# RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2004

## 31e ÉDITION

CLASSE DE TERMINALE
10 mars 2004

### Exercice 1 — *Le triangle millésimé*

On forme un tableau triangulaire d'entiers de la manière suivante :

```
0  1  2  3  4 ...  ......  ...  2001   2002   2003   2004
  1  3  5  7 ...  ............  ...  4003  4005  4007
    4  8  12 ...  ..............  ...  8008   8012
      12  20 ...  .......................  ...  16020
        ...  ................................  ...
```

Chaque entier du tableau est la somme des deux entiers de la ligne précédente qui « l'encadrent ».

Montrer que les entiers situés au sommet de ce triangle sont tous les trois divisibles par 2004

### Exercice 2 — *L'aire minimale*

Deux demi-droites du plan sont perpendiculaires et de même origine O.

On considère un point M dans le quart de plan qu'elles définissent et une droite D passant par M. La droite D coupe les demi-droites en deux points A et B. Comment choisir la droite D pour que l'aire du triangle OAB soit minimale ?

### Exercice 3 — *La sphère et les cubes*

Au moyen de 216 petits cubes de 1 cm de côté, on construit un grand cube de 6 cm de côté. On note O son centre.

Combien la sphère de centre O et de diamètre 6 cm contient-elle petits cubes entiers ?

## CORRIGÉS DES SUJETS DE TERMINALES

## Exercice 1 — *Le triangle millésimé*

Par récurrence, on démontre les deux résultats suivants :

- La ligne de numéro n est une progression arithmétique de raison $2^{n-1}$.
- Le premier terme de la ligne numéro n est égal à $(n-1)2^{n-2}$.

*En effet la somme des deux termes de rang k et (k+1) d'une progression arithmétique de premier terme a et de raison r, soit a + kr et a + (k+1)r, est égale à 2a + r + k2r (publicité gratuite pour une marque de détachant). On obtient de la sorte le terme de rang k d'une progression de premier terme 2a + r et de raison 2r. La première ligne étant la suite des entiers naturels, progression arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, les résultats énoncés s'en déduisent facilement.*

Le premier terme de la ligne de numéro 2005 (attention au coup des arbres et des intervalles ! ) est par conséquent $2004 \times 2^{2003}$. C'est bien un multiple de 2004.

## Exercice 2 — *L'aire minimale*

**Solution analytique**

On définit un repère orthonormé $\left(O; \frac{1}{\|\overrightarrow{OA}\|}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{\|\overrightarrow{OB}\|}\overrightarrow{OB}\right)$ d'origine le point O, origine commune des deux demi-droites perpendiculaires.

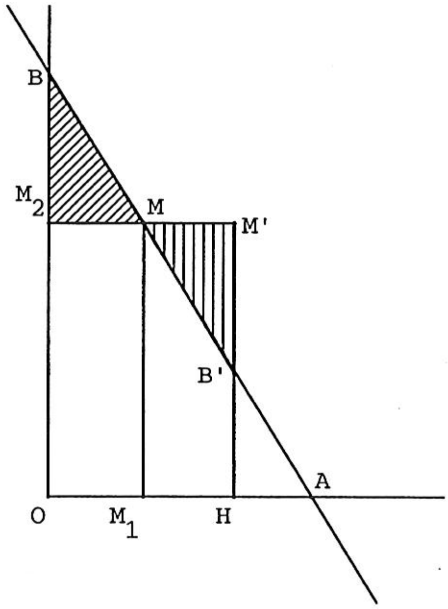
Le point M de coordonnées $(a;b)$ est donné, soient $A\ (p;0)$ et $B\ (0;q)$. On suppose $A$ et $B$ distincts, donc $p$ et $q$ non nuls.

- La droite $(AB)$ passant par $M$, on détermine $q$ en fonction de $p$ :
$$q = \frac{bp}{p-a}.$$
- On en déduit l'aire du triangle $OAB$ rectangle en $O$ en fonction de $p$, soit $f(p)$ :
$$f(p) = \frac{bp^2}{2(p-a)}$$
- En étudiant les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0 ; \infty[$, on en déduit la valeur $p_0$ de $p$ qui minimise la fonction $f$. On trouve $p_0 = 2a$ ( puis $q = 2b$).

**Solution géométrique**

On définit les points suivants :

- $M_1$ et $M_2$ sont les projetés orthogonaux du point $M$ respectivement sur $[ OA )$ et sur $[ OB )$.
- $B$ ' et $M$ ' sont les symétriques respectifs de $B$ et $M_2$ par rapport au point $M$.
- $H$ est le projeté orthogonal de $M$' sur $[ OA )$.



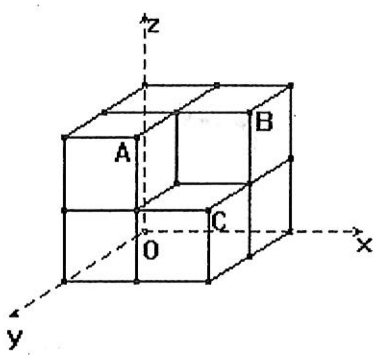

Les triangles $MM_2B$ et $MM'B'$ sont isométriques, ils ont donc la même aire.
Le rectangle $OM_2M'H$ a alors la même aire que le trapèze $OBB'H$.

$$\begin{aligned} aire\,(OAB) &= aire\,(\,OBB'H\,) + aire\,(B'HA) \\ &= aire\,(\,OM_2M'H\,) + aire\,(B'HA\,) \\ &= \underbrace{2 \times OM_1 \times OM_2}_{\text{indépendant de la droite } (AB)} + aire\,(\,B'HA) \end{aligned}$$

L'aire du triangle $OAB$ sera minimale lorsque l'aire du triangle $B$ '$HA$ sera nulle, pour cela il faut placer le point $A$ en $H$.

## Exercice 3 — *La sphère et les cubes*

La sphère de centre O et de rayon 3 est le lieu des points dont la distance à O est égale à 3. Considérons un repère orthonormé de centre O, d'axes parallèles aux arêtes des cubes. On peut restreindre la recherche des cubes entièrement intérieurs à cette sphère à l'octant des points de coordonnées x, y et z toutes positives. Or dans cet octant, trois sommets A, B, C de cubes ont deux coordonnées égales à 2 et une égale à 1. Comme $2^2 + 2^2 + 1^2 = 9 = 3^2$, ces trois sommets sont à une distance de O exactement égale à 3. La figure fait ainsi apparaître 7 cubes intérieurs à la sphère dans l'octant considéré. En multipliant par 8, on obtient le nombre total de cubes intérieurs à la sphère, à savoir 56.



# RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2004

## 31$^e$ ÉDITION

CLASSE DE PREMIÈRE

31 mars 2004

## Exercice 1 — *Comment régler l'addition*

On dispose de pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 centimes ainsi que de 1 € en aussi grande quantité que l'on veut.

On suppose qu'il est possible de payer une somme de $m$ centimes avec $n$ pièces.

Est-ce que l'on peut payer une somme de $n$ euros avec $m$ pièces ?

## Exercice 2 — *Construction d'un pentagone*

On dispose de 5 points I, J, K, L, M du plan, sommets d'un pentagone convexe, c'est-à-dire tels que 3 sommets parmi les 5 ne sont jamais alignés et tout segment reliant 2 sommets parmi les 5 est contenu dans le pentagone.

Proposer une construction d'un pentagone ABCDE tel que les points I, J, K, L et M soient respectivement les milieux des côtés [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA].

## Exercice 3 — *La somme constante*

On numérote les cases d'un échiquier carré de 31 lignes et 31 colonnes par les entiers de 1 à $31^2$ en décrivant successivement les 31 lignes de gauche à droite.

On choisit 31 cases en en prenant une seule sur chaque ligne et sur chaque colonne.

Montrer que la somme de leurs numéros est indépendante du choix des cases.

## CORRIGÉS DES SUJETS DE PREMIÈRES

### Exercice 1 — *Comment régler l'addition*

Considérons une somme quelconque en centimes réalisée par un certain nombre de pièces. Par exemple avec 3 pièces de 5 centimes, 4 de 2 centimes et 2 de 1 centime, soit un total de 9 pièces, on obtient 25 centimes. Remplaçons à présent ces pièces selon le mode d'emploi suivant :

- à chaque pièce de 5 centimes j'associe 5 pièces de 20 centimes,
- à chaque pièce de 2 centimes j'associe 2 pièces de 50 centimes,
- à chaque pièce de 1 centime j'associe 1 pièce de 1 euro (soit 100 centimes).

On a ainsi substitué à chaque pièce de départ la valeur de 1 euro réalisée par un nombre de pièces égal à la valeur en centimes de cette pièce de départ. Dans le cas présent, on aboutira donc à 9 euros, réalisés par un nombre de pièces égal à la somme de départ en centimes, c'est à dire 25.

La procédure est la même pour le cas général : il suffit de compléter l'indication de substitution pour les pièces qui ne figuraient pas dans l'exemple étudié :

- à chaque pièce de 1 euro (100 centimes) j'associe 100 pièces de 1 centime,
- à chaque pièce de 50 centimes j'associe 50 pièces de 2 centimes,
- à chaque pièce de 20 centimes j'associe 20 pièces de 5 centimes,
- à chaque pièce de 10 centimes j'associe 10 pièces de 10 centimes.

La raison de la réussite de l'opération est qu'à chaque valeur de pièce en centimes, il correspond une valeur dont le produit avec la première est égal à 100.

**Complément** : La réalisation de $n$ euros par $m$ pièces est en général loin d'être unique. La valeur d'une pièce étant d'au moins 1 centime et d'au plus 1 euro, soit 100 centimes, la somme $m$ en centimes que l'on paye avec $n$ pièces est au moins égale à $n$ et au plus égale à $100n$. Or on peut voir que, hormis l'impossibilité de payer une somme de 1 euro avec 3 pièces, il est toujours possible de payer une somme de $n$ euros avec un nombre $m$ de pièces compris entre $n$ et $100n$.

Une idée peut être de partir du plus petit nombre possible de pièces, c'est à dire $n$ pièces de 1 euro chacune, et d'opérer des substitutions pour augmenter ce nombre de pièces. Pour augmenter de 1 le nombre de pièces, on dispose de plusieurs possibilités de base, consistant à remplacer 1 pièce par 2, ou 2 par 3, ou 3 par 4 :

- 1 pièce de 1 euro (ou : 100 centimes) par 2 de 50 centimes,
- 1 pièce de 20 centimes par 2 de 10 centimes,
- 1 pièce de 10 centimes par 2 de 5 centimes,
- 1 pièce de 2 centimes par 2 de 1 centime,
- 1 pièce de 50 centimes et 1 de 10 centimes par 3 de 20 centimes,
- 1 pièce de 5 centimes et 1 de 1 centime par 3 de 2 centimes,
- 3 pièces de 50 centimes par 1 de 1 euro, 2 de 20 centimes et 1 de 10 centimes,
- 3 pièces de 5 centimes par 1 de 10 centimes, 2 de 2 centimes et 1 de 1 centime.

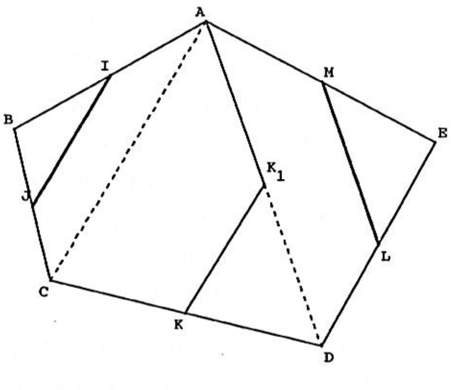
L'éventail des possibilités ainsi offertes permet de résoudre le problème provenant du fait qu'une conversion directe d'une pièce de 50 centimes ou d'une pièce de 5 centimes ne conduit pas à augmenter le nombre de pièces en jeu de 1, mais de 2 (ou plus). Seul le cas où la variété des pièces à disposition serait quasiment inexistante constitue alors un obstacle. Pour un nombre entier d'euros, il n'y a impossibilité que si on est devant un nombre de pièces de 50 centimes inférieur à 3 et s'il n'y pas de pièce de 10 centimes en accompagnement : c'est la situation où l'on est seulement en présence de deux pièces de 50 centimes, que l'on ne pas remplacer par trois pièces totalisant la même valeur.

Comme on ne peut pas payer 3 centimes avec une seule pièce, la seule objection possible disparaît. L'étude générale montre que la convaincante démonstration précédemment faite n'avait finalement qu'un intérêt réduit. En mathématiques et pas seulement dans les arts, pourrait-il parfois y avoir une gratuité de l'esthétique ?

**Supplément** : Pourrait-on poser le même problème aux Etats-Unis, où le dollar est subdivisé différemment de l'euro (il y a par exemple une pièce de 25 cents = *one quarter*) ?

## Exercice 2 — *Construction d'un pentagone*

Partons d'un pentagone ABCDE dont les milieux des côtés seraient les points I, J, K, L et M, et essayons, à partir des milieux de construire l'un des sommets du pentagone.




Déterminons les trois triangles $ABC$, $ACD$ et $ADE$.

- Dans le triangle $ABC$, $I$ et $J$ sont les milieux des côtés $[BA]$ et $[BC]$, d'après le théorème des milieux, on peut affirmer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
- Soit $K_1$ l'image du point $K$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Donc
$$\overrightarrow{KK_1} = \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

- Dans le triangle $DAC$, $K$ est le milieu de [ $DC$ ], et $\overrightarrow{KK_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$. D'après la réciproque du théorème des milieux, $K_1$ est le milieu de [ $DA$ ]. On a la relation $\overrightarrow{K_1A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$
- Dans le triangle $EDA$, $L$ et $M$ sont les milieux de [ $ED$ ] et [ $EA$ ], d'après le théorème des milieux , on a l'égalité : $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

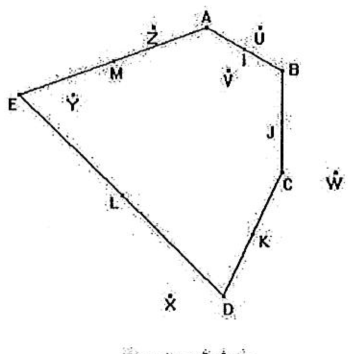
Soit $\overrightarrow{K_1A} = \overrightarrow{LM}$. Le point $A$ est l'image du point $K_1$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$.

**Synthèse**

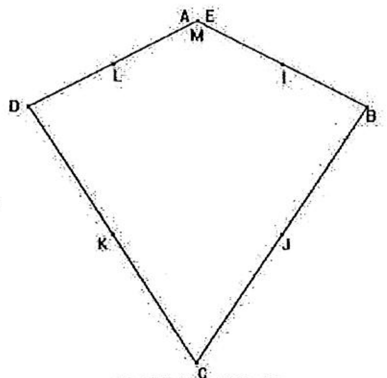
**Le point $A$ est l'image du point $K$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{LM}$.**

Pour obtenir les autres sommets, il suffit d'effectuer les symétries centrales successives par rapport aux milieux des côtés.

Mais les conditions de l'énoncé ne nous assurent pas d'obtenir toujours un véritable pentagone. Si on considère un parallélogramme IJKL et un point quelconque M, qui peut donc très bien être tel que IJKLM est un pentagone convexe, la composée des symétries respectives par rapport à I, J, K, L et M n'est autre que la symétrie par rapport à M. On tombe en tel cas sur A et E tous deux en M. Le « pentagone » obtenu serait alors ABCDA.



Situation générale



Un drôle de pentagone

## Exercice 3 — *La somme constante*

Pour un échiquier 10×10 à cases numérotées de 0 à 99, le résultat serait évident, puisque les colonnes correspondraient aux unités, de 0 à 9, et les lignes aux dizaines, de 0 à 9 également. En prenant 10 cases à raison d'une seule sur chaque ligne et chaque colonne, on obtiendrait toutes les valeurs d'unité de 0 à 9 et toutes les valeurs de dizaine de 0 à 9. La somme des numéros serait donc égale à

$$1\times(0 + 1 + 2 + \ldots + 9) + 10\times(0 + 1 + 2 + \ldots + 9) = 11\times(9\times10/2) = 495.$$

Le cas considéré est de même nature à ceci près que l'on évolue de 31 au lieu de 10 quand on passe d'une ligne à la suivante et que l'on commence à 1 au lieu de 0. On aboutira donc au résultat :

$$1\times(1 + 2 + \ldots + 31) + 31\times(0 + 1 + \ldots + 30) = 31 + 32\times(30\times31/2) = 14911.$$