

LA LOGIQUE ET LA VÉRITÉ

Alain CHAUVE

D'après la définition traditionnelle, la vérité est « *la conformité de la pensée avec l'objet* » (Descartes à Mersenne, *lettre du 16 octobre 1639*) ; elle « *consiste dans l'accord de la connaissance avec l'objet* » (Kant, *Logique*, Introduction, VII). Cette définition viendrait d'Aristote, *Métaphysique* Δ, 29 et Θ, 10, et dans la terminologie scolastique on parle d'« *adaequatio* ». Dans une terminologie plus commune on parle d'exactitude : un jugement, une représentation sont vrais s'ils sont exacts. Par exemple, « il pleut » est vrai s'il est exact qu'il pleut, c'est-à-dire si l'on peut vérifier et constater qu'il en est bien ainsi.

Si l'on s'en tient à cette définition traditionnelle, la logique devrait éliminer toute considération de la vérité. La logique concerne en effet « *l'entendement abstraction faite de la diversité des objets auxquels il peut être appliqué* » (Kant, *Critique de la raison pure*, 2^{ème} partie, Introduction). C'est ce qui fait dire que la logique est formelle. En effet, il n'y est pas question de jugements ou de raisonnements qu'il faudrait vérifier pour en établir l'exactitude en s'assurant qu'ils sont bien conformes à des faits que l'on peut constater. La logique ne s'intéresserait pas au contenu des propositions ; elle ne s'intéresserait donc pas à la question de savoir si ce qu'elles disent est vrai.

Aristote semble bien avoir procédé de cette façon lorsqu'il a présenté dans les *Premiers Analytiques* « *l'art syllogistique* » de lier déductivement des propositions et de tirer des conclusions. Il le présente en effet comme un art mis en œuvre dans tout discours quelle que soit la nature des choses sur lesquelles on raisonne. A ce titre, l'Analytique n'est la « *science d'aucun objet déterminé, c'est pourquoi elle se rapporte à toute chose* ». Elle fait abstraction, dans le discours, de ce que l'on dit pour ne retenir que les formes et les modes des énonciations en tant que telles. Lorsque, par exemple, nous parlons de Socrate pour dire qu'il est mortel, le logicien s'empresse d'éliminer le contenu de la proposition en substituant des lettres aux mots pour ne retenir que la forme attributive S est P, de sorte que pour lui, la question n'est pas de savoir s'il est vrai ou non que Socrate est mortel mais de savoir comment une proposition de cette forme peut être correctement déduite d'une autre proposition, c'est-à-dire « *par un raisonnement qui conclut par la forme de la forme* », comme disait Leibniz (*Nouveaux Essais*, IV, 17).

Et pourtant les logiciens continuent d'introduire la considération du vrai et du faux au sujet des propositions réduites à des formes. Ils continuent à les considérer comme vraies ou fausses, alors même qu'ils ont fait abstraction de la réalité dont elles parlent. Aristote, par exemple, n'hésite pas à dire que si A est vrai alors non-A est faux ; que A et non-A ne peuvent être vrais en même temps. Comment la logique peut-elle considérer des énoncés comme vrais ou faux là où l'on a fait abstraction de la réalité dont ils parlent ? Et ce n'est pas tout. Il y a des expressions logiques de caractère purement formel qu'il faudra considérer comme des vérités. Par exemple, on peut considérer non seulement que la proposition « Socrate est mortel » est vraie ou fausse, et cela sans s'occuper de savoir ce qu'il en est de Socrate, mais il faudra reconnaître que l'expression « si A implique B et si B implique C, alors A implique C » est une vérité logique (il s'agit de la transitivité de l'implication). De même, par exemple, on

considérera que la contraposition est une vérité logique : « si A implique B alors non-B implique non-A ». En revanche, on considérera que « si A implique B alors B implique A » n'exprime pas une vérité logique. La logique envisage donc bien la vérité, mais sans prendre le moins du monde en considération le rapport de la pensée à la réalité. « S'il fait jour, il fait jour » est logiquement vrai qu'il fasse jour ou qu'il ne fasse pas jour. La logique introduirait-elle un autre type de vérité qui ne consisterait plus dans la conformité avec la réalité ?

1. La réponse traditionnelle au problème

Pour rendre compte du vrai et du faux en logique, on a élaboré la notion de « vérité formelle » et on a cherché à fonder cette notion sur une interprétation philosophique de la pensée logique.

On a d'abord distingué la « vérité objective » ou « matérielle », qui consiste dans l'accord avec la réalité, d'un autre type de vérité que l'on rencontre en logique : la « vérité formelle ». On a ensuite rapporté celle-ci à la notion de « vérité nécessaire » qui reste constamment vraie, quand même ce qui pourrait la vérifier dans la réalité ne se produit plus ou ne se produit jamais. On a enfin lié l'idée de nécessité à celle de démonstration : une vérité est nécessaire parce qu'elle est démontrable et non parce qu'elle est vérifiable. Dans une démonstration on aboutit à une proposition vraie en la déduisant d'autres propositions vraies de sorte qu'il y a, comme dit Leibniz à Conring (14 mars 1678), « *résolution d'une vérité en d'autres vérités déjà connues* » sans qu'il soit besoin de faire appel à des observations ou des constatations de faits. Par ce lien déductif « *toute vérité a sa preuve a priori* » (Leibniz à Arnauld, 11 juillet 1688). Il n'est pas besoin d'en vérifier l'exactitude ; il faut seulement veiller à n'introduire aucune contradiction car « *ce qui implique contradiction ne saurait être* » (Leibniz à Foucher, 1686). C'est en ce sens que nécessaire renvoie à démontrable : démontrer une vérité, c'est montrer qu'elle est nécessaire, c'est-à-dire qu'il serait contradictoire de la nier, étant entendu que « *si deux contradictoires peuvent être vraies en même temps, tout raisonnement devient inutile* » (Leibniz à Arnauld, juillet 1686). Ainsi la vérité logique ne consiste plus dans l'accord de la proposition avec la réalité mais dans l'accord des propositions entre elles. Il ne s'agit plus de vérifier une proposition mais de la conclure correctement selon des règles dont le principe est de ne pas se contredire.

Une telle conception de la vérité repose sur une interprétation philosophique qui voit dans la logique « *la science des lois nécessaires et universelles de la pensée en général* ». C'est Kant qui fait cette déclaration dans l'Introduction de sa *Logique* et son argumentation met bien en évidence la justification philosophique qui entoure l'idée classique de vérité logique. En logique, nous dit-il, « *nous mettons de côté toute connaissance que nous devons emprunter aux seuls objets* » et « *nous découvrons ces règles qui sont absolument nécessaires à tous égards et sans considération des objets particuliers de la pensée* », c'est-à-dire « *sans lesquelles nous ne pourrions pas penser du tout* ». Nous aurions donc affaire à la pensée elle-même, en tant que telle, et non à des « objets ». C'est pourquoi la logique est « formelle ». Elle porte en effet sur « *la simple forme de la pensée en général* » puisqu'elle « *fait complètement abstraction de tout objet* ». C'est surtout pourquoi la logique est une science. Elle peut reposer « *sur des principes a priori qui permettent de déduire et de démontrer toutes ses règles* ». Celles-ci en effet ne dépendent pas de la connaissance d'un objet, donc « *elles ne sont pas dérivées de l'expérience* » et n'ont rien d'empirique. Elles peuvent être par conséquent établies dans une construction rationnelle pure et former un système constitué *a priori*.

Par exemple, les règles du syllogisme peuvent être dérivées systématiquement d'un principe que les scolastiques avaient appelé le « *dictum de omni et nullo* » qu'Aristote avait énoncé dans les *Premiers Analytiques*, I, 1, 24b, et que Euler présente de la manière suivante dans la lettre XXXVI du 21 février 1761 à une Princesse d'Allemagne : « *le fondement de toutes ces formes se réduit à ces deux principes sur la nature du contenant et du contenu : 1/ Tout ce qui est dans le contenu se trouve aussi dans le contenant ; 2/ Tout ce qui est hors du contenant est aussi hors du contenu* ». Leibniz y avait déjà vu le « *fundamentum syllogisticum* » et avait reconnu en lui une forme du principe de contradiction dont il avait fait le « *seul principe primitif* » des règles syllogistiques (*Nouveaux Essais*, IV, 2, §1).

Voilà une bien curieuse science qui, par son caractère démonstratif est bien une science, mais qui, n'ayant pas d'objet déterminé, n'est la science de rien du tout. Quel est donc ce genre de science ? Elle n'est, dit Kant, « *rien d'autre qu'un canon permettant l'appréciation de la rectitude formelle de notre connaissance* » : la logique est une science normative. En effet, « *le principe logique de la vérité est l'accord de l'entendement avec ses propres lois universelles* », autrement dit, c'est l'accord de la pensée avec elle-même. Et c'est bien ce que l'on veut dire lorsqu'on invoque le principe de contradiction pour en faire le principe logique de la vérité ; on veut alors dire que notre connaissance indépendamment de ses objets obéit à des règles nécessaires, à des lois sans lesquelles il ne pourrait y avoir de vérité. Ces lois qui sont celles de l'entendement et qui ont pour principe la non contradiction, deviennent celles d'une logique qui « *nous enseigne le droit usage de l'entendement, c'est-à-dire celui qui est cohérent avec lui-même* ». Les lois logiques, considérées comme lois nécessaires de l'entendement, sont « *les conditions de son droit usage* ». Les principes et les lois logiques sont donc des normes de la pensée, et la logique est la « *science* » qui juge de la « *rectitude formelle* » de l'usage de l'entendement. Celui-ci doit être en accord avec lui-même ; il doit être en accord avec les règles logiques qui sont des lois pour l'entendement, lois qui prescrivent à l'entendement d'être en accord avec lui-même. Ainsi, « *en logique, il s'agit [...] non de la façon dont nous pensons, mais de la façon dont nous devons penser* ».

En résumé, on voit apparaître le soubassement philosophique de l'idée de « vérité formelle ». Nous avons affaire aux lois de la pensée, lois dont le principe est le principe de contradiction, principe qui est érigé en norme de la pensée de sorte que la logique devient un Canon, une logique normative où la vérité consiste dans la « *rectitude formelle* » du raisonnement.

2. Nouvelle formulation du problème avec les calculs logiques

Avec Frege et Russell, la logique se présente sous les espèces de deux « calculs », le calcul des propositions et le calcul des prédicats. On s'en tiendra au calcul des propositions. Le problème de la vérité logique se pose d'une façon nouvelle qui invalide l'interprétation traditionnelle.

Dans le calcul des propositions on a affaire à des propositions que l'on appelle « élémentaires » et que l'on note par des « lettres de propositions », p, q, r, etc. Ces propositions élémentaires représentent des éléments logiques susceptibles d'être vrais ou faux. Les propositions que l'on trouve dans le langage peuvent être des exemples de ces éléments logiques, étant entendu que la logique considérera les propositions du langage en faisant abstraction de leur contenu, de ce qu'elles disent, pour n'en retenir qu'une seule caractéristique : elles sont soit vraies, soit fausses, et il n'y a rien d'autre à considérer en elles que ces « valeurs de vérité ».

En outre, ces éléments sont reliés entre eux dans le calcul par des articulations logiques que l'on note par des signes de « connecteurs » : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, qu'on appelle négation, conjonction, disjonction, implication. Ces connexions logiques correspondent à peu près aux articulations logiques que le langage exprime par les mots « non », « et », « ou », « si ... alors » (ce n'est que dans le langage mathématique que ces mots correspondent strictement et rigoureusement aux connecteurs logiques). A partir de propositions élémentaires on forme avec les connecteurs de nouvelles propositions. Par exemple $(p \Rightarrow q)$ est une proposition « composée » des propositions élémentaires p et q à l'aide du connecteur d'implication.

Où veut en venir le logicien avec ses propositions et ses connecteurs ? A deux choses.

1/ Il veut montrer comment un connecteur détermine la valeur vrai ou faux (les « valeurs de vérité ») d'une formule en fonction des valeurs de vérité des formules qui la composent (le mot « formule » désigne aussi bien une proposition élémentaire qu'une proposition composée). Par exemple, avec p et avec q , on peut construire la disjonction $(p \vee q)$. Cette proposition composée a la valeur vrai quand l'une au moins des propositions a la valeur vrai (elle n'est fausse que si les deux ont ensemble la valeur faux). Si l'on construit la conjonction $(p \wedge q)$, cette proposition aura la valeur vrai quand les deux propositions qui la composent auront ensemble la valeur vrai (il suffit qu'une seule ait la valeur faux pour que la conjonction soit fausse). Le logicien dresse ainsi des « tables de vérité » où, en général, on représente « vrai » par V et « faux » par F, et qui montrent pour chaque connecteur quel résultat V ou F on obtient en composant un V ou un F avec un V ou un F à l'aide de ce connecteur. Dans ce calcul, la vérité ou la fausseté sont déterminées par la seule connexion logique des propositions entre elles. Selon le connecteur, des propositions V ou F formeront une proposition V ou F. On retiendra que le logicien nous met devant une combinatoire de V et de F. La seule question ici est de savoir si du vrai et du faux combinés par tel connecteur avec du vrai et du faux donnera du vrai ou donnera du faux. A cette fin le logicien dispose de tables de vérité correspondant à chaque connecteur et qui sont de véritables règles de calcul sur des V et des F, comparables aux tables d'addition ou de multiplication sur des nombres. Avec ces tables, il peut calculer la valeur V ou F d'une formule à partir des éléments V ou F qui la composent.

2/ Le logicien ne se contente pas d'établir des connexions entre des propositions avec des « et », des « ou », des « si ... alors », etc., et de décrire dans une table les cas de vérité ou de fausseté des propositions qu'il compose ainsi. Il veut aussi former des expressions qui ont valeur de lois logiques et qui semblent énoncer des vérités purement logiques. Par exemple, $(p \Rightarrow p)$ semble exprimer une nécessité logique qui s'impose à l'esprit, une vérité nécessaire qui tient à la nature même d'une implication : toute chose s'implique forcément elle-même ; s'il pleut, il pleut. C'est une loi de l'implication (elle est « réflexive »). De même, il y a une nécessité logique qui nous fait passer d'une formule à une autre. Si, par exemple, j'ai $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow r)$, alors j'ai nécessairement $(p \Rightarrow r)$. Il y a là encore une loi de l'implication : elle est transitive, et cette loi semble exprimer une vérité logique.

On voit que la notion de vérité intervient dans le calcul logique sous deux aspects différents. Par vérité on entend soit les valeurs de vérité des formules du calcul, soit les vérités logiques qu'on exprime avec les formules du calcul. Que signifient ces deux

sens du mot « vérité » dans la logique ? La réponse à cette question va nous éloigner de l'idée que la vérité logique est une vérité formelle et nécessaire. Du même coup, elle va nous obliger à revoir toute l'interprétation philosophique de l'idée de vérité logique.

3. Les valeurs de vérité

Avec la définition classique de la vérité – l'*adaequatio* –, on a dit ce qui rend vraie ou fausse une proposition, à savoir que celle-ci s'accorde ou ne s'accorde pas avec la réalité, avec ce dont elle parle. Si on en reste là, il n'y a plus qu'à préciser comment on doit faire pour s'assurer qu'il y a accord ou désaccord entre une proposition et la réalité, c'est-à-dire comment il faut faire pour vérifier que la proposition est vraie ou fausse. En général, on préconise d'avoir recours à l'expérience et de bien regarder pour savoir si les choses sont comme on l'a dit. Mais lorsqu'on procède ainsi on a laissé quelque chose dans l'ombre. Une question en effet doit être posée et ne pas rester implicite : en quoi consiste considérer une proposition vraie ou fausse ? Poser cette question n'est pas du tout la même chose que de se demander : qu'est-ce qui fait qu'une proposition est vraie ou fausse ?

Prenons un exemple : je dis qu'il pleut. Jusque là il n'y a rien de vrai ou de faux dans ce que je dis. Maintenant je me demande si c'est vrai ou faux, c'est-à-dire si ce que je dis s'accorde ou non avec la réalité. Pour le savoir, je vais à la fenêtre et je vois la pluie qui tombe. Ce que je vois confirme ce que j'ai dit et me permet de décider si c'est vrai ou faux. Tout cela semble bien banal et sans mystère, et pourtant, à la réflexion, quelque chose est passé inaperçu. En effet, je n'ai pas dit seulement « il pleut » pour ensuite aller voir à la fenêtre ; je me suis demandé si en disant « il pleut » je dis vrai, je dis quelque chose de vrai ou de faux, et c'est pour le savoir que je vais regarder à la fenêtre. Avant donc d'aller voir à la fenêtre pour savoir si c'est vrai ou si c'est faux, il m'a bien fallu préalablement mettre en rapport la proposition « il pleut » avec l'idée que c'est vrai ou que c'est faux, avec le vrai et le faux. J'ai envisagé la valeur, vrai ou faux, de la proposition et c'est cette valeur que j'ai en vue lorsque je vais vérifier : lorsque je vais vérifier, c'est pour répondre à la question « est-ce vrai ? ». L'accord avec la réalité me permet de répondre à cette question et me permet de confirmer que ma pensée qu'il pleut est vraie et que j'ai affaire à une vérité. Bref, pour que la conformité avec la réalité puisse venir confirmer que ma pensée est vraie, il faut que ma pensée ait affaire à du vrai ou à du faux.

Il apparaît alors que nos propositions ont pour objets le vrai et le faux et que c'est d'eux, des « valeurs de vérité » qu'il est question dans une proposition que l'on se propose de confirmer ou d'infirmer : il est question de savoir si c'est à du vrai ou à du faux que l'on a affaire. Ainsi, le vrai et le faux sont les objets de nos propositions, mais, pressés de savoir ce qu'il en est, nous nous précipitons pour savoir si c'est vrai et nous n'apercevons pas que le vrai et le faux sont les objets auxquels se réfèrent nos propositions et que c'est d'eux que nous voulons parler lorsque nous exprimons des propositions : « il pleut », « Socrate est mortel », etc. Nous voulons savoir à chaque fois si c'est à du vrai ou à du faux que nous avons affaire, et nous reconnaissons donc par là que ce sont bien les objets des propositions. Certes nos propositions (« il pleut », « Socrate est mortel », « le soleil se lève », etc.) ont des sens différents, mais leur objet est le même et il est à chaque fois question de savoir si avec elles nous avons affaire au vrai ou au faux. Le premier qui s'en est avisé a été Frege qui, dans l'article *Sinn und Bedeutung*, 1892 (traduit par *Sens et dénotation*), fait observer que toutes les propositions

ont pour référence les valeurs de vérité : « *la dénotation d'une proposition est sa valeur de vérité* ».

Dans ces conditions, il faut reconnaître que la logique n'est pas aussi formelle et vide de contenu qu'on l'a dit. Le calcul des propositions porte bien sur des objets, le vrai et le faux, et consiste à effectuer sur ces objets des opérations logiques, des calculs qui ne sont pas sans évoquer les opérations d'un calcul mathématique. Mais de quelle sorte d'objets s'agit-il ? Peut-on appeler le vrai et le faux des « objets » alors qu'il ne s'agit pas, on en conviendra, de choses concrètes que l'on peut voir et toucher ? On peut cependant admettre qu'il y a aussi des objets abstraits comme sont, par exemple, les nombres. On peut d'ailleurs pousser cette comparaison. Lorsque le logicien considère des « valeurs de vérité » de propositions, il considère ces valeurs pour elles-mêmes et fait abstraction des propositions dont elles sont les valeurs, exactement comme on fait dans l'arithmétique, par exemple, où l'on ne considère pas 7 hommes et 5 chevaux, mais le 7 et le 5 eux-mêmes, les valeurs numériques : peu importe la nature des choses dont c'est le nombre ; peu importe même qu'il y ait des choses qui ont un nombre. On définit ensuite des opérations sur les nombres et on fixe comment un nombre composé avec un autre par une addition ou par une multiplication donne pour résultat un autre nombre. Il en va de même dans le calcul des propositions avec, par exemple, les opérations de disjonction ou de conjonction sur des valeurs de vérité. Et lorsque le logicien introduit des lettres p , q , r , etc., il veut représenter des valeurs de vérité V ou F – et non des propositions – exactement comme fait le mathématicien avec ses x , y , et z pour représenter des valeurs numériques. Allons même plus loin que cette comparaison. Il n'y a pas de différence entre des valeurs de vérité et des valeurs numériques. Les opérations logiques sur le vrai et le faux ont les mêmes propriétés que les opérations sur 0 et 1. Boole l'avait fait remarquer au milieu du XIX^e siècle : calculer avec des valeurs de vérité revient à calculer avec 0 et 1, et, par exemple, la conjonction correspond à une multiplication avec 0 et 1, opération associative, commutative, avec 1 pour élément neutre.

L'apparition du vrai et du faux en logique sous la forme de valeurs de vérité considérées comme des « objets » au même titre que les nombres dans un calcul conduit à reconsidérer l'idée philosophique de vérité en logique. Cette idée repose sur une attitude spontanée. Lorsqu'on dit qu'une proposition p est vraie, on a le sentiment que l'on dit plus que p ; on l'affirme. Cette affirmation n'ajoute rien au contenu de p mais semble dire quelque chose de p ; elle semble dire que c'est vrai, que c'est confirmé, que je considère que c'est conforme à la réalité. Philosophiquement on sera alors tenté de considérer qu'il y a d'abord ma pensée exprimée par des propositions, par mes jugements, et qu'ensuite je me prononce sur leur vérité en les affirmant. Il y aurait ainsi d'une part et d'abord ma pensée et il y aurait d'autre part et ensuite la pensée qu'elle est valable et vaut comme vraie. A la pensée que j'exprime viendrait s'ajouter la pensée que c'est vrai. La valeur de vérité viendrait d'un jugement que l'on porte sur le discours que l'on tient pour lui reconnaître sa valeur de discours vrai. En un mot, pour qu'il y ait du vrai, il faudrait énoncer un jugement et juger ce jugement ; juger de sa valeur pour le juger vrai. Que l'on songe, par exemple, à ce que les Stoïciens voulaient dire lorsqu'ils soutenaient que la vérité relève de l'« assentiment » (*sunkatathesis*) donné aux représentations. Pour qu'il y ait vérité, il faut qu'il y ait un assentiment et non la pure et simple constatation d'un fait, c'est-à-dire qu'il faut une adhésion, un consentement qui fait que non seulement nous avons une représentation

mais que sa conformité avec la réalité fait l'objet d'une conviction. Le fou qui dit « il fait jour », même si c'est en plein jour, ne dit pas vrai. Ce qu'il dit ne vaut pas comme vrai, même si ce qu'il dit est exact, parce qu'il le dit sans raison et qu'il n'exprime que ce qui lui passe par la tête sans chercher à dire que c'est vrai, sans vouloir dire vrai, sans lui donner la force d'une conviction. Un autre exemple est l'attitude de Descartes pour qui il n'y a du vrai que là où je suis capable de m'assurer que c'est vrai (*Principes*, I, §30). Cette certitude vient de l'évidence (c'est la première règle de la méthode) ou de ce qui se ramène à des évidences (ce sont les trois autres règles), c'est-à-dire qu'il n'y a de vérité que dans la mesure où je suis un sujet capable d'apercevoir clairement et distinctement ce qui se présente à mon esprit et de le reconnaître comme vrai, de le juger vrai et de le tenir pour vrai. La vérité exige le consentement de celui qui juge *« pourvu que nous ne donnions notre consentement qu'à ce que nous connaissons clairement et distinctement devoir être compris en ce dont nous jugeons »* (*Principes*, I, §33).

Considérer la vérité de propositions supposerait donc un sujet capable de considérer qu'elles sont vraies, de les estimer et de les juger vraies. Ce sujet capable de juger que c'est vrai serait en quelque sorte placé au-dessus des propositions. Il serait le sujet qui juge de ce qu'il pense, qui s'installe dans la position d'un juge qui fait comparaître devant lui ses pensées et à qui il appartient de juger vrai ou faux ce qu'il pense. La logique moderne ne permet plus d'envisager la vérité de cette façon. Considérer, par exemple, qu'une proposition a la valeur V ce n'est pas juger ou reconnaître cette proposition comme vraie. En disant qu'elle a la valeur V, je n'ai pas jugé de sa validité et il n'y a là aucun jugement de valeur, j'ai seulement considéré qu'il y a un cas « vrai », et cela correspond à une « valeur » de la proposition non au sens de ce que sont philosophiquement des valeurs qui font la validité de quelque chose, mais au sens où l'on parle de « valeurs » de variables dans les mathématiques. Par exemple encore, considérer une proposition fausse, ce n'est pas considérer qu'elle est fausse ; ce n'est pas dire qu'on la juge fausse, qu'elle n'a pas de validité et qu'en somme elle n'a pas de valeur logique. Elle en a une au contraire : la valeur F, et, à ce titre, elle fait bien partie des propositions qui ont une valeur logique. Il est clair que si le vrai et le faux, les « valeurs de vérité », sont des « objets » du même genre que le 0 et le 1 du mathématicien, on ne peut plus y voir des valeurs au nom desquelles on juge du vrai et du faux. Les valeurs de vérité dans la logique ne relèvent pas de jugements de valeur. Il faudra admettre qu'en logique, il n'y a pas de jugements ; il n'y a que des calculs.

4. Les vérités logiques

Dans un calcul logique, on ne se contente pas d'établir des connexions entre des propositions à l'aide de « et », de « ou », de « si ... alors », etc., on forme aussi à l'aide de ces connecteurs des expressions qui semblent constituer des vérités purement logiques. Ces vérités se présentent sous trois aspects. Il y a d'abord des expressions, comme $(p \Rightarrow p)$, par exemple, qui semblent constituer par elles-mêmes une vérité et énoncer une vérité. $(p \Rightarrow p)$ énonce une vérité de l'implication : celle-ci est « réflexive » ; n'importe quelle proposition s'implique elle-même. Il y a ensuite des expressions dont il nous semble qu'il est vrai qu'on peut toujours les transformer en une autre, par exemple un $(p \wedge q)$ peut toujours s'écrire $(q \wedge p)$: cette propriété s'appelle la commutativité de la conjonction et semble constituer une vérité logique. Enfin il y a des expressions dont on est sûr qu'elles sont liées entre elles de sorte que si l'une est vraie, l'autre l'est aussi (mais pas réciproquement). Ce sont des expressions qui

sont telles que la vérité de l'une entraîne la vérité de l'autre. Par exemple, la vérité de $(p \Rightarrow q)$ et de $(q \Rightarrow r)$ entraîne la vérité de $(p \Rightarrow r)$. Ceci s'appelle la transitivité de l'implication. De même la vérité de $(p \wedge q)$ entraîne logiquement celle de $(p \vee q)$: si la première est vraie, la seconde ne peut pas être fausse. Dans ces trois cas, le logicien reconnaît qu'il a affaire à une déduction entre des formules : de p , je peux déduire p ; de $(p \wedge q)$, je peux déduire $(q \wedge p)$ et réciproquement ; de $(p \wedge q)$, je peux déduire $(p \vee q)$ mais pas réciproquement.

Pourquoi considérons-nous qu'il y a là des vérités purement logiques ? Dans chacun de ces cas nous invoquons la même raison. Devant, par exemple, la proposition « s'il pleut alors il pleut », nous avons le sentiment que cette proposition est « nécessairement » vraie. A quoi tient cette nécessité ? On répond traditionnellement que cette proposition est vraie « en vertu de la forme » de l'implication, $(A \Rightarrow A)$ où A est une proposition quelconque, élémentaire ou composée. Qu'est-ce que l'on entend par là sinon que l'implication a une propriété, la réflexivité, indépendante des choses sur lesquelles elle porte et qui appartient à sa nature logique, de sorte qu'elle constitue une vérité logique. De la même façon, on a le sentiment qu'il est nécessairement vrai qu'une conjonction est commutative et que l'on peut toujours transformer un $(p \wedge q)$ en un $(q \wedge p)$ et vice versa. On voit là une vérité au sujet de la conjonction, vérité qui exprime une propriété de la conjonction et qui vaut pour toute expression de cette forme, autrement dit qui tient à la nature logique de la conjonction. De la même façon enfin, on a le sentiment qu'un lien nécessaire, d'une nécessité logique, rattache une expression à une autre et permet de passer de l'une à l'autre ; de tirer une expression d'autres expressions. Par exemple, de $(p \wedge q)$ on peut tirer $(p \vee q)$ comme si $(p \vee q)$ était lié à $(p \wedge q)$ en raison d'une nécessité logique. A quoi attribuons-nous ce pouvoir de lier nécessairement des propositions entre elles ? Là encore, à la forme. Par exemple, dans le cas de $(p \Rightarrow q)$, $(q \Rightarrow r)$ donc $(p \Rightarrow r)$, nous attribuons ce lien nécessaire à la propriété de l'implication d'être transitive, propriété qui semble appartenir à sa nature logique et qui s'impose à l'esprit comme une vérité logique. Pour résumer, nous dirons qu'une vérité purement logique exprimerait une nécessité logique qui s'impose à l'esprit. Cette nécessité tiendrait à sa forme logique, c'est-à-dire qu'elle appartiendrait à la nature des connexions logiques (les connecteurs). Les connecteurs auraient des propriétés logiques qui font qu'une expression se rattache nécessairement à une autre, se transforme nécessairement en une autre, en entraîne nécessairement une autre. On a alors le sentiment qu'il y a des lois logiques auxquelles obéissent les connexions logiques, lois qui commandent des déductions. Ce sont ces lois (commutativité, transitivité, etc.) qui s'imposeraient à l'esprit comme des vérités logiques.

Il y a pourtant quelque chose que l'on ne comprend pas très bien : d'où viennent ces vérités logiques ? Certes, on a dit qu'elles viennent de la forme logique, mais qu'est-ce qui fait qu'il y a dans une forme logique une nécessité logique qui donne ce sentiment qu'une forme logique exprime une vérité logique, absolue, incontournable, qui s'impose à l'esprit ? Cette question, Russell la pose en 1919 dans l'*Introduction à la philosophie mathématique*. A ces formes logiques qui représentent des vérités logiquement nécessaires, il donne le nom de « tautologie », et il avoue : « *pour le moment, je ne sais guère comment définir la tautologie* ». Il se contente de prendre acte que ces tautologies représentent des lois logiques qui commandent la façon dont les formules logiques s'ordonnent entre elles, se rattachent les unes aux autres, se tirent et se déduisent les

unes des autres. Dans ces conditions, il faudra admettre que la logique obéit à des lois qu'on pourrait énoncer comme des lois primitives – des axiomes – qui commandent un système logique où les formules logiques s'organisent et se déduisent. Spontanément on verra dans ces lois des vérités premières qui gouvernent la logique et qui s'imposent à l'esprit et au calcul, des vérités qui semblent constituer des principes logiques qui se situent au-dessus du calcul et qui règnent sur lui, bref des vérités logiques sur la logique. Il est clair qu'en envisageant de telles vérités on prétend adopter un point de vue qui domine les expressions du calcul, qui les surplombe et d'où l'on étudie et fixe leurs propriétés en considérant les lois qui président à leur enchaînement. Bref, on prétend adopter un point de vue logique sur la logique. Il y aurait donc une logique de la logique ? Est-ce la même ? En est-ce une autre ? D'où vient-elle ? On voit bien qu'à ces questions on n'aura pas d'autre réponse que celle-ci : ces lois, ces principes logiques, viennent de la pensée pure. Ils sont les principes de la pensée, les lois de la pensée qui dicte ses lois à la logique. Et l'on sera fortement tenté de rattacher ces lois à un principe « ultime » de la pensée, le principe de contradiction.

Or en 1919, au moment même où Russell se posait la question du rapport entre forme logique et vérité logique, la réponse venait d'être donnée et montrait du même coup d'où viennent les vérités logiques. Dans le *Tractatus logico-philosophicus*, Wittgenstein montrait que ces lois logiques, ces vérités logiques, ne viennent que du calcul lui-même et que c'est une illusion philosophique qui nous fait croire qu'il s'agit de lois de la pensée. Les lois logiques où l'on voit des vérités logiques ne sont pas les principes logiques de la logique. Ce ne sont que des expressions logiques particulières que l'on trouve dans le calcul et qui sont engendrées par le calcul : une tautologie est simplement une formule qui a toujours la valeur V dans le calcul quelles que soient les valeurs V ou F des propositions qui la composent. Par exemple, la table de l'implication montre qu'une implication n'a la valeur F que dans un seul cas : lorsque le premier terme a la valeur V et que le second a la valeur F. Il n'y a qu'à appliquer mécaniquement cette clause à la formule $(p \Rightarrow p)$ pour constater qu'il est impossible que cette formule prenne la valeur F. Si $(p \Rightarrow p)$ a ainsi toujours la valeur V, et s'il en va de même pour toute formule de même forme, c'est-à-dire pour toute expression qu'on mettrait à la place de p, cela ne signifie pas qu'il y a derrière ou au-dessus de l'implication, dans un arrière-monde de la pensée pure, un mystérieux principe qui en aurait décidé ainsi et qui en aurait fait une vérité logique au sujet de l'implication. Si l'implication est réflexive, cela tient tout simplement aux résultats que l'on obtient en calculant avec des V et des F sur toute expression de cette forme. Il en va de même pour les déductions. Pourquoi dit-on que $(p \vee q)$ se déduit de $(p \wedge q)$? Nullement parce qu'il y aurait un mystérieux lien de nécessité logique entre ces deux formules et qui ferait que la vérité de $(p \wedge q)$ entraîne la vérité de $(p \vee q)$. A l'inverse, c'est parce que les V et les F se distribuent d'une façon telle qu'on n'obtient jamais une valeur F pour $(p \vee q)$ quand on a une valeur V pour $(p \wedge q)$, que l'on a alors le sentiment qu'il y a un lien nécessaire entre les deux. Ce n'est pas une hypothétique nécessité logique qui explique que la vérité d'une expression entraîne celle d'une autre ; c'est le calcul qui nous montre qu'une expression ne peut avoir la valeur F quand une autre a la valeur V.

Les lois logiques qui nous semblent relever de principes logiques supérieurs parce qu'on y voit des vérités logiques ne sont rien d'autre que des expressions qui sont dans le calcul lui-même et qui sont construites par le calcul. Ce sont des résultats du calcul : des tautologies. Aucune de ces tautologies n'est privilégiée par rapport aux autres ;

aucune n'est première ou n'est une vérité de base, un fondement logique pour les autres et pour les formules : « *Parmi elles, il n'y a ni axiomes, ni propositions dérivées* » (*Tractatus*, 6. 127). Les vérités logiques (commutativité de la conjonction, de la disjonction, réflexivité et transitivité de l'implication, etc.) ne sont pas au-dessus du calcul ; elles sont dans le calcul. D'où cette célèbre déclaration de Wittgenstein : « *Les lois de la logique ne doivent pas être subordonnées elles-mêmes à des lois logiques* » (*Tractatus*, 6. 123).

Conclusion

Il faut renoncer à l'interprétation traditionnelle de la notion de vérité logique. On ne saurait parler à propos des vérités logiques de « lois de la pensée ». On ne trouve pas dans la logique des « lois de la pensée » mais tout simplement des tautologies du calcul. Le principe de contradiction, par exemple, n'est pas un principe qui aurait valeur de principe logique de la logique, ce n'est qu'une tautologie dans le calcul : $\overline{p \wedge p}$ [lire : non (p et non p)], au même titre que les autres et qui joue le même rôle.

Sans doute on peut continuer à dire que les tautologies correspondent à des propriétés formelles des connecteurs, mais non parce qu'elles exprimeraient une vérité logique qui s'imposerait comme une exigence logique à la logique. Elles ne font que montrer ce qui se passe dans le calcul et les résultats qu'on y obtient. Par exemple, que l'expression $\overline{p \wedge p}$ soit une tautologie montre que p et $\overline{p}$ ne peuvent avoir ensemble la même valeur de vérité. Cela se voit et se constate sur le résultat que l'on obtient en dressant la table de vérité de cette formule. Si l'on voulait aller plus loin et si l'on voulait voir dans cette constatation l'expression d'une vérité logique, on aurait l'illusion d'avoir affaire à une vérité au sujet des propositions alors qu'il ne s'agit que d'un résultat obtenu dans le calcul et par le calcul. Si l'on veut voir dans des résultats de ce genre des vérités qui s'imposent à la logique et qui la gouvernent, on est inévitablement amené à les considérer comme des principes de la logique, et, par là, on en vient à imaginer qu'il s'agit de lois de la pensée. On voudra y voir en effet des vérités logiques qui semblent être des vérités sur la logique, placées au-dessus de la logique. On les fera dépendre d'un sujet dominant la logique, un sujet qui vient les considérer et les juger, et à qui il appartient de reconnaître leur vérité. Il y aurait ainsi, installé en position de juge, muni de ses principes, un sujet qui, en quelque sorte, fait comparaître devant lui les expressions logiques et ses propres pensées pour s'assurer qu'elles sont en accord avec ces principes.

Au contraire, il faut dire que la vérité des formules logiques ne relève pas d'un point de vue supérieur et extérieur d'où l'on prétendrait reconnaître des formules comme vraies ou fausses et juger de leur valeur. Il n'y a pas en logique des vérités qui surplombent la logique, des vérités que je devrais reconnaître et au nom desquelles je jugerais de la validité logique de ce qui est logiquement vrai. En logique, il n'y a pas de sujet ; il n'y a que le calcul.