LE PROBLÈME DE FLAVIUS JOSÈPHE

Jean LEFORT

***Résumé** : Le problème de Flavius Josèphe est, à l'ordre 2, un problème classique de divertissement mathématique. Après avoir rappelé sa résolution dans ce cas, on s'intéresse à l'ordre 3 et l'on propose une formule explicite qui repose sur une certaine constante dont le calcul approché ne peut se faire qu'à partir d'une application brutale de l'algorithme de base. Ceci pose incidemment le problème de ce qu'est une solution effective.*

On connaît plus Flavius Josèphe comme historien juif du premier siècle de notre ère que comme l'initiateur d'un problème de mathématiques. Il serait né à Jérusalem en 37 ou 38. Il passera sa vie à plaider la cause des juifs auprès des instances romaines. C'est ainsi qu'en 64, il alla à Rome défendre des juifs déportés par ordre du procurateur Félix. Il gagna son procès grâce, dit-on, à l'appui que lui prêta Poppée, la femme de Néron. De retour en Judée, il prêcha d'abord la modération à ses coreligionnaires impatients de secouer le joug romain mais finit par participer aux révoltes et fut assiégé avec ses compatriotes dans la forteresse de Jotapata en 67. C'est là qu'apparut, dit-on, le problème qui porte son nom.

La citadelle ayant été prise, il se retrouva bloqué dans une cave avec 40 autres compagnons ; les extrémistes du groupe persuadèrent l'ensemble de se tuer pour ne pas tomber aux mains des Romains. Ne partageant pas ce point de vue mais n'osant s'opposer au groupe, Josèphe proposa que l'on se mette en cercle et que chaque troisième personne soit tuée, la dernière devant se suicider. Se plaçant lors en 31^e^ position, il se retrouva l'un des deux seuls survivants, car bien entendu, il ne se suicida pas et se rendit au Romains avec l'avant dernière personne qui s'était rangée à son avis et qui s'était astucieusement placée au seizième rang.[1]

Prisonnier, il fut conduit devant Vespasien. Il put sauver sa vie en lui prophétisant l'empire au nom de Dieu. Quand Vespasien devint empereur, il rendit la liberté à Josèphe qui en signe de reconnaissance ajouta à son nom le patronyme de son bienfaiteur, Flavius. C'est dans les rangs de l'armée romaine qu'il assista au siège de Jérusalem en 70, servant de traducteur et de parlementaire auprès des assiégés. Une fois la ville prise, il se fixa à Rome écrivant l'essentiel de ses ouvrages historiques. Il meurt aux alentours de l'an 100.

1. Problème de Flavius Josèphe

On considère un ensemble de n personnes placées sur un cercle. Les personnes énoncent dans l'ordre les nombres de 1 à k puis reprennent à 1 et ainsi de suite. Toutes les personnes qui énoncent k sortent du cercle. On veut connaître le rang de la i-ième personne qui sort du cercle et en particulier le rang de la dernière.

[1] Dans son ouvrage relatant les faits, Flavius Josèphe se contente de parler du sort qui l'a heureusement épargné ; on trouvera dans l'annexe à la fin de cet article le passage correspondant. C'est à partir de la Renaissance que ce problème reçu le nom qu'il porte aujourd'hui, mais on le rencontre dans de très nombreuses cultures.

On remarquera qu'il s'agit d'une version généralisée et surtout édulcorée du problème puisque les personnes qui sortent du cercle ne sont pas tuées !

Exemple : Supposons $n = 10$ et $k = 2$. Les personnes sortent du cercle dans l'ordre suivant : 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5.

Nous noterons $J(n,k,i)$ le rang de la i-ième personne qui sort du cercle. Ainsi nous avons $J(10, 2, 6) = 3$.

2. Quelques résultats généraux

Nous avons peu de résultats généraux sur la fonction J. Par exemple, sauf pour $n = 2$ ou 3 il n'est pas connu de formule explicite donnant directement la valeur de $J(n,k,i)$. Il existe par contre de nombreux résultats et en particulier on connaît des formules de récurrence permettant de calculer plus ou moins rapidement cette quantité.

Dans toute la suite, l'écriture a [mod(m)] signifie a modulo m et on choisit pour a l'une des valeurs de 1 à m.

Théorème 1 — $J(n, k, 1) = k$ [mod(n)].

Résultat évident si on numérote les personnes de 1 à n.

Théorème 2 — $J(n, k, i) = J(n-1, k, i-1) + k$ [mod(n)] pour $2 \leq i \leq n$.

Quand, dans le problème avec n personnes, la première personne est sortie, il reste évidemment $n-1$ personnes. Tout se passe comme si on commençait à compter avec la personne de rang $k+1$, c'est-à-dire k unité plus loin (modulo n) que la première et que les rangs fussent alors augmentés d'une unité par rapport au problème avec $n-1$ personnes. **cqfd.**

Algorithme 1 : Ces résultats nous donnent les moyens de construire un premier algorithme permettant de calculer les valeurs de $J(n, k, i)$. Il s'agit d'une procédure récursive.

```
J:=proc(n,k,i::integer)
if i=1     then     if modp(k,n)=0
                    then n
                    else modp(k,n)
                    fi;
           else     if modp(J(n-1,k,i-1)+k,n)=0
                    then n
                    else modp(J(n-1,k,i-1)+k,n)
                    fi;
fi;
end:
```

3. Étude du cas $k = 2$

Nous pouvons construire un tableau à double entrée donnant la valeur de $J(n, 2, i)$ où n est en ligne et i en colonne.

Nous remarquons que tous les numéros pairs sortent d'abord, dans l'ordre, puis les impairs d'abord de 4 en 4, puis de 8 en 8, puis de 16 en 16, etc. Si on veut bien y réfléchir quelques instants, ceci est logique.

1	1																													
2	2	1																												
3	2	1	3																											
4	2	4	3	1																										
5	2	4	1	5	3																									
6	2	4	6	3	1	5																								
7	2	4	6	1	5	3	7																							
8	2	4	6	8	3	7	5	1																						
9	2	4	6	8	1	5	9	7	3																					
10	2	4	6	8	10	3	7	1	9	5																				
11	2	4	6	8	10	1	5	9	3	11	7																			
12	2	4	6	8	10	12	3	7	11	5	1	9																		
13	2	4	6	8	10	12	1	5	9	13	7	3	11																	
14	2	4	6	8	10	12	14	3	7	11	1	9	5	13																
15	2	4	6	8	10	12	14	1	5	9	13	3	11	7	15															
16	2	4	6	8	10	12	14	16	3	7	11	15	5	13	9	1														
17	2	4	6	8	10	12	14	16	1	5	9	13	17	7	15	11	3													
18	2	4	6	8	10	12	14	16	18	3	7	11	15	1	9	17	13	5												
19	2	4	6	8	10	12	14	16	18	1	5	9	13	17	3	11	19	15	7											
20	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	3	7	11	15	19	5	13	1	17	9										
21	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	1	5	9	13	17	21	7	15	3	19	11									
22	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	3	7	11	15	19	1	9	17	5	21	13								
23	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	1	5	9	13	17	21	3	11	19	7	23	15							
24	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	3	7	11	15	19	23	5	13	21	9	1	17						
25	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	1	5	9	13	17	21	25	7	15	23	11	3	19					
26	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	3	7	11	15	19	23	1	9	17	25	13	5	21				
27	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	1	5	9	13	17	21	25	3	11	19	27	15	7	23			
28	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	3	7	11	15	19	23	27	5	13	21	1	17	9	25		
29	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	1	5	9	13	17	21	25	29	7	15	23	3	19	11	27	
30	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	3	7	11	15	19	23	27	1	9	17	25	5	21	13	29
n / i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**

Quand tous les pairs sont sortis il ne reste que les impairs que l'on va prendre de deux en deux donc d'un numéro au suivant il y aura un écart de 4. Il restera ensuite des impairs de 4 en 4 que l'on prendra de 2 en 2, il y aura donc un écart de 8 entre deux éléments successifs et ainsi de suite.

Nous avons fait ressortir ces progressions arithmétiques de raison 2 puis 4 puis 8… à l'aide de hachures différentes. Il est évident que seules les petites valeurs des raisons de ces progressions sont lisibles sur le tableau ci-dessus en raison de la faiblesse des valeurs de n. Cette remarque sur les suites arithmétiques va nous permettre de trouver une formule explicite donnant $J(n, 2, i)$ en fonction de i.

Théorème 3 — Pour $i \geq \dfrac{n+1}{2}$ on a par convention $J(n, 2, 0) = 0$ et

– Si n est pair $J(n, 2, i) = 2 \times J\left(\dfrac{n}{2}, 2, i - \dfrac{n}{2}\right) - 1$

– Si n est impair $J(n, 2, i) = 2 \times J\left(\frac{n-1}{2}, 2, i - \frac{n+1}{2}\right) + 1$

• Si n est pair, on aura le tableau suivant donnant $J(n, 2, i)$ en fonction de i :

i	1	2	3	…	$n/2$	$n/2 + 1$	$n/2 + 2$	…
$J(n, 2, i)$	2	4	6	…	n	3	7	…

Donc pour $i > n/2$ tout se passe comme si on travaillait avec $n/2$ éléments numérotés $2p - 1$ pour p variant de 1 à $n/2$. D'où le résultat $J(n, 2, i) = 2 \times J\left(\frac{n}{2}, 2, i - \frac{n}{2}\right) - 1$.

• Si n est impair, on aura le tableau suivant donnant $J(n, 2, i)$ en fonction de i :

i	1	2	3	…	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	…
$J(n, 2, i)$	2	4	6	…	$n - 1$	1	5	…

Donc pour $i > \frac{n+1}{2}$ tout se passe comme si on travaillait avec $\frac{n-1}{2}$ éléments numérotés $2p + 1$ pour p variant de 1 à $\frac{n-1}{2}$ d'où la formule $J(n, 2, i) = 2 \times J\left(\frac{n-1}{2}, 2, i - \frac{n+1}{2}\right) + 1$ qui est aussi valable pour $i = \frac{n+1}{2}$ si on fait $p = 0$ et qu'on utilise la convention $J(n, 2, 0) = 0$. **cqfd.**

Théorème 4 — On a la formule explicite : $J(n, 2, n) = 2\,n + 1 - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}$, la notation $\lfloor\ \rfloor$ indiquant qu'il faut prendre l'entier inférieur ou égal à l'élément entre crochets.

Remarque : Cette formule est une formule de bon sens quand on observe le tableau donné au début du paragraphe.

Démonstration : Soit $n = 2^p$, alors après le premier tour, il reste 2^{p-1} personnes dont les numéros sont de la forme $2q + 1$. Après le deuxième tour on élimine à nouveau la moitié des personnes, il en reste donc 2^{p-2} dont les numéros sont de la forme $4q + 1$. Et ainsi de suite puisqu'à chaque étape la personne de rang 1 ne sera pas éliminée. On a donc $J(2^p, 2, 2^p) = 1$.

Soit $n = 2^p + m$ avec $m < 2^p$ pour que n soit inférieur à la puissance suivante de 2, alors d'après le théorème 2, $J(n, 2, n) = 1 + 2m$ puisque $m < 2^p \Leftrightarrow 1+2m \leq 2^p + m = n$.

Il est clair que $p = \lfloor \log_2 n \rfloor$ et par suite $m = n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$, ce qui conduit à $J(n, 2, n) = 1 + 2\left(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}\right)$, **cqfd.**

Nous allons maintenant nous intéresser au cas général. Il est clair que si $i \leq n/2$ alors $J(n, 2, i) = 2i$. Nous allons donc nous limiter aux cas $i > n/2$. Or nous avons vu dans la démonstration du théorème 3 que pour n impair égal à $2m+1$ nous avions

$J(2m+1\,,2\,,m+1) = 1$. A partir de cette valeur et en utilisant le théorème 2 nous allons pouvoir trouver toutes les valeurs de i et de n donnant $J(n\,,2\,,i) = 1$.

Théorème 5 — Soit $n = 2^q\,(2m+1)$, alors $J(n\,,2\,,(2^{q+1}-1)m + 2^q\,) = 1$.

Il est clair que tout nombre n se met de façon unique sous la forme $2^q\,(2m+1)$. Or si $J(n\,,2\,,i) =1$, d'après le théorème 2 $J(n+u\,,2\,,i+u) = 1 + 2u$ tant que $1+2u \le n+u$ c'est-à-dire tant que $u \le n-1$. Et par suite si $u = n$ on retrouve la valeur 1. On ne retrouve donc 1 qu'en doublant la valeur de n et en augmentant i de n. En partant de $J(2m+1\,,2\,,m+1) = 1$ nous obtenons successivement $J(2(2m+1)\,,2\,,3m+2) = 1$; $J(4(2m+1)\,,2\,,7m+4) = 1$ et en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique il vient le résultat annoncé. **cqfd.**

Il est alors possible de donner une procédure permettant de calculer $J(n\,,2\,,i)$ pour tout n et pour tout i . L'idée est d'aller à reculons, toujours en utilisant le théorème 2, de façon à trouver une valeur de u telle que $J(n-u\,,2\,,i-u) = 1$. On suppose toujours $i > n/2$.

Théorème 6 — On a la formule explicite : $J(n, 2, i) = 2^{q+2}i - (2^{q+1} - 1)(2n + 1)$ où $q = \left\lfloor \log_2 \dfrac{n}{2(n-i)+1} \right\rfloor$, la notation $\lfloor\ \rfloor$ indiquant qu'il faut prendre l'entier inférieur ou égal au nombre situé entre les crochets.

Nous commençons par chercher u tel que $J(n-u\,,2\;i-u) = 1$. Le plus simple est de prendre u tel que :

$\begin{cases} n-u = 2\,m+1 \\ i-u = m+1 \end{cases}$ ce qui conduit à $u = 2i - n - 1$. Par suite $J(2n-2i+1\,,2\,,n-i+1) = 1$.

A partir de là nous allons doubler la quantité $2n-2i+1$ aussi souvent que possible de manière à ne pas dépasser n . C'est-à-dire que nous cherchons q tel que $2^q\,(2n-2i+1) \le n < 2^{q+1}\,(2n-2i+1)$, soit $q = \left\lfloor \log_2 \dfrac{n}{2(n-i)+1} \right\rfloor$. Alors $J(2^q\,(2n-2i+1)\,,2\,,(2^{q+1}-1)(n-i) + 2^q\,) = 1$. Pour obtenir n il faut augmenter $2^q\,(2n-2i+1)$ de la quantité $n - 2^q\,(2n-2i+1)$ ce qui conduit à $J(n\,,2\,,i) = 1 + 2\,(n - 2^q\,(2n-2i+1))$ qui se met facilement sous la forme indiquée.

Remarquons que si $i \le n/2$ alors $q = -1$ et la formule donnée se réduit à $2i$ qui est bien le résultat attendu. De même si $i = n$ on retrouve le théorème 4. **cqfd.**

Algorithme 2 : Le programme Maple suivant permet de calculer $J(n\,,2\,,i)$ pour toutes les valeurs de n et de i :

```
J2:=proc(n,i::integer)
    local q ;
    q:=floor(log[2](n/(2*(n-i)+1)));
    2^(q+2)*i(2^(q+1)-1)*(2*n+1);
end :
```

4. Étude du cas $k = 3$

L'essentiel de ce paragraphe est tiré de Halbeisen et Hungerbühler (voir bibliographie en fin d'article)

De la même façon que pour $k = 2$, nous pouvons construire un tableau à double entrée donnant la valeur de J(n , 3 , i) où n est en ligne et i en colonne.

1	***1***																													
2	***1***	***2***																												
3	*3*	***1***	***2***																											
4	*3*	***2***	4	***1***																										
5	*3*	***1***	5	***2***	4																									
6	*3*	*6*	4	***2***	5	***1***																								
7	*3*	*6*	***2***	7	5	***1***	4																							
8	*3*	*6*	***1***	5	***2***	8	4	7																						
9	*3*	*6*	*9*	4	8	5	***2***	7	***1***																					
10	*3*	*6*	*9*	***2***	7	***1***	8	5	10	4																				
11	*3*	*6*	*9*	***1***	5	10	4	11	8	***2***	7																			
12	*3*	*6*	*9*	*12*	4	8	***1***	7	***2***	11	5	10																		
13	*3*	*6*	*9*	*12*	***2***	7	11	4	10	5	***1***	8	13																	
14	*3*	*6*	*9*	*12*	***1***	5	10	14	7	13	8	4	11	***2***																
15	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	4	8	13	***2***	10	***1***	11	7	14	5															
16	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	***2***	7	11	16	5	13	4	14	10	***1***	8														
17	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	***1***	5	10	14	***2***	8	16	7	17	13	4	11													
18	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	4	8	13	17	5	11	***1***	10	***2***	16	7	14												
19	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	***2***	7	11	16	1	8	14	4	13	5	19	10	17											
20	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	1	5	10	14	19	4	11	17	7	16	8	***2***	13	20										
21	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	4	8	13	17	1	7	14	20	10	19	11	5	16	***2***									
22	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	***2***	7	11	16	20	4	10	17	1	13	22	14	8	19	5								
23	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	1	5	10	14	19	23	7	13	20	4	16	***2***	17	11	22	8							
24	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	4	8	13	17	22	***2***	10	16	23	7	19	5	20	14	1	11						
25	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	***2***	7	11	16	20	25	5	13	19	1	10	22	8	23	17	4	14					
26	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	1	5	10	14	19	23	***2***	8	16	22	4	13	25	11	26	20	7	17				
27	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	4	8	13	17	22	26	5	11	19	25	7	16	1	14	***2***	23	10	20			
28	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	***2***	7	11	16	20	25	1	8	14	22	28	10	19	4	17	5	26	13	23		
29	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	1	5	10	14	19	23	28	4	11	17	25	***2***	13	22	7	20	8	29	16	26	
30	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*	*18*	*21*	*24*	*27*	*30*	4	8	13	17	22	26	1	7	14	20	28	5	16	25	10	23	11	***2***	19	29
n/i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**

Nous avons mis en italique les multiples de 3 qui sortent d'abord puis ensuite en italique gras les valeurs de J(n , 3 , i) égales à 1 ou 2 car nous verrons qu'elles jouent un rôle fondamental dans le calcul de J(n , 3 , i) . Remarquons que dans le cas $k = 2$, la démonstration s'est faite en recherchant d'abord les valeurs de n pour lesquelles nous avions J(n , 2 ,n) = 1. D'une façon générale il faut s'intéresser aux valeurs strictement inférieures à k comme nous le verrons dans le paragraphe qui donne quelques résultats pour $k > 3$. Nous ne nous intéressons dans un premier temps qu'à la valeur de J(n, 3, n) c'est-à-dire au rang de la dernière personne qui sort du cercle. Pour simplifier, nous noterons J(n, 3, n) = D_n . Le théorème 2 nous permet de construire la suite suivante :

n	**1**	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	8	**9**	10	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20
J	**1**	**2**	**2**	**1**	4	**1**	4	7	**1**	4	7	10	13	**2**	5	8	11	14	17	20
n	**21**	22	23	24	25	26	27	28	29	30	**31**	32	33	34	35	36	37	38	39	40
J	**2**	5	8	11	14	17	20	23	26	29	**1**	4	7	10	13	16	19	22	25	28

Les valeurs de n pour lesquelles D_n vaut 1 ou 2 sont notées en gras. Nous appellerons ces valeurs, *valeurs de recommencement*, puisque entre deux telles valeurs successives on passe d'une valeur de D_n à la suivante en ajoutant 3. Notons c_p la p-ième valeur de recommencement. Nous avons $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, $c_4 = 4$, $c_5 = 6$, $c_6 = 9$, etc. et soit x_p la valeur de D_n correspondante, c'est-à-dire que $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$, $x_7 = 2$, etc.

Pour $c_p \leq n < c_{p+1}$, nous avons $D_n = 3(n - c_p) + x_p$.

De plus, si $D_n = n$ ou $n-1$ alors la valeur suivante de n est une valeur de recommencement, c'est-à-dire que $c_{p+1} = n+1$, puisque l'ajout de 3 donne à ce moment là un nombre dépassant $n+1$, nombre qu'il faut donc réduire modulo $n+1$. Pour être plus précis, si $D_n = n$ alors $x_{p+1} = 2$ et si $D_n = n-1$ alors $x_{p+1} = 1$. Finalement la première valeur de n telle que $n \leq 3(n - c_p) + x_p$ donne la valeur de c_{p+1} . D'où $c_{p+1} = \left\lceil \dfrac{3c_p - x_p + 1}{2} \right\rceil$ où les demi crochets supérieurs signifient que l'on prend la valeur entière supérieure ou égale à la quantité qu'ils enferment. Si $\dfrac{3c_p - x_p + 1}{2}$ est entier, cela signifie que $D_n = n-1$ et par suite $x_{p+1} = 1$, sinon $x_{p+1} = 2$. On peut donc écrire $x_{p+1} = 2\,c_{p+1} - (3c_p - x_p + 1) + 1$ ce qu'on peut mettre sous la forme $x_{p+1} - x_p = 2\,c_{p+1} - 3\,c_p$.

Un procédé télescopique immédiat conduit à $2c_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} c_i + x_{p+1} + 1$ et comme x_{p+1} vaut 1 ou 2, nous pouvons écrire

$$c_{p+1} = \left\lceil \frac{2 + \sum_{i=1}^{p} c_i}{2} \right\rceil.$$

La formule $x_{p+1} - x_p = 2\,c_{p+1} - 3\,c_p$ montre que la suite c_p est voisine d'une suite géométrique de raison 3/2 puisque en posant $\delta_p = x_{p+1} - x_p = 0$ ou ± 1 :

$$\frac{2\,c_{p+1}}{2\,c_p} = \frac{3c_p + \delta_p}{2\,c_p} = \frac{3}{2} + \frac{\delta_p}{2\,c_p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \frac{3}{2}$$

Il est donc naturel de comparer c_p et $\left(\dfrac{3}{2}\right)^p$. Le tableau suivant donne quelques renseignements :

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_p	1	2	3	4	6	9	14	21	31	47
$c_p\left(\frac{2}{3}\right)^p$	0,666 7	0,888 9	0,888 9	0,790 1	0,790 1	0,790 1	0,819 4	0,819 4	0,806 4	0,815 1

Théorème 7 — La quantité $c_p\left(\dfrac{2}{3}\right)^p$ admet une limite α quand p tend vers l'infini.

Pour démontrer ce résultat nous allons reprendre la formule précédente en l'écrivant : $\frac{2}{3}c_{p+1} = c_p + \frac{1}{3}\delta_p$. Par suite $\left(\frac{2}{3}\right)^2 c_{p+1} = \frac{2}{3}c_p + \frac{1}{3}\frac{2}{3}\delta_p = c_{p-1} + \frac{1}{3}\left(\delta_{p-1} + \frac{2}{3}\delta_p\right)$ puis par récurrence descendante

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} c_{p+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j$. Il est bien évident que le Σ du deuxième membre admet une limite quand p tend vers l'infini puisqu'on obtient une série numérique dont le terme général est, en valeur absolue, inférieur à celui d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Par conséquent le premier membre admet une limite α . **cqfd.**

Nous allons étudier le reste de la série qui définie α pour trouver une formule explicite pour c_p et calculer une valeur approchée de α . On peut majorer le reste de la série par $\frac{1}{3}\sum_{j=p+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$ ce qui montre que $\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} c_{p+1}$ est une valeur approchée de α avec q chiffres après la virgule si l'on prend p voisin de 5,679 q $\left(5{,}679 \approx \frac{\ln 10}{\ln 1{,}5}\right)$. On trouve ainsi $\alpha \approx 0{,}811\ 135$. Nous allons affiner le calcul du reste ce qui nous permettra de démontrer le théorème suivant.

Théorème 8 — Quelque soit p , la p-ième valeur de recommencement c_p est l'entier $\left\lceil \left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - \frac{1}{2} \right\rceil$. De plus $x_p = 2$ si $\left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - c_p < 0$ et $x_p = 1$ si $\left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - c_p > 0$.

Remarquons d'abord que $\delta_j = x_{j+1} - x_j$, ce qui prouve que les valeurs non nulles de δ_j sont alternativement 1 et –1. La série $\sum_{j=p+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j$ est donc une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0. On peut alors lui appliquer le théorème général sur les séries alternées et écrire que $\left|\sum_{j=p+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j\right|$ $\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$. Par conséquent il vient l'inégalité : $\alpha - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} c_{p+1} \leq \alpha + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}$ soit $\left(\frac{3}{2}\right)^{p+1}\alpha - \frac{1}{3} \leq c_{p+1} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{p+1}\alpha + \frac{1}{3}$.

Ceci détermine de façon unique la valeur de c_{p+1} qui est l'entier le plus proche de $\left(\frac{3}{2}\right)^{p+1}\alpha$. D'où l'expression donnée dans le théorème.

Considérons maintenant la quantité $\left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - c_p$. Nous pouvons écrire que : $\alpha = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j$. Mais d'autre part $\left(\frac{2}{3}\right)^p c_p = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{p-1}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j$ donc $\left(\frac{3}{2}\right)^p \alpha - c_p = \left(\frac{3}{2}\right)^p \sum_{j=p}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j = \sum_{j=p}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-p} \delta_j$. Nous retrouvons la série alternée précédente et nous sommes assurés que le résultat est du signe du premier terme non nul c'est-à-dire du signe du premier δ_j non nul à partir de $j = p$. Or si $x_p = 1$ le premier δ_j non nul vaudra 1 et si $x_p = 2$ le premier δ_j non nul vaudra -1 . **cqfd.**

Remarquons toutefois que ce théorème n'est pas aussi puissant qu'il en a l'air car les calculs précédents ont montré que l'on détermine α en utilisant une valeur de recommencement suffisamment élevée et les valeurs de recommencements sont déterminées à partir de α . Il faudrait donc avoir un moyen de calculer α directement. Une valeur plus précise de α est 0,811 135 251 442 383 657 978 475 491 449 6…

Algorithme 3 : Le programme Maple suivant permet de calculer J(n , 3 , n) pour $n < 10^{30}$ (et sans doute un peu au-delà) en raison de la valeur approchée utilisée pour α.

```
> D3:=proc(n::integer)
    local p, alpha, c, x;
    alpha:=0.811135251442383657978475491449 6;
    p:=floor(ln((n+1/2)/alpha)/ln(3/2));
    c:=floor(alpha*(3/2)^p+1/2);
    x:=3/2+1/2*sign(c-(3/2)^p*alpha);
  x+3*(n-c);
  end;
```

Tous les résultats que nous venons de démontrer restent valables presque mot pour mot pour calculer J(n , 3 , i). L'idée est d'étudier la quantité J(n , 3 , n–l) pour un l donné. Nous venons de voir le cas $l = 0$. La seule difficulté (pas très grande) est de calculer la première valeur de recommencement.

Nous appellerons « valeur de recommencement d'ordre l » la valeur de n pour laquelle J(n , 3 , n–l) vaut 1 ou 2. Ce qui a été fait précédemment concernait donc les valeurs de recommencement d'ordre 0. Nous noterons $c_m(l)$ la m-ième valeur de recommencement d'ordre l .

Théorème 9 — La première valeur de recommencement d'ordre l est donnée par $c_1(l) = \left\lceil \dfrac{3\,l+1}{2} \right\rceil$. . De plus, si on pose $x_m(l) = J(c_m(l), 3, c_m(l) - l)$, on a $x_1(l) = 1$ si l est impair ou nul et 2 si l est pair non nul.

Pour calculer la première valeur de recommencement d'ordre l que nous noterons c pour simplifier l'écriture, nous remarquons que J(c , 3 , c–l) est la première valeur strictement inférieure à 3 que l'on trouve à partir de J(l+1 , 3 , 1) = 3 si $l+1 \geq 3$ et 1 sinon.

Par suite si $l = 0$ ou 1, $l+1 = 1$ ou 2 est la première valeur de recommencement et on vérifie que la formule donnée dans le théorème est juste.

Si $l \geq 2$ alors J(c , 3 , c–l) = J(l+1 , 3 , 1) + 3($c - l - 1$) [mod(c)] = 3(c–l) [mod(c)] . On cherche donc la plus petite valeur de c telle que $3(c - l) > c$, c'est-à-dire $2c > 3l$. On retrouve bien la formule annoncée.

Remarquons que si l est pair, on pose $l = 2\,l'$ et alors $c = 3\,l' + 1$; si l est impair, on pose $l = 2\,l' + 1$ et alors $c = 3\,l' + 2$.

Notons x = J(c , 3 , c–l). On a $x = 3(c - l)$ [mod(c)] . Nous distinguons alors deux cas suivant la parité de l . Si l est impair, $x = 3(3l' + 2 - 2l' - 1)$ [mod($3l'$ +

2)] = 1 . Si l est pair non nul, $x = 3(3l' + 1 - 2l')$ [mod$(3l' + 1)$] = 1 . Le cas $l = 0$ se traite immédiatement à part. **cqfd.**

Il est alors clair que les calculs et les résultats sont analogues à ceux trouvés aux théorèmes 7 et 8. Seulement le nombre α dépend de l. On a $\alpha(0) \approx 0{,}811\,135$; $\alpha(1) \approx 1{,}408\,639$; $\alpha(2) \approx 2{,}621\,392$; etc. D'une façon générale $\alpha(l)$ est compris entre l et l+1. En effet le même calcul que celui fait au théorème 7 prouve que :

$$\alpha(l) = \frac{2}{3}\, c_1(l) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^j \delta_j(l) \qquad \text{avec } \delta_j(l) = x_{j+1}(l) - x_j(l)$$

Nous avons vu que si l est pair et vaut $2l'$ alors $c_1(l) = 3l' + 1$ et $x_1(l) = 2$ et par suite le premier terme non nul de la série est négatif et inférieur en valeur absolue à 2/9. D'où la double inégalité :

$$\frac{2}{3}(3l' + 1) - \frac{2}{9} \leq \alpha(l) \leq \frac{2}{3}(3l' + 1) \text{ soit encore}$$

$$l < l + \frac{4}{9} = 2l' + \frac{4}{9} \leq \alpha(l) \leq 2l' + \frac{2}{3} = l + \frac{2}{3} < l + 1$$

De la même façon, si l est impair et vaut $2l'$+1 alors $c_1(l) = 3l'$+2 et $x_1(l) = 1$ et par suite le premier terme non nul de la série est positif et inférieur à 2/9. D'où la double inégalité :

$$\frac{2}{3}(3l' + 2) \leq \alpha(l) \leq \frac{2}{3}(3l' + 2) + \frac{2}{9} \text{ soit}$$

$$l < l + \frac{1}{3} = 2l' + \frac{4}{3} \leq \alpha(l) \leq 2l' + \frac{14}{9} = l + \frac{5}{9} < l + 1$$

En pratique la démonstration précédente donne un encadrement d'amplitude 2/9 que l soit impair ou pair non nul.

Algorithme 4 : Pour calculer J(n , 3 , i) on utilise un algorithme calqué sur celui vu dans le cas J(n , 3 , n) et noté D3 précédemment. On calcule successivement :

```
l := n - i ;
p := floor(ln((n+1/2)/alpha(l))/ln(3/2));
c := floor(alpha(l)*(3/2)^p+1/2);
x := 3/2 + (1/2)*sign(c-alpha(l)*(3/2)^p);
J := x + 3*(n - c);
```

Mais faute de connaître une valeur précise de $\alpha(l)$ cet algorithme n'est pas effectif. En effet si le calcul de p peut être fait avec les seules inégalités que nous avons vues sur $\alpha(l)$ au moins dès que l est assez grand ($l > 2$) il n'en est plus de même pour le calcul de c ou de x. Nous sommes donc obligé de revenir à un algorithme itératif, toutefois les résultats précédents permettent d'accélérer les procédures.

Algorithme 5 : Voici deux procédures itératives Maple utilisant la théorie précédente. La première procédure permet de calculer la m-ième valeur de recommencement ainsi que la valeur de J correspondante (notée x) ; la deuxième donne le calcul de J(n , 3 , i) en utilisant la première procédure.

```
CLX:=proc(m,l::integer)
  local c, xp, x, i;
```

```
    c:=ceil((3*l+1)/2);
  if l=0 or l<>2*floor(l/2) then x:=1 else x:=2 fi;
    for i from 2 to m do
    xp:=x;
    if c<>2*floor(c/2) then x:=3-x fi;
    c:=(3*c+x-xp)/2;
  od;
[c,x];
end:
J3:=proc(n,i::integer)
  local l,m,x;
  if i<n/3 then 3*i else
      l:=n-i; m:=1;
      while op(1,CLX(m,l))<n do m:=m+1 od;
      m:=m-1;
      x:=op(2,CLX(m,l));
      x+3*(n-CL(m,l));
  fi;
end:
```

Peut-on conclure ?

On trouvera dans l'article de L. Halbeisen, N. Hungerbühler cité en bibliographie l'étude pour $k \geq 4$ et un certain nombre de résultats complémentaires. Mais je voudrais surtout insister sur la différence essentielle que nous venons de reconnaître entre les valeurs $k = 2$ et $k = 3$.

Pour $k = 2$, nous avons un algorithme effectif pour le calcul de $J(n , 2 , i)$ qui repose sur le calcul précis d'un logarithme. Encore faut-il admettre que l'on connaît une méthode efficace de calcul desdits logarithmes. C'est le cas mais ce n'est pas évident. On peut se poser la question de la précision nécessaire du calcul pour que le résultat final sur J soit exact.

Pour $k = 3$, le problème est bien différent. Dans leur article Halbeisen et Hungerbühler commencent par un paragraphe sur la définition de ce qu'est une formule effective. Ce genre de définition est purement de circonstance et s'apparente aux définitions que l'on trouve régulièrement dans l'histoire des mathématiques comme la limitation à la règle et au compas pour les constructions géométriques, la résolution par radicaux, la définition des fonctions dites usuelles, etc. Si nous connaissions les valeurs de $\alpha(l)$ nous aurions un algorithme rapide de calcul. Seulement, pour l'instant nous ne savons calculer $\alpha(l)$ qu'à partir des valeurs de $c_m(l)$ ou de la suite $x_m(l)$ pour m assez grand. Il y a là un paradoxe qui ne saura être levé que lorsqu'on aura une méthode de calcul indépendante pour $\alpha(l)$.

Annexe

Voici l'extrait dans lequel Josèphe raconte comment il se tira d'affaire lors du siège de Jotapata : *Josèphe, qui dans cet embarras ne perdit pas sa présence d'esprit, met alors sa confiance dans la protection de Dieu :* « *Puisque, dit-il, nous sommes résolus à mourir, remettons-nous en au sort* *pour décider l'ordre où nous devons nous entretuer : le premier que le hasard désignera tombera sous les coups du suivant et ainsi le sort marquera successivement les victimes et les meurtriers, nous dispensant d'attenter à notre vie de nos propres mains. Car il serait injuste qu'après que les autres se seraient tués il y en eût quelqu'un qui pût changer de sentiments et vouloir survivre.» Ces paroles inspirent confiance, et après avoir décidé ses compagnons, il tire au sort avec eux. Chaque homme désigné présente sans hésitation la gorge à son voisin dans la pensée que le tour du chef viendra bientôt aussi, car ils préféraient à la vie l'idée de partager avec lui la mort. A la fin, soit que le hasard, soit que la Providence divine l'ait ainsi voulu, Josèphe resta seul avec un autre : alors également peu soucieux de soumettre sa vie au verdict du sort ou, s'il restait le dernier, de souiller sa main du sang d'un compatriote, il sut persuader à cet homme d'accepter lui aussi la vie sauve sous la foi du serment.*

Œuvres complètes de Flavius Josèphe, Guerre des juifs, Livre III, chapitre VIII, traduction de René Harmand, 1911. D'après la version numérique de la BNF.

On trouve mentionné le problème chez Abraham ben Ezra (1092-1167) qui raconte que : *Après avoir convenu que chaque troisième personne, en faisant le tour du cercle de façon continue, serait désignée pour être tuée, lui et un compagnon prirent les places 16 et 31 du cercle de 41 personnes. Ceux-ci restèrent les derniers et furent ainsi sauvés.*

Un problème analogue est proposé par Tartaglia (1500 - 1557) sous la forme :

Un bateau qui transporte 15 chrétiens et 15 Turcs est assailli par une tempête. Afin d'alléger le bateau, le capitaine propose de jeter 15 personnes à la mer. Pour choisir les victimes, les passagers sont placés de façon circulaire et, à partir d'un certain point, chaque neuvième homme doit être sacrifié et cela toujours de neuf en neuf. De quelle façon les 15 chrétiens doivent-ils être disposés pour être sauvés ?

Les chrétiens doivent occuper les places de rangs 1, 2, 3, 4, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21, 25, 28 et 29.

On remarquera que ce problème se retrouve dans les cultures musulmanes mais dans l'autre sens, bien entendu. Les variantes sont très nombreuses.

Dans les livres de récréations mathématiques, le problème de Josèphe prend parfois le nom de problème de Caligula ou encore celui de problème d'Yseult.

Bibliographie

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux. Volume 9, fascicule 2 (1997). L. Halbeisen, N. Hungerbühler : *The Josephus Problem.*

On peut obtenir la version électronique de cet article sur http://almira.math.u-bordeaux.fr/jtnb. On y trouve les formules explicites permettant de calculer les nombres de Josèphe $J(n,2,i)$ et $J(n,3,i)$ et fournissant une majoration et une minoration explicites de $J(n, k, i)$ qui ne diffèrent que d'au plus $2k-2$ (dans le cas $k = 4$ ces bornes sont même meilleures). À partir de ces estimations les auteurs proposent aussi un nouvel algorithme pour le calcul de ces nombres.

On trouve des renseignements historiques sur le site canadien :
http://www.recreomath.qc.ca/index.htm.

On rappelle que l'on peut trouver des informations sur une suite arbitraire d'entiers dont on donne les premiers termes sur le site : http://www.research.att.com/cgi-bin/access.cgi/as/njas/sequences/eishisfr.cgi.