujets

de décembre 2000 à mars 2003

FASCICULE 7
EDITION FRANCAISE

Mathématiques Sans Frontières

Lycée Pasteur
24, rue Humann
F- 67000 Strasbourg

Tél : + (33) (0)3 88 15 70 60

Fax : + (33) (0)3 88 15 70 69

E-mail : msf@ac-strasbourg.fr

Site internet : http://www.ac-strasbourg.fr/microsites/math_s_msf

Présentation de la compétition : page 2

Introduction par M. le Recteur de l'Académie de Strasbourg : page 3

Année scolaire 2000/2001 - 12^e édition : page 5

Epreuve d'entraînement de décembre 2000 : page 6

Corrigé : page 10

Epreuve de mars 2001 : page 12

Corrigé : page 16

Année scolaire 2001/2002 - 13^e édition : page 19

Epreuve d'entraînement de décembre 2001 : page 20

Corrigé : page 24

Epreuve de mars 2002 : page 27

Corrigé : page 31

Année scolaire 2002/2003 - 14^e édition : page 35

Epreuve d'entraînement de décembre 2002 : page 36

Corrigé : page 40

Epreuve de mars 2003 : page 43

Corrigé : page 47

Mathématiques sans frontières

Mathematik ohne Grenzen

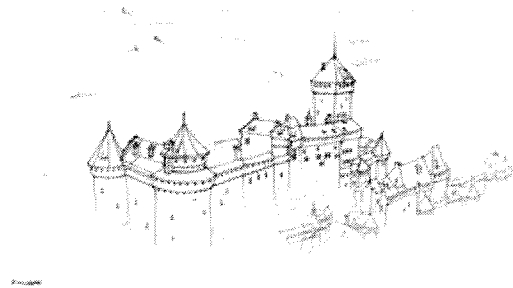
Matematica senza frontiere

Mathematics without frontiers

Matematika határok nélkül

Matematyka bez granic

...une compétition interclasses !



Un concours interclasses

- ♦ Des classes entières de troisième et de seconde ou de niveau équivalent dans des pays étrangers concourent entre elles.
- ♦ Une palette d'exercices variés leur est proposée (dix en troisième et treize en seconde).
- ♦ La solution de l'un des exercices doit être rédigée en langue étrangère.
- ♦ La classe s'organise pour résoudre les exercices en une heure et demie et rend une seule feuille-réponse pour chacun d'eux.

L'équipe d'organisation

- ♦ Elle est composée de professeurs, de chefs d'établissement et d'inspecteurs.
- ♦ Elle se réserve le droit de modifier le règlement de la compétition en cas de nécessité.
- ♦ Elle a créé une association culturelle et scientifique du nom de **Mathématiques sans frontières**.

Des exercices variés

- ♦ Ils sont de genres divers et de difficultés variées.
- ♦ Ils cherchent à favoriser le travail en équipe et s'adressent à tous les élèves.
- ♦ La rédaction d'un des exercices doit se faire en anglais, en allemand, en espagnol ou en italien.
- ♦ Chaque élève peut y trouver du plaisir selon ses goûts et ses compétences.

Pour quoi faire ?

- ♦ Ouvrir des frontières :
 - entre la France et les pays voisins,
 - entre les établissements scolaires, les entreprises et la cité,
 - entre les mathématiques et les langues vivantes,
 - entre les collèges et les lycées,
 - entre les élèves d'une classe.
- ♦ Favoriser :
 - l'intérêt pour les mathématiques,
 - le travail en équipe,
 - la participation de tous,
 - l'initiative des élèves,
 - la pratique d'une langue étrangère.

Participation en chiffres

année	nombre de classes	nombre d'élèves
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 875
1991/92	572	14 740
1992/93	1 370	34 645
1993/94	1 802	45 325
1994/95	2 142	54 801
1995/96	2 421	63 617
1996/97	2 551	63 712
1997/98	2 651	68 553
1998/99	2 878	74 856
1999/00	3 148	81 231
2000/01	3 496	87 374
2001/02	3 256	84 384
2002/03	5 052	128 437

- ♦ 14 langues, 17 pays, 40 secteurs d'organisation.

Comment s'inscrire ?

- ♦ Seules les classes entières de troisième, de seconde ou de niveau équivalent peuvent s'inscrire.
- ♦ La compétition s'adresse aux établissements publics ou privés.
- ♦ L'inscription se fait après accord entre la classe entière, le professeur de mathématiques et le chef d'établissement.

Calendrier annuel

- ♦ Septembre - octobre : inscription des classes,
- ♦ Décembre - janvier : épreuve d'entraînement,
- ♦ Mars : épreuve officielle,
- ♦ Mai : remises des prix.

De nombreux lots

- ♦ Sur chaque secteur concerné, deux palmarès sont établis : l'un pour les classes de troisième, l'autre pour les classes de seconde ou niveaux équivalents.
- ♦ Chaque élève d'une classe primée bénéficie d'une part du lot (par exemple : cadeau, voyage, spectacle, etc.).
- ♦ Les remises des prix par secteur se font en présence des classes gagnantes, de leurs professeurs, des personnalités locales, des parrains de la compétition et de la presse.
- ♦ Des lots de participation sont attribués par tirage au sort.

« Mathématiques sans Frontières »

Les nouvelles Etoiles 2000-2003

Créée en 1989 dans l'académie de Strasbourg par l'Inspection Pédagogique Régionale en collaboration avec l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, « Mathématiques sans Frontières » a rassemblé, chaque année, un nombre croissant d'élèves. En 2003, plus de 125 000 élèves de 15 à 17 ans dans une trentaine de pays d'Europe et d'ailleurs, y ont ainsi participé.

Si elle connaît cette durable réussite c'est grâce, en particulier, à

- l'originalité de la forme donnée à cette compétition : ce sont les classes entières qui y participent. La difficulté variée des exercices à résoudre permet à tous les élèves d'apporter leur concours à la performance de leur classe pour peu qu'ils sachent s'organiser. Le résultat obtenu est celui d'un travail d'équipe,
- l'originalité des exercices proposés : présentés sous forme ludique, ceux-ci font appel à des connaissances assez restreintes mais à des qualités et des compétences très diverses que développent, particulièrement, la pratique des mathématiques. De plus, le premier exercice proposé est à résoudre dans une langue étrangère, ce qui marque d'emblée la volonté affichée de dépasser les frontières entre les élèves,
- l'originalité d'une organisation très décentralisée, avec autant d'équipes d'organisation constituées de professeurs, d'inspecteurs et de chefs d'établissement qu'il est nécessaire, et par ailleurs couplée avec l'existence d'une épreuve unique pour tous les candidats et élaborée à partir des propositions de toutes ces équipes.

En cette année 2004, qui est celle de l'élargissement de l'Europe, « Mathématiques sans Frontières » publie, en un nombre de langues impressionnant (sept pour l'année 2002-2003), les annales 2000-2003 des sujets posés en compétition. Témoignage de la réalité du remarquable esprit de collaboration qui règne entre la multitude des équipes organisatrices et de la compétence de l'équipe centralisatrice qui a en charge la conception des sujets.

Ces annales s'appellent « les étoiles 2000-2003 ». Elles méritent bien leur nom tant elles font preuve d'originalité tant elles recèlent de trésors d'imagination, de réflexion, de suspense et tant elles suscitent la passion de chercher, provoquant l'« Euréka » de celui qui découvre une solution. Que soient nombreux celles et ceux qui profiteront de leur rayonnement !



Gérald CHAIX
Recteur de l'Académie de Strasbourg

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 2000-2001

12^e édition

Mathématiques sans frontières

organisée par l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

ÉPREUVE
D'ENTRAÎNEMENT
DÉCEMBRE 2000

- Des explications ou des justifications sont demandées pour tous les exercices.
- Toute solution même partielle sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice n°1

7 points

Jetons un œil

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots).

Genoveva zeigt ihrer Freundin Anne einen Zaubertrick. Mit dem Rücken zu Anne sagt sie zu ihr :

„ Lege 13 Spielmarken, die von 0 bis 12 nummeriert sind, in einer Reihe vor dich hin. Ordne sie von links nach rechts in absteigender Reihenfolge an. Drehe sie um, damit ihr Wert verdeckt ist.

Füge nun in derselben Reihe rechts 12 weitere, zufällig ausgewählte Spielmarken an, deren Wert ebenfalls verdeckt ist.

Jetzt verschiebst du von diesen 12 hinzugekommenen Marken eine bestimmte Anzahl an das linke Ende der Reihe. “

Genoveva dreht sich um und sieht vor sich eine Reihe von 25 gleichen Spielmarken. Sie nimmt eine davon und erkennt, wie viele Marken verschoben wurden.

Erkläre diesen Trick.

Genevieve shows her friend Anne a magic trick. With her back to Anne, she gives her the following instructions :

« Lay out 13 tokens numbered 0 to 12 in a straight line, setting them in decreasing order from left to right

Then turn them face down to hide the numbers written on them.

To the right of those already laid out but along the same line, add twelve more tokens picked at random with their faces down.

End by moving to the left end of the line some of the tokens that have just been added. »

Genevieve then turns round, facing a line of 25 identical tokens. She picks one and it tells her how many tokens have been moved by Anne.

Explain what the trick is.

Genoveffa mostra alla sua amica Anna un gioco di magia. Con le spalle girate le dice :

« Allinea 13 gettoni numerati da 0 a 12 sistemandoli con valore decrescente da sinistra a destra.

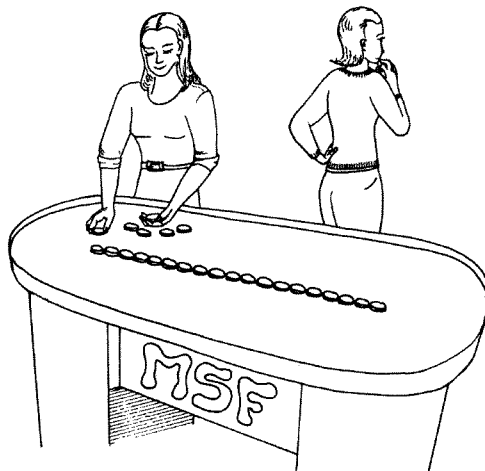
Girali per nascondere i loro valori.

Aggiungi sulla stessa linea, alla destra di quelli già sistemati, 12 altri gettoni scelti a caso essendo i loro valori nascosti.

Infine, sposta a sinistra della linea un certo numero di questi ultimi 12 gettoni ».

Genoveffa si gira, quindi, e vede una linea di 25 gettoni tutti identici. Ne prende uno solo che le indica il numero dei gettoni spostati da Anna.

Spiegare questo gioco di magia.



Genoveva le enseña un truco de magia a su amiga Ana. De espaldas a ella, le dice :

« Pon en una línea recta 13 fichas numeradas de 0 a 12 , colocándolas en orden decreciente de su valor y de izquierda a

derecha.

Ponlas cara abajo para que no se pueda ver el valor de cada una.

A la derecha de las fichas ya colocadas y en la misma línea, pon otras 12 fichas , elegidas por azar y también cara abajo.

Por fin, desplaza a la izquierda de la línea algunas fichas sacadas de entre éstas últimas. »

Genoveva se vuelve y ve una línea de 25 fichas idénticas. No saca más que una ficha y esta ficha le indica el número de fichas desplazadas por Ana.

Explicar el truco de magia.

Exercice 2
5 points

Pas facile à ...

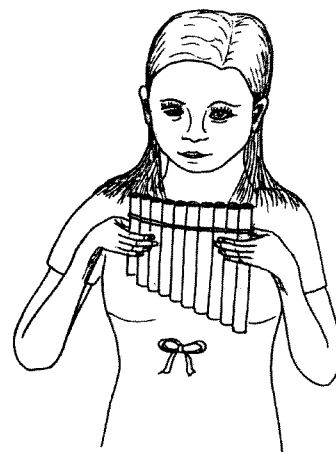
Aurélien veut fabriquer une flûte de Pan formée de 10 tuyaux donnant une suite de 10 notes qu'elle appelle "do - ré - mi - fa - sol - la - si - do - ré - mi".

Le tuyau qui donne le son le plus grave a une longueur de 16 cm.

Si elle divise la longueur d'un tuyau quelconque par 2, elle obtient une note plus aiguë située une octave au-dessus.

Si elle prend les $\frac{2}{3}$ de la longueur d'un tuyau quelconque, elle obtient une note plus aiguë située une quinte au-dessus. Exemples : do - sol, ré - la.

Sans utiliser d'autres longueurs, calculer les longueurs exactes des 10 tuyaux, les ranger dans l'ordre décroissant puis représenter la flûte d'Aurélien à l'échelle 1. Le diamètre extérieur des tuyaux est égal à 1 cm.

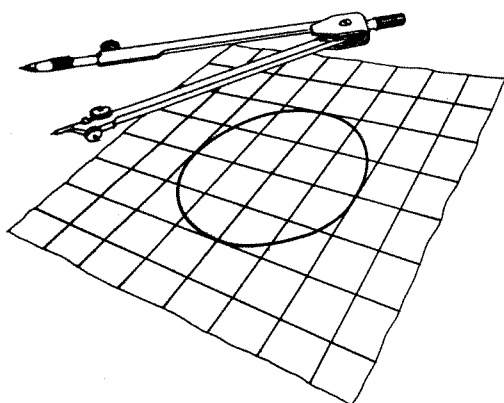


Exercice 3
7 points

Une douzaine

Sur un quadrillage formé de carrés, on trace un cercle dont le centre est un nœud du quadrillage et le rayon est le double du côté des carrés. Ce cercle coupe le quadrillage en 12 points qui sont les sommets d'un dodécagone.

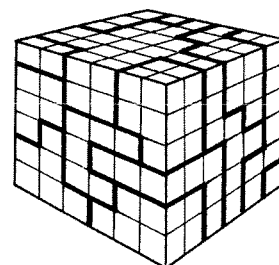
Ce dodécagone est-il régulier ? Justifier.



Exercice 4
5 points

Cuboloriage

Dans un univers où tout est cubique, voici la mappemonde d'une planète dont les faces sont formées de 36 carrés. En gras sont tracées les frontières des pays de cette planète.



Colorier puis coller sur la feuille réponse une mappemonde en utilisant le moins de couleurs possible.

Le pays n°1 est colorié en noir, le n°2 en vert, le n°3 en bleu, etc. Deux pays voisins ne sont pas colorés de la même couleur et les arêtes du cube ne sont pas des frontières.

Il doit y avoir à la fin égalité des couleurs en terme d'aires.

Exercice 5
7 points

Le 8^e degré

Un vendeur de cordes d'escalade dispose d'une table d'exactly 1 mètre de long.

Les opérations qui lui sont possibles sont : mesurer un mètre, ajouter ou retrancher un mètre et doubler les longueurs.

Anaïs a besoin d'une corde de 44 m, Barbara d'une corde de 63 m et Claude d'une corde de 72 m.

Le vendeur prépare séparément ces cordes et a besoin, pour chacune d'elles, de 8 opérations exactement.

Comment fait-il dans chaque cas ? Justifier.

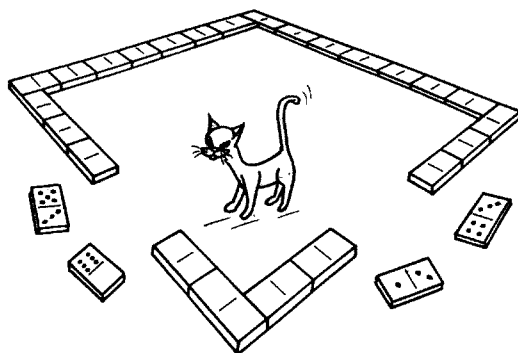


Exercice 6 5 points

Dominos magiques

Annamaria a placé les 28 pièces différentes d'un jeu de dominos bout à bout, dans un ordre quelconque pour former les côtés d'un carré. Les sommes des points de chaque côté du carré sont égales.

Dessiner une telle disposition.



Exercice 7 7 points

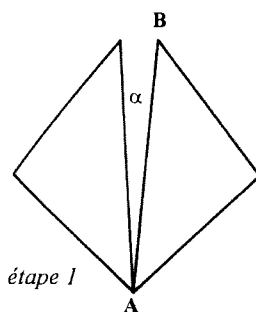
Fractale de poumon

On appelle "fractale" une figure géométrique où l'on retrouve dans les parties la même structure que dans le tout mais à des échelles différentes.

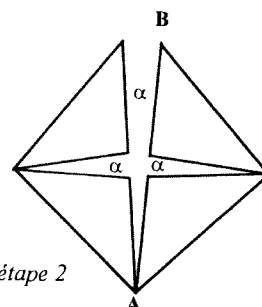
Voici les trois premières étapes de la construction de la fractale de poumon.

Tous les triangles sont isocèles et ont les mêmes angles.

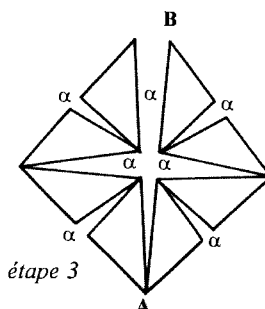
On prend $\alpha = 12^\circ$ et $AB = 15$ cm.



étape 1



étape 2



étape 3

Après avoir calculé les angles des triangles, construire la figure à l'étape suivante.

Exercice 8 5 points

Le Bogue

Ma calculatrice est détraquée :
quand je tape sur la touche 0,
elle affiche et enregistre 1 ;
quand je tape sur la touche 1,
elle affiche et enregistre 2 ;
quand je tape sur la touche 2,
elle affiche et enregistre 3 ;
etc ; quand je tape sur la touche
9, elle affiche et enregistre 0.



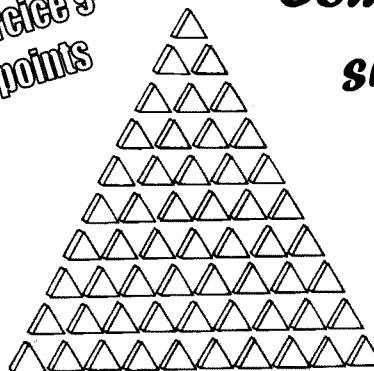
Mais toutes les autres touches fonctionnent correctement.
Ainsi pour effectuer $12 + 34$ la calculatrice affiche $23 + 45$
et donne comme résultat 68.

Malgré cela, il peut arriver que pour certaines additions tapées au clavier, ma calculatrice affiche le bon résultat.

Donner un exemple d'une telle addition. Expliquer.

Exercice 9 7 points

Comptes suisses



Avec les dix chiffres de notre numération, **former successivement dix entiers**, le premier de 1 chiffre, le second de 2 chiffres et ainsi de suite, jusqu'au dixième formé des dix chiffres, en ne faisant qu'ajouter, à chaque étape, un nouveau chiffre à droite ou à gauche du nombre précédent, et de telle sorte que le premier nombre soit divisible par 1, le second par 2, le troisième par 3, et ainsi de suite jusqu'au dixième, qui doit être divisible par 10.

Exercice 10 10 points

A l'extérieur

Alex le clown possède une veste de couleur rouge à l'extérieur et bleue à l'intérieur. Il découpe dans cette veste un triangle rectangle et il espère, en le retournant, fermer le trou fait dans la veste, de façon à obtenir extérieurement un triangle bleu sur fond rouge.

Il s'aperçoit alors qu'il ne peut fermer le trou avec le triangle retourné mais il y réussit en découpant le triangle. Il constate alors qu'il pourrait également retourner un triangle quelconque.

Donner le découpage d'un triangle rectangle puis d'un triangle quelconque. Justifier.



Spécial 2^{de}

Exercice 11 5 points

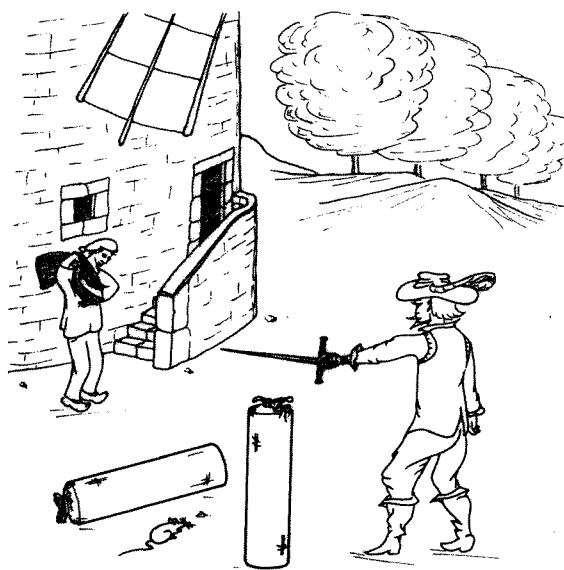
Problème de pieds

Chez le meunier Tudor, le mousquetaire Jacques commande 1 sac de blé cylindrique de 4 pieds de haut et 6 pieds de tour. Le meunier lui propose à la place 2 sacs de blé cylindriques de 4 pieds de haut mais de 3 pieds de tour chacun, en lui affirmant que cela donne le même volume de blé.

Jacques, qui sait calculer, dégaine son épée et la pointe sur le meunier.

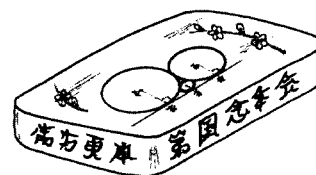
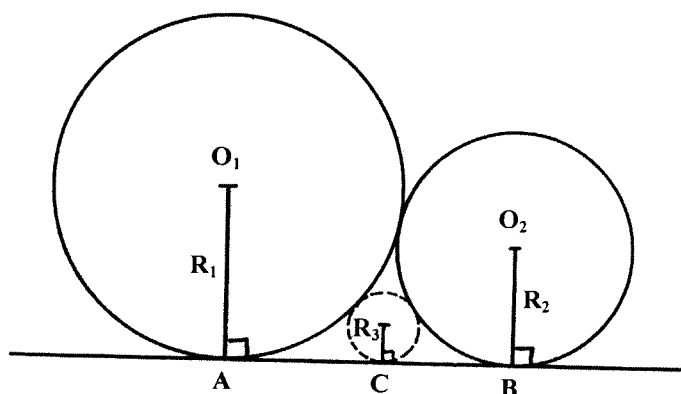
Donner l'explication mathématique de son geste.

D'après Jacques OZANAM (1640 - 1717) auteur d'un recueil de divertissements mathématiques.



Exercice 12 7 points

Made in Japan



Cette figure est extraite d'une tablette de bois peinte, datant de 1824, de la province de Gumma au Japon.

Elle montre trois cercles tangents à la droite (AB) et deux à deux tangents.

On donne : $R_1 = 9$ cm, $R_2 = 4$ cm et $AB = 12$ cm.

Calculer R_3 .

Exercice 13 10 points

C'est puissant

Eliane a trouvé sur sa calculatrice une puissance de 2000 qui, dans l'écriture décimale, compte exactement 100 chiffres. Elle se demande s'il existe une puissance de 2000 qui s'écrive avec 1000 chiffres exactement.

Donner la puissance de 2000 trouvée par Eliane puis répondre à sa question. Justifier.



Corrigé de l'épreuve d'entraînement de décembre 2000

Exercice 1 : Jetons un œil

Geneviève retourne le jeton qui se trouve au milieu de la rangée (le 13^{ème}) : il indique le nombre de jetons déplacés par Anne.

Explication : Une fois qu'Anne a posé les 25 jetons, le 13^{ème} jeton a pour valeur 0.

Si elle en ramène 1 à gauche, celui du milieu est décalé d'un rang et a pour valeur 1 ;

Si elle en ramène 2 à gauche, celui du milieu est décalé de 2 rangs et a pour valeur 2 ;

etc...

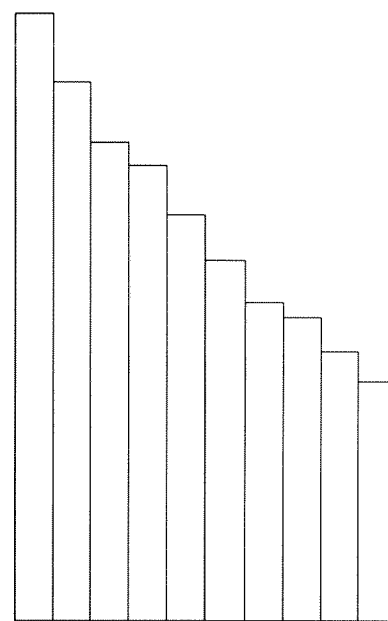
Si Anne déplace n jetons ($n \leq 12$) alors le jeton du milieu aura pour valeur n .

Exercice 2 : Pas facile à ...

Le calcul se fait en suivant l'ordre « do - sol - ré 2 - ré - la - mi 2 - mi - si »

et « do - do 2 - fa ».

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do 2	ré 2	mi 2
16	$\frac{128}{9}$	$\frac{1024}{81}$	12	$\frac{32}{3}$	$\frac{256}{27}$	$\frac{2048}{243}$	8	$\frac{64}{9}$	$\frac{512}{81}$
	$\approx 14,2$	$\approx 12,6$		$\approx 10,7$	$\approx 9,5$	$\approx 8,4$		$\approx 7,1$	$\approx 6,3$



La flûte d'Aurélien à l'échelle 1/2.

En partant de 16 cm pour do, pour une flûte plus grande, on obtient 0,125 cm pour la 7e octave ($16 \times 0,5^7$) mais 0,1233 cm par 12 quintes ($16 \times (2/3)^{12}$). Les calculs peuvent donc conduire à des différences de mesures qui seront invisibles sur le dessin. En effet, mathématiquement aucune puissance de 2 n'est une puissance de 3 et vice-versa. Cette méthode de construction des fréquences et donc des longueurs d'ondes est attribuée à Pythagore.

Exercice 3 : Une douzaine

Le triangle AOC est équilatéral : en effet $CO = CA$ (car (CH) est la médiatrice de [OA]) et $OA = OC$ (= rayon).

De même le triangle OBD est équilatéral et [BI] est la bissectrice de $\widehat{OBD}$.

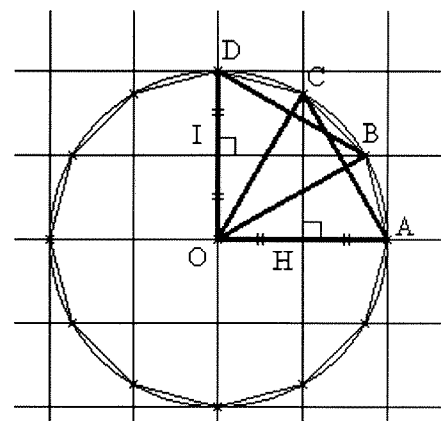
D'où $\widehat{IBO} = 30^\circ$ et $\widehat{BOA} = 90^\circ - \widehat{BOD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Par conséquent $\widehat{BOC} = \widehat{COD} = 30^\circ$ en utilisant les triangles équilatéraux OAC et OBD.

Idem pour les trois autres quarts de cercles.

Le dodécagone est inscrit dans un cercle avec tous les angles au centre de 30° : il est régulier.

Remarque : il y a d'autres solutions notamment en passant par la trigonométrie.



Exercice 4 : Cuboloriage

Le cube compte en tout $6^3 = 216$ carrés. Il faut 4 couleurs, coloriant chacune 54 carrés de la manière suivante :

Exercice 5 : Le 8^{ème} degré

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{-1} 11 \xrightarrow{\times 2} 22 \xrightarrow{\times 2} 44$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} 64 \xrightarrow{-1} 63$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+1} 9 \xrightarrow{\times 2} 18 \xrightarrow{\times 2} 36 \xrightarrow{\times 2} 72$$

Exercice 9 : Comptes suisses

Voici deux exemples :

7 - 72 - 372 - 3724 - 37245 - 372456 - 13724560 - 813724560

- 9813724560

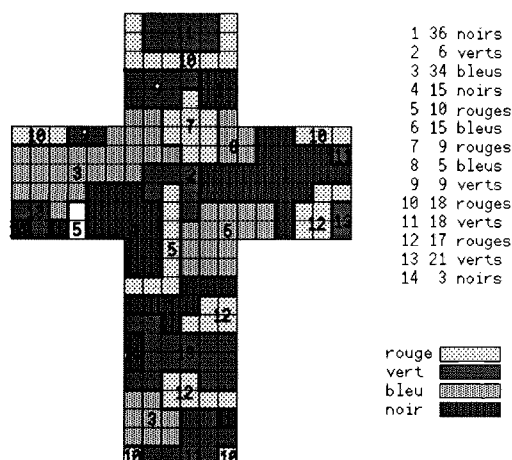
et 1 - 12 - 312 - 7312 - 73125 - 731256 - 7312564 - 73125648 - 731256489 - 7312564890

Remarque :

Une variante de cet exercice consiste à rajouter le chiffre suivant toujours à gauche.

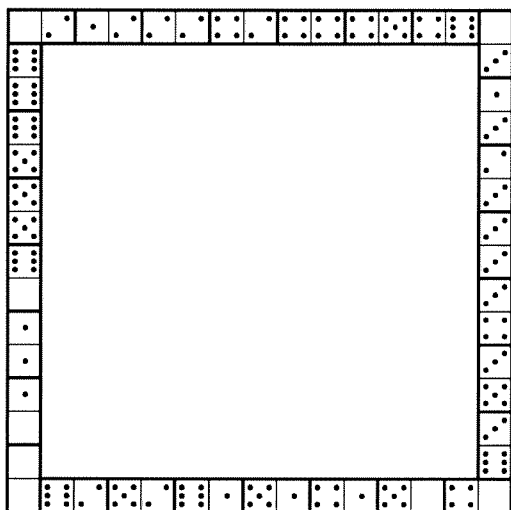
C'est plus dur et plus long et il n'y a qu'une seule solution mais c'est très intéressant, essayez.

Solution de la variante : 3816547290.



Exercice 6 : Dominos magiques

Voici une solution parmi d'autres :



Exercice 8 : Le bogue

Les nombres de 2 chiffres donnent généralement 11 de plus qu'eux-mêmes, sauf les nombres finissant par 9 (1 de plus) ou commençant par 9 (89 de moins), et 99 qui donne 99 de moins. Deux possibilités parmi d'autres :

$$10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 99 = 189$$

$$21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 00 = 189.$$

$$19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 9 = 180$$

$$20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 0 = 180.$$

Exercice 10 : À l'extérieur

Un triangle isocèle retourné ferme son trou. Dans le triangle rectangle, il suffit donc de découper suivant la médiane relative à l'hypoténuse et de retourner les 2 triangles isocèles obtenus.

Dans un triangle quelconque, on trace une hauteur (non extérieure au triangle si le triangle est obtusangle : c'est à dire s'il a un angle obtus) et on applique la méthode du triangle rectangle 2 fois.

Remarques : * Pour les triangles non-obtusangles (3 angles aigus), on peut aussi utiliser les médiatrices. Les 3 sommets et le centre du cercle circonscrit forment 3 triangles isocèles qu'il suffit de découper et de retourner.

* Une dernière méthode valable pour tous les triangles : construire le cercle inscrit. Les trois quadrilatères formés par un sommet, le centre du cercle inscrit et 2 points de contact sont retournables car ils ont un axe de symétrie.

Exercice 11 : Problème de poids

Le sac de blé de 4 pieds de hauteur et de 6 pieds de tour a pour volume : $4 \times \left(\frac{6}{2\pi}\right)^2 \times \pi = \frac{36}{\pi}$ en "pieds cubes".

Les 2 autres sacs de 4 pieds de hauteur et de 3 pieds de tour ont un volume total de : $2 \times 4 \times \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 \times \pi = \frac{9}{\pi}$ en "pieds cubes".

Donc deux sacs ont un volume total qui est la moitié de celui du grand sac. Ceci explique le geste du mousquetaire Jacques.

Exercice 12 : Made in Japan

$$O_1M = 9 - R_3 \text{ et } O_1O_3 = 9 + R_3. \quad O_2N = 4 - R_3 \text{ et } O_2O_3 = 4 + R_3.$$

Le théorème de Pythagore, appliqué aux triangles rectangles O_1MO_3 et O_2NO_3 , donne :

$$O_3M^2 = O_1O_3^2 - O_1M^2 = (9 + R_3)^2 - (9 - R_3)^2 = 36 R_3 \text{ soit } O_3M = 6$$

$$\text{De même, } O_3N = 4. \text{ Comme } O_3M + O_3N = AB, \text{ on obtient : } 10 = 12$$

$$\text{soit } R_3 = 1,2 \text{ et } R_3 = 1,44 \text{ cm. Plus généralement, on a :}$$

Exercice 13 : C'est puissant

$$2000^{30} = (2 \times 10^3)^{30} = 2^{30} \times 10^{90} = 1\,073\,741\,824 \times 10^{90} \text{ donc } 2000^{30} \text{ a } 100 \text{ chiffres.}$$

$$2000^{302} = 2^{302} \times 10^{906} \approx 8,148 \times 10^{90} \times 10^{906} \approx 8,148 \times 10^{996} \text{ donc } 2000^{302} \text{ a } 997 \text{ chiffres.}$$

$$2000^{303} = 2^{303} \times 10^{909} \approx 1,6296 \times 10^{91} \times 10^{909} \approx 1,6296 \times 10^{1000} \text{ donc } 2000^{303} \text{ a } 1\,001 \text{ chiffres.}$$

Il n'existe aucune puissance de 2000 avec 1000 chiffres.

Exercice 7 : Fractale de poumon

Calcul d'un angle à la base des triangles isocèles :

$$\widehat{AOC} + \widehat{COB} = \widehat{AOB} = 180^\circ$$

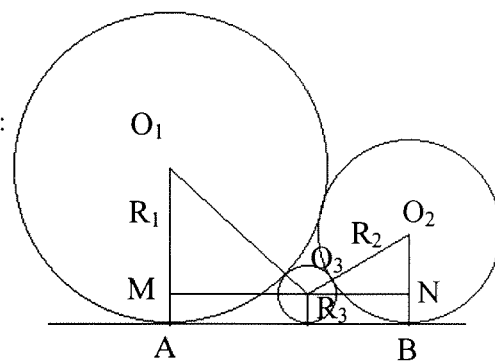
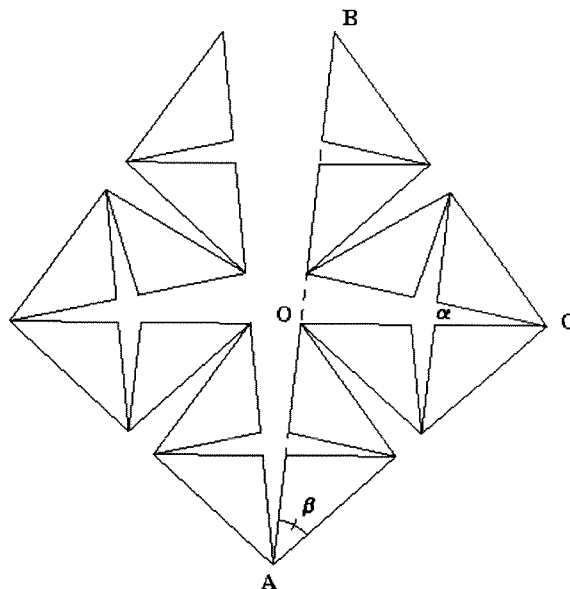
$$\text{or } \widehat{AOC} = 180^\circ - 2\beta \text{ et } \widehat{COB} = 180^\circ - (2\beta + \alpha)$$

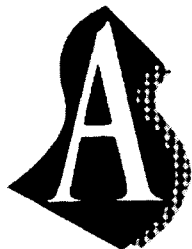
$$\text{donc } 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - (2\beta + \alpha) = 180^\circ$$

$$\text{en simplifiant } 180^\circ - 4\beta - \alpha = 0$$

$$\text{d'où } \beta = \frac{180 - \alpha}{4} = 45 - \frac{\alpha}{4} = 45 - \frac{12}{4} = 45 - 3 = 42^\circ.$$

$$\text{L'angle obtus des triangles isocèles mesure } 180^\circ - 2 \times 42^\circ = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ.$$



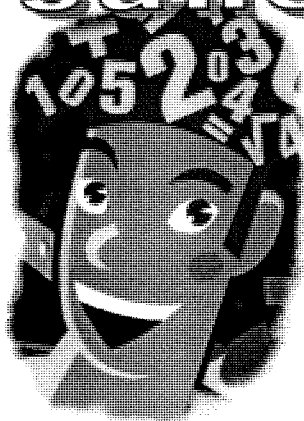


ACADEMIE
DE STRASBOURG

Institut de Recherche de
l'Enseignement des
Mathématiques
Inspection Pédagogique
Régionale de
Mathématiques

Compétition interclasses de 3^e & 2^{de}

Mathématiques sans frontières



EPREUVE DU 13 MARS 2001

- ⌘ Toute solution même partielle sera examinée.
- ⌘ Le soin sera pris en compte.
- ⌘ Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.

exercice 1
7 points

A ton tour

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

Nick fans out in front of Francis a deck of twenty-five cards all of which are different. Nick then asks Francis to pick one without showing its face.

Nick then sets out the first five cards in a line and places the next five on top of the first five until he gets five five-card packs.

Francis is then asked to point at the pack that includes the card he first picked. The next thing Nick does is to collect the five packs, placing the one Francis pointed at in the middle of the full pack. He then deals out the cards as before until he gets the five five-card packs again.

For the second time, Francis is asked to point at the pack that includes the card he had originally picked. Nick is then able to show him which card it was.

Explain the trick.

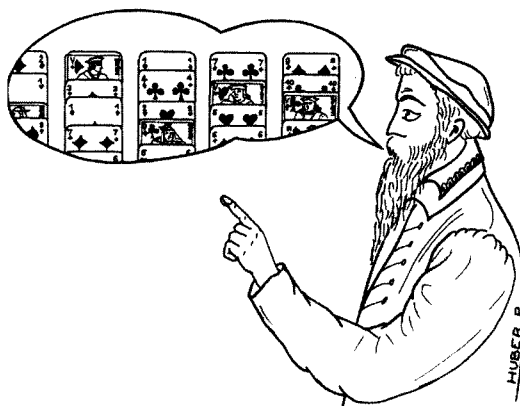
Nicola mostra a Francesco un ventaglio di 25 carte tutte diverse e gli chiede di sceglierne una senza mostrargliela.

Dispone le prime 5 carte in riga, poi altre 5 sulle precedenti in successione e così di seguito fino ad ottenere 5 file di 5 carte ognuna.

Francesco deve indicare la fila in cui si trova la carta scelta; Nicola raccoglie ogni fila ponendo le carte di quella indicata da Francesco al centro del mazzo. Poi ridistribuisce le carte nello stesso modo per formare altre 5 file di 5 carte.

Francesco indica di nuovo la fila in cui si trova ora la carta scelta in precedenza. A questo punto Nicola è in grado di rivelare questa carta.

Spiegare il procedimento.



Explicar este truco.

Nicolas zeigt François einen Fächer aus 25 Karten, die alle verschieden sind. Er bittet ihn, eine Karte auszuwählen, ohne sie zu zeigen.

Nun legt er die ersten fünf Karten offen in eine Reihe. Die nächsten fünf Karten legt er darüber, und so fährt er fort, bis fünf Stapel aus je fünf Karten entstanden sind.

Nun muss François angeben, in welchem Stapel sich die Karte befindet, welche er ausgewählt hat. Nicolas sammelt die fünf Stapel ein, wobei er den von François bezeichneten Stapel in der Mitte des Pakets einordnet. Danach teilt er die Karten in gleicher Weise aus, so dass wieder fünf Stapel zu je fünf Karten entstehen.

François gibt erneut den Stapel an, in welchem sich seine Karte befindet, worauf Nicolas ihm diese Karte zeigt.

Erkläre diesen Trick.

D'après Nicolas CHUQUET (1445 – 1500).

exercice 2 5 points

Famille de carrés

Après avoir tracé un carré de 6 cm de côté, Pierre demande à sa fille Nathalie de partager celui-ci en 9 morceaux carrés de côtés mesurés par un nombre entier de centimètres.

Nathalie trouve rapidement un partage et se demande s'il y en a d'autres.

Deux partages constitués des mêmes carrés mais placés différemment sont considérés comme identiques.

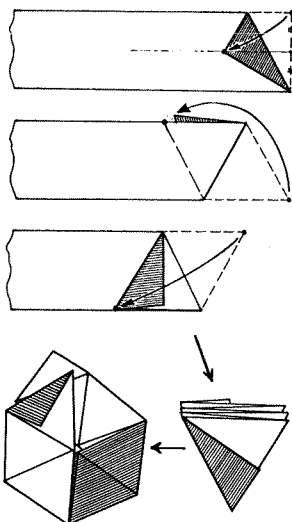


Représenter toutes les solutions possibles.

exercice 3 7 points

Hexagami

Dans un livre d'origami on trouve le pliage décrit ci-contre, réalisé à partir d'une bande de papier rectangulaire de $12\sqrt{3}$ cm sur 3,6 cm et qui permet d'obtenir un hexagone régulier. Le recto et le verso de la bande sont de deux couleurs différentes.



Réaliser puis coller l'hexagone sur la feuille-réponse.

Calculer son aire.

exercice 6 5 points

J'aimerais tant voir Syracuse ...

John, étudiant à l'université de Syracuse (Etats Unis), calcule des suites de nombres entiers.

Il choisit d'abord le premier entier de la suite et il calcule le suivant avec ce programme :

- si l'entier est pair, le suivant est égal à sa moitié ;
- si l'entier est impair, le suivant est obtenu en multipliant cet entier impair par 3 et en ajoutant 1.

Puis il applique à nouveau ce programme au résultat et ainsi de suite.

Il choisit 1 pour entier de départ et obtient la première suite. Ensuite il choisit 2, puis 3 et ainsi de suite jusqu'à 25. Il obtient ainsi 25 suites.

Il constate une étonnante propriété vérifiée par ces 25 suites.

Présenter astucieusement les calculs de John et énoncer cette propriété.

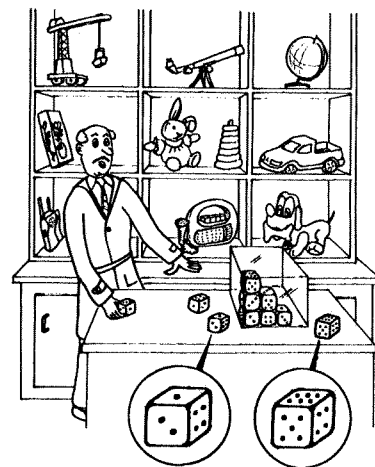
Cette propriété n'a pas encore été démontrée pour tout entier choisi au départ.

exercice 4 5 points

Le plein de points

Monsieur Victor vend des dés dans son magasin de jouets. Il peut ranger exactement 60 dés dans une boîte transparente de forme parallélépipédique : 5 dans le sens de la longueur, 4 dans le sens de la largeur et 3 dans le sens de la hauteur.

Il remplit la boîte de sorte que la somme des points visibles sur les 6 faces de la boîte soit maximale.



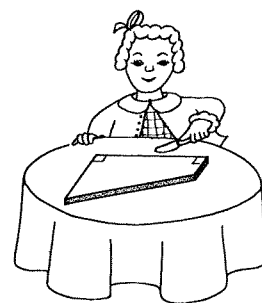
Quelle est cette somme ? Expliquer.

exercice 5 7 points

Aire coupable

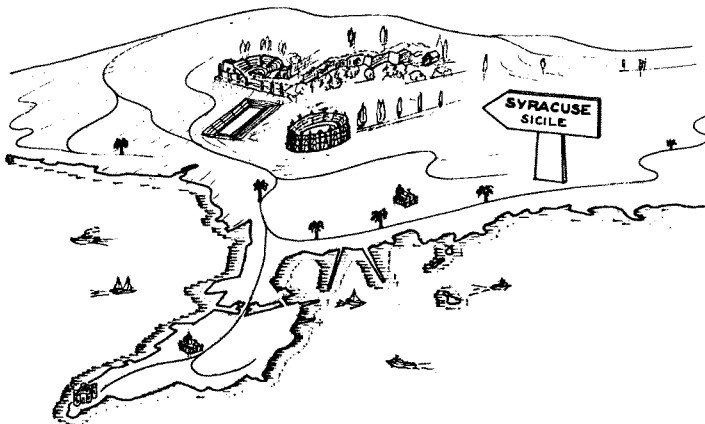
Marie-Odile et Julie doivent se partager équitablement le reste d'un gâteau. Ce reste est un trapèze rectangle dont les bases mesurent 1 dm et 3 dm et la hauteur 4 dm.

Julie exige que les parts aient la même aire et la même forme. Marie-Odile trouve la solution en un seul coup de couteau rectiligne.



Dessiner le gâteau à l'échelle 1/5 puis marquer le trait de coupe.

Justifier que les deux morceaux ont la même aire et la même forme.

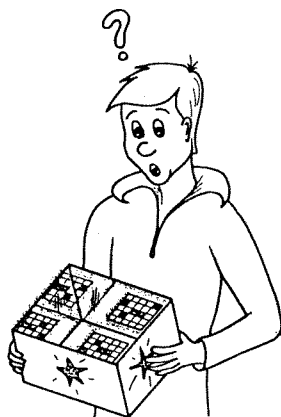


exercice 7 7 points

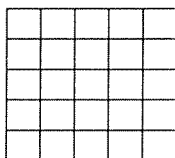
Oh mon beau miroir ...

Autour de la grille centrale se trouvent 4 miroirs magiques.

Ces miroirs reflètent parfaitement les cases noires. Pour chaque nombre de la grille centrale, le reflet est inchangé par 2 miroirs alors que les 2 autres miroirs changent le reflet : l'un reflète l'entier qui le précède et l'autre l'entier qui le suit. Le rôle des miroirs peut changer selon la case de la grille centrale.



Reconstituer sur la feuille de réponse l'image aperçue sur le miroir du haut.



5	4	2		8
8		9		2
3			6	3
7	1	5	4	
	7	8	5	2

	4			5
				3
4				
	3			8
1		8		

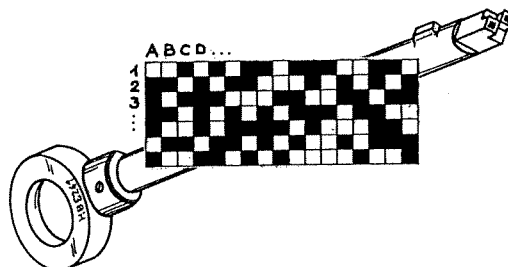
4	3	0	5	9
8	4	7		1
3			7	
9	1	6		
	5	8	4	

0	6	7	6	
	2	6	2	
5	6			4
1			2	7
8	3		3	5

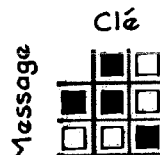
exercice 8 5 points

www.cache.cache

Pour communiquer sur Internet, Alice et Robert codent ou décodent leur message avec la clé suivante formée de pixels noirs ou blancs.

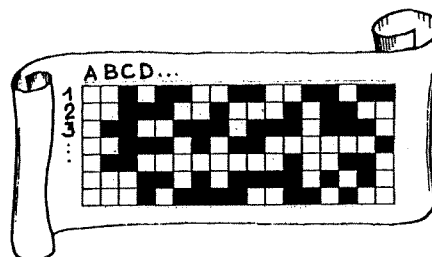


Pour coder ou décoder le message qui a les mêmes dimensions que la clé, on le pose sur la clé et, pour chaque couple de pixels de mêmes coordonnées, on applique l'opération suivante :



Deux pixels de même couleur donnent un pixel noir et deux pixels de couleurs différentes donnent un pixel blanc.

Voici le message codé envoyé par Robert à Alice.



Représenter la grille décodée. Quel est le message ?
Cette méthode de cryptage est réellement utilisée.

exercice 9 7 points

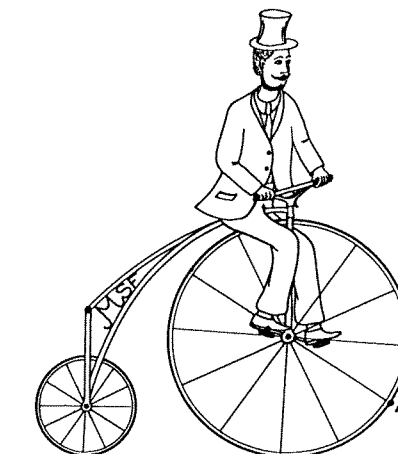
Cyclopède

Benjamin observe Emilien faire du vélocipède.

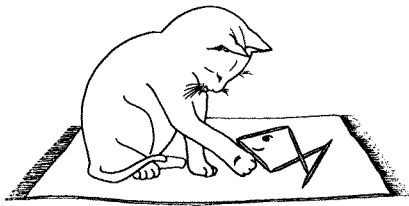
Il s'imagine la trajectoire du point A de la roue avant du vélocipède lorsque celle-ci effectue un tour et demi sans glisser.

La roue a 150 cm de diamètre. Au départ le point A est en contact avec le sol.

A l'échelle 1/30, représenter la position de la roue et du point A tous les huitièmes de tour. Puis tracer la trajectoire du point A.



exercice 10 10 points

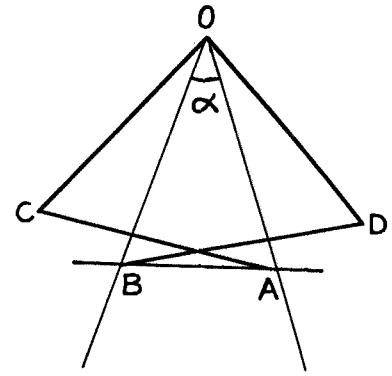


La curedentrice

Eric a une méthode pour matérialiser avec un cure-dent la bissectrice d'un angle α de mesure strictement inférieure à 60° en utilisant uniquement 5 cure-dents de même longueur.

Pour un angle donné, il place d'abord 3 cure-dents puis en déplace 2 pour aboutir à la disposition indiquée par la figure ci-contre.

Il sait aussi matérialiser la bissectrice d'un angle dont la mesure est comprise strictement entre 60° et 120° avec seulement 4 cure-dents.



Dans chacun des deux cas, décrire toutes les étapes des manipulations en illustrant par des figures. L'épaisseur des cure-dents est négligeable.

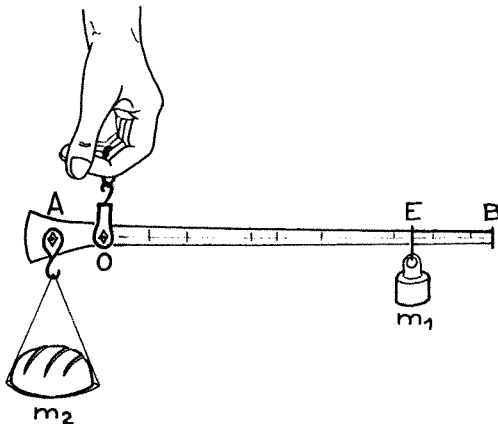
exercice 11 5 points

Quel fléau ?

La balance romaine comporte un fléau gradué entre O et B et une masse de 500 g qui peut coulisser sur [OB].

Pour mesurer une masse inconnue de m grammes, on l'accroche en A et, tenant la balance suspendue en O, on déplace la masse de 500 g entre O et B jusqu'à l'équilibre : la masse est alors suspendue en E.

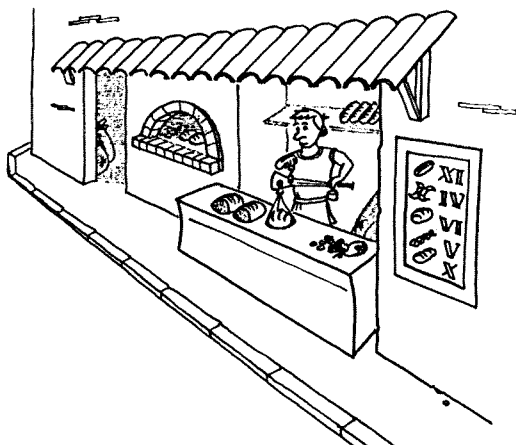
On a alors la relation : $OA \times m = OE \times 500$.



On sait que $AB = 24$ cm.

Avec $m = 2$ kg la balance est à l'équilibre si $AE = 20$ cm.

Calculer la position de O sur [AB] puis construire la graduation de la balance de 250 g en 250 g.

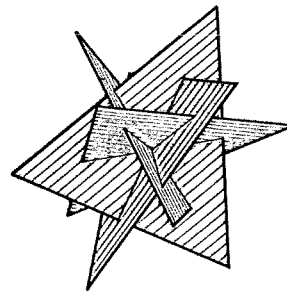


exercice 12 7 points

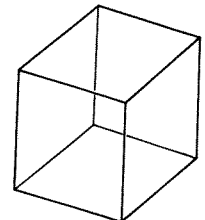
Mise en boîte

Le dodécapointe représenté ci-dessous est constitué de 4 triangles équilatéraux de même côté et deux à deux sécants.

Il a été obtenu à partir d'un cube : les sommets des triangles sont les milieux des arêtes du cube.



Sur une vue en perspective semblable à la vue ci-contre, représenter en traits pleins les côtés des 4 triangles du dodécapointe. Chaque triangle sera d'une couleur différente.



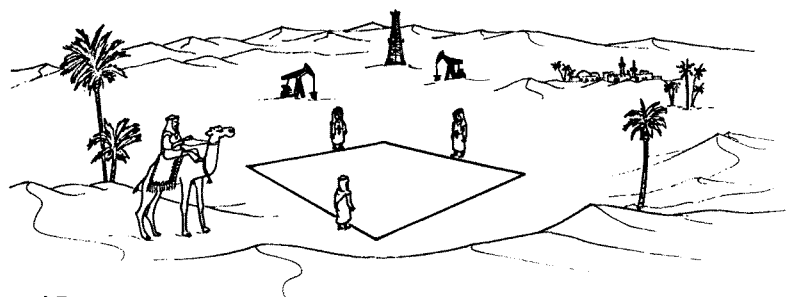
exercice 13 10 points

Des idées et du pétrole

L'Emir Abel possède un champ de pétrole carré.

Il décide d'en donner une partie à ses 3 fils : pour cela, ils doivent se placer sur les côtés du champ et ils recevront le triangle formé par leurs 3 positions.

Comment doivent-ils se placer pour que le triangle ait la plus grande aire possible ? Justifier.

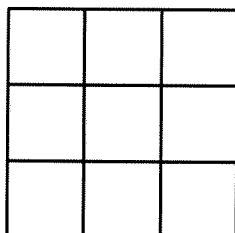


Corrigé de l'épreuve de mars 2001

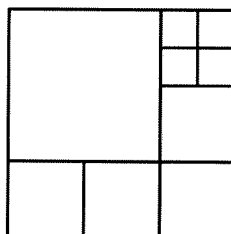
Exercice 1 : A ton tour

Après la 1^{ère} répartition des 25 cartes en tas de 5 cartes et l'indication de François, Nicolas prend le tas montré par François en le plaçant au milieu du paquet. Les cartes de ce tas "médian" se trouveront lors de la 2^{ème} répartition entre la 11^{ème} et la 15^{ème} carte soit dans la 3^{ème} ligne de chaque nouveau tas. (Chaque tas précédent "colonne" devient une ligne) La deuxième indication de François détermine la carte qui se trouve au milieu du tas montré.

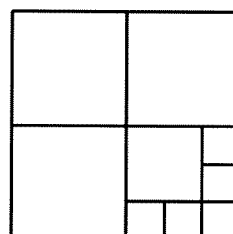
Exercice 2 : Famille de carrés



$$9 \times 2^2 = 6^2$$

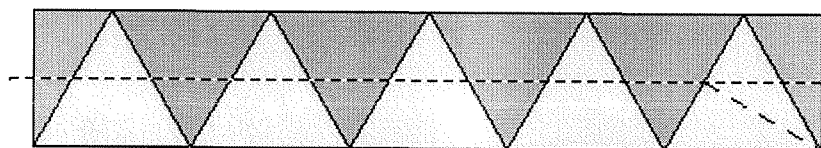


$$1 \times 4^2 + 4 \times 2^2 + 4 \times 1^2 = 6^2$$



$$3 \times 3^2 + 1 \times 2^2 + 5 \times 1^2 = 6^2$$

Exercice 3 : Hexagami



Une construction précise, comme celle à l'échelle ci-contre, montre que la bande de papier contient 10 triangles équilatéraux dont 6 forment l'hexagone régulier. Prouvons que la longueur de la bande est exactement égale à 5 fois le côté des triangles équilatéraux.

Notons a le côté d'un triangle équilatéral.

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($= 3,6$ cm). D'où $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ et $5a = \frac{10h}{\sqrt{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$. CQFD

Donc l'aire de l'hexagone régulier est $A = \frac{6}{10} \times 12\sqrt{3} \times 3,6 = 25,92\sqrt{3} \approx 44,9$ cm².

Exercice 4 : Le plein de points

La boîte contient : $2 \times (3 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 1) = 22$ dés "faces" n'ayant qu'une face visible, on choisit "6" ;

$4 \times (3 + 2 + 1) = 24$ dés "arêtes" ayant deux faces visibles, on choisit "6 et 5" ;

8 dés "sommets" ayant trois faces visibles, on choisit "6, 5 et 4".

Cela donne : $22 \times 6 + 24 \times (6+5) + 8 \times (6+5+4) = 516$ points visibles en tout.

Exercice 6 : J'aimerais tant voir Syracuse

Le tableau suivant illustre une des présentations possibles.

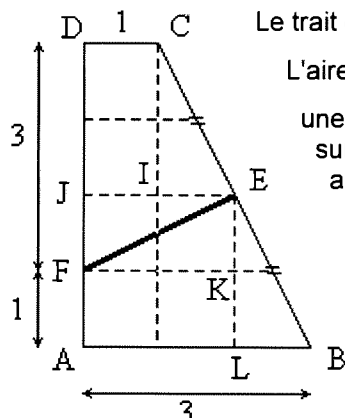
s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16	s17	s18	s19	s20	s21	s22	s23	s24	s25
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
4	1	10			3	22		28			6			46			9	58		64			12	76
2		5				11		14						23				29		32				38
1		16				34		7						70				88		16				19
4		8				17								35				44						
2		4				52								106				22						
1		2				26								53				11						
						13								160										
						40								80										
						20								40										
						10																		
						5																		
s1	s1	s2 s1	s1	s3 s1	s3 s1	s5 s1	s3 s1	s7 s1	s7 s1	s7 s1	s6 s1	s7 s1	s9 s1	s7 s1	s3 s1	s7 s1	s9 s1	s7 s1	s7 s1	s3 s1	s19 s1	s15 s1	s12 s1	s19 s1

Au moins jusqu'à 25, toutes les suites à partir d'un rang sont périodiques de période 4, 2, 1.

Remarque : On peut proposer aux élèves de continuer jusqu'à 50. On rencontre ainsi des suites pour lesquelles la partie non-périodique est étonnamment longue par exemple 27, 31, 41 et 47.

Cette propriété n'est toujours pas démontrée.

Exercice 5 : Aire coupable



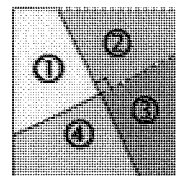
Le trait de coupe est [EF] avec E milieu de [BC] et F sur [AD] tel que AF = 1.

L'aire du trapèze ABCD est en dm^2 : $\frac{(3+1) \times 4}{2} = 8$ donc chacune des deux parts doit avoir

une aire de 4. En pavant le trapèze ABCD par des carrés de 1dm de côté tel qu'indiqué sur la figure ci-contre, on voit de façon évidente que :

aire ABEF = aire CDFE = 4. De la disposition des triangles rectangles isométriques CIE et FJE par rapport au rectangle CDJI et de celle de EFK et BLE par rapport à AFKL, il découle que les quadrilatères ABEF et CDFE ont en plus leurs angles respectivement égaux. Ils ont donc la même forme.

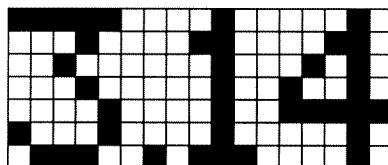
Remarque : En complétant le trapèze par symétrie par rapport à E, on obtient un découpage du carré en quatre parts superposables. Plus généralement : un carré de centre O est partagé en quatre parts égales par tout couple de droites perpendiculaires en O.



Exercice 7 : Oh mon beau miroir

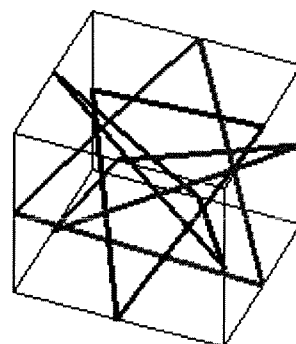
1	5	9	6	
	3	7	0	8
4	5			2
0		8	3	9
7	4	1	2	6

Exercice 8 : www.cache.cache

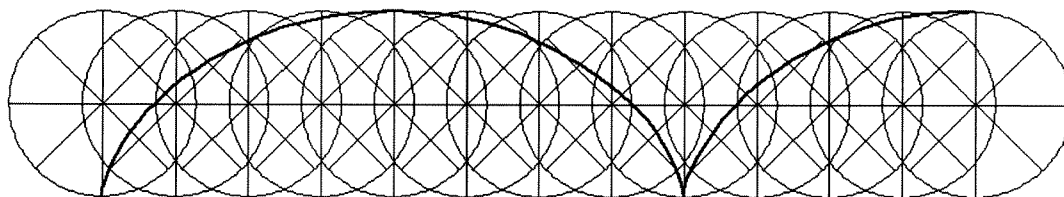


Le message de Robert est 3,14
soit la plus connue des valeurs
approchées du nombre π .

Exercice 12 : Mise en boîte



Exercice 9 : Cyclopède



Exercice 10 : La curedentrice

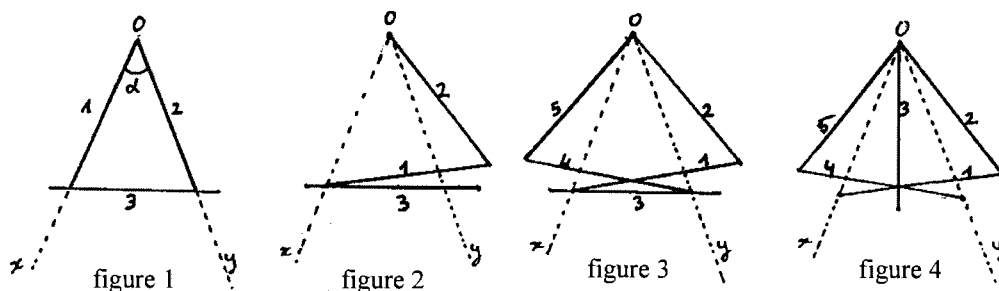
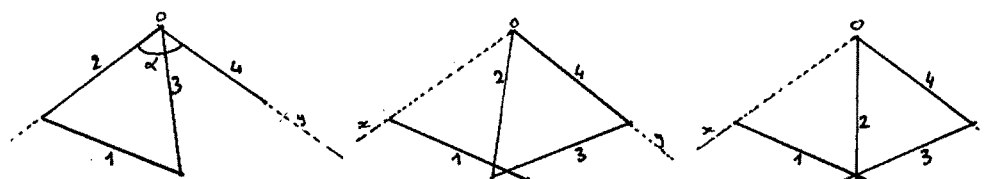


Figure 3 : On dispose 4 et 5 de façon à former avec l'ancienne position de 2 un triangle équilatéral.

Figure 4 : 3 placé sur le sommet de l'angle α et le point d'intersection de 4 et 1 matérialise la bissectrice de α .



2^{ème} figure : 1 et 4 restent en place ; on dispose 2 et 3 de façon à former un autre triangle équilatéral.

3^{ème} figure : 2 placé sur le sommet de l'angle α et le point d'intersection de 1 et 3 matérialise la bissectrice de α .

Remarque: Pour des angles entre 120° et 180° , il suffit de construire un losange dont deux côtés consécutifs sont sur les deux côtés de l'angle.

1^{er} cas : $\alpha < 60^\circ$

Figure 1: On place d'abord les cure-dents 1 et 2 sur les côtés de l'angle puis le cure-dents 3.

Figure 2 : Le cure-dents 3 reste en place ; on dispose 1 et 2 de façon à former avec l'ancienne position de 1 un triangle équilatéral.

2^{ème} cas : $60^\circ < \alpha < 120^\circ$

1^{ère} figure : On place d'abord les cure-dents 1, 2 et 3 pour former un triangle équilatéral. Et on place le cure-dents 4.

Exercice 11 : Quel fléau ?

$m = 2 \text{ kg} = 2\,000 \text{ g}$. Posons $OA = x$ donc $OE = AE - AO = 20 - x$.

La relation $OA \times m = OE \times 500$ devient $x \times 2\,000 = (20 - x) \times 500$ soit $2\,000x = 10\,000 - 500x$

D'où $2\,500x = 10\,000 \Leftrightarrow x = 4$. Le point O sur [AB] est tel que $AO = 4 \text{ cm}$ et $OE = 20 - 4 = 16$.

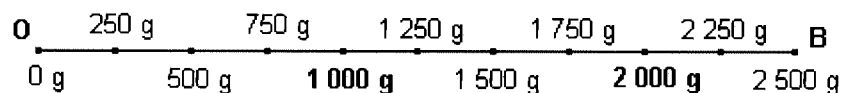
La graduation se fait sur [OB] donc sur 20 cm (en effet $OB = AB - AO = 24 - 4$).

On sait à présent que : $4 \times m = OE \times 500$ donc $OE = \frac{4m}{500} = \frac{m}{125}$.

Il reste à trouver, avec cette relation $OE = \frac{m}{125}$, les différentes valeurs de OE comprises entre 0 et 20 cm pour m variant tous les 250 g.

m en g	0	250	500	750	1 000	1 250	1 500	1 750	2 000	2 250	2 500
OE en cm	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

graduation
à l'échelle 1/2

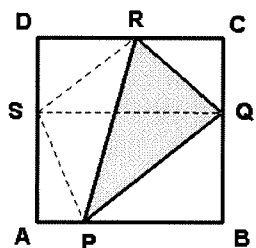


Exercice 13 : Des idées et du pétrole

Appelons ABCD le carré de côté 1 et PQR le triangle. (On écarte le cas où les points P, Q et R sont alignés : l'aire serait nulle).

1^{er} cas : deux des points P, Q, R sont sur un même côté et le troisième sur un autre côté :

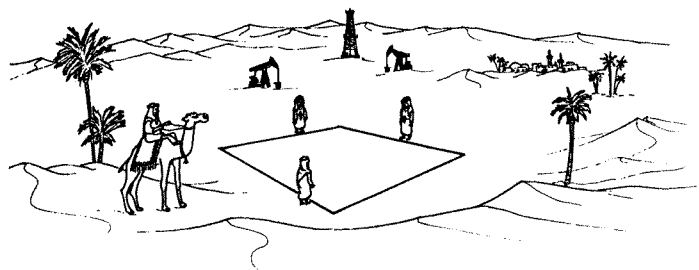
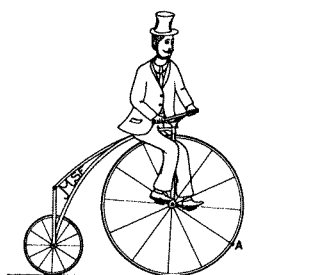
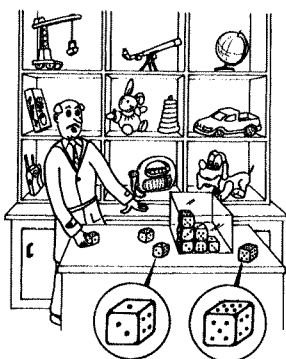
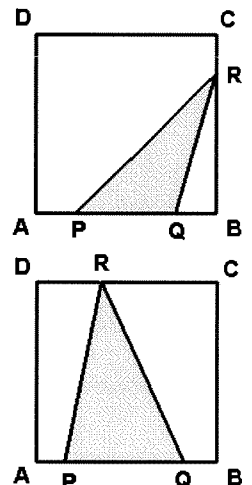
- Si P et Q sont sur [AB] et R sur [BC], l'aire de PQR est égale à $0,5 \times PQ \times RB$. PQ est maximal et vaut 1 si P est en A et Q en B. RB est maximal et vaut 1 si R est en C. Dans ce cas, l'aire est maximale et vaut 0,5 si P est en A, Q en B et R en C.
- Si P et Q sont sur [AB] et R est sur [CD], alors on prouve de la même façon que l'aire est maximale (et égale à 0,5) si P est en A et Q en B.



2^{ème} cas : P, Q et R sont sur 3 côtés différents : Par exemple P sur [AB], Q sur [BC] et R sur [CD] avec [PR] différent de [AD].

Soit S le point de [DA] tel que (SQ) soit parallèle à (AB) alors l'aire de PQR est strictement inférieure à l'aire de PQRS qui est égale à 0,5.

En conclusion, l'aire est maximale si et seulement si les points P et Q sont deux sommets consécutifs du carré et R un point du côté opposé.



MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 2001-2002

13^e édition

Mathématiques sans frontières

organisée par l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

ÉPREUVE
D'ENTRAÎNEMENT
DÉCEMBRE 2001

- Des explications ou des justifications sont demandées pour les exercices 2, 5, 9, 10, 11, 12 et 13.
- Toute solution même partielle sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice 1
7 points

Mots de tête

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots).

L'umorista del Quebec Pierre Légaré gioca volentieri con le parole e si diverte a presentarci dei paradossi sotto forma di brevi affermazioni.

Eccone due esempi :

- 1) "Di fatto, se il servizio meteo si sbagliasse ogni volta, in questo caso ci si potrebbe fidare."
- 2) "Secondo le statistiche, una persona su 5 non è equilibrata. Se attorno a te ci sono 4 persone che ti sembrano equilibrate, non è una buona situazione."

Analizza e critica le due affermazioni dal punto di vista logico e matematico

Der aus Quebec stammende Humorist Pierre Légaré spielt gerne mit Worten und liebt es, seinem Publikum Widersinnigkeiten in Form kurzer Sätze darzubieten. Hier zwei Beispiele:

- 1) „Wenn sich der Wetterbericht tatsächlich immer irren würde, dann könnte man sich auf ihn verlassen.“
- 2) „Statistisch gesehen, ist jeder Fünfte ein Psychopath. Gibt es vier Personen um dich herum, welche dir normal erscheinen, dann ist das nicht gut!“

Untersuche und kritisiere diese beiden Sätze unter logischem und mathematischem Gesichtspunkt.



El humorista quebequés Pierre Légaré practica con gusto el arte de los juegos de palabras y le alegra presentamos paradojas en forma de frasecitas. He aquí dos ejemplos de ellas :

1) "De hecho, si los meteorólogos se equivoca caran siempre, uno podría fiarse de ellos."

2) "Según las estadísticas, 1 persona de cada 5 está desequilibrada. Si en torno tuyo están 4 personas y que te parecen normales, ¡ay de ti !"

Analiza y critica estas dos frases desde el punto de vista lógico y matemático.

Quebec humorist Pierre Légaré enjoys playing with words and presenting paradoxes by means of short sentences. Here are two examples :

- 1) "Actually, if the weather forecast was always wrong, on this point you could rely on it."
- 2) "According to statistics, one person out of five is unbalanced. If there are four people around you and if they look balanced to you, then it's not good."

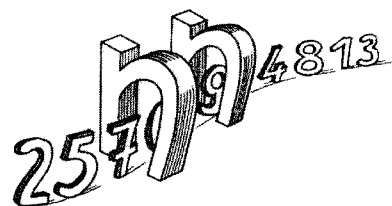
Analyse and criticise those two sentences from a logical and mathematical point of view.

D'après „Mots de tête“ de Pierre Légaré.

Exercice 2 5 points

Affaire de chiffres

Trouver un entier de cinq chiffres tel qu'en réunissant ses chiffres et ceux de son double on obtienne exactement les dix chiffres de 0 à 9. Justifier.



Exercice 3 7 points

Des tresses

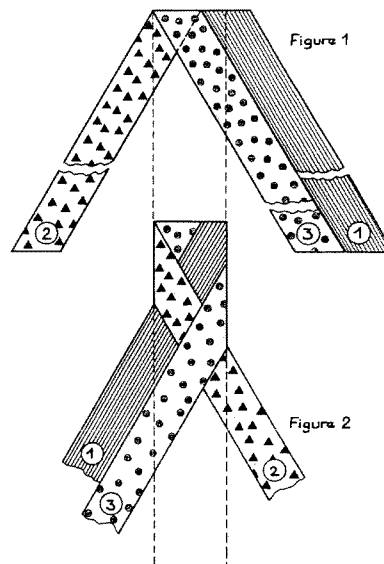
La figure 1 montre 3 bandes de papier superposables de couleurs différentes.

Chacune est un parallélogramme ayant deux côtés de 2 cm et deux angles de 60° .

La bande n° 3 recouvre un coin de la bande n° 2.

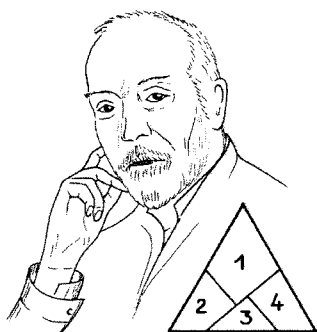
En pliant successivement ces bandes, chacune à son tour, on obtient une tresse ; la figure 2 en montre le début.

Réaliser sur ce modèle une tresse rectangulaire tricolore de largeur 3 cm et de longueur supérieure à 15 cm, telle que, sur la face visible du rectangle, la somme des aires soit la même pour chaque couleur.



Exercice 4 5 points

Métamorphose



Le Mathématicien anglais H.E. Dudeney (1857 - 1930) a inventé un découpage du triangle équilatéral en un puzzle de 4 pièces qui permet de le transformer en un carré (voir figure).

Voici un programme de construction de ce découpage :

Construire un triangle équilatéral ABC de côté 8 cm ; marquer I et J milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]. Sur la demi-droite [JA), placer le point R tel que $JR = JB$.

A l'extérieur du triangle ABC, construire le demi-cercle de diamètre [CR].

La droite (BJ) coupe ce demi-cercle en H.

Sur le côté [BC], placer les points K et L tels que $JK = JH$ et $KL = CJ$.

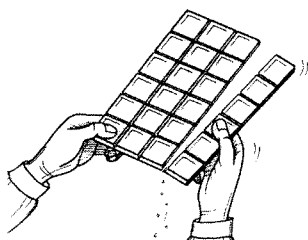
Tracer enfin le segment [KJ] ; sur ce segment, placer les points M et N tels que (KJ) soit perpendiculaire à [IM] et [LN].

Construire cette figure sur la feuille-réponse.

Refaire la construction sur une autre feuille ; découper les 4 pièces du puzzle, puis les assembler de façon à obtenir un carré que l'on collera sur la feuille-réponse.

Exercice 5 7 points

Qui est chocolat ?



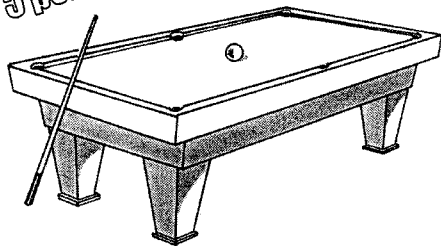
Jacques et Germain se font des politesses en mangeant une tablette de chocolat : tous deux sont d'authentiques gourmands mais aucun d'eux ne voudrait être l'égoïste qui prendra le dernier morceau.

La tablette initiale compte 24 carreaux. Chacun, à tour de rôle, casse le chocolat en 2 morceaux rectangulaires suivant une ligne horizontale ou verticale qui sépare les carreaux. Il mange l'un des morceaux et donne l'autre à son compère.

Jacques commence et s'arrange pour que Germain soit obligé de prendre le dernier carreau. Décrire sa stratégie.

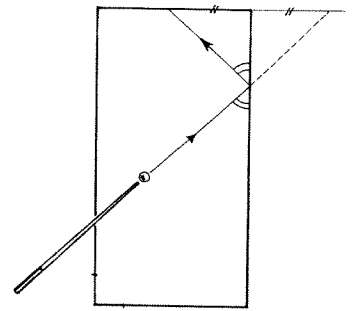
Exercice 6 5 points

Jeu réfléchi



Le croquis ci-contre explique comment une boule de billard rebondit sur la bande latérale de la surface de jeu si elle est propulsée sans effet.

La surface de jeu est un rectangle de côtés 1,4 m et 2,8 m. On place une boule en son centre. On veut la propulser de sorte qu'elle rebondisse sur trois bandes consécutives avant de disparaître dans un des quatre trous situés aux coins de la surface.



Tracer sur la feuille-réponse un plan du billard à l'échelle 1/40. Construire une trajectoire de la boule en laissant tous

Exercice 7 7 points

Courbographe

La figure ci-contre représente un montage de barres articulées fixé sur une plaque.

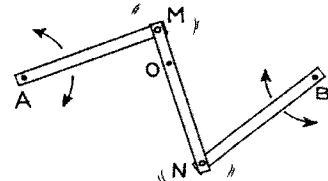
Les points de fixation A et B sont distants de 16 cm.

Les barres AM et BN peuvent pivoter respectivement autour de A et B. Elles sont reliées par la barre MN. Les points M et N sont des articulations qui peuvent se déplacer sur la plaque. Les 3 barres ont des longueurs égales : $AM = BN = MN = 8$ cm.

Le point O est situé sur la barre MN tel que $MO = 2$ cm et $ON = 6$ cm.

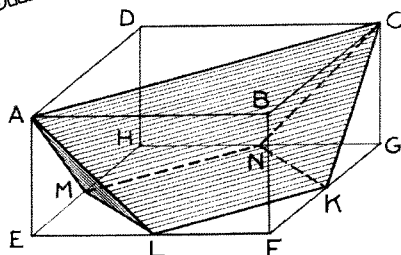
Lorsqu'on déplace cette barre dans toutes les positions possibles en faisant jouer les articulations, le point O décrit une courbe étonnante.

Tracer cette courbe sur la feuille-réponse.



Exercice 8 5 points

C Kdo



Le solide ABCDEFGH ci-contre est un pavé droit tel que $AE = 3$ cm, ABCD est un carré de 6 cm de côté.

M, K, L et N sont des milieux d'arêtes.

Construire deux exemplaires du solide ACKNML.

Assembler ces deux solides de manière à former une pyramide pour l'offrir à votre professeur.

Exercice 9 7 points

Clé-barres

Le code EAN₁₃ (European Article Number) est un nombre à 12 chiffres suivi d'un chiffre de contrôle. Il se décompose comme dans l'exemple :

3 116430 05808 9
Pays entreprise produit ↑ chiffre de contrôle

Pour cet exemple, le chiffre de contrôle se calcule ainsi à partir des 12 premiers chiffres :

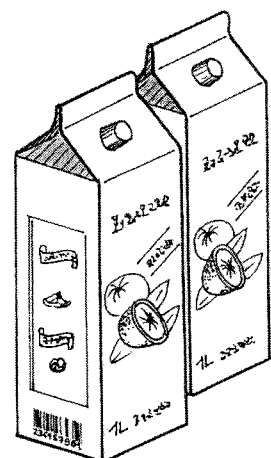
$$3 \times 1 + 1 \times 3 + 1 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 1 + 3 \times 3 + 0 \times 1 + 0 \times 3 + 5 \times 1 + 8 \times 3 + 0 \times 1 + 8 \times 3 = 91$$

Les chiffres sont multipliés alternativement par 1 et par 3.

La différence entre 91 et la dizaine suivante est $100 - 91 = 9$, qui est alors le chiffre de contrôle (si la somme est un multiple de 10 alors le chiffre de contrôle est 0).

Celui-ci permet de détecter certaines erreurs de lecture. Cependant beaucoup de codes à 12 chiffres ont le même chiffre de contrôle. En particulier, il se peut qu'en permutant 2 chiffres voisins d'un code donné, on obtienne un autre code ayant le même chiffre de contrôle.

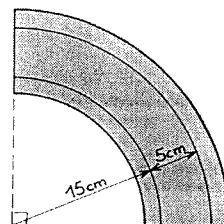
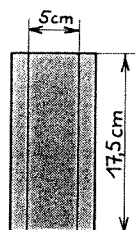
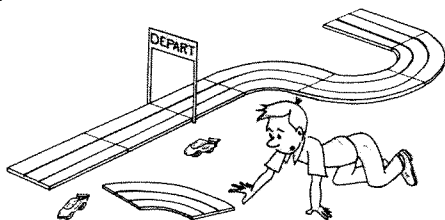
Trouver toutes les paires de 2 chiffres voisins dont la permutation donne le même chiffre de contrôle.



Exercice 10
10 points

Court-circuit

Julien a un circuit pour deux voitures électriques : chacune circule sur une piste et les deux pistes sont distantes de 5 cm.



Pour construire un circuit, il dispose de 10 éléments droits de longueur 17,5 cm et de 10 éléments ayant la forme d'un quart de cercle dont les dimensions sont indiquées sur la figure ; le circuit reste en contact avec le sol, ne se recoupe pas et se referme.

Julien sait que la voiture qui est sur la piste extérieure parcourt en un tour une distance plus grande que celle qui est sur la piste intérieure. Il se demande si la différence entre les deux chemins varie suivant le circuit construit.

Tracer à l'échelle 1/5, sur du papier quadrillé au demi-centimètre, deux circuits : le premier sera le plus court possible et le second le plus long possible. Pour chacun d'eux, calculer la différence de longueur entre les deux pistes.

Est-il possible de construire un circuit pour lequel cette différence sera plus grande ? Expliquer.

Spécial seconde

Exercice 11
5 points

Le temps s'écoule

Deux récipients identiques sont pleins.

Chacun est muni de deux robinets : un gros et un petit.

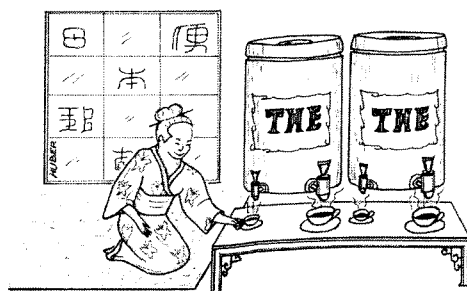
Si on ouvre seulement un gros robinet, il vide le récipient en 30 minutes.

Si on ouvre seulement un petit robinet, il vide le récipient en 1 heure.

Les récipients ne comportent ni graduation ni repère.

Comment faire pour chronométrer 40 minutes uniquement à l'aide de ces récipients ?

Donner deux solutions.



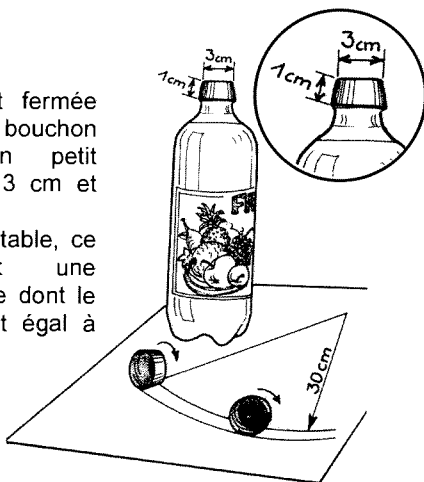
Exercice 12
7 points

Tour-bouchon

Une bouteille est fermée par un bouchon tronconique. Son petit diamètre mesure 3 cm et son côté 1 cm.

En roulant sur la table, ce bouchon décrit une couronne circulaire dont le rayon intérieur est égal à 30 cm.

Calculer le grand diamètre du bouchon.



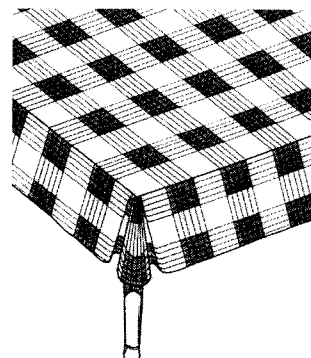
Exercice 13
10 points

Table de carrés

La nappe ci-contre est formée de carreaux blancs, noirs et rayés. Sur cette nappe, François observe un carré dont les 4 carreaux de coin sont blancs : il y a donc un nombre impair de carreaux sur chaque côté de ce carré.

François sait que tout entier impair peut s'écrire $2n+1$, où n est un entier.

Exprimer en fonction de n le nombre de carreaux de chaque sorte contenus dans le carré de côté $2n+1$ que François observe.



Corrigé de l'épreuve d'entraînement de décembre 2001

Exercice 1 : Mots de têtes

La 1^{ère} affirmation de Pierre Légaré est vraie : la négation des prévisions données par la météo sera vraie et donc fiable. On connaît donc, avec certitude, le temps qu'il ne fera pas.

Pour la 2^{ème} proposition, sur un grand nombre de personnes, la proportion est presque juste mais elle ne l'est pas forcément sur un aussi petit échantillon.

Exercice 2 : Affaire de chiffres

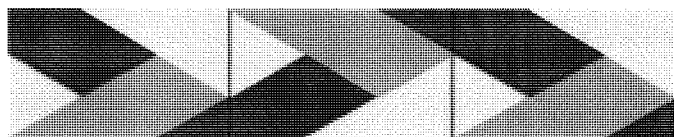
Voici quelques solutions : 13 485 - 26 970 ; 14 853 - 29 706 ; 26 709 - 53 418 ; 32 709 - 65 418 ; 34 851 - 69 702 ; 48 513 - 97 026 et 48 531 - 97 062.

Exercice 3 : Des tresses

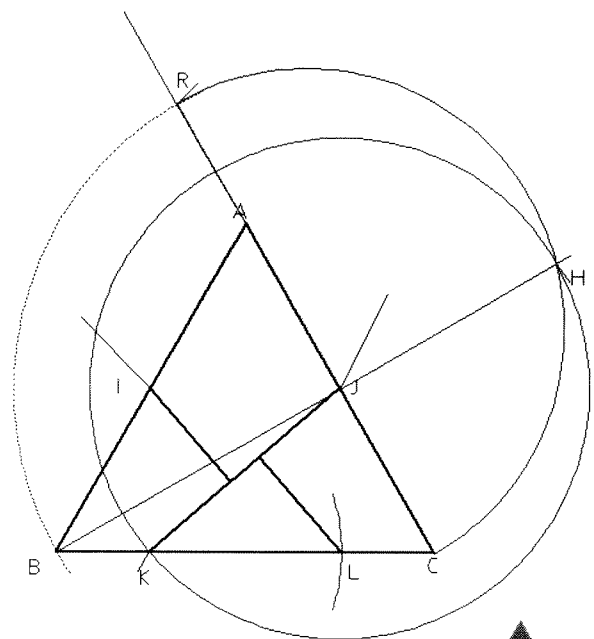
On compte pour chaque zone le nombre de triangles (ou demi-triangles) équilatéraux de côté 2 cm qu'elle contient.

Quand la tresse a une longueur égale à $3 \times$ la hauteur d'un tel triangle, chaque couleur occupe une surface équivalente à 3 triangles (sur chaque face de la tresse).

On continue la tresse jusqu'à atteindre une longueur triple de celle-ci car $9\sqrt{3} \approx 15,59 > 15$ cm.

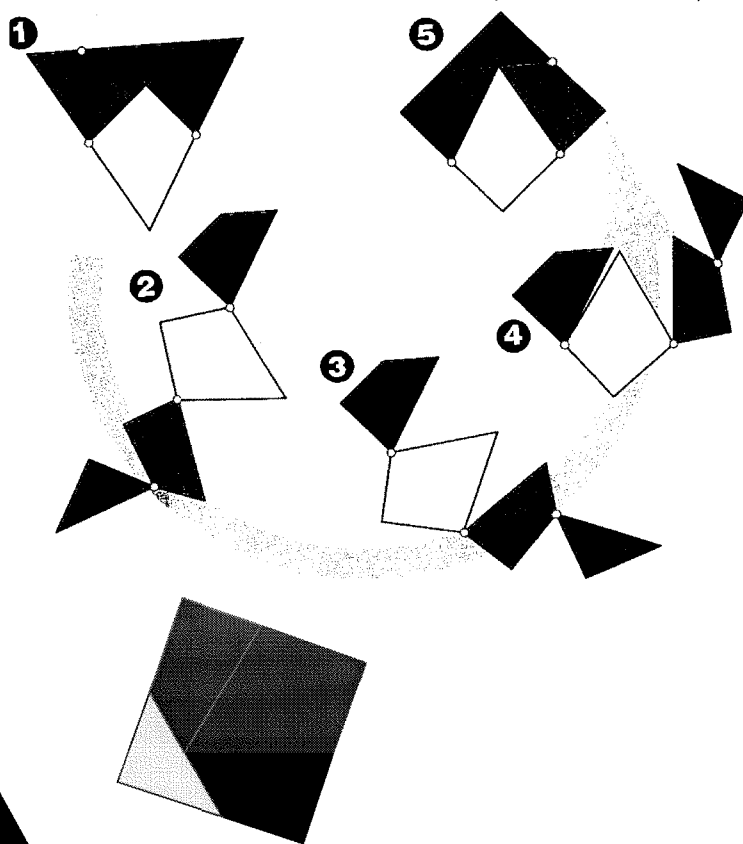


Exercice 4 : Métamorphose



Remarque :

On peut en faire un puzzle articulé. (voir ci-dessous).



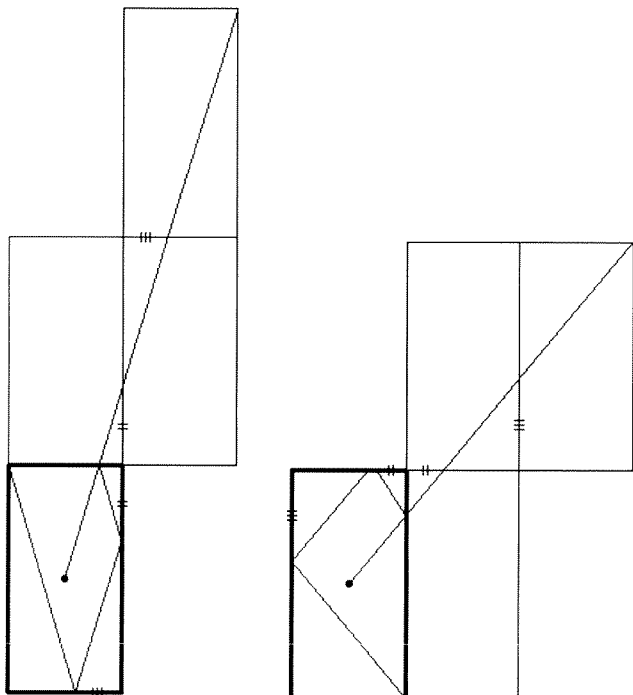
Exercice 5 : Qui est chocolat ?

La stratégie de Jacques est la « stratégie du carré » : à chaque fois il laisse à Germain un morceau carré. Pour commencer, il lui laisse un carré 4×4 puis, selon le cas, un carré 3×3 , 2×2 ou 1×1 (si la gourmandise l'emporte chez Germain...). Dans tous les cas le dernier carreau échoit à Germain.

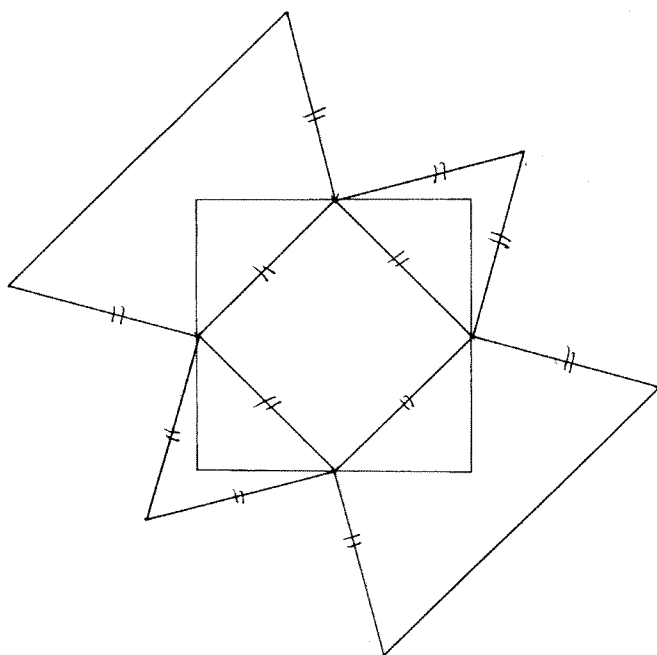
Exercice 6 : Jeu réfléchi

C'est un jeu de réflexions: on peut procéder par composition de symétries.

Voici deux solutions...les autres s'obtiennent par symétries à partir de celles-ci.



Exercice 8 : C Kdo



Exercice 9 : Clés-barres

2 chiffres voisins notés a et b donnent le même chiffre de contrôle lorsqu'ils sont permutés. Cela signifie que : $a \times 1 + b \times 3 = a \times 3 + b \times 1 + 10k$ avec k entier relatif.

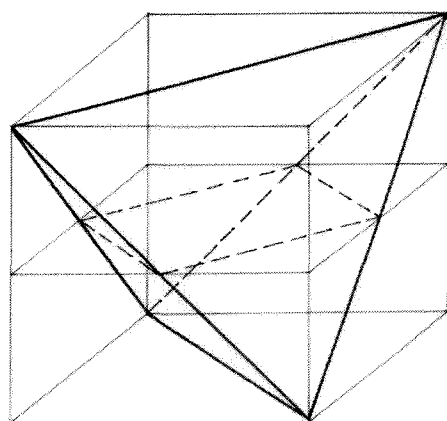
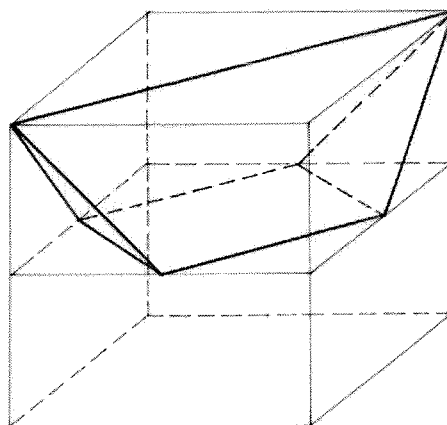
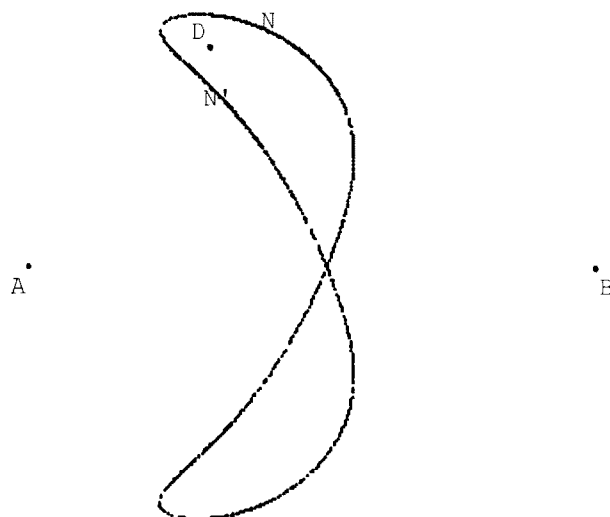
Soit plus simplement $2b = 2a + 10k$ c'est à dire $b = a + 5k$.

- $k = 0$: correspond au cas trivial $a = b$.
- $k = 1$ ou $k = -1$ donnent respectivement $b = a + 5$ ou $a = b + 5$.
- les autres cas tels que $k = 2$ sont impossibles car a et b sont des chiffres.

Les paires cherchées sont donc : 0 et 5 ; 1 et 6 ; 2 et 7 ; 3 et 8 ; 4 et 9

ainsi que les couples 0 et 0 ; 1 et 1 ; 2 et 2 ; 3 et 3 ; 4 et 4 ; 5 et 5 ; 6 et 6 ; 7 et 7 ; 8 et 8 ; 9 et 9.

Exercice 7 : Courbographe



Exercice 10 : Court-circuit

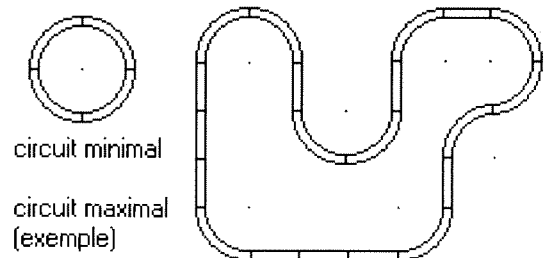
Circuit minimal : différence : $40\pi - 30\pi = 10\pi$ cm.

Circuit maximal : différence : $(70\pi + 22,5\pi + 175) - (52,5\pi + 30\pi + 175) = 10\pi$ cm.

Soit un autre circuit comportant, dans le sens de parcours, m courbes à droite, n courbes à gauche et p rails droits. On appellera Nord l'orientation de la voiture au départ.

Le circuit ne peut se refermer que si $m = n + 4$ ou $n = m + 4$ car la voiture doit retrouver l'orientation Nord après avoir fait un tour complet. Les rails droits n'induisent aucune différence sur les longueurs des deux pistes. Les courbes à droite et à gauche peuvent se compenser deux à deux.

Il reste une différence de longueur de : $4 \times (20\pi/2 - 15\pi/2) = 10\pi$ cm **indépendamment du circuit.**



(Barème possible: 2 + 4 + 4)

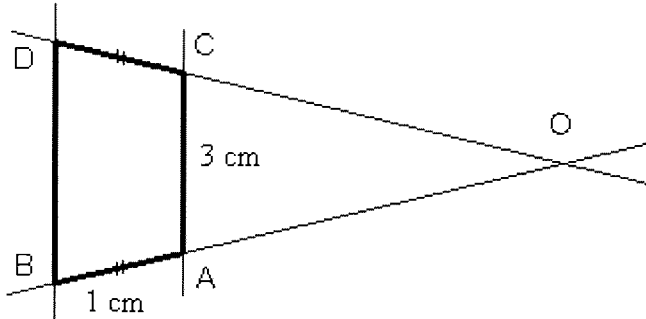
Exercice 11 : Le temps s'écoule

Si on ouvre simultanément les 2 robinets d'un récipient alors le débit est : $1/30 + 1/60 = 1/20$ en récipient par minute ; les 2 robinets mettent donc 20 min pour vider un récipient.

- 1° solution :
- on ouvre en même temps les 2 robinets d'un récipient,
 - quand il est vide on ouvre les 2 robinets de l'autre,
 - ce 2° récipient est vide 40 min après le début de l'expérience.
- 2° solution :
- on ouvre simultanément le grand robinet du récipient 1 et le petit de l'autre,
 - au bout de 30 min le récipient 1 est vide et le récipient 2 est encore à moitié plein ; on ouvre alors le grand robinet de ce récipient : les 2 robinets mettent 10 min pour le vider. Et $30 + 10 = 40$.

Exercice 12 : Tour-bouchon

1^{ère} solution : (avec le théorème de Thalès)



Soit [AB] le segment suivant lequel le bouchon est en contact avec la table ; le plan perpendiculaire à la table et contenant (AB) coupe le bouchon suivant le trapèze ABDC. O désigne le centre de la couronne. D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD} \text{ soit } \frac{30}{31} = \frac{3}{BD} \text{ et } BD = 3,1 \text{ cm.}$$

2^{ème} solution : (avec les périmètres)

La circonférence du « haut » du bouchon est : 3π cm. Ce « haut » du bouchon décrit une courbe circulaire de longueur 60π cm. Le bouchon fait donc $\frac{60\pi}{3\pi} = 20$ tours complets.

Le « bas » du bouchon fait aussi 20 tours sur un cercle de 31 cm de rayon, donc de longueur 62π cm. Donc la circonférence du « bas » du bouchon est $\frac{62\pi}{20} = 3,1\pi$ cm. Le grand diamètre du bouchon est donc 3,1 cm.

Exercice 13 : Table de carrés

On peut compter les carreaux par colonnes :

Il y a n colonnes présentant une alternance de noirs et de rayés.

Chacune compte n noirs et n + 1 rayés ; soit n^2 carreaux noirs n x (n + 1) rayés dans ces colonnes-ci.

Il y a n + 1 colonnes présentant une alternance de blancs et de rayés.

Chacune compte n + 1 blancs et n rayés ; soit $(n + 1)^2$ carreaux blancs et (n + 1) x n rayés dans celles-là.

En tout, on compte donc: $n^2 + 2n + 1$ blancs, n^2 noirs et $2n^2 + 2n$ rayés.

Total pour vérification: $n^2 + 2n + 1 + n^2 + 2n^2 + 2n = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$.



Mathématiques sans frontières

organisée avec le concours de l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

EPREUVE DU
5 MARS 2002

- On demande des explications ou des justifications pour les exercices 1, 7, 9, 10, 11, 12 et 13.
- Toute solution même partielle sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice n° 1

7 points

Alibis

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

In einem Hotel wurde zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr ein Verbrechen begangen. Die Tat dauerte 7 Minuten.

Es gibt vier Verdächtige : Andrea, Bruce, Camilla und Dimitri. Sie bewohnen vier verschiedene Zimmer. Hier ihre Angaben bei der Polizei, was sie zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr gemacht haben :

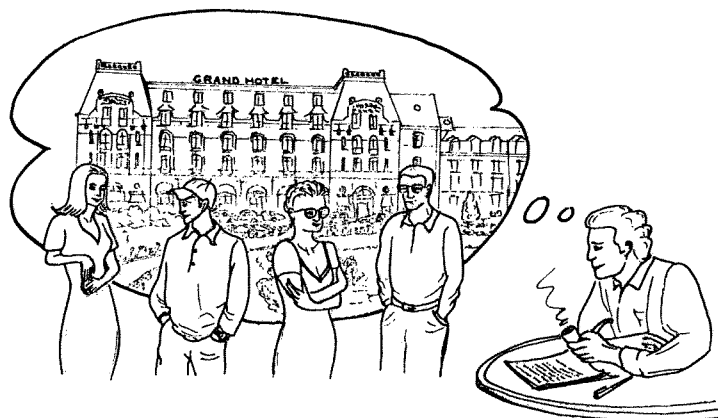
Andrea : „Zuerst hatte ich 3 Minuten lang Besuch von Bruce, danach war Dimitri 4 Minuten bei mir. Dann hatte ich noch einen Telefonanruf von Camilla.“

Bruce : „Ich war bei Andrea, bei Dimitri und habe noch mit einem Mausclick eine E-Mail verschickt.“

Camilla : „Ich habe bis 22.05 Uhr die Fernsehnachrichten angesehen und danach 5 Minuten lang mit Andrea telefoniert.“

Dimitri : „Ich war bei Andrea. Danach war Bruce für 3 Minuten bei mir.“

Nachdem der Kommissar festgestellt hat, dass alle Angaben richtig sind, kennt er den Schuldigen. Wie hat er es herausgefunden ?



A crime was committed in a hotel between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. and the attack lasted 7 minutes.

There are 4 suspects : Andrea, Bruce, Camilla, Dimitri. They are all staying in 4 different rooms and here are their statements to the police about their time table between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. :

Andrea : « First Bruce paid me a visit for 3 minutes, then came Dimitri who stayed for 4 minutes ; finally Camilla called me on the phone. »

Bruce : « I went to see Andrea, then Dimitri, and with the click of the mouse, I sent an e-mail. »

Camilla : « I watched the news on TV until 10.05 p.m.. Then I called Andrea for 5 minutes. »

Dimitri : « I went to see Andrea, then Bruce came to see me for 3 minutes. »

After checking on all these statements, the police inspector found the culprit. How did he manage ?

En un hotel, se cometió un crimen entre las 10 y las 10 y 15 minutos de la noche y la agresión duró 7 minutos.

Hay 4 sospechosos Andrea, Bruce, Camila, Dimitri, que ocupan 4 habitaciones diferentes y que, a propósito de su horario entre las 10 y las 10 y 15 , declararon lo siguiente a la policía :

Andrea : " Primero me visitó Bruce durante 3 minutos, más tarde recibí la visita de Dimitri, que duró 4 minutos y, finalmente, me telefoneó Camila."

Bruce : " Visité a Andrea, luego a Dimitri y después pinchando mandé un email."

Camila : " Vi el Telediario hasta las 10 y 5 minutos, a continuación telefoneé a Andrea durante 5 minutos."

Dimitri : " Visité a Andrea, y luego me visitó Bruce durante 3 minutos. "

¿ Después de verificar que todas las declaraciones eran exactas, el inspector encuentra al culpable. Como hizo ?

In un albergo è accaduto un crimine tra le 22 e le 22 e quindici e l'aggressione è durata 7 minuti.

Vi sono 4 sospettati : Andrea, Bruce, Camilla e Dimitri che occupano 4 camere diverse e che rilasciano alla polizia le seguenti dichiarazioni relative alle loro azioni tra le 22 e le 22 e quindici.

Andrea : " Dapprima ho ricevuto la visita di Bruce durata 3 minuti, più tardi quella di Dimitri durata 4 minuti; infine, ho ricevuto una telefonata da Camilla."

Bruce : " Io sono andato a trovare Andrea, poi Dimitri e, quindi, con un clic di mouse ho spedito una e-mail."

Camilla : " Io ho guardato il telegiornale fino alle ore 22 e 5. In seguito ho telefonato ad Andrea per 5 minuti."

Dimitri : " Io sono andato a trovare Andrea, poi ho ricevuto la visita di Roberto durata 3 minuti."

Dopo aver verificato la correttezza di tutte queste dichiarazioni, l'ispettore scopre il colpevole. Come ha fatto ?

Exercice n° 2

5 points

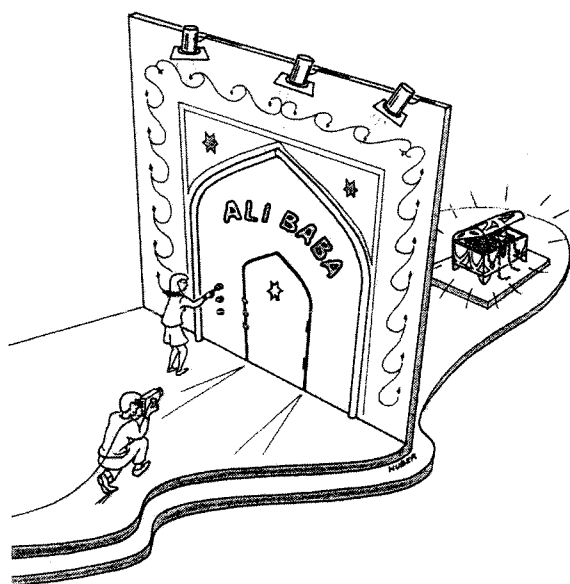
Le grand dil

Au cours du jeu télévisé "La Caverne d'Ali Baba", Sophie veut entrer dans la salle du trésor. La porte de celle-ci est munie de trois verrous commandés chacun par un commutateur qui l'ouvre et le ferme alternativement.

La porte est fermée. Sophie ne sait pas si un seul, deux ou trois verrous sont fermés.

Par 7 fois, elle aura le droit de choisir et d'actionner un commutateur. Dès l'instant où les trois verrous seront ouverts, la porte s'ouvrira.

Donner une suite de 7 actions au cours de laquelle la porte s'ouvrira à coup sûr, quel que soit l'état initial des verrous.



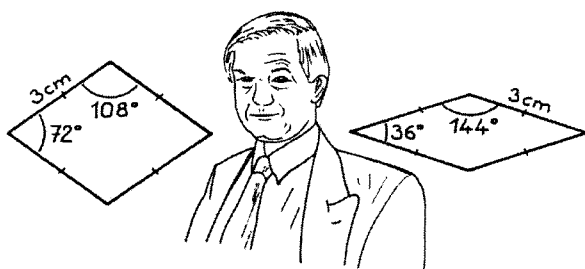
Exercice n° 3

7 points

Décagomanie

Le mathématicien anglais Sir Roger Penrose né en 1931 a inventé dans les années 1970 un pavage non répétitif du plan qui n'utilise que deux sortes de dalles en forme de losanges.

La figure ci-dessous donne les dimensions des deux losanges.



Chercher 2 façons différentes de construire un décagone régulier en assemblant 5 losanges de chaque type.

Présenter sur la feuille-réponse ces 2 décagones imbriqués en utilisant moins de 20 losanges au total.

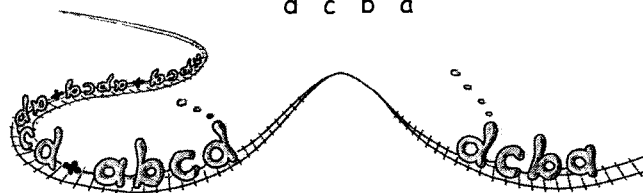
Exercice n° 4

5 points

A verlan

Trouver un entier de 4 chiffres supérieur à 1 000 tel qu'en le multipliant par 4 on retrouve ce nombre "renversé".

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \ d \\ \times \qquad \qquad 4 \\ \hline d \ c \ b \ a \end{array}$$



Exercice n° 5

7 points

L'aviatrice

A et B sont deux points du plan, distants de 120 mm.

On cherche des points M_1, M_2, M_3 , etc... tels que :

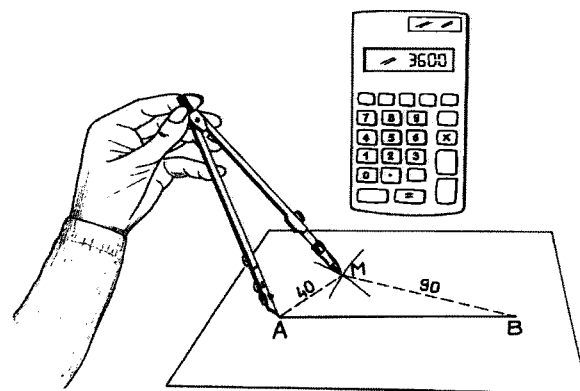
$$MA \times MB = 3600$$

les distances étant exprimées en millimètres.

Placer A et B sur la feuille-réponse, puis marquer en rouge de nombreux points M tels que

$MA \times MB = 3600$. On verra apparaître une courbe que l'on essaiera de compléter.

Présenter au verso de la feuille les paires de nombres utilisées pour obtenir les points M placés.



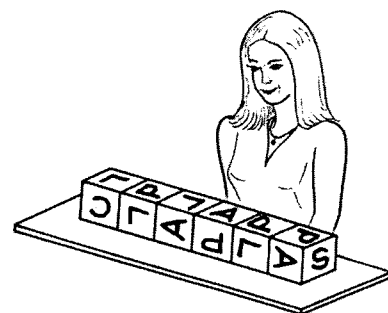
Exercice n° 6

5 points

Faces cachées

Etienne a posé sur la table 6 cubes tous identiques représentés ci-dessous.

Dessiner sur la feuille réponse ce que voit Barbara de l'autre côté de la table.



Exercice n° 7**7 points***Pleins pots*

Pierre prépare avec sa mère la gelée de groseille. Ils remplissent 20 pots de 3 tailles différentes. Les 20 pots remplis pèsent 8,4 kg en tout.

Pierre les range sur trois étagères, comme l'indique le dessin ci-dessous, de façon à ce que chaque étagère supporte le même poids.

Quelle est la masse de chaque sorte de pot rempli ? Justifier.

**Exercice n° 8****5 points***L'Europe en lignes*

Berlin (D), Cardiff (GB), Göteborg (S), Lausanne (CH), Madrid (E), Naples (I), Paris (F), Plzen (CZ), Utrecht (NL) et Varsovie (PL) sont 10 villes d'Europe plus ou moins connues.

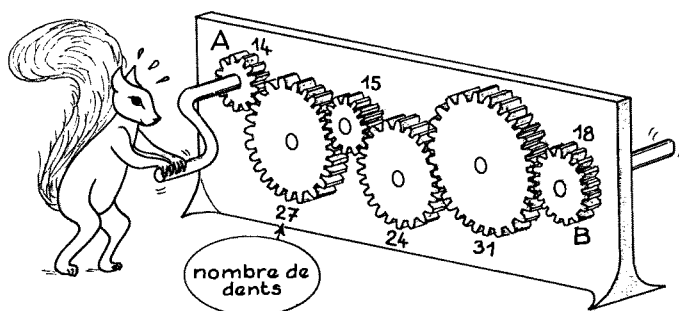
Leur particularité est que, sur ma carte, elles sont à peu près alignées 4 à 4 sur 5 droites.

Placer sur la feuille-réponse 10 points de façon qu'ils soient alignés 4 à 4 sur 5 droites.

Faire ensuite une deuxième figure présentant 15 points alignés 5 à 5 sur 6 droites.

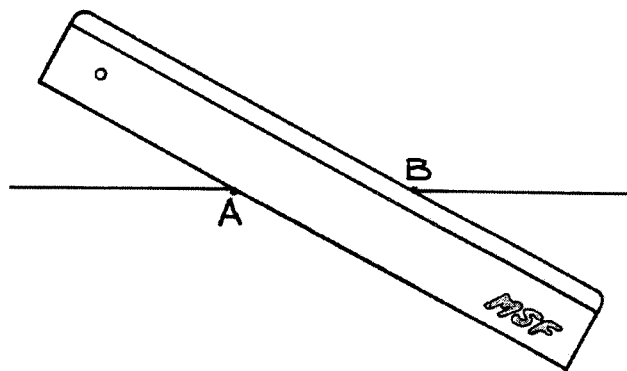
**Exercice n° 9****7 points***D'entiers*

Dans le dispositif présenté sur la figure ci-dessous, quel est le nombre minimum de tours que doit faire la roue A pour que les roues A et B effectuent chacune un nombre entier non nul de tours ? Combien de tours effectue alors la roue B ? Justifier.

**Exercice n° 10****10 points***Tout est en règle*

Bruno veut partager un segment de droite [AB] en 3 parties égales. Il ne dispose que de son crayon et d'une règle non graduée à bords parallèles.

Bruno pose d'abord la règle comme indiqué sur la figure, puis il trace deux droites parallèles l'une passant par A et l'autre par B. Il recommence en changeant la direction de sa règle de manière à obtenir un losange dont [AB] est une diagonale.



À l'aide de sa règle, il construit alors soigneusement un réseau de losanges identiques sur sa feuille. En reliant des points convenablement choisis dans ce réseau, Bruno peut alors partager le segment [AB] en trois parties égales.

Tracer sur la feuille-réponse un segment [AB] de 8 cm, puis le partager en 3 parties égales suivant la méthode de Bruno.

Démontrer que les 3 segments ainsi obtenus ont bien des longueurs égales.

Spécial Seconde

Exercice n° 11

5 points

C'est Chu

Lors d'un voyage en Chine, Marco a trouvé dans le manuscrit Chu Chang Suan Shu un puzzle représentant un cercle inscrit dans un triangle.

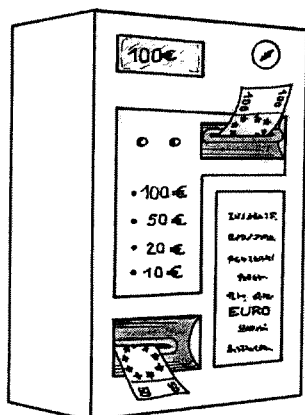
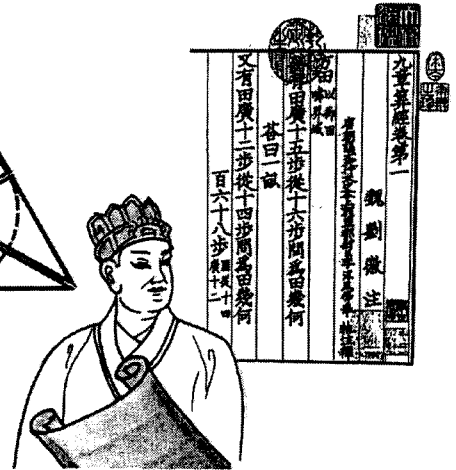
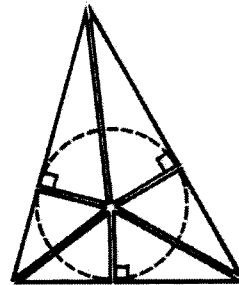
Dans ce triangle sont tracés les segments joignant les sommets au centre du cercle ainsi que les rayons du cercle aux points de contact avec les côtés du triangle.

En découpant ce triangle selon les segments tracés, on obtient 6 pièces triangulaires.

Ce puzzle permet de démontrer la formule $R = \frac{2S}{P}$ où S désigne l'aire du triangle, P son périmètre et R le rayon du cercle inscrit.

Tracer sur la feuille-réponse un triangle de côtés 10, 12 et 14 cm avec son cercle inscrit et ses 3 rayons caractéristiques.

Refaire cette construction sur une autre feuille pour découper les 6 pièces du puzzle. Agencer ces 6 pièces en une bande rectangulaire de largeur R que l'on collera sur la feuille-réponse, puis expliquer comment on obtient alors la formule énoncée ci-dessus.



Exercice n° 12

7 points

Eurobate

Un changeur automatique de monnaie accepte des billets de 100 €, 50 €, 20 € et 10 € et donne la monnaie de la façon suivante :

- le billet de 100 € est changé en 1 billet de 50 €, 1 de 20 €, 2 de 10 € et 2 de 5 €
- le billet de 50 € est changé en 1 billet de 20 €, 2 de 10 € et 2 de 5 €
- le billet de 20 € est changé en 1 billet de 10 € et 2 de 5 €
- le billet de 10 € est changé en 2 billets de 5 €

Au départ on le remplit avec des billets de 50 €, 20 €, 10 € et 5 € de façon qu'il puisse effectuer exactement 100 opérations quel que soit le change exigé.

Après 100 opérations, on constate que l'appareil contient 20 billets de 100 €, 130 de 50 €, 40 de 20 € et 70 de 10 €.

Combien de billets de chaque sorte ont été introduits dans l'appareil au cours de ces 100 opérations ? Justifier.

Exercice n° 13

10 points

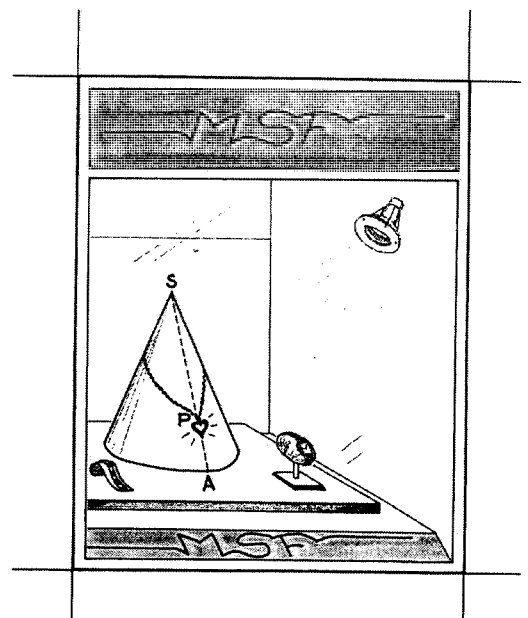
C'est pas du toc

Leonardo admire dans la vitrine d'une bijouterie un pendentif posé sur un présentoir conique. Le bijou est constitué d'une lourde pierre précieuse suspendue en un point P à une fine chaînette d'or.

La chaînette suit sur le cône une courbe qui est le plus court chemin allant de P à P en faisant le tour du cône.

Le diamètre de la base du cône est égal à 21 cm, la distance SA égale à 35 cm et la distance SP égale à 30 cm. On voudrait connaître la longueur de la chaînette.

Construire sur la feuille-réponse à l'échelle 1:5 le patron de la surface latérale du cône après découpage suivant la droite (SP) . Sur ce patron, tracer la ligne de contact de la chaînette avec le cône puis calculer la longueur de la chaînette.



Corrigé de l'épreuve du 5 mars 2002

Exercice 1 : Alibis

Andrea est occupée avec Bruce pendant 3 minutes puis avec Dimitri pendant 4 minutes puis par l'appel téléphonique de Camilla pendant 5 minutes.

Elle est donc seule pendant $15 - (3 + 4 + 5) = 3$ minutes, ce qui l'innocente.

Bruce est occupé avec Andrea pendant 3 minutes, puis avec Dimitri pendant 3 minutes ; il est donc seul pendant $15 - (3 + 3) = 9$ minutes mais on ne connaît pas la durée de son e-mail.

Camilla est occupée jusqu'à 22 h 05 et au cours des 10 minutes restantes, elle est occupée avec Andrea pendant 5 minutes : elle est donc innocentée.

Dimitri voit Andrea après Bruce soit après 22 h 03 et avant le coup de téléphone qu'Andrea reçoit de Camilla soit avant 22 h 10 et Dimitri reste 4 minutes chez Andrea. Il arrive donc chez Andrea au plus tard à 22 h 06, donc il ne peut avoir commis le crime avant sa visite à Andrea ; il quitte Andrea au plus tôt à 22 h 07, il n'a pas pu commettre le crime après sa visite à Andrea car il voit ensuite Bruce pendant 3 minutes.

Par élimination, **le coupable est donc Bruce.**

Exercice 2 : Le grand dil

Une des stratégies possibles est d'activer les verrous dans l'ordre **1 – 2 – 3 – 2 – 1 – 2 – 3.**

Exercice 3 : Décagomanie

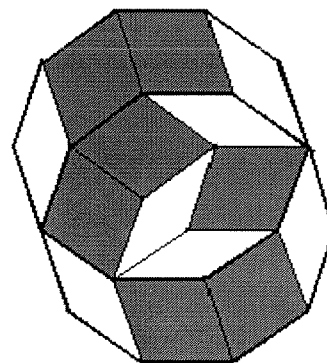
Il y a 6 façons d'assembler 5 losanges de chaque sorte pour constituer un décagone.

Voici un exemple de deux décagones imbriqués :

Pour en savoir plus sur les pavages de Penrose, 2 adresses :

<http://ourworld.compuserve.com/homepages/gwihen/Penrose.html>

<http://www.geocities.com/SiliconValley/Pines/1684/Penrose.html>



Exercice 4 : A verlan

L'unique solution est

$$\begin{array}{r} 2178 \\ \times 4 \\ \hline 8712 \end{array}$$

Remarque : La démonstration de l'unicité est un bon exercice d'arithmétique.

$a < 3$ soit $a = 1$ ou 2 sinon $abcd \times 4 = dcba$ aurait 5 chiffres (à cause d'une retenue).

Le dernier chiffre du produit $d \times 4$ est pair donc **$a = 2$** et **$d = 8$** . $\Rightarrow$ 2 fins possibles :

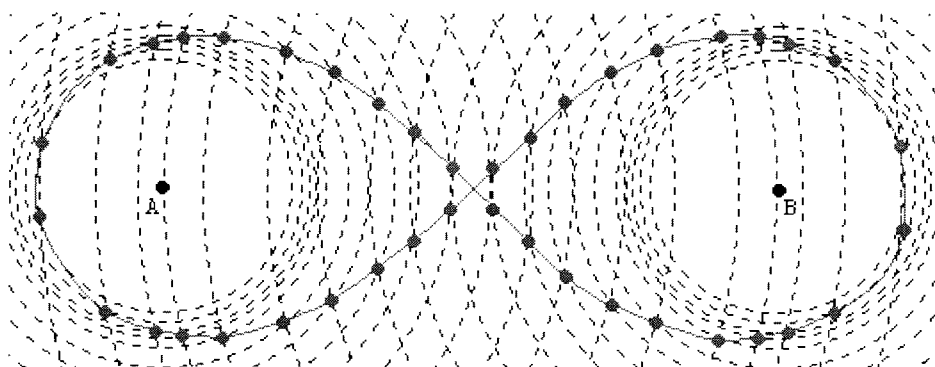
- On obtient $2bc8 \times 4 = 8cb2$ soit $(100b+10c+8) \times 4 = 100c+10b+2$ ou $13b+1=2c$ avec $2c < 20$. Seule solution : **$b = 1$** , d'où **$c = 7$** .
- $b < 3$ car $4b$ ne doit pas donner de retenue. $4 \times 8 = 32$ donc on retient 3. $4c + 3$ est donc impair donc b est impair et égal à 1. $4c + 3 = 11$ ou 31 donc $c = 2$ ou 7. Par vérification, il n'y a que $c = 7$ qui convienne.

Exercice 5 : L'aviatrice

$60 \times 60 = 3600$; $72 \times 50 = 3600$; $90 \times 40 = 3600$; $100 \times 36 = 3600$; $144 \times 25 = 3600$ etc...

Le premier produit donne le milieu de [AB]. Chacun des autres permet de placer 4 points.

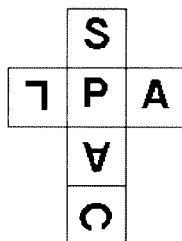
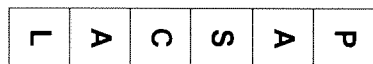
Il faut cependant remarquer que l'existence de ces points est soumise à l'inégalité triangulaire, ainsi $20 \times 180 = 3600$ ne donne rien. En insistant, on voit apparaître **la lemniscate de Bernoulli** :



La lemniscate de Jacques BERNOULLI (1654-1705) est un ovale de CASSINI particulier. Elle admet un grand nombre de propriétés. C'est le lieu des points M tels que $MA \times MB = OA^2$ où O désigne le milieu de [AB].

Exercice 6 : Faces cachées

Voici un patron possible et ce que voit Barbara :



Exercice 7 : Pleins pots

Soient x , y et z les masses respectives d'un petit, d'un moyen et d'un grand pot.

Si on compare l'étagère la plus haute et l'étagère la plus basse, on constate que la masse d'un grand pot plus celle d'un petit est égale à celle de 8 petits pots. Un grand pot pèse donc sept fois plus qu'un petit soit $z = 7x$.

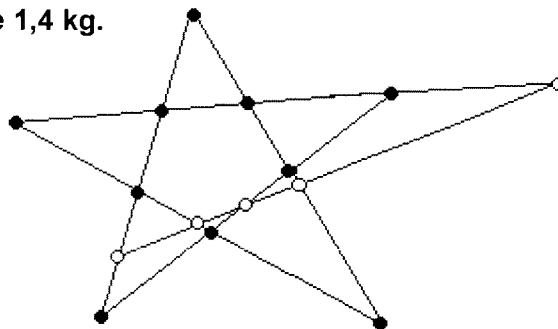
Chaque étagère supporte 2,8 kg (un tiers de 8,4 kg), en considérant les deux étagères du bas, on a donc le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2,8 \\ 8x + 2y = 2,8 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = 0,2 \\ y = 0,6 \end{cases} \text{ puis } z = 1,4.$$

Les pots ont des masses respectives de 0,2 , de 0,6 et de 1,4 kg.

Exercice 8 : L'Europe en lignes

On peut partir d'un pentagone étoilé que l'on complètera en traçant une droite sécante à chacune des droites définies par ce pentagone.



Exercice 9 : D'entiers

Il suffit de considérer les roues A et B, car si une roue tourne d'une dent, toutes les autres tournent d'une dent. Si les roues A et B ont fait chacune un nombre entier de tours, le nombre de dents ayant défilé est un multiple commun de 14 et 18. PPCM(14;18) = 126 et $\frac{126}{14} = 9$ et $\frac{126}{18} = 7$.

Donc si **A fait 9 tours** alors **B en fait 7**.

Exercice 10 : Tout est en règle

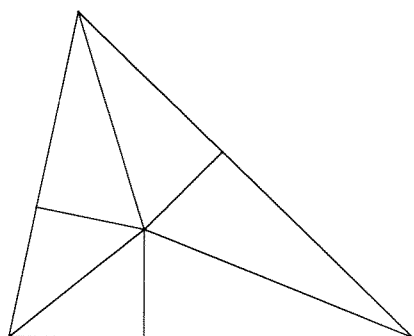
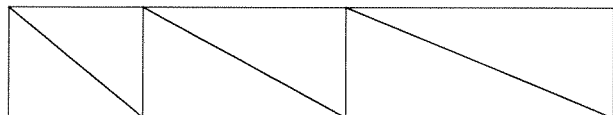
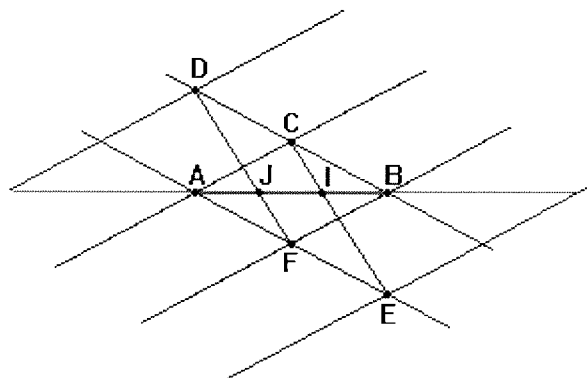
Il y a plusieurs solutions ; en voici une :

Les triangles BIC et AIE sont en situation de Thalès

donc $\frac{BI}{AI} = \frac{BC}{AE}$.

Or $AE = 2 BC$ donc $AI = 2 IB$ et **I se trouve aux 2/ 3 de AB**.

De la même façon, on montrera que **J se trouve au 1/ 3 de AB** en considérant les triangles AJF et BJD.



Exercice 11 : C'est Chu

Le triangle est partagé en 6 triangles rectangles qui sont superposables 2 par 2.

On les rassemble 2 par 2 pour former un rectangle dont la largeur est égale au rayon du cercle inscrit et dont la longueur est égale au demi-périmètre du triangle.

D'où l'égalité : $S = R \times \frac{P}{2}$ ce qui donne $R = \frac{2 S}{P}$.

Remarque :

Cet exercice est une belle démonstration géométrique de la formule donnant le rayon du cercle circonscrit à un triangle en fonction de son périmètre et de son aire.

Exercice 12 : Euromate

Pour que 100 opérations soient possibles, quel que soit le change, il faut au départ : 100 billets de 50 € (au maximum 100 changes de 100 €), 100 de 20 € (pour des changes uniquement de 100 € et 50 €), 200 de 10 €, 200 de 5 €.

	100 €	50 €	20 €	10 €	5 €
Nombre de billets au départ	0	100	100	200	200
Billets de 100 € introduits	x				
Billets rendus		x	x	2x	2x
Billets de 50 € introduits		y			
Billets rendus			y	2y	2y
Billets de 20 € introduits			z		
Billets rendus				z	2z
Billets de 10 € introduits				t	
Billets rendus					2t
Bilan	x = 20	100+ y-x = 130	100+ z-x-y = 40	200+ t-2x-2y-z = 70	200 -2x-2y-2z-2t = 0
Par résolutions successives, on obtient	x = 20	y = 50	z = 10	t = 20	

Ont donc été introduits : **20 billets de 100 €, 50 de 50 €, 10 de 20 € et 20 de 10 €.**

Exercice 13 : C'est pas du toc

On déroule la surface latérale pour la mettre à plat, obtenant un secteur de disque.

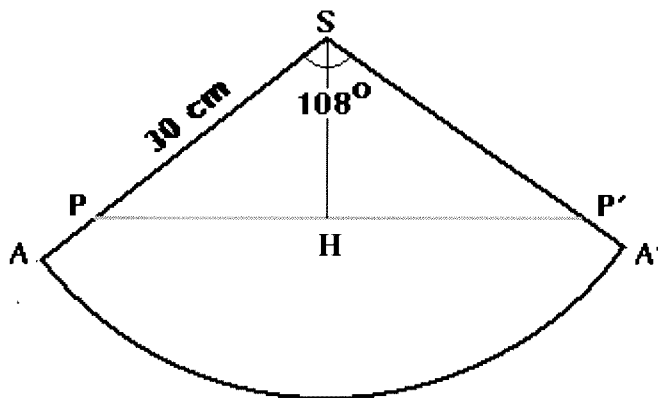
Sur cette surface rectifiée, le chemin le plus court de P à P est le segment de droite [PP'], c'est "la ligne de contact" de la chaînette avec le cône.

Le périmètre de la base est 21π et celui du cercle de centre S et de rayon 35 cm est 70π .

$$\text{D'où } \widehat{PSP'} = 360^\circ \times \frac{21\pi}{70\pi} = 108^\circ.$$

La longueur de la chaînette PP' est égale à $2 \times 30 \text{ cm} \times \sin(54^\circ)$ soit environ 48,5 cm (déterminée grâce au triangle SHP rectangle en H).

Sachant que $2 \times \sin(54^\circ)$ est le nombre d'or, c'est une chaînette à 24 carats !



MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 2002-2003

14^e édition

Mathématiques sans frontières

organisée par l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

**ÉPREUVE
D'ENTRAÎNEMENT
DÉCEMBRE 2002**

- Des explications ou des justifications sont demandées pour les exercices 3, 6, 10, 11, 12 et 13.
- Toute solution même partielle sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice n°1

7 points

Sans perdre la face

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots).

Die Abbildung zeigt ein Möbiusband. Seine geometrischen Eigenschaften überraschen. Um ein Möbiusband aus einem rechteckigen Papierstreifen ABCD herzustellen, musst du die Seite AD an die Seite BC kleben. Aber Achtung: A muss mit C und B mit D zusammenfallen. Stelle ein solches Band her und male eine Seite farbig an.

Was hast du bemerkt ?

Zeichne nun die Mittellinie des Bandes ein und schneide das Band entlang dieser Linie.

Was stellst du fest ?

The Möbius strip is presented in the figure. It has got amazing geometric properties.

To make such a Möbius strip with a rectangular band of paper ABCD, you must link side AD to side BC... but be careful A must coincide exactly with C and B with D. Now cut out such a Möbius strip. Color one side.

What do you observe ?

Draw the median line of the strip. Cut the strip on that line.

What do you notice ?

El dibujo nos muestra la cinta de Möbius. Esta cinta tiene propiedades geométricas sorprendentes. Para fabricar una cinta de Möbius con una tira de papel rectangular ABCD, hay que unir el lado AD con el lado BC... pero cuidado A debe coincidir con C y B con D. Construya una cinta así. Coloree una cara.

¿ Qué observas ?

Trace la línea mediana de la cinta. Corte la cinta siguiendo esta línea.

¿ Qué constatas ?

Il nastro di Möbius è rappresentato in figura : possiede delle proprietà geometriche sorprendenti.

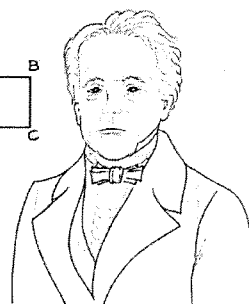
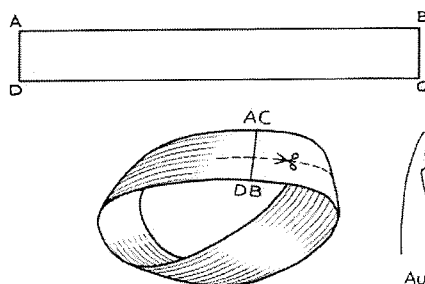
Per costruire un nastro di questo tipo con una striscia di carta rettangolare ABCD, si deve raccordare il lato AD con il lato BC...ma attenzione perché A deve coincidere con C e B con D.

Costruite un tale nastro. Coloratene una faccia.

Che cosa notate ?

Tracciate la mediana del nastro. Tagliate il nastro secondo questa linea.

Che cosa osservate ?



August MÖBIUS (1790-1869)

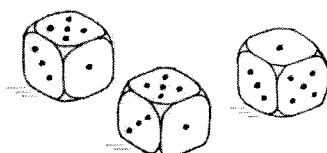
Exercice n°2

5 points

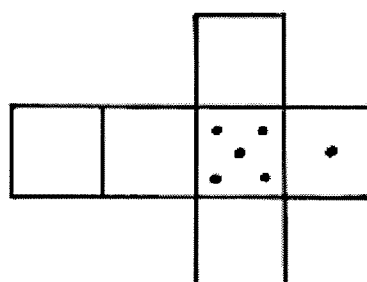
Sans défauts

Pour qu'un dé cubique soit homologué, la somme de points marqués sur 2 faces opposées doit toujours être égale à 7.

Malgré cette exigence, on peut rencontrer de nombreux modèles de dés différents, comme par exemple :



Dessiner les patrons de tous les dés homologués en complétant à chaque fois le patron ci-dessous.



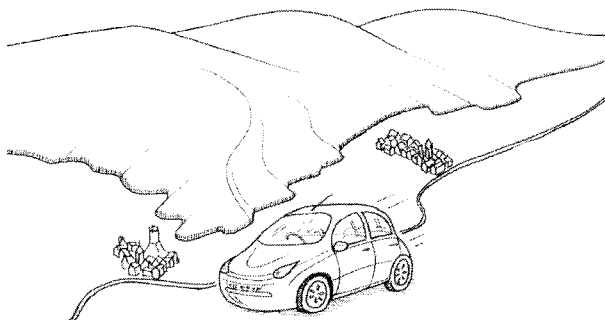
Exercice n°3**7 points*****La vitesse, c'est dépassé***

4 personnes pratiquent le covoiturage et effectuent à tour de rôle le même trajet long de 24 km chaque jour de la semaine.

Sylvie, prudente, roule calmement et met toujours le même temps. Christine met 6 minutes de moins. Michel roule trop vite et met 6 minutes de moins que Christine. Quant à Antoine, il est irresponsable et met encore 6 minutes de moins que Michel.

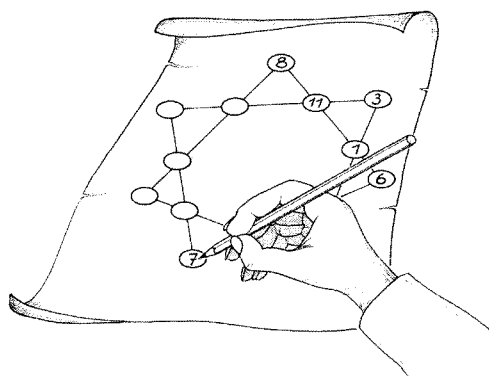
De ce fait, la vitesse d'Antoine est double de celle de Christine.

Calculer la vitesse moyenne de chacun de ces conducteurs.

**Exercice n°4****5 points*****Heptagone magique***

Maurice s'applique à tracer une étoile magique à 7 branches dans laquelle il va placer tous les nombres entiers de 0 à 13 de sorte que la somme de 4 nombres alignés soit toujours la même.

Compléter l'étoile de Maurice et la présenter joliment sur la feuille-réponse.

**Exercice n°5****7 points*****Contrôle continu***

Vers la fin du XX^{ème} siècle, la Syldavie s'est dotée de quatre centres de contrôle de son espace aérien. Ils ont été installés à Nantsk, Klow, Lugdun et Tolsa.

Pour coordonner le travail de ces quatre centres, les autorités syldaves ont énoncé une règle simple :

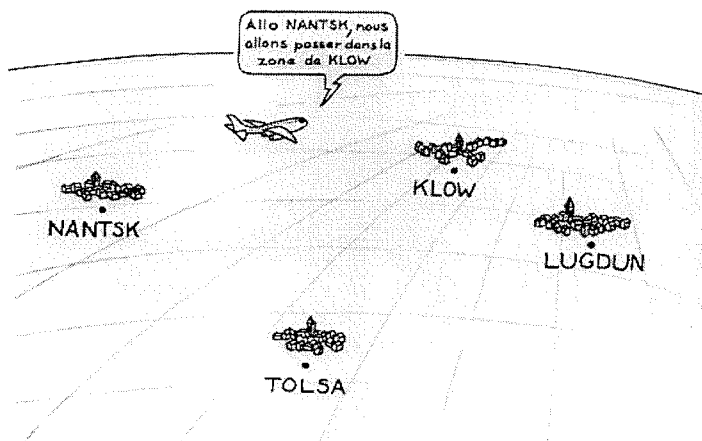
"Tout avion survolant le pays devra être surveillé par le centre de contrôle le plus proche de sa position."

L'espace aérien syldave se trouve ainsi partagé en quatre zones.

Représenter sur la feuille-réponse les positions relatives des 4 centres de contrôle en prenant 1 cm pour 50 km.

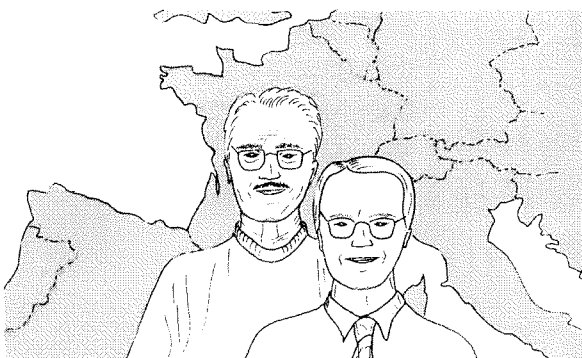
Matérialiser les 4 zones avec 4 couleurs après avoir bien tracé leurs frontières.

On donne les distances : KT = 600 km, KL = 350 km, NK = 350 km, TL = 400 km, NT = 450 km.

**Exercice n°6****5 points*****Tout augmente !***

Hector, âgé de 50 ans aujourd'hui, apprend que l'espérance de vie dans son pays est actuellement de 78 ans et qu'elle augmente de 2 mois chaque année.

Si cette évolution se poursuivait, en quelle année l'âge d'Hector serait-il égal à l'espérance de vie dans son pays ?



Exercice n°7

7 points

Non conforme

« Encore orthogonale, la symétrie ! C'est assez ! »

Jacques veut changer les règles de construction pour que la symétrie par rapport à une droite ne soit plus orthogonale mais oblique.

Pour cela il invente la symétrie oblique dont voici les règles :

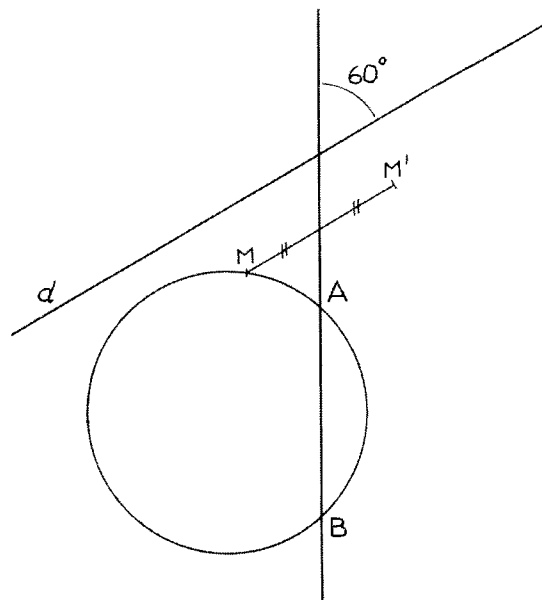
Le point M' symétrique de M par rapport à la droite (AB) parallèlement à la direction d est tel que :

1° Les droites (MM') et d sont parallèles.

2° Le milieu de $[MM']$ appartient à la droite (AB) .

Reproduire sur la feuille-réponse une figure analogue à la figure ci-dessous puis construire point par point l'image du cercle par cette symétrie oblique.

Les droites (AB) et d forment un angle de 60° .



Exercice n°8

5 points

Saute-mouton

Des moutons blancs et des moutons noirs doivent échanger leur pâturage ...

Cette situation est schématisée par le jeu suivant :

3 moutons blancs et 3 moutons noirs sont disposés dans une grille de 7 cases comme indiqué ci-dessous.



On ne peut les déplacer que suivant deux mouvements :

- faire **avancer** un mouton dans la case vide qui est devant lui ;
- faire sauter un mouton par-dessus un mouton voisin pour aller occuper la case vide.

On voudrait que les moutons blancs se retrouvent à droite et les noirs à gauche, séparés des blancs par la case vide.

Donner une suite de mouvements réalisant cet échange.



Exercice n°9

7 points

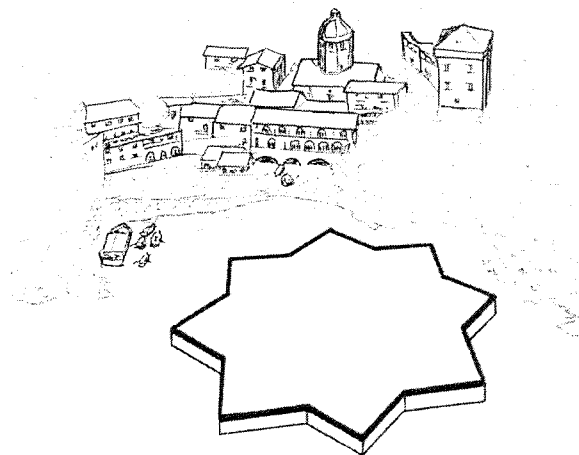
Carrelage ligure

A l'occasion de fouilles archéologiques dans le monastère de San Fruttuoso, près de Gênes, on a trouvé un carrelage formé de carreaux de 2 sortes, étroitement juxtaposés en nombre égal.

Les uns ont la forme d'une étoile régulière à 8 points que l'on pourra obtenir en superposant deux carrés de côté 1 dm et de même centre.

Les autres ont un périmètre égal à celui des premiers. Ils leur servent de compléments pour permettre la réalisation d'un carrelage sans interstice.

Coller sur la feuille-réponse, à l'échelle 1/2, un agencement de 6 carreaux : 3 de chaque sorte.



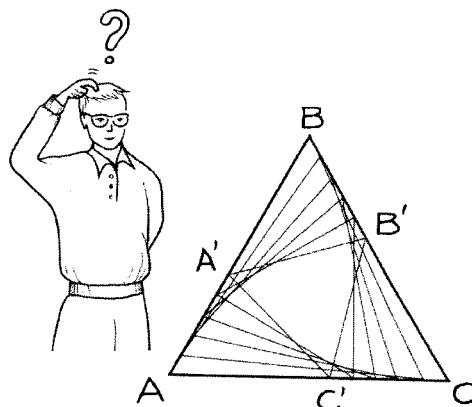
Exercice n°10

10 points

Triangles calés

ABC est un triangle équilatéral de 8 cm de côté.
On place 3 points A', B' et C', respectivement sur [AB], [BC] et [CA], de sorte que $AA' = BB' = CC'$.

Comment faut-il choisir la distance AA' pour que les triangles $AA'C'$, $BB'A'$ et $CC'B'$ soient rectangles, respectivement en A', B', C' ? Justifier la réponse.



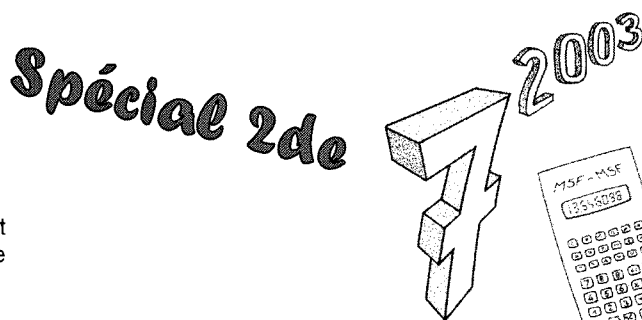
Exercice n°11

5 points

La fin justifie les moyens...

Marc s'amuse avec sa calculatrice. Il dit qu'il sait calculer les deux derniers chiffres de n'importe quelle puissance de 7.

Quels sont les deux derniers chiffres de 7^{2003} ?
Expliquer la démarche.



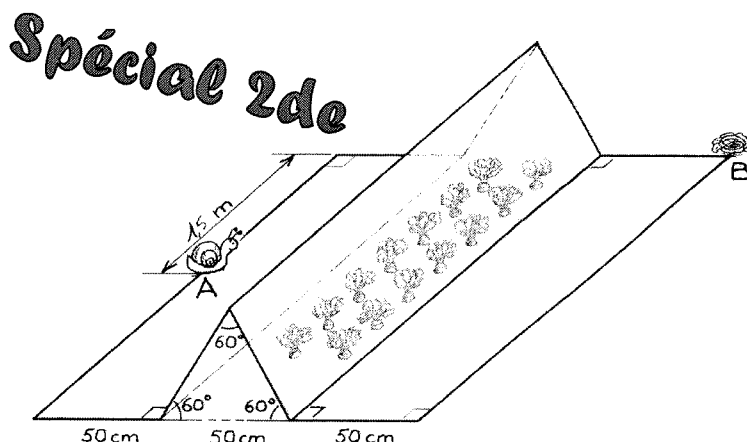
Exercice n°12

7 points

... ça fait aussi !

Un escargot veut se rendre du point A au point B par le chemin le plus court. Sur son chemin, il doit gravir une serre en forme de prisme. Les dimensions sont indiquées sur la figure ci-contre.

Calculer la longueur du chemin. Expliquer la démarche.



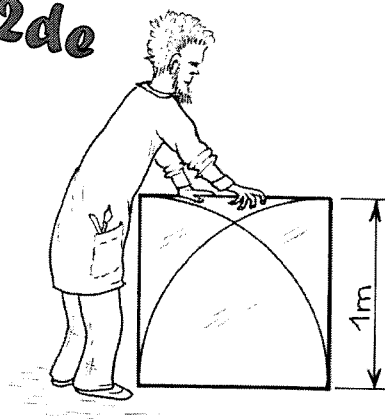
Exercice n°13

10 points

Attention fragile

Une fenêtre carrée de 1 mètre de côté est fermée par un vitrail représenté ci-contre.
Les surfaces de verre sont délimitées par deux quarts de cercles centrés sur les sommets inférieurs du carré.

Déterminer l'aire de chacune des 4 pièces du vitrail.



Éléments de solutions pour la correction de l'épreuve d'entraînement de décembre 2002

Exercice 1 : Sans perdre la face

Si on colorie une face du ruban, on sera amené à traverser le raccord et finalement c'est le ruban tout entier qui sera colorié. Le ruban de Möbius n'a donc qu'une face.

Si on coupe le ruban en suivant sa ligne médiane, on a la surprise de ne pas obtenir deux morceaux mais une seule boucle.

Barème proposé : ruban 1 pt ; coloriage + une seule face : 1,5 pt ; découpage + une seule pièce : 1,5pt ; expression écrite dans la langue : 3pts.

Exercice 2 : Sans défauts

Chacune des faces 2, 3 et 6 peut être orientée de deux façons différentes ; les faces 3 et 4 peuvent être échangées. En combinant ces variations, on obtient $2 \times 2 \times 2$, soit 16 dés différents, tous homologués. Voici leurs patrons :

Barème proposé :

0,3 pt par patron correct . Arrondir au $\frac{1}{2}$ pt le plus proche.

Exercice 3 : La vitesse, c'est dépassé

Antoine, cet irresponsable, met 12 minutes de moins que Christine. Comme sa vitesse est ainsi le double de celle de Christine, il mettra deux fois moins de temps qu'elle pour effectuer le trajet soit 12 minutes. Antoine roule donc à 120 km/h et Christine à 60 km/h. Quant à Sylvie et Michel, leurs vitesses respectives sont de $24/30 \times 60 = 48$ km/h et $24/18 \times 60 = 80$ km/h.

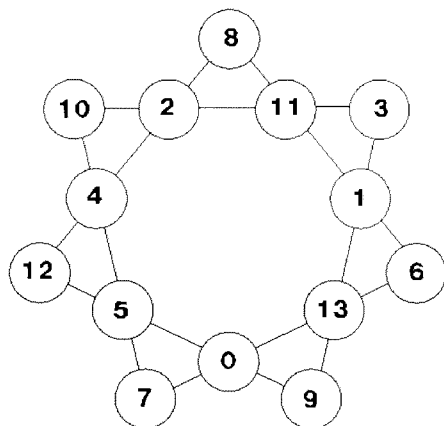
autre méthode : $D = 24 = V_S T_S = V_C T_C = V_M T_M = V_A T_A$ or on sait que $V_A = 2V_C$ et $T_A - T_C = 1/5$ h (= 12min) d'où $V_C T_C = 2V_C(T_C - 1/5) \Rightarrow T_C = 2/5$ et $V_C = 24/(2/5) = 60$.

Barème proposé :

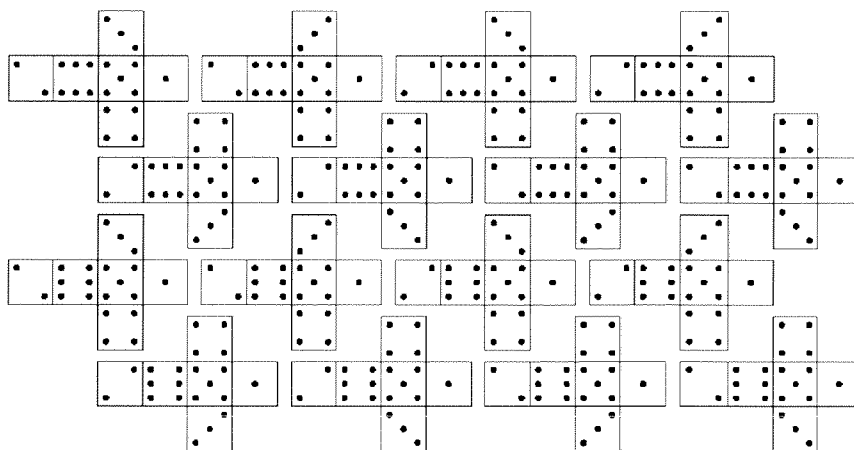
4pts pour les réponses + 3 pts pour les explications.

Exercice 4 : Heptagone magique

Voici la seule solution :

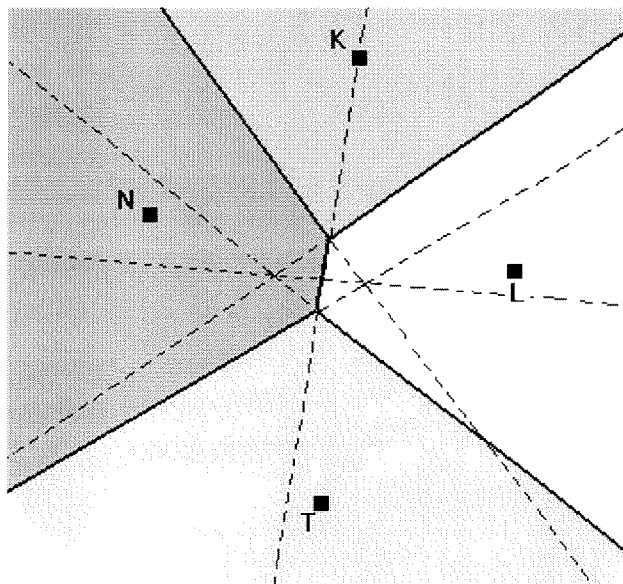


Barème proposé : 3 pts pour la solution + 2 pts pour l'esthétique du tracé.



Exercice 5 : Contrôle continu

Les frontières des zones sont données par les **médiatrices** qui sont 3 à 3 concourantes. Il faut être soigneux et bien choisir les bonnes frontières en Syldavie centrale :



Barème proposé :

Médiatrices de KT, TL, TN et NK : 4 x 0,5 pt ;
Médiatrice de NL : 1pt ; précision des tracés : 1 pt ;
choix correct des séparatrices (demi-droites, segment) : 2 pts ; Couleurs et esthétique : 1 pt

Exercice 6 : Tout augmente

Méthode 1 :

âge d'Hector	50	51	52	...	56	62	68	74	80	81	82	83
Espérance de	78	78a2m	78a4m	...	79	80	81	82	83	83a2m	83a4m	83a6m

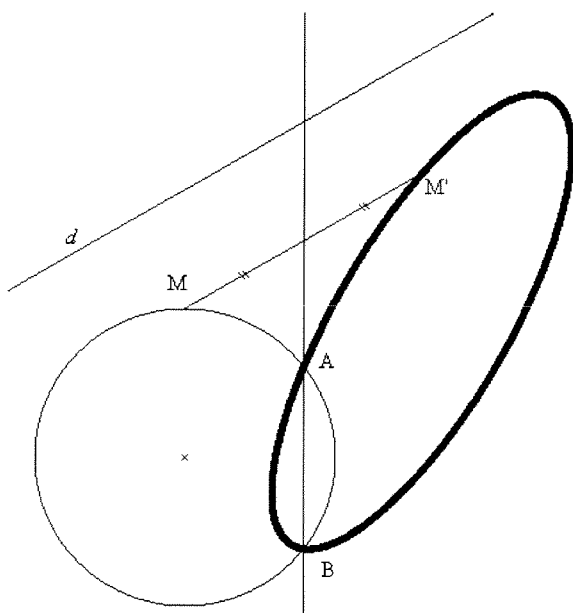
Méthode 2 : Dans n années, Hector aura $(50 + n)$ ans. L'espérance de vie sera de $78 + n/6$ ans.
Si $50 + n = 78 + n/6$ alors $n = 33,6$.

Comme l'épreuve d'entraînement a lieu en décembre 2002 ou début 2003, c'est au cours de l'année $2003 + 33 = 2036$ qu'aura lieu l'égalité.

Barème proposé :

3 pts pour la réponse 2036 (2 pts pour 2035) + 2pts pour les explications

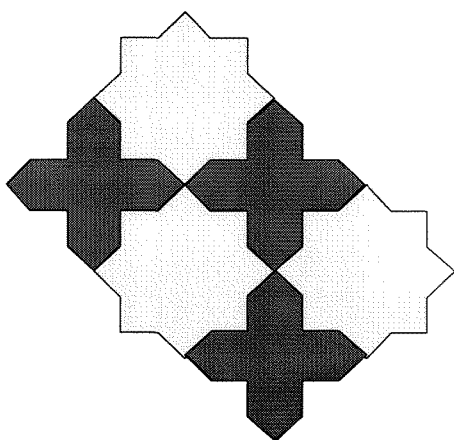
Exercice 7 : Non conforme



Barème proposé :

Dtes + cercle 1 pt + jusqu'à 4 pts selon le nombre et la répartition des symétriques construits + 2 pts pour le tracé de l'ellipse.

Exercice 9 : Carrelage ligure



Barème proposé : 2 pts pour la pièce complémentaire + 2 pts pour l'agencement + 3 pts pour soin, esthétique et précision.

Exercice 8 : Saute-mouton

Il y a 2 solutions en 15 mouvements.
Voici l'une d'elles :

	○	○	○		●	●	●
1	○	○		○	●	●	●
2			●	○		●	●
3			●		●		●
4			●		●		●
5			●	○	●	○	●
6			●	○	●	○	●
7	●	○		○	●	○	●
8	●		●			○	●
9	●		●		●		
10	●		●		●		
11	●	○	●		●	○	○
12	●		●		●	○	○
13	●	●			●	○	○
14	●	●	●	○		○	○
15	●	●	●		○	○	○

L'étape 4 correspond au dessin du sujet.

L'autre est symétrique

Plus généralement, des mathématiciens ont démontré que pour échanger le pâturage de n moutons blancs et n moutons noirs, on fera $n(n+2)$ mouvements dont n^2 sauts et $2n$ translations.

Barème proposé 2 pts pour un échange en plus de 15 actions (avec des reculades) 5pts pour l'une des solutions correctes.

Exercice 10 : Triangles calés

Hypothèses : ABC équilatéral,

$$AB = 8, AA' = BB' = CC' = x$$

Version Thalès : Soit I le milieu de [AB]. Alors [CI] est une hauteur. On a alors les équivalences suivantes :

AA'C' est un triangle rectangle en A'

⇔ Les droites (A'C') et (IC) sont parallèles

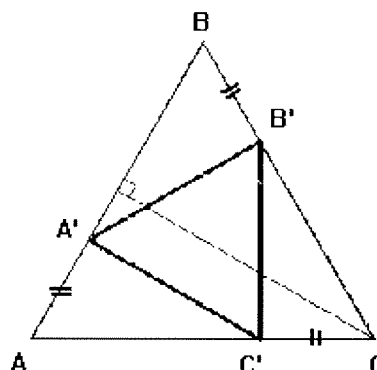
⇔ $AA'/AI = AC'/AC$ (condition nécessaire selon Thalès et suffisante selon la réciproque)

$$\Leftrightarrow x/4 = (8-x)/8 \Leftrightarrow 2x = 8-x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 8/3}$$

De même pour les 2 autres triangles.

Il existe d'autres méthodes possibles (trigo , demi-triangle équilatéral...)



Barème proposé : valeur approchée par tâtonnements 2,6 ou 2,7 : 1 pt. Réponse 8/3 non expliquée : 2 pts. Explications rigoureuses : 7 pts à l'appréciation du correcteur. Référence aux 2 autres triangles : 1 pt

Exercice 11 : La fin justifie les moyens...

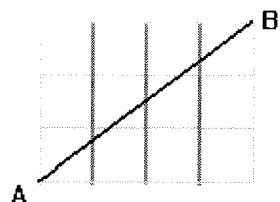
Voici les premières puissances de 7 : 1 - 7 - 49 - 343 - 2401 - 16807 - 117649 - 823543 - 5764801 - 40353607 - 282475249 - 1977326743.

On constate pour les deux derniers chiffres la succession périodique de 07, 49, 43 ou 01. Sachant que $2003 = 4 \times 500 + 3$ alors 7 puissance 2003 aura les même 2 derniers chiffres que 7 puissance 3 soit 43.

Pour aller plus loin : Supposons que 7^n finisse par 01, 43, 49 ou 07, alors $7^{n+4} = 7^n \times 2401$. Les deux derniers chiffres de 2401 sont 01, par conséquent multiplier un nombre quelconque par 2401 ne modifie pas les deux derniers chiffres de ce nombre. 7^{n+4} a donc les mêmes deux derniers chiffres que 7^n .

Barème proposé : 3 pts pour le 43 + 2 pts pour les explications

Exercice 12 : ... la faim aussi !



Le chemin de l'escargot peut être segmenté en 4 tronçons chacun se situant dans une bande plane de largeur 0,5 m.

On peut «aplatir» la serre pour représenter ces 4 bandes côte à côte dans un seul plan. Alors le chemin le plus court est représenté par le segment [AB]. Selon Pythagore, sa longueur est 2,5 m.

Barème proposé : autre chemin correctement calculé : 3 pts ;

contournement de la serre par l'arrière ($\approx 2,58$ m) : 2 pts ; chemin correct tracé ou décrit, mais non calculé : 4 pts.

Exercice 13 : Attention fragile.

$$\text{Aire de la surface grise} = \frac{1}{6} \text{ aire du disque} - \text{aire triangle AOB}$$

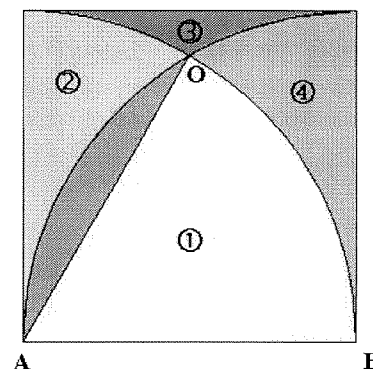
$$= \frac{1}{6} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Aire } \textcircled{1} = \frac{1}{6} \pi + \left(\frac{1}{6} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \boxed{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Les pièces ② et ④ ont la même aire ; elles sont symétriques.

$$\text{Aire } \textcircled{2} = \text{Aire } \textcircled{4} = \frac{1}{4} \pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}}$$

$$\text{Aire } \textcircled{3} = 1 - \frac{1}{4} \pi - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} \right) = \boxed{1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}}$$



Barème proposé : les 10 pts sont à répartir à l'appréciation du correcteur suivant la production de sa classe. -1 si valeurs approchées.

Compétition interclasses de 3^{ème} et de 2^{nde}

organisée avec le concours de l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg



ACADEMIE
DE STRASBOURG

Mathématiques sans frontières

Epreuve du
13 mars 2003

- On demande des explications ou des justifications pour tous les exercices sauf pour les numéros 4, 6 et 8.
- Toute solution même partielle sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice n°1
7 points

Pause café

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien
en un minimum de 30 mots.

Cuatro estudiantes desean cada uno tomar un café durante el recreo y sólo tienen poca moneda. Un café cuesta 35 centimos de euros. La máquina de café ya no tiene cambio. Los responsables vienen para vaciarla.

Alberto tiene una moneda de 1 euro y una de 5 centimos. Bernardo tiene una moneda de 50 centimos y una de 5 centimos.

Claudia tiene una moneda de 20 centimos y dos de 10 centimos.

Daniela tiene dos monedas de 20 centimos.

Cada uno quiere su café y la vuelta de su moneda. La máquina sólo sirve a una persona a la vez y sólo vuelve monedas cuando las tiene.

¿ Como se las van a arreglar ?

Vier Studenten haben Kaffeedurst, aber leider zu wenig Kleingeld. Ein Kaffee kostet 35 Cent. Der Kaffeeautomat kann im Moment kein Wechselgeld zurückgeben, weil er eben erst geleert wurde.

Albert hat eine 1-Euro-Münze und ein 5-Cent-Stück.

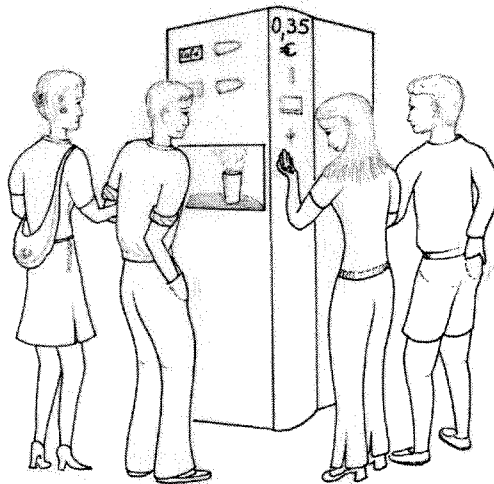
Bernhard hat eine 50-Cent- und eine 5-Cent-Münze.

Claudia hat eine Münze zu 20 Cent und zwei zu 10 Cent.

Daniela hat zwei 20-Cent-Münzen.

Jeder möchte seinen Kaffee und sein Wechselgeld. Der Automat kann nur eine Person auf einmal bedienen und kann nur Wechselgeld herausgeben, wenn er welches hat.

Wie gehen sie vor ?



Quattro studenti desiderano bere un caffè durante l'intervallo delle lezioni e possiedono solo della moneta. Un caffè costa 35 centesimi di euro. La macchinetta non ha più moneta dato che i manutentori l'hanno appena svuotata.

Alberto ha una moneta da 1 euro e una da 5 centesimi.

Bernardo ha una moneta da 50 centesimi ed una da 5 centesimi.

Claudia ha una moneta da 20 centesimi e due da 10 centesimi.

Daniela ha due monete da 20 centesimi.

Ognuno desidera il suo caffè e vuole il suo resto. La macchinetta serve una sola persona per volta e fornisce il resto quando ha moneta.

Come possono organizzarsi ?

Four students wish to have a cup of coffee during their break and have very little change. A cup costs 35 euro cents. The machine has no change left, the people in charge have just come to empty it.

Albert has a 1 euro coin and a 5 cents coin.

Bernard has a 50 cents coin and a 5 cents coin.

Claudia has a 20 cents coin and two 10 cents coins.

Daniela has two 20 cents coins.

Each of them wants his coffee and his change. The machine serves one person at a time and gives back change only when it has some.

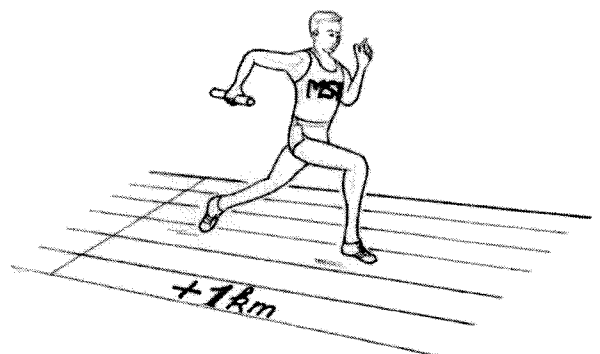
How are they going to manage ?

Au suivant !

Une course de relais de 40 km est courue de façon à ce que chaque équipier parcoure un nombre entier de kilomètres. De plus, lorsqu'un coureur reçoit le témoin, il doit courir 1 km de plus que celui qui le lui donne.

Exercice n°2
5 points

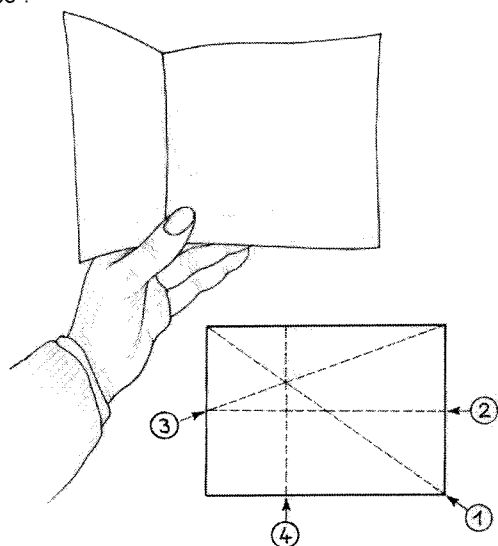
Donner la distance parcourue par chaque membre de l'équipe.



Exercice n°3 7 points

Tripli

Voici une méthode qui permet de trouver le tiers de la longueur d'une feuille de papier rectangulaire uniquement par pliages :



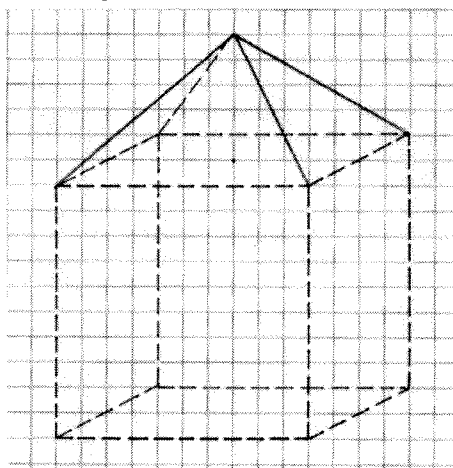
Plier successivement la feuille suivant la diagonale 1, la médiane 2, puis suivant les plis 3 et 4 comme indiqué sur la figure ci-dessus. Le pli 4 donne alors le tiers de la longueur.

Justifier cette méthode.

Exercice n°4 5 points

Rhombique

La figure ci-dessous représente un cube surmonté d'une pyramide régulière à base carrée dont la hauteur égale la moitié de l'arête du cube.



Si l'on construit une telle pyramide sur chacune des 6 faces du cube, on observe que les faces de ces pyramides sont deux à deux dans un même plan et s'assemblent pour former des losanges. Ces 12 losanges sont les faces d'un solide appelé **dodécaèdre rhombique**.

Ses 14 sommets sont les 8 sommets du cube et les 6 sommets des pyramides.

Dessiner en perspective cavalière le dodécaèdre rhombique obtenu à partir d'un cube semblable à celui de la figure ci-dessus. Colorier les faces visibles du dodécaèdre.

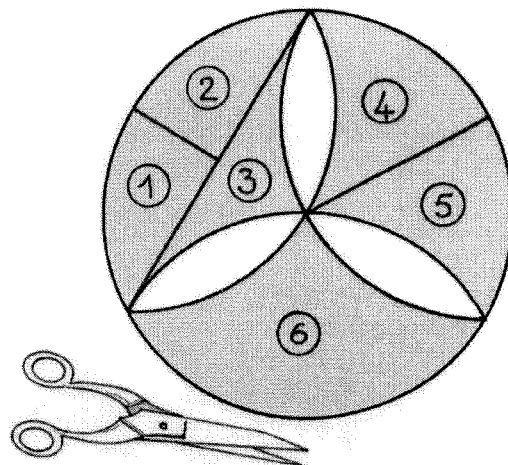
Exercice n°5 7 points

C'est pas π

Ci-dessous est dessinée une rosace construite à partir d'un hexagone régulier.

Pour calculer l'aire de la surface grise, on peut la découper en 6 morceaux comme indiqué sur ce dessin.

Avec ces 6 pièces, on peut composer un rectangle.



Réaliser le puzzle à partir d'un disque de rayon 6 cm. Coller le rectangle sur la feuille-réponse. Calculer l'aire de la surface grise.

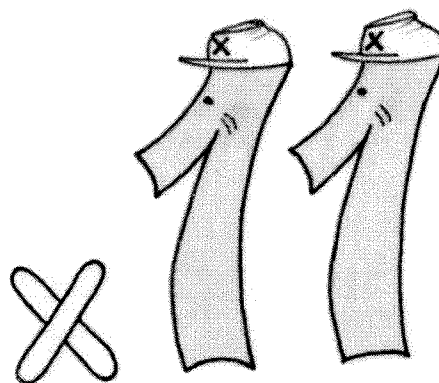
Exercice n°6 5 points

Le 11 gagnant

Un entier est un multiple de 11 si et seulement si la somme algébrique **alternée** de ses chiffres est elle-même un multiple de 11, éventuellement négatif ou nul.

Exemples :

- 1958 est un multiple de 11 car $1 - 9 + 5 - 8 = -11$
- 2002 est un multiple de 11 car $2 - 0 + 0 - 2 = 0$
- 94 919 est un multiple de 11 car $9 - 4 + 9 - 1 + 9 = 22$
- mais 1989 n'est pas multiple de 11 car $1 - 9 + 8 - 9 = -9$.



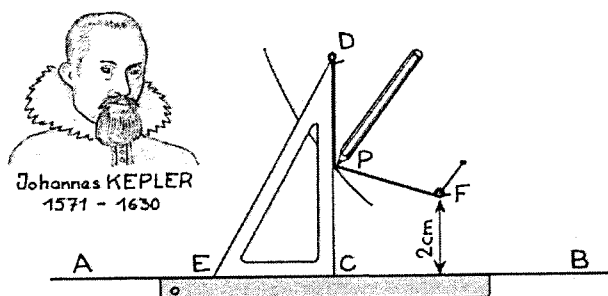
Trouver le plus grand multiple de 11 s'écrivant avec 10 chiffres tous différents.

Exercice n°7 7 points

À la ficelle

L'astronome allemand Johannes Kepler a publié une méthode permettant de tracer une parabole en utilisant une règle, une équerre, une ficelle et un crayon.

On pose la règle le long d'une droite (AB) et on plante l'épingle en un point F. La longueur de la ficelle étant égale au côté CD de l'équerre, on en fixe une extrémité en D et l'autre en F. La pointe P du crayon maintient la ficelle tendue le long de l'équerre le plus loin possible, comme le montre le dessin ci-dessous.



Si on fait glisser le côté EC de l'équerre sur la droite (AB), le point P se déplace alors sur une parabole.

Justifier l'égalité $PF = PC$.

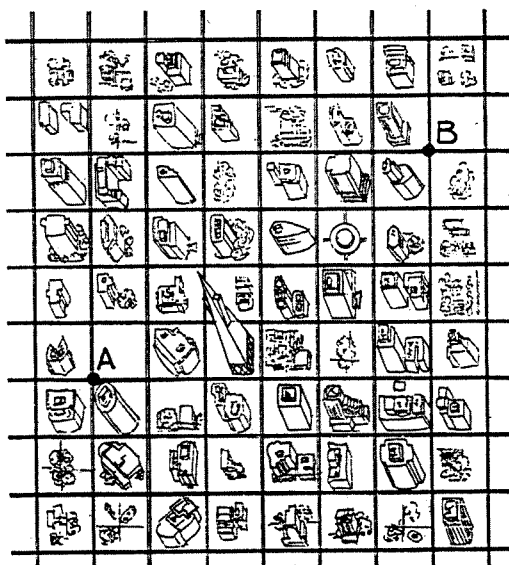
Dessiner point par point une telle parabole sachant que $CD = 14$ cm et que F se trouve à 2 cm de la droite (AB).

Exercice n°8 5 points

Police Geometry

Dans certaines villes, comme par exemple New York ou Mannheim, les rues forment un quadrillage régulier.

Jules et Jim sont chefs de deux postes de police dans une telle ville. Leurs postes sont marqués A et B sur le plan ci-dessous.



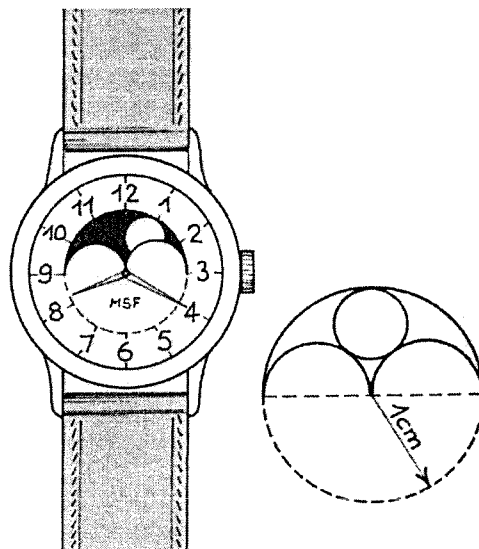
Reproduire le quadrillage sur la feuille-réponse. Marquer en couleur les points de rues pour lesquels la distance minimale à parcourir en voiture pour rejoindre le poste de Jules ou le poste de Jim est la même.

Exercice n°9 7 points

Cadran lunaire

Une montre indique mécaniquement les phases de la lune, de la manière suivante :

La lune est représentée par un disque. Celui-ci est dessiné sur une plaque sombre circulaire qui tourne autour du même axe que les aiguilles et que l'on aperçoit dans une ouverture délimitée par 3 demi-cercles.



La lune a le plus grand diamètre permettant de se montrer entièrement dans l'ouverture.

Calculer ce diamètre sachant que le rayon du grand demi-cercle est 1 cm.

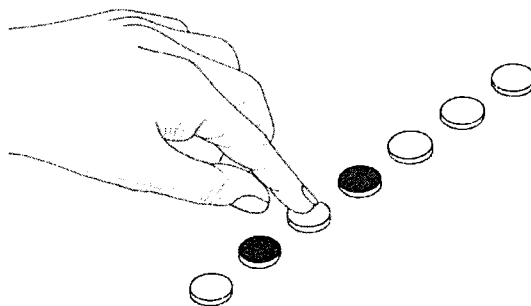
Exercice n°10 10 points

Black blanc bloqué

Pour jouer à ce jeu, on aligne des jetons ayant une face blanche et une face noire. Au départ, toutes les faces visibles sont blanches.

Le but du jeu est d'avoir toutes les faces noires visibles en respectant la règle suivante :

" On bloque un jeton avec un doigt et on retourne alors le jeton voisin s'il n'y en a qu'un, les deux voisins s'il y en a deux. On recommence autant de fois que nécessaire. "



Dessiner les alignements de 2 jetons, 3 jetons, etc... jusqu'à 15 jetons. Pour chaque alignement ayant une solution, marquer d'une croix les jetons qui ont été bloqués successivement. Sinon, écrire que cet alignement n'a pas de solution. Y a-t-il une solution pour un alignement de 2003 jetons ? Justifier la réponse.

Exercice n°11 5 points

Les voyages forment la jeunesse

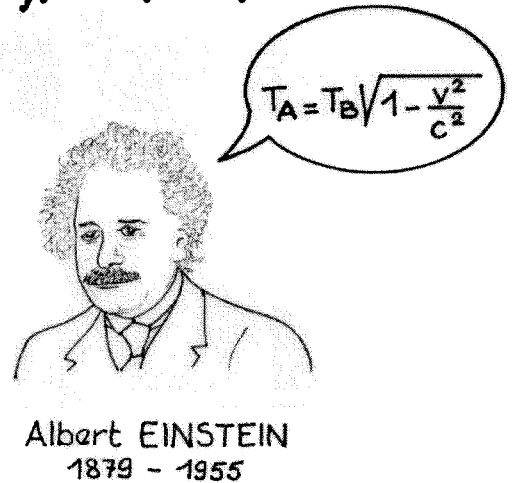
Albert Einstein a établi que le temps n'est pas une grandeur absolue et qu'il ne s'écoule pas de la même façon pour un voyageur se déplaçant à très grande vitesse que pour son ami qui reste immobile.

Si Albert fait un voyage dans l'espace à la vitesse v et si Bernard reste immobile, Bernard mesurera une durée T_B pour ce voyage, tandis qu'Albert mesurera une autre durée T_A pour ce même voyage.

Selon Einstein, on a la relation : $T_A = T_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ où c est la vitesse de la lumière, soit environ 300 000 km/s.

Albert part en voyage dans l'espace à l'âge de 40 ans, alors que son fils Bernard est âgé de 20 ans. Au retour, tous deux se retrouvent âgés de 60 ans.

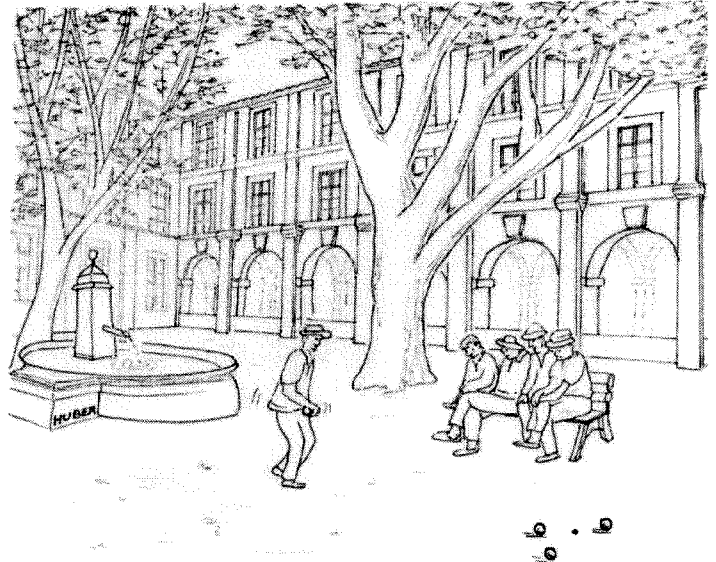
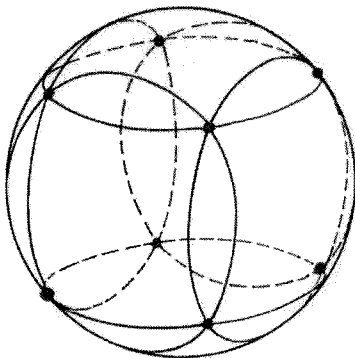
A quelle vitesse Albert s'est-il déplacé ? Donner la réponse en km/s.



Exercice n°12 7 points

Partie de boules

Sur une boule de pétanque de rayon 37 mm on veut tracer 6 cercles comme indiqué sur la figure ci-dessous. Leurs 8 points d'intersection sont les sommets d'un cube.



Calculer le rayon de ces cercles.

Exercice n°13 10 points

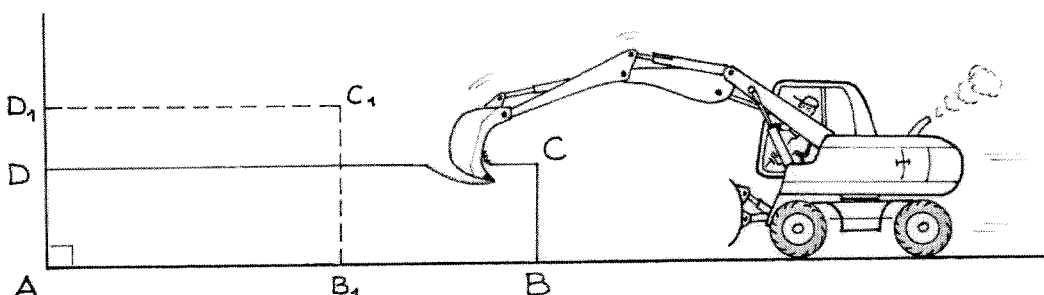
Quadrature

Voici un programme de construction :

- dessiner un rectangle ABCD de côtés $AB = 9$ cm et $AD = 3$ cm.
- placer sur $[AB]$ le point B_1 de façon que AB_1 soit la moyenne de AB et AD .
- tracer le rectangle $AB_1C_1D_1$ de même aire que ABCD.

Répéter ce programme de construction à partir du rectangle $AB_1C_1D_1$ pour obtenir le rectangle $AB_2C_2D_2$ toujours de même aire et ainsi de suite.

Tracer sur la feuille-réponse les 4 premiers rectangles. Comment évoluent les dimensions de ces rectangles ?



Exercice 1 : Pause café

Le plus simple est de **mettre toute la monnaie en commun**.

On dispose alors de : **1€ + 50 ct + 3× 20 ct + 2×10 ct + 2× 5 ct**

On commence par acheter 2 cafés en introduisant

$2 \times (20 \text{ ct} + 10 \text{ ct} + 5 \text{ ct})$

On achète un 3° café en introduisant 50 ct. La machine rend 10 ct + 5 ct. On rend 5 ct à Daniela et 10 ct à Bernardo

On achète le 4° café en introduisant 1€ la machine doit rendre 0,65 €.

Elle n'a qu'une façon pour le faire: rendre 50 ct + 10 ct + 5 ct.

On donne 5 ct à Claudia, encore 10 ct à Bernardo, et à Alberto 50 ct plus les 20 ct non utilisés. **Alors chacun a son café et sa monnaie.**

Exercice 2 :

Au suivant

L'unique solution est :

$$6+7+8+9+10 = 40$$

On ne demande pas de démontrer l'unicité de la solution.

Exercice 3 : Tripli

On pourra nommer les points comme ci-contre :

Avec les triangles AIM et CIB,

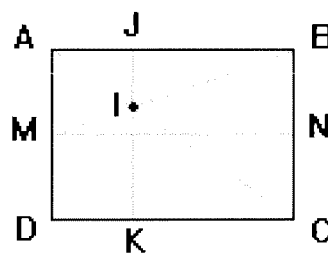
Thalès donne : $AI/IC = AM/CB = 1/2$

Donc $IC = 2 AI$ et $AC = 3 AI$

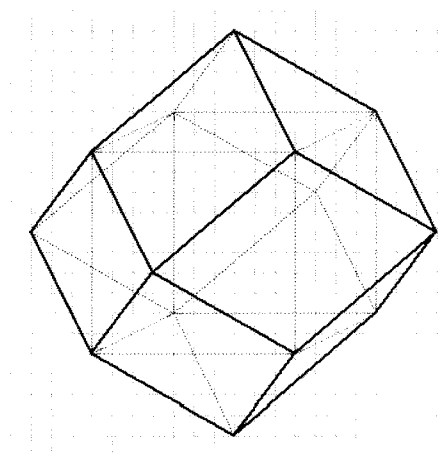
Avec les triangles AIJ et ACB,

Thalès donne alors :

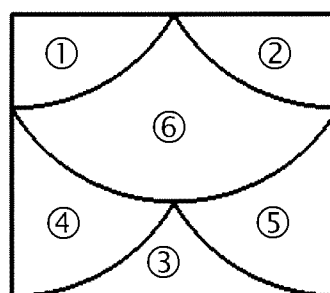
$$AJ = \frac{1}{3} AB$$



Exercice 4 : Rhombique



Exercice 5 : C'est pas pi



Voici le rectangle :

Sa longueur est $6 \times \sqrt{3}$ cm

Sa largeur est $1,5 \times 6 = 9$ cm

D'où son aire :

$$54 \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Exercice 6 : Le 11 gagnant... est 9876524130 .

Pour le trouver, on remarque d'abord que 9876543210 n'est pas un multiple de 11,

car $9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 5$, puis on le modifie le moins possible, en partant de la droite... du bon bricolage !

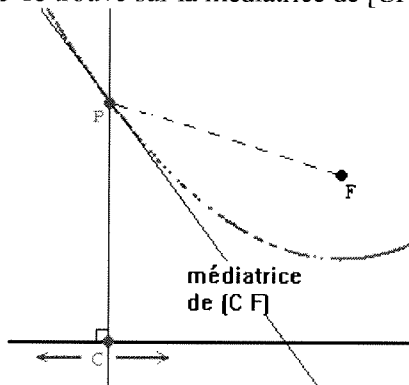
Exercice 7 : A la ficelle

- D'une part $\mathbf{PF} = \mathbf{14} - \mathbf{DP}$ puisque la ficelle est tendue
- et d'autre part $\mathbf{PC} = \mathbf{14} - \mathbf{DP}$ puisque les points D, P et C sont alignés

d'où l'égalité $\mathbf{PF} = \mathbf{PC}$

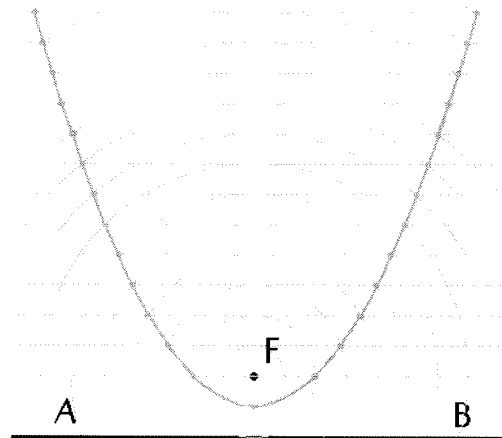
Cette égalité peut être exploitée pour le

tracé : P se trouve sur la médiatrice de [CF]

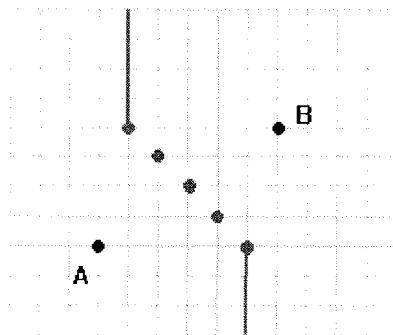


Autres méthodes :

- Choisir les points convenables dans un réseau de cercles et de droites.



- Se débrouiller avec une ficelle etc..
comme Kepler !



Exercise 8 : Police Geometry

Dans cette géométrie, on obtient une curieuse *médiatrice*, constituée de deux demi-droites et 3 points isolés.

Exercice 10 : Black blanc bloque

- 2 
- 3 
- 4 
- 5 pas de solution
- 6 
- 7 
- 8 
- 9 pas de solution
- 10 
- 11 
- 12 
- 13 pas de solution
- 14 
- 15 

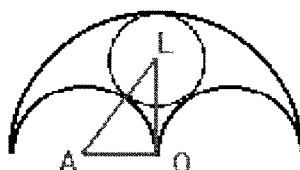
Il semble que les alignements n'ayant pas de solution soient ceux dont le nombre de jetons est de la forme $4n + 1$, mais c'est assez difficile à démontrer.

Par contre, il est plus facile d'établir qu'un alignement de 2003 jetons peut être retourné : on commence par la gauche, on retourne les 2000 premiers jetons **par groupes de 4** suivant la solution ligne 4, puis on retourne les 3 derniers suivant la solution ligne 3.

Exercice 9 : Cadran lunaire :

Le disque lunaire est tangent aux 3 demi-cercles. Soit R son rayon.

Alors, dans le triangle AOL :

$$OA = \frac{1}{2} : AL = \frac{1}{2} + R \text{ et}$$
$$OL = 1 - R,$$


Ce triangle étant rectangle pour des raisons de symétrie, Pythagore donne :

$$(\frac{1}{2} + R)^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1-R)^2$$

d'où $\mathbf{R} = 1/3$

Exercice 11 : Les voyages forment la jeunesse :

La formule $T_A = T_B \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ donne $20 = 40 \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ alors $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2}$

donc : $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$ et $v^2 = \frac{3c^2}{4}$.

Finalement :

$$v = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

soit environ 260 000 km/s.

Exercice n° 12 : Partie de Boule

Si on note a l'arête du cube, sa grande diagonale est $a\sqrt{3}$.

Elle est aussi égale au diamètre de la boule d'où : $a = 74 / \sqrt{3} = 74 \sqrt{3} / 3$

Le diamètre des cercles égale la diagonale des faces du cube, c'est à dire :

$$d = a \times \sqrt{2} = 74 \times \sqrt{6} / 3$$

Alors le rayon de ces cercles est , en millimètres :

$$R = \frac{37\sqrt{6}}{3}$$

Exercice n° 13 : Quadrature

Notons (L_n) la suite des longueurs et (l_n) la suite des largeurs.

On a $L_0 = 9$, $l_0 = 3$ l'aire du premier rectangle est $9 \times 3 = 27$.

Alors : $L_1 = \frac{9+3}{2} = 6$

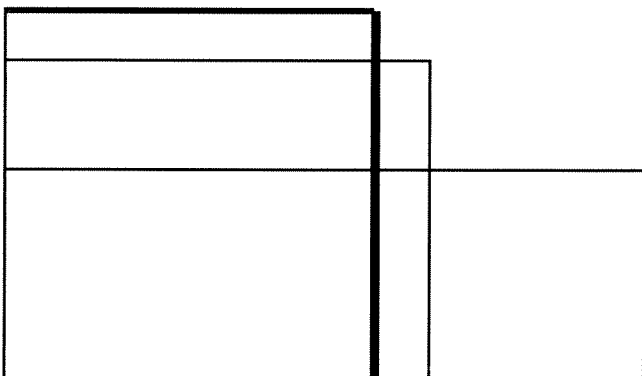
$$l_1 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$L_2 = \frac{6 + \frac{9}{2}}{2} = \frac{21}{4} = 5,25$$

$$l_2 = \frac{27}{\frac{21}{4}} = \frac{36}{7} \approx 5,1428$$

$$L_3 = \frac{\frac{21}{4} + \frac{36}{7}}{2} = \frac{291}{56} \approx 5,1964$$

$$l_3 = \frac{27}{\frac{291}{56}} = \frac{504}{97} \approx 5,1958...$$



Les 2 derniers rectangles sont presque confondus.

Le rectangle se rapproche vite d'un carré.

La longueur et la largeur se rapprochent d'une valeur commune qui serait le côté de ce carré, soit $\sqrt{27}$.

La calculatrice donne $\sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5,1961$.

TITRE : Les Etoiles de « Mathématiques sans frontières » 2000-2003
– Fascicule 7 – Edition française.

Présentées par : L'Inspection Pédagogique, les Equipes de Professeurs, l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Strasbourg.

Auteurs : L'équipe de conception de la compétition « Mathématiques sans frontières » : Jérôme AUDEUD, Michel BARTHELET, Michel BURET, Jacques FREYBURGER, Pierre HUBER, Gérard KERNEIS, Nicole KRÄMER, Jacques MERTZEISEN, Germain REHLINGER, Pierre SCHWARTZ, Erich STROBEL ainsi que tous les collègues qui ont donné des idées d'exercices.

Mise en page : Eliane LEGRAND et Jacques FREYBURGER.

Dessins : Pierre HUBER.

Mots-clés : Troisième – Seconde – Rallye.

Date : Octobre 2004.

Nombre de pages : 50 pages.

Editeur : IREM de Strasbourg (S. 190)
7, rue René Descartes
F – 67084 STRASBOURG CEDEX

Pour commander : <http://irem.u-strasbg.fr>
Tél. : 03 90 24 01 61
Fax : 03 90 24 01 65
e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr

ISBN : 2-911446-25-9

Public concerné : Professeurs et élèves des classes de Troisième et Seconde.

Résumé : Le fascicule présente les sujets en français de la compétition « Mathématiques sans frontières » des années 2000 à 2003 : trois épreuves d'entraînement et trois épreuves définitives, avec leurs corrigés.
Plus de 5 000 classes de Troisième et de Seconde ont concouru en 2003. Près de 128 000 élèves de 15 à 17 ans ont ainsi découvert des mathématiques ludiques et attirantes, grâce au travail d'une trentaine d'équipes d'organisation, dans une vingtaine de pays différents.

Prix : 8 euros (+ 2,5 € de port).