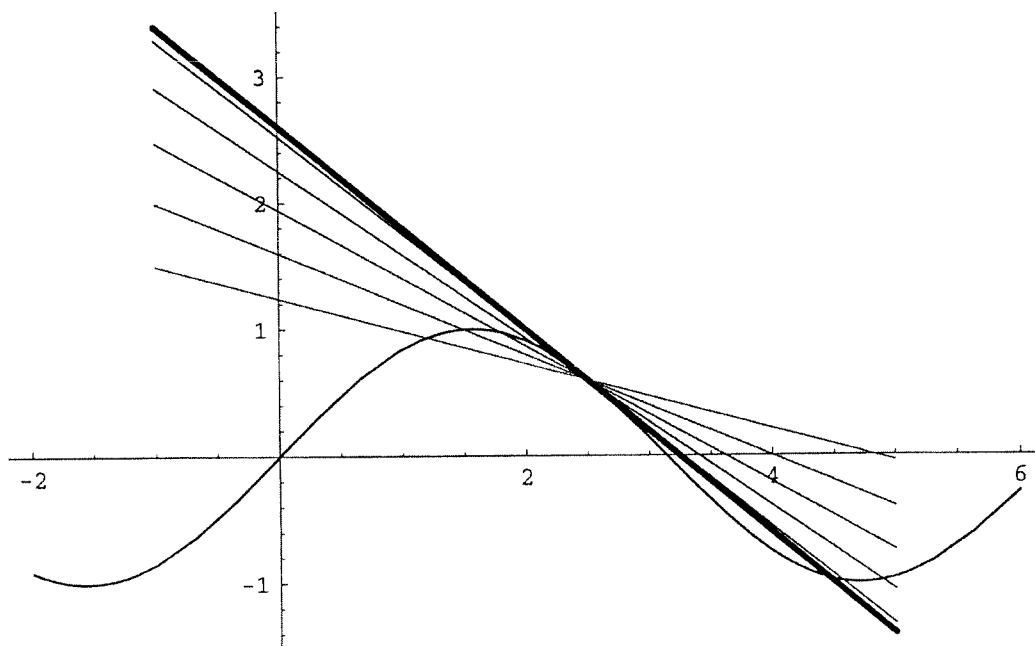


Regards et perspectives sur l'enseignement de l'analyse

Actes du colloque de Mulhouse 8-9 mars 2002

AVRIL 2004



NOTRE COUVERTURE

Représentation de la touchante "tangente" comme "limite" d'un faisceau de droites sécantes.

SOMMAIRE

Introduction	3
Michele ARTIGUE	
Evolutions et perspectives de l'enseignement de l'Analyse au lycée.....	5
Robert LUTZ	
Réflexion sur l'approche de l'Analyse en termes d'ordre de grandeur	23
Manpa KRYSINSKA et Maggy SCHNEIDER	
Négliger des termes ? Opportunités et difficultés.....	29
Michela MACHIETTO	
Le jeu entre point de vue local et point de vue global en analyse une ingénierie de didactique à visée diagnostique au niveau de première.....	41
Rossana FALCADE et Angela RIZZA	
Approche Intuitive du concept de limite	57
Catherine CRONCIN, Brigitte JAUFFRET, Abdenacer MAKHLOUF, Nicole NICOLAI, Claude SERRIS	
Sur l'approche en termes d'ordre de grandeur absolu de l'enseignement de l'Analyse	71
Jacques BAIR	
Introduction du concept de limite à l'aide des nombres hyper réels.....	77
Amina BENBACHIR et Moncef ZAKI	
Le contre-exemple et l'analyse mathématique des fonctions : étude de cas en première année de DEUG	87
Achille MAFFINI	
Continuité et discontinuité, une activité avec des enseignants en formation	97
Jean-Baptiste LAGRANGE	
Le projet Casyopée : un environnement de calcul formel pour l'étude de propriétés des fonctions au lycée	105
Liste des participants au colloque	120

INTRODUCTION

Pendant de nombreuses années le pôle Haut-Rhinois de l'IREM de Strasbourg a effectué un travail de recherche sur l'enseignement des bases de l'Analyse au lycée et dans le premier cycle universitaire. Il s'agissait de l'exploration de nouvelles méthodes pour appréhender le concept de limite en utilisant les ordres de grandeur. Ceux-ci ont acquis un statut logique cohérent grâce aux progrès de la logique au 20^{ème} siècle. L'objectif du colloque, qui a eu lieu à Mulhouse les 8 et 9 mars 2002, était d'insérer ce travail dans une réflexion comparative globale en compagnie de spécialistes ayant expérimenté d'autres approches.

Trois principaux thèmes ont été abordés dans ce colloque. Michèle Artigue a exposé l'évolution et les perspectives de l'enseignement de l'Analyse, le groupe AHA de Louvain a présenté l'approche heuristique de l'Analyse et Robert Lutz a présenté l'approche en termes d'ordres de grandeur. Autour de ces thèmes, divers ateliers et communications ont approfondi ces questions.

Ces actes regroupent les contributions écrites des participants au colloque qui a regroupé une soixantaine de personnes de diverses origines géographiques.

La réussite de ce colloque est le fruit d'une collaboration de toutes les institutions locales qui œuvrent pour l'enseignement des mathématiques, l'Inspection Académique (Etienne Meyer), l'IUFM et l'IREM de Strasbourg (Alain Kuzniak) et le pôle du Haut-Rhin de l'IREM de Strasbourg (Robert Lutz et Abdenacer Makhlouf).

Nous remercions le Conseil Général du Haut-Rhin et l'IREM pour leur soutien financier et Alexandra Carminati pour son travail de traitement de texte et de mise en forme finale de ces actes.

Abdenacer Makhlouf

ÉVOLUTIONS ET PERSPECTIVES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE AU LYCÉE¹

Introduction

L'enseignement des débuts de l'analyse est aujourd'hui un secteur d'enseignement déstabilisé, en crise, partout dans le monde, en dépit des différences institutionnelles et culturelles. Le symposium organisé à Genève en octobre 2000, pour commémorer les cent ans de la revue « l'Enseignement Mathématique », qui a consacré une demi-journée de ses travaux à cet enseignement, retraçant son histoire au fil du siècle et essayant de penser ses perspectives futures, l'a bien mis en évidence². Quelles sont les sources de cette crise ? Comment s'explique-t-elle ? C'est à ces questions que nous essaierons de répondre dans la première partie de ce texte, en nous appuyant sur l'histoire de l'enseignement secondaire de l'analyse en France et en rappelant brièvement ce qu'a été son évolution au cours du siècle dernier. Mais si une telle analyse permet de tirer les leçons de l'histoire et aide à comprendre la situation actuelle, elle ne saurait suffire pour penser le futur de l'enseignement secondaire de l'analyse. C'est à ces questions de prospective que nous nous attacherons dans la suite de ce texte, en nous centrant sur deux dimensions qui nous semblent fondamentales pour penser l'entrée dans le champ de l'analyse : celle de la localisation des points de vue et celle de l'extension du calcul algébrique par intégration des ordres de grandeur. Nous nous interrogerons ensuite, dans une dernière partie, sur la viabilité de perspectives qui découlent de cette réflexion, dans l'environnement technologique qui est celui de l'enseignement des mathématiques aujourd'hui ou devrait l'être du moins dans un futur proche.

1. L'évolution de l'enseignement secondaire français de l'analyse au xx^e siècle

Pour comprendre la situation actuelle de l'enseignement des débuts de l'analyse, il nous semble nécessaire de percevoir l'enseignement actuel comme le produit d'une histoire et de s'intéresser donc à son évolution. C'est à travers cette histoire, marquée par des caractéristiques culturelles et institutionnelles particulières, que se sont forgées des valeurs pour cet enseignement, au fil des continuités et des ruptures. Ce sont des valeurs qui nous sont, partiellement au moins, devenues transparentes, qui se sont naturalisées, mais pour comprendre la situation actuelle, pour penser les futurs possibles, il est nécessaire de les considérer comme des objets problématiques. Le regard historique va nous y aider, comme pourrait le faire, dans un registre différent, le regard porté sur d'autres cultures et d'autres choix d'enseignement.

Lorsque l'on se penche sur l'histoire de l'enseignement des débuts de l'analyse en France, on ne peut manquer d'être frappé par le contraste saisissant entre la situation du début du xx^e siècle, que nous qualifierions volontiers d'idyllique, et la situation actuelle. C'est ce contraste que nous allons interroger dans cette partie, en distinguant dans l'histoire de l'enseignement au cours du xx^e siècle quatre périodes principales : la période qu'amorce la réforme de 1902 et qui couvre toute la première moitié du siècle, la période de la réforme des mathématiques modernes qui s'amorce avec la réforme des années 60, la contre-réforme des années 80 et, enfin, la situation qui a prévalu jusqu'aux infléchissements apportés par les

¹ Cet article a été publié dans L'OUVERT 107 (2003).

² On pourra se référer sur ce point aux actes de ce symposium qui seront publiés dans un numéro spécial de la revue *l'Enseignement Mathématique*.

nouveaux programmes entrés en vigueur en première en 2001-2002 et en terminale en 2002-2003.

1.1. La situation idyllique du début du siècle : l'entrée du calcul différentiel et intégral (CDI) dans l'enseignement secondaire

C'est en effet avec la réforme de 1902, et son ambition de fonder des humanités scientifiques à égalité de statut avec les humanités littéraires qui, traditionnellement, assuraient la formation des élites de la nation (Belhoste, 1996) que l'enseignement du CDI se généralise en France au niveau secondaire. Cette introduction est un succès comme l'attestent la stabilité des programmes ainsi que les nombreux textes et rapports publiés (Artigue, 1996). Ceci n'est pas un phénomène isolé. L'étude internationale lancée sur ce thème par la CIEM en 1911, dont le rapport, connu sous le nom de rapport Beke est publié en 1914 par la revue *l'Enseignement Mathématique*, le montre à l'évidence, tout en nous aidant à comprendre les ressorts de ce succès.

L'entrée du CDI est tout d'abord une entrée modeste dans un enseignement où la géométrie règne en maître. Il ne fait pas l'objet d'une rubrique séparée dans les programmes, étant intégré à la partie d'algèbre, et, par exemple, dans le programme de terminale scientifique, cette partie n'occupe qu'une page sur les huit que compte le programme de mathématiques. Le CDI se veut essentiellement un calcul efficace pour faire face aux besoins tant des mathématiques, dont l'enseignement inclut à l'époque, rappelons-le, mécanique, cinématique et astronomie, que des autres disciplines scientifiques, notamment la physique. C'est un enseignement qui, sans déstabiliser le curriculum, apporte un progrès évident. Il permet de se libérer de techniques ad hoc auparavant utilisées dans un certain nombre de calculs, de proposer des méthodes simples et unifiées, libérées de la métaphysique des infinitésimaux. Ces méthodes rencontrent les canons de rigueur de l'époque. Priorité est donnée à l'outil CDI, les ambitions théoriques sont clairement limitées et cette limitation est soutenue par les mathématiciens influents de l'époque comme par exemple Henri Poincaré. Ces derniers d'ailleurs produisent des ressources pour les enseignants, allant au-delà des seuls manuels du secondaire. Des ouvrages comme ceux des frères Tannery, de Carlo Bourlet ont un retentissement international. Cet enseignement d'une analyse algébrisée, que la culture géométrique, cinématique et mécanique aide à motiver et prendre sens, est à l'évidence un enseignement qui marche. Les pionniers qui se sont investis dans l'aventure récoltent les fruits de cet investissement et ont tout lieu de se déclarer pleinement satisfaits. Rappelons pour compléter la description de ce contexte que cet enseignement s'adresse à une petite élite, tant côté élève que côté enseignant.

1.2. Le tournant du milieu du siècle : des ambitions nouvelles pour l'enseignement de l'analyse

Avec le tournant du milieu du siècle, et l'évolution du champ mathématique, l'équilibre ancien se rompt. L'enseignement de l'analyse se dote de nouvelles ambitions. Il ne s'agit plus pour lui de mettre en place un calcul fonctionnel algébrique efficace, il s'agit d'approcher le champ de l'analyse comme champ théorique où les valeurs d'approximation jouent un rôle essentiel. L'évolution s'amorce dès la réforme du début des années soixante mais, dans un contexte très marqué par la culture ancienne. Même si des définitions formelles sont introduites, il n'y a pas alors de bouleversement spectaculaire. Dans la culture ancienne, toujours dominante au lycée, des îlots se construisent où commencent à vivre les nouvelles valeurs et l'analyse des manuels des années soixante, dans leur diversité, est ici particulièrement instructive. La réforme des mathématiques modernes, au début des années 70, par son radicalisme, crée la véritable rupture, même si l'analyse est loin d'être une de ses

priorités. Les exigences de rigueur, de formalisation, la centration sur les questions de fondements en sont le moteur, un moteur d'autant plus puissant qu'il transcende le champ de l'analyse. L'enseignement de l'analyse ne connaît cependant pas de crise. Il s'adresse toujours à une petite proportion de la classe d'âge et la séparation entre filières, dès le début du lycée, favorise la viabilité des ambitions théoriques de la filière C, conçue par ailleurs comme filière d'excellence. La part de l'analyse, excepté en terminale C, reste d'ailleurs limitée dans des programmes où les structures algébriques tiennent le haut du pavé.

1.3. La contre-réforme des années 80 ou l'analyse triomphante

Si elle rejette les valeurs de la réforme des mathématiques modernes, ses ambitions théoriques et ses excès de formalisation, la contre-réforme des années 80, contrairement à ce que l'on pourrait penser, ne rejette pas l'ambition de fonder dès le lycée le champ de l'analyse comme champ de l'approximation, bien au contraire. L'effondrement de l'algèbre des structures, la disparition des éléments de théorie des ensembles, non contrebalancée par l'introduction de nouveaux champs, offrent de plus à l'enseignement de l'analyse un espace où se déployer. L'analyse l'occupe effectivement et sa part relative, dans les programmes augmente substantiellement. Les valeurs de l'approximation sont fortement présentes et ce, dès la classe de seconde, soit un an avant que ne débute officiellement l'enseignement de l'analyse. En témoignent les extraits suivants du programme de 1982.

« c) *Comportement local*

Exemple d'études au voisinage de zéro : $x \mapsto (1+x)^2$, $x \mapsto (1+x)^3$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Exemples d'approximation locale par une fonction affine : utilisation de majorations dans le calcul approché des valeurs d'une fonction et le calcul d'erreurs.

On entraînera ici encore les élèves à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place de majorations, par exemple : $0 \leq \frac{1}{1+x} - (1+x) \leq 2x^2$ sous la condition suffisante $|x| \leq \frac{1}{2}$. »

La progression dans ce champ de l'approximation, l'évolution des moyens pour l'étude des problèmes emblématiques de l'analyse que sont les problèmes de variation et d'optimisation, les problèmes d'approximation de nombres, organisent un paysage mathématique que l'on ne cherche plus à structurer suivant l'organisation « logique » des notions. L'analyse est ainsi, en quelque sorte triomphante, face à une géométrie qui cherche à reconstruire ses valeurs.

1.4. Le déclin et la crise

Les ambitions épistémologiques que s'est donné la contre-réforme en analyse sont ambitieuses. Comme c'est souvent le cas, la réflexion épistémologique n'a pas été suffisamment accompagnée d'une réflexion de nature plus didactique et écologique, cherchant à étudier les coûts, les conditions de viabilité des choix effectués, comme nous l'avons montré par ailleurs (Artigue, 1993). L'opposition entre apprentissage de concepts et apprentissage de techniques qui se développe dans l'enseignement, dans le cadre d'un constructivisme mal compris, n'aide d'ailleurs pas à poser correctement les problèmes, et en particulier à s'interroger sur le coût réel de l'opérationnalisation souhaitée des techniques d'approximation. La massification rapide de l'enseignement au lycée, la réduction des horaires sur toute la scolarité secondaire, la disparition de la filière C, rendront les ambitions initiales de plus en plus irréalistes et le déclin s'amorcera inéluctablement.

La situation qui en résulte à la fin du siècle est une situation de crise. Cette crise n'est pas, comme nous l'avons souligné dès le départ, un phénomène isolé et ce, même si l'évolution française que nous venons de retracer très sommairement présente des spécificités indéniables. De nombreux pays, par exemple, n'ont pas connu le phénomène de contre-réforme que nous avons vécu, la réforme des mathématiques modernes ayant été dans peu d'endroits aussi radicale que chez nous. Dans d'autres, l'enseignement de l'analyse au lycée, souvent optionnel, est resté essentiellement un enseignement de calcul, au sens initial du terme, les ambitions théoriques étant réservées aux enseignements universitaires. Pourtant, quelles que soient les évolutions, le sentiment de crise est uniformément ressenti. Plusieurs raisons contribuent à l'expliquer, comme l'a montré L. Steen au Symposium de Genève déjà cité, se renforçant mutuellement par leurs interactions et nous en retiendrons ici plus particulièrement trois :

1.4.1. La place qu'occupe l'analyse dans les curricula

Nous avons souligné l'accroissement important de la part relative de l'analyse dans les curricula au cours du xx^e siècle. Le maintien de cette position ne va en rien de soi. Reflète-t-elle le rôle que joue l'analyse dans les mathématiques actuelles ? Reflète-t-elle les besoins sociaux et culturels de la formation en mathématiques ? Répond-t-elle aux besoins professionnels en mathématiques au sens large ? Sur tout le siècle passé, l'organisation du curriculum du lycée s'est posée en termes d'équilibres entre algèbre, géométrie et analyse. On percevait bien les limites actuelles d'une telle organisation. Au fil du xx^e siècle, de nouveaux domaines mathématiques ont pris leur essor. L'évolution de l'informatique, celle du calcul scientifique créent des besoins mathématiques nouveaux. Les probabilités, encore marginales en mathématiques au début du siècle, sont aujourd'hui un des moteurs clefs du développement mathématique dans les domaines les plus divers. De plus en plus, on considère une familiarisation certaine avec les raisonnements mettant en jeu l'aléatoire, avec les notions statistiques, comme une composante incontournable de la formation du citoyen, s'il veut prendre la part qui lui revient dans les débats actuels de société. Peut-on en dire autant de la capacité à calculer des dérivées et intégrales ? L'analyse doit aujourd'hui justifier la place qu'elle occupe dans les curricula.

1.4.2. L'évolution technologique

Que l'enseignement de l'analyse soit resté simple « *calculus* », pour reprendre l'expression anglo-saxonne, ou qu'il se soit donné des ambitions plus théoriques, force est de constater que, dans la plupart des pays, ce qui est réellement appris et ce qui est évalué, pour des raisons diverses, ne va guère au-delà d'une analyse algébrisée, enfermée dans un nombre limité de routines. C'est justement cette analyse que les logiciels de calcul symbolique prennent en charge aujourd'hui, des logiciels implantés même sur des calculatrices. Ceci ne peut que renforcer l'idée que l'enseignement de l'analyse pourrait être drastiquement réduit sans que cela induise une réduction substantielle des compétences des élèves. Les choses sont bien sûr moins simples, comme le montrent différents travaux concernant les calculatrices symboliques³, mais le poids de tels arguments, dans et surtout à l'extérieur de l'institution scolaire, contribue à fragiliser l'enseignement de l'analyse et renforce le sentiment de crise.

1.4.3. La massification de l'enseignement au lycée

La massification de l'enseignement au lycée, l'hétérogénéité qui en résulte, l'injonction qui est faite aujourd'hui à l'École d'assurer la réussite de tous les élèves, accroissent bien sûr

³ Sur ce point, le lecteur pourra notamment se référer à l'ouvrage coordonné par D. Guin et L. Trouche (Guin & Trouche, 2002).

la déstabilisation. Nous n'insisterons pas plus sur cette dimension de la crise qui est sans doute celle à laquelle le monde éducatif est le plus sensible.

Aujourd'hui donc, il semble impossible d'éviter une réflexion approfondie sur un certain nombre de questions. Certaines ne sont pas nouvelles et on les voit apparaître, de façon récurrente, dans les débats qui se sont succédés concernant l'enseignement de l'analyse. C'est par exemple le cas des questions suivantes :

- Comment répercuter dans le choix des contenus d'enseignement les valeurs épistémologiques de ce domaine, son évolution propre comme celle de ses rapports avec les autres domaines mathématiques, avec les autres disciplines ?
- Comment prendre en compte la diversité des besoins des élèves et étudiants ?
- Comment trouver un juste équilibre entre intuition et rigueur dans les premiers contacts avec le monde de l'analyse ?

D'autres sont plus actuelles :

- Comment penser l'enseignement de l'analyse aujourd'hui, compte-tenu de la massification de l'enseignement secondaire, et maintenant universitaire, et de l'hétérogénéité croissante des élèves et étudiants qui en résulte ?
- Comment prendre en compte efficacement dans cet enseignement l'évolution technologique ?
- Qu'offre enfin, pour penser l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse, la recherche didactique qui s'est développée maintenant depuis plus de vingt ans dans ce domaine et que pourrait-on en attendre de plus⁴ ?

Ces questions nous indiquent, s'il en était besoin, que les problèmes qui sont à résoudre aujourd'hui, même s'ils nous paraissent par certains aspects très proches de ceux du passé, sont en fait profondément différents : les contraintes et les possibilités qui conditionnent les futurs possibles ont profondément changé. Les solutions aux problèmes actuels d'enseignements et d'apprentissage de l'analyse ne peuvent donc être simplement empruntés au passé, quelles qu'aient été les réussites du passé. Mais, ce passé pourtant, tant par ses réussites que par ses échecs, nous instruit et nous pouvons en tirer un certain nombre de leçons. Nous nous limiterons ici à en mentionner quelques unes qui nous semblent particulièrement criantes. Ce sont les quatre suivantes :

- Il n'existe pas de voie royale pour l'enseignement des débuts de l'analyse, diverses organisations cohérentes sont sans aucun doute possibles mais toutes s'appuient nécessairement sur des niveaux de conceptualisation provisoires,
- l'apprentissage de l'analyse impose, notamment de ce fait, des reconstructions cognitives que l'enseignement doit organiser et sérieusement prendre en charge, sans les laisser à la seule charge du travail personnel des élèves et étudiants,
- les ambitions de l'enseignement secondaire de l'analyse doivent être à la fois épistémologiquement convaincantes et institutionnellement viables,
- les ambitions conceptuelles de cet enseignement ne peuvent pas être pensées indépendamment de la réflexion sur le travail technique qui permet leur réalisation.

Elles sembleront peut-être au lecteur de simples évidences, n'ayant pas leur place dans un article. Pourtant, force est de constater que l'étude de l'histoire de cet enseignement montre à quel point ces évidences ont été souvent ignorées et quels effets désastreux cela a eu

⁴ Nous n'aborderons pas cette question dans ce texte, renvoyant le lecteur à divers textes de synthèse : (Tall, 1996), (Artigue, 1998, 2001), (Robert et Speer, 2001).

dans le moyen et long terme. Dans le moyen et long terme, en effet, car c'est assez rarement dans le court terme que les effets des décisions curriculaires sont réellement appréciables.

Comment penser, à la lumière de ce passé, mais aussi des contraintes et potentialités actuelles, l'enseignement de l'analyse au lycée ? C'est la question que nous aborderons maintenant en essayant d'abord de préciser quelques phénomènes marquants, à nos yeux, de l'entrée dans le champ de l'analyse.

2. L'entrée dans le champ de l'analyse

Dans cette partie, nous évoquerons d'abord de façon synthétique les diverses reconstructions que nécessitent l'entrée et les premières avancées dans le champ de l'analyse, avant de nous centrer sur deux d'entre elles : la localisation des points de vue sur les objets fonctionnels d'une part, l'enrichissement du calcul algébrique par introduction des ordres de grandeur d'autre part.

2.1. La diversité des reconstructions qui marquent l'entrée dans le champ de l'analyse

Rentrer dans le champ de l'Analyse c'est rencontrer un nouveau monde mathématique faits de nouveaux problèmes, de nouveaux objets, de nouvelles techniques, de nouveaux modes de pensée. C'est aussi reconstruire son rapport à des objets connus mais qui vont prendre un sens différent dans ce nouveau champ. La recherche didactique a été, depuis ses débuts, sensible à ces reconstructions, tout en les approchant à travers des cadres théoriques divers (Artigue, 2001). Elle a aidé à les analyser, elle a montré aussi que le coût cognitif de ces reconstructions est généralement sous-estimé par les systèmes éducatifs qui laissent beaucoup d'entre elles à la charge du travail personnel de l'élève puis de l'étudiant.

Les reconstructions requises pour l'entrée dans le champ de l'analyse sont de nature diverses. Certaines d'entre elles concernent des objets et des pratiques mathématiques que les élèves ont rencontrés et avec lesquels ils se sont familiarisés avant que l'enseignement de l'analyse ne commence. C'est le cas par exemple de l'objet tangente. Comme l'a bien montré par exemple C. Castela (1995), la tangente connue des élèves avant le début de l'enseignement de l'analyse est un objet qui hérite de la tangente au cercle, premier exemple de tangente rencontré, un certain nombre de caractéristiques. Elle est perçue globalement comme une droite qui rencontre la courbe en un point et un seul et ne la traverse pas. Elle est construite géométriquement dans le cas du cercle et peut être déterminée algébriquement dans des cas simples, par exemple dans le cas de courbes représentatives de fonctions polynomiales de degré deux, en écrivant qu'une équation a une solution double. Pour devenir un objet de l'analyse, la tangente doit devenir un objet caractérisé par une propriété locale et non plus globale, une propriété qui, de plus, n'était pas présente dans les conceptions premières de la tangente : la propriété de « communauté de direction » ou de « meilleure approximation affine ». Et de nouvelles techniques vont en résulter pour sa détermination.

Les nombres réels qui objets algébriques à l'origine doivent devenir des objets topologiques, en fournissent un autre exemple, où les reconstructions sont à la fois plus délicates et beaucoup plus cruciales. En effet, quand l'enseignement de l'analyse débute, les élèves ont rencontré depuis plusieurs années des nombres réels : rationnels et irrationnels. Ces objets ont été engagés dans des pratiques mathématiques et les conceptions qu'ils ont développées à leur propos en émergent. Ces pratiques mathématiques peuvent être décrites, si l'on se réfère à l'approche anthropologique du didactique élaborée par Y. Chevallard (Chevallard, 1992), (Bosch & Chevallard, 1999), en termes de praxéologies. Ces praxéologies sont organisées autour de types de tâches, de techniques développées pour résoudre ces tâches, de discours technologiques utilisés pour motiver, expliquer, justifier les techniques, et

de théories qui organisent et structurent les discours précédents. Les nombres réels qui émergent ainsi des pratiques des élèves sont des objets algébriques, munis d'un ordre dense, d'une représentation géométrique : la droite numérique, de représentations et approximations diverses parmi lesquelles les développements décimaux fournis par les calculatrices jouent un rôle essentiel. Entrer dans le champ de l'analyse requiert d'importantes reconstructions qui, quelles que soient les stratégies d'enseignement mises en place, on le sait aujourd'hui, ne sont pas aisément réalisées. Les recherches didactiques ont bien montré par exemple que, même si les étudiants savent et déclarent que l'ordre des réels est un ordre dense, ils sont tentés de penser que certains nombres peuvent être, en un sens, successeurs. Par exemple, $0,999\dots$ est très souvent considéré comme le prédécesseur de 1, comme si la notation symbolique utilisée, évoquant un processus infini dont tous les termes sont strictement inférieurs à 1, empêchait les étudiants de détacher le résultat de ce processus du processus lui-même. Des tests passés à l'entrée à l'université ont également régulièrement montré que la majorité des étudiants scientifiques répondaient à la question : « Que pouvez-vous dire des nombres a et b si, pour tout entier positif n , on a $|a - b| < 1/n$? », en disant qu'alors a et b étaient infiniment proches ou successeurs. De telles conceptions rendent évidemment difficile la compréhension des preuves en analyse et *a fortiori* leur production.

Les reconstructions ne concernent cependant pas que des notions rencontrées avant l'entrée dans le champ de l'analyse. D'autres, tout aussi importantes, vont concerner les objets nouveaux que l'enseignement de l'analyse va introduire. Elles résultent en partie de la polysémie des objets mathématiques, pensons par exemple au concept de dérivée ou d'intégrale, et au fait que les différentes facettes de ces objets ne peuvent être toutes introduites simultanément.

Mais les plus problématiques pour l'enseignement sont plutôt liées au fait que, comme l'avait déjà souligné Henri Poincaré au début du xx^e siècle, dans une conférence célèbre sur les définitions mathématiques (Poincaré, 1904), généralement, un concept mathématique ne peut être introduit aux élèves dans sa forme la plus élaborée. Différents niveaux de conceptualisation doivent être progressivement atteints, chacun d'eux correspondant à une sorte d'équilibre qui est partiellement rompu quand on veut passer à un niveau de conceptualisation plus avancé. Ainsi les recherches montrent-elles, par exemple, que les conceptions que les élèves ont de la droite réelle dans les débuts de l'enseignement de l'analyse ne sont pas celles qui seront attendues, à un certain niveau de conceptualisation. Une conception « naturelle » de la continuité se développe sur la base de nos expériences physiques liées à l'espace et au mouvement notamment (Lakoff & Nuñez, 2000), (Nuñez, Edwards, Matos, 1999). Une courbe continue est ainsi d'abord perçue comme engendrée par un mouvement continu, comme sa trajectoire. Les points n'en sont pas des constituants, ils sont perçus comme des positions possibles d'un mobile sur cette trajectoire, ou comme des repères, des bornes, le long d'une route. Des propriétés comme la convergence des suites croissantes majorées (respectivement décroissantes minorées), conséquences directes de la complétude de l'ensemble des réels, y sont naturelles, soutenues qu'elles sont par des métaphores cinématiques : un mobile qui se déplace dans une direction donnée sur une route mais ne peut dépasser telle position finira bien par s'arrêter quelque part. Concevoir une courbe continue comme constituée de points, associer la continuité à l'absence de trous et comprendre le rôle fondamental joué ici par la propriété de complétude de l'ensemble des réels, comprendre que les fonctions continues sont celles qui préservent la continuité des ensembles de départ, en préservant la proximité, tout ceci requiert d'importantes et difficiles reconstructions⁵.

⁵ Les auteurs cités ci-dessus montrent, en analysant le discours de mathématiciens, que reconstruction ne signifie pas simple remplacement d'un point de vue par un autre. Dans leurs discours, les mathématiciens ne se privent pas d'utiliser des expressions, des métaphores qui sont caractéristiques de la continuité naturelle. Ils savent, en

Comment organiser ces reconstructions ? Lesquelles privilégier dans un premier contact avec le champ de l'analyse ? C'est la question que nous allons aborder maintenant, en nous centrant sur deux aspects des reconstructions qui nous semblent essentiels à l'entrée dans le champ de l'analyse : la localisation des points de vue et l'enrichissement du calcul algébrique par l'introduction des ordres de grandeur. Ils peuvent et doivent commencer à se mettre en place, nous semble-t-il, très tôt, à un moment où l'accès à un niveau de conceptualisation correspondant à celui de l'analyse formalisée, assujettie aux définitions et preuves en $\varepsilon - \eta$, est encore peu accessible.

2.2. La localisation des points de vue, l'enrichissement du calcul

Quand débute l'enseignement de l'analyse, les élèves ont déjà une certaine expérience du monde des fonctions et leurs conceptions des objets fonctionnels émergent de cette expérience et des pratiques associées. Aujourd'hui, généralement, ces pratiques sont liées à une introduction des fonctions qui se fait à travers la modélisation fonctionnelle de situations internes ou externes au champ mathématique, et combine des approches numériques, graphiques et algébriques. Des problèmes de variation et d'optimisation ont déjà été abordés mais généralement traités sur la base « d'évidences » numériques ou graphiques ou, en s'appuyant sur les propriétés des fonctions prototypes que sont les fonctions de référence. Les pratiques fonctionnelles ont été jusque-là de nature ponctuelle ou globale. L'entrée dans le champ de l'analyse conduit à les reconsidérer en prenant en compte la localisation des points de vue qui est une des caractéristiques du travail dans ce champ, et en développant progressivement un jeu dialectique entre points de vue local et global. Ainsi, la linéarité qui était jusque là un concept global va-t-elle avoir à devenir aussi une propriété locale, partagée par une large classe de fonctions, une propriété à la base du calcul différentiel. Et les élèves auront aussi assez rapidement à comprendre comment, sous certaines conditions, des informations de nature purement locale permettent de caractériser des objets globaux, comme c'est le cas dans la résolution des équations différentielles.

Même sans aller jusqu'à entrer dans une analyse formelle en $\varepsilon - \eta$, ce qui n'est plus une ambition de l'enseignement secondaire français de l'analyse⁶, les pratiques algébriques des élèves doivent elles aussi être reconsidérées. Dans le travail algébrique antérieur, les différents composants d'une expression algébrique avaient tous le même poids, résoudre une équation, une inéquation signifiait trouver tous les nombres satisfaisant cette équation, cette inéquation. En analyse, même lorsque le travail technique avec les objets reste essentiellement algébrique, des discontinuités apparaissent. Le traitement des expressions algébriques doit impérativement prendre en compte les différents ordres de grandeur des composants des expressions considérées. Ceci suppose une notion de négligeabilité qui sera de nature absolue ou relative, suivant que l'on se situe dans le cadre de l'analyse non standard ou de l'analyse standard, et le développement de techniques de calcul intégrant cette idée de négligeabilité sous des formes appropriées au choix (non-standard ou standard) effectué. Le travail avec des inéquations, qui devient en analyse prédominant sur le travail avec les équations, n'obéit pas, lui non plus, au même jeu que dans l'algèbre ordinaire. Il ne s'agit pas de trouver toutes les

revanche, que les preuves qu'ils vont produire se situent, elles, dans le registre de la continuité ensembliste qui est soutenu par d'autres verbalisations, d'autres métaphores.

⁶ De nombreuses recherches didactiques (cf. les synthèses mentionnées au début de cet article) ont montré les problèmes posés par un enseignement qui voudrait trop prématurément s'inscrire dans une telle analyse formelle, sans laisser aux élèves le temps de construire un champ d'expérience et des rapports aux objets de l'analyse se situant à un niveau de conceptualisation moins exigeant. Les nouveaux programmes du lycée, tout en réintroduisant des définitions précises pour la convergence des suites numériques et la notion de limite d'une fonction à l'infini, et en soulignant la nécessité de pouvoir disposer d'un nombre minimal de définitions pour pouvoir conduire des raisonnements précis et rigoureux, faire comprendre les raisons d'être de certains théorèmes clefs, nous semblent tout à fait cohérents avec ce point de vue.

solutions d'une inéquation, il s'agit de trouver un intervalle de solutions, en raisonnant par conditions suffisantes et en jouant simultanément sur l'expression et son traitement différencié suivant les ordres de grandeur d'une part, sur le caractère local du travail mené d'autre part. Le travail technique en est profondément modifié et complexifié, aussi bien dans sa dimension opératoire, que dans les raisonnements qui servent à le piloter et le contrôler.

Il est frappant de constater que les étudiants avancés, même s'ils ont acquis des compétences formelles en analyse, n'ont pas forcément bien compris ces changements de jeu et ne savent pas les gérer de façon toujours efficace. Nous en donnerons un exemple issu d'expériences répétées avec des étudiants préparant le CAPES. Il s'agit de l'étude, banale à ce niveau, de la convergence d'une série numérique, la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{n \ln(n)}{(n^2+1)}.$$

Les étudiants de CAPES disposent de techniques efficaces pour aborder une telle tâche. La première question qu'ils se posent généralement est celle de la convergence absolue. Pour y répondre, une technique économique consiste à déterminer un équivalent de la valeur absolue du terme général de la série, ce qui revient ici à considérer que 1 est négligeable devant n^2 , et on aboutit à l'expression

$$\frac{\ln(n)}{n}.$$

La reconnaissance d'une série de référence (série de Bertrand) ou plus simplement la comparaison avec la série harmonique permettent alors de conclure à la divergence de la série des valeurs absolues. Jusqu'ici tout fonctionne comme une mécanique bien rodée avec des techniques devenues routinières.

La série est aussi une série alternée, et les étudiants disposent, pour ce type de série, d'un théorème qui permet d'assurer la semi-convergence. Ce théorème assure que si la suite $(|u_n|)$ a pour limite 0 et si elle est décroissante à partir d'un certain rang, la série est convergente. Le branchement est, pour ces étudiants, automatique. Il est clair aussi pour eux que la limite de la suite est bien nulle. Il reste donc à montrer la décroissance, ce qui en revanche ne va pas de soi. Lorsque la différence ou le quotient de deux termes successifs ne conduit pas de façon immédiate au résultat, la stratégie usuellement développée consiste à introduire une fonction auxiliaire associée à la suite et à étudier ses variations. Ici il s'agit de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln(x)}{(x^2+1)}$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée est égale à

$$f'(x) = \frac{(1-x^2)\ln x + 1 + x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Comme le lecteur s'en rendra compte aisément, déterminer le signe de cette expression sur $]0, +\infty[$ n'est pas évident. C'est pourtant à résoudre cette sous-tâche que s'acharnent, année après année, ces étudiants, introduisant une nouvelle fonction auxiliaire associée au numérateur de la dérivée, dérivant et re-dérivant cette nouvelle fonction, sans généralement aboutir. Le fait que le problème qu'ils ont à résoudre : celui du signe de la dérivée, n'est pas un problème global mais un problème local : seul nous intéresse en effet le signe de la dérivée, au voisinage de l'infini, leur échappe complètement. Même confrontés à de sérieuses difficultés techniques, ils ne changent généralement pas de point de vue, s'enfermant dans une approche globale du problème. Chaque année, l'introduction finalement de cette perspective locale, après maints errements de leur part, semble pour eux une découverte. Quoi ? Il suffisait de chercher la limite du numérateur de cette dérivée en $+\infty$, en l'occurrence $-\infty$, le terme prépondérant étant : $-x^2 \ln(x)$, pour pouvoir garantir que la dérivée était négative au voisinage de l'infini et donc la fonction décroissante, et cela suffisait !

Et, pourtant, si l'on analyse les problèmes de CAPES, même à ce niveau avancé, c'est bien plus ce calcul enrichi par la manipulation des ordres de grandeur, associé à une bonne maîtrise de la localisation du regard qui y est en jeu qu'une analyse véritablement formelle. Celle-ci est en fait généralement encapsulée dans les théorèmes qui vont organiser et justifier la démarche suivie, comme ici le théorème assurant que deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents sont de même nature, ou le théorème des séries alternées.

Localisation des points de vue, enrichissement du calcul algébrique sont, comme nous avons essayé de le montrer, des évolutions majeures, emblématiques de l'entrée dans le monde de l'analyse. Peut-on aujourd'hui, dans les conditions qui sont celles de l'enseignement au lycée, amorcer ces reconstructions et en faire sentir aux élèves la profondeur épistémologique ? C'est ce point que nous aborderons dans la troisième partie de ce texte, en étudiant plus précisément comment les instruments technologiques actuels peuvent aider à rendre viables des choix didactiques dont on mesure bien à la fois l'importance et la complexité.

3. Enseignement de l'analyse et TICE

De très nombreux travaux de recherche ont étudié l'aide que les technologies informatiques pouvaient apporter à l'enseignement de l'analyse. Dès le début, deux voies principales ont été explorées : celle de la programmation dans les langages spécifiques et celle de la visualisation. Ce sont ces deux voies que nous présenterons brièvement, en nous référant à des travaux qui en sont emblématiques, pour commencer, avant de nous centrer sur deux recherches ayant cherché à exploiter plus particulièrement les TICE pour conjuguer localisation des regards et enrichissement du calcul par l'intégration des ordres de grandeur.

3.1. Deux potentialités privilégiées au départ : programmation et visualisation

La première voie : celle de la programmation est particulièrement bien illustrée par les travaux initiés par E. Dubinski (1991) qui ont conduit au développement de la théorie APOS et du langage ISETL (Dubinsky & Mac Donald, 2001). De façon très résumée, la théorie APOS⁷, basée sur l'épistémologie piagétienne, modélise la conceptualisation mathématique de la façon suivante : des actions sont intériorisées en processus, eux-même ensuite encapsulés en objets qui peuvent être réinvestis ensuite dans de nouvelles actions et de nouveaux processus. Ainsi en est-il par exemple du concept de fonction qui émerge comme processus par l'intériorisation d'actions menées sur des objets fonctionnels particuliers et, une fois encapsulé en objet, peut-être réinvesti dans d'autres processus, tels les processus de dérivation et d'intégration qui deviendront à leur tour des objets. Objets et processus sont enfin reliés à d'autres objets et processus à l'intérieur de schémas.

La deuxième voie est celle de la visualisation et le travail mené par David Tall, dès le début des années 80, en termes de "generic organiser" (voir pour une synthèse (Tall 1996)) en est un exemple pionnier et paradigmatique, à la fois. L'idée à la base de ce travail est de visualiser concepts et théorèmes, en utilisant les possibilités graphiques des ordinateurs. Elle conduit ainsi D. Tall à la notion de « tangente pratique ». Cette notion est associée aux approximations de la tangente mathématique, obtenues en considérant les droites passant par le point de la courbe en lequel on cherche à déterminer la tangente et un point très voisin (obtenu en fixant un pas h sur x). Ces droites se confondent à l'écran avec la tangente mathématique, dès que le pas h est suffisamment petit, se comportant pratiquement donc comme la tangente. Cette visualisation lui sert à introduire la notion de dérivée en un point puis de fonction dérivée. De même, la démonstration, dans le cas continu, du théorème

⁷ Dans l'acronyme APOS, A signifie Action, P signifie Processus, O signifie Objet et S signifie Schéma.

fondamental de l'analyse reliant calcul différentiel et intégral, est visualisée en utilisant le fait qu'une fonction continue en un point a va être représentée par un segment horizontal à l'écran de l'ordinateur dès que l'on considère une fenêtre de la forme $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \times [b, c]$ avec ε suffisamment petit.

3.2. Visualisation et ordres de grandeur : les apports de deux recherches récentes

La potentialité de visualisation de la linéarité locale offerte par les ordinateurs, exploitée par D. Tall en termes de tangente pratique, est aussi à la base des deux recherches que nous évoquerons dans cette partie : la recherche que nous avons développée dans le cadre d'un projet de recherche sur l'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement initié en 1995 (Artigue et al., 1998) et la recherche menée plus récemment par M. Maschietto pour sa thèse (Maschietto, 2002). Mais ces deux recherches, plus que les travaux de D. Tall, se sont centrées sur le rôle que la technologie pouvait jouer, non seulement pour visualiser les concepts de l'analyse, mais aussi pour soutenir la mise en place et l'articulation des deux facettes dont nous avons pointé l'importance dans ce qui précède : la localisation des points de vue d'une part, l'intégration des ordres de grandeur au calcul d'autre part.

Les possibilités de zooms offertes par les calculatrices et logiciels rendent très facilement visible le fait que, pour beaucoup de représentations graphiques de fonctions, si l'on centre progressivement le regard au voisinage d'un point, on finit par voir un segment de droite. Le processus qui conduit à la tangente à la courbe au point considéré est mathématiquement un processus infini, engageant un passage à la limite, mais les caractéristiques graphiques des écrans rendent le phénomène de linéarisation locale visible, « à distance finie ». C'est cette caractéristique de l'implémentation informatique qui a été, dès le début, exploitée par D. Tall et l'a conduit à la notion de tangente pratique ; ce sont les visualisations associées que l'on retrouve dans de nombreux ouvrages concernant l'utilisation de calculatrices graphiques dans l'enseignement de l'analyse et, maintenant, dans de nombreux manuels de lycée. Elles nous sont devenues familières.

Ce qui est moins souligné, ce sont les limites de cette visualisation. Très souvent, dans les exemples choisis, la tangente au point considéré a une équation simple avec des coefficients, en particulier le coefficient directeur, entiers, et les approximations numériques de la calculatrice ou du logiciel conduisent, pour un agrandissement suffisant ou un pas assez petit, à l'affichage d'une équation, pour la droite tracée, qui est celle de la tangente. Ceci permet de laisser planer l'ambiguïté sur la nature réelle de l'objet qui apparaît à l'écran et de le confondre avec la tangente. C'est sans doute une solution confortable pour l'enseignant et qui ne gêne en rien les élèves, d'autant plus que généralement, cette visualisation fonctionne juste comme une entrée en matière et que l'on s'engage très vite dans un travail plus classique sur les dérivées. Mais, dans une culture où l'image est aussi omniprésente et aussi valorisée, une telle attitude nous semble tout à fait dommageable. Il importe en effet d'apprendre à distinguer ce que l'on voudrait que les images nous montrent de ce qu'elles nous montrent réellement, et les mathématiques, dans ce domaine comme dans bien d'autres, ont un rôle important à jouer.

C'est ce qui nous avait conduit, dans un projet de recherche sur l'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement initié en 1995 à, au contraire, construire un scénario didactique permettant d'interroger ces visualisations et de faire apparaître la notion de meilleure approximation affine et de dérivée, comme une réponse mathématique à ces interrogations. Ce scénario et les résultats de sa réalisation dans les classes expérimentales concernées sont analysés de façon détaillée dans (Artigue et al., 1998) et (Artigue, 2002). Nous en présenterons ici seulement les grandes lignes.

Dans ce scénario, on procède d'abord classiquement en étudiant comment évoluent les pentes des sécantes (AM) à la parabole d'équation $y = x^2 - 2$, A étant le point d'abscisse 1

lorsque le point M se rapproche de A. Une construction effectuée sous le logiciel Cabri-géomètre, implanté dans la calculatrice TI92 utilisée permet de visualiser le phénomène et d'afficher les pentes des sécantes. Les élèves remarquent bien l'évolution des sécantes et de leur pente et, même si lorsque les deux points sont confondus rien n'est tracé comme ici et l'affichage du coefficient est : « undef », ils conjecturent sans difficulté particulière, dans ce processus visuel dynamique, l'existence d'une limite qui serait la droite passant par A de pente 2. Le fait que la limite soit entière favorise bien sûr la formulation de cette conjecture. Mais pourquoi cette droite là et non une autre ? C'est cette interrogation que le scénario essaie de faire vivre et de résoudre ensuite, en mathématisant le phénomène observé.

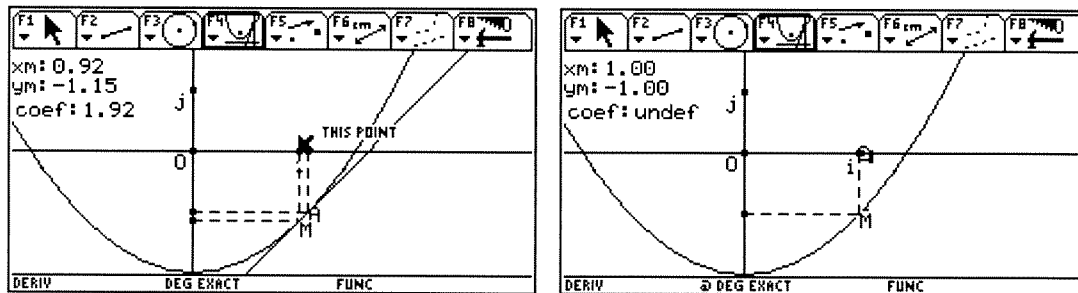


Figure 1 : Évolution des sécantes et situation limite

Pour cela, on a préalablement entré, dans l'application Y= de la calculatrice rétro-projetable, l'équation de la parabole, l'équation de la droite limite conjecturée et les équations de deux droites voisines passant aussi par le point A, les équations étant écrites sous une forme qui mette ces caractéristiques en évidence. Le scénario prévoit que l'enseignant ouvre l'application Y= et fasse interpréter les quatre équations présentes puis fasse tracer les représentations graphiques correspondantes dans la fenêtre standard. Les trois droites s'y confondent, contrairement aux attentes des élèves. On peut bien sûr envisager des zooms, et c'est ce que les élèves proposent immédiatement de faire, pour singulariser la droite de pente 2, mais force est de constater que cela ne change pas grand chose et que, de toutes façons, le problème reste posé pour des droites avec des coefficients directeurs beaucoup plus proche de 2. Ce à quoi le scénario veut confronter les élèves, dans cette phase collective, c'est que ce type de représentation permet de visualiser la proximité, mais qu'il ne permet pas d'en apprécier précisément la qualité, c'est à dire, en des termes mathématiques qui, bien sûr, ne sont pas ici employés, d'apprécier l'ordre de l'approximation.

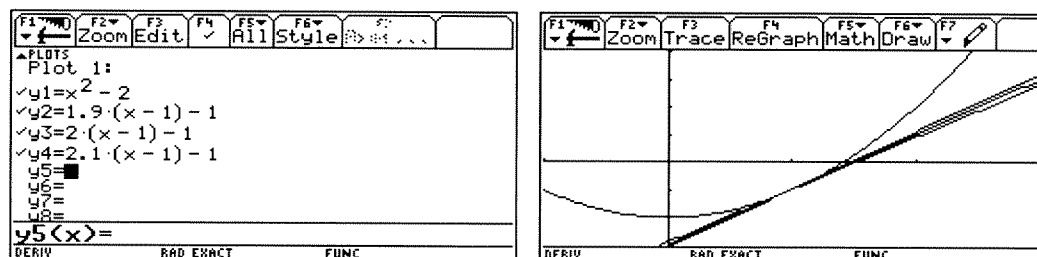


Figure 2 : Les tracés après agrandissement

Le problème étant posé, le scénario prévoit que la mathématisation s'engage sous la direction du professeur qui va aider les élèves à trouver un moyen de comparer les différentes droites du faisceau passant par A, du point de vue de leur proximité à la parabole au voisinage du point A. Ceci se fait, classiquement, en introduisant les distances, entre le point de la parabole et le point de chaque droite, de même abscisse $1+h$, et en comparant ces distances. On fait l'hypothèse, dans ce scénario, que les élèves qui ont été déjà sensibilisés à la notion de négligeabilité relative par un travail antérieur sur les limites, vont réinvestir cette notion dans la comparaison, en s'apercevant que les trois distances tendent vers 0 quand h tend vers 0. C'est ce qui s'est passé effectivement dans les expérimentations menées. Les élèves ont montré que seule la distance associée à la droite de coefficient directeur 2 tendait vers 0 plus vite que h . On a, à ce point du scénario, singularisé la droite parmi un ensemble de trois. Le même calcul va être ensuite repris avec une droite quelconque du faisceau de pente m et aboutir à la conclusion que seule la droite de coefficient directeur 2 possède cette propriété qui la caractérise donc mathématiquement.

Ceci n'est bien sûr qu'un premier pas. La technique utilisée va être testée avec d'autres points et d'autres fonctions et l'on montrera, avec l'aide du calcul symbolique de la calculatrice, qu'elle permet, dans chaque cas, de vérifier les conjectures faites. On montrera aussi qu'au prix d'un léger aménagement, elle permet de calculer la valeur de m sans que l'on soit obligé de l'avoir conjecturée, et l'on arrivera ainsi au calcul de la dérivée en un point. Une fois ce calcul installé sur les exemples les plus simples, le scénario prévoit d'introduire la commande de dérivation formelle de la calculatrice et d'utiliser les résultats qu'elle produit, pour conjecturer les règles de calcul algébrique des dérivées. La calculatrice fonctionne ici comme une boîte noire productrice de calculs formels dont il s'agit de comprendre la logique, en s'appuyant sur le sens donné par les expériences précédentes à la notion de dérivée et sur les formulations qui en ont résulté.

Nous n'entrerons pas plus dans le détail de cette ingénierie didactique mais nous voudrions souligner que si, au départ, la localisation des points de vue, s'effectue dans le registre perceptif et graphique, c'est l'articulation de cette perception avec un calcul mobilisant les ordres de grandeur, via la notion de négligeabilité relative qui permet de faire sens de la visualisation et des invariants perceptifs sur lesquels cette dernière attire notre attention.

La recherche de M. Maschietto se situe dans une problématique proche puisque, ce qui y est étudié, ce sont les possibilités offertes par le mouvement de zoom que simulent les calculatrices graphiques pour problématiser, dès le début de l'enseignement de l'analyse, la localisation des points de vue, et soutenir le passage d'une vision globale de la linéarité à une vision locale de cette dernière. Elle se situe cependant, sur le plan théorique, dans une perspective sensiblement différente, de part ses références au champ de l' "embodied cognition" dont relèvent aussi les recherches mentionnées plus haut sur la continuité naturelle. Le scénario didactique qui en résulte et qui a été expérimenté à plusieurs reprises en Italie, est proche de celui précédemment décrit, dans son esprit, mais présente avec ce dernier des différences sensibles. Il n'utilise d'abord pas le même point de départ. M. Maschietto en effet n'utilise pas la visualisation du mouvement de la sécante comme nous l'avons fait, mais se propose d'accéder à l'idée de linéarité locale à travers un processus de zooms successifs. Et c'est à travers la recherche puis la confrontation des équations proposées par les différents groupes d'élèves pour la droite affichée sur l'écran de leur calculatrice qu'est organisé, dans le scénario, le questionnement de la perception et lancé le travail de mathématisation. Il n'organise pas non plus, de la même façon, le travail au sein de la classe puisque chaque séance est conçue en deux temps : une longue phase de travail en groupes, suivie d'une substantielle phase collective de bilan. L'enseignement s'adresse enfin, il faut le souligner, à des élèves du même niveau mais ayant une culture mathématique et technologique

sensiblement différente. Les élèves ont déjà rencontré la notion de tangente dans le cadre de l'étude des coniques et la technique algébrique de détermination de la tangente a été institutionnalisée à cette occasion. En revanche, excepté pour une classe, ils sont peu familiers avec les calculatrices symboliques qui ne sont mises à leur disposition que quelques séances avant l'expérimentation. Ils n'ont pas non plus rencontré préalablement la notion de négligeabilité. Tout ceci va créer, pour l'entrée dans le point de vue local des conditions particulières.

L'expérimentation, pour laquelle nous renvoyons le lecteur à l'article de M. Maschietto dans ces mêmes actes et à (Maschietto, 2002), montre que le phénomène de linéarité locale est rapidement découvert par les élèves, au cours des explorations qu'ils ont à mener, dans un travail de groupes, sur un certain nombre de fonctions. On voit aussi, à travers le langage dynamique qu'ils utilisent, que, même si au bout de quelques zooms seulement le tracé devient droit, les élèves cherchent à maintenir la distance entre les deux types d'objets, l'objet courbe et l'objet droit. Une différence essentielle avec les expérimentations menées en France est l'identification spontanée qu'opère un nombre non négligeable d'élèves, entre le tracé droit qui apparaît à l'écran de la calculatrice, et la tangente, via un mécanisme cognitif que les données recueillies ne permettent pas d'élucider complètement. Cette identification résiste même quand on propose aux élèves de mener le travail de mathématisation sur une fonction du troisième degré et non, comme cela a été le cas, dans la première expérimentation, sur une fonction du second degré. Cette identification de la tangente va, dans certains cas, bloquer l'avancée des élèves, qui veulent disposer d'une procédure algébrique exacte pour la déterminer, et semblent percevoir le recours à la démarche d'approximation proposée comme une régression. Enfin, la non-disponibilité de la négligeabilité oblige l'enseignant à assumer plus de responsabilités dans l'introduction du nouveau calcul. Mais cette recherche, comme celle que nous avons menée, en dépit des différences, confirme bien l'accessibilité du point de vue local à des élèves débutant en analyse dans l'environnement technologique choisi et du calcul algébrique enrichi qui permet d'opérationnaliser ce point de vue.

3.3. En conclusion

Après avoir évoqué les deux grandes orientations sur lesquelles s'est élaborée au départ la réflexion sur les TICE en analyse, nous avons, dans la partie précédente, mis l'accent sur les potentialités des TICE, en privilégiant des recherches qui, répondant aux préoccupations que nous avons exprimées précédemment, mettaient l'accent sur les potentialités offertes pour la localisation de point de vue en jeu dans l'introduction de la notion de dérivée et pour la mise en place de techniques de calcul associées, mettant en jeu des raisonnements en termes d'ordre de grandeurs et de négligeabilité. C'est bien sûr là une vision très partielle des potentialités des TICE pour l'enseignement de l'analyse et nous voudrions le souligner dans cette conclusion. Les recherches et innovations menées sur l'enseignement de l'analyse dans l'environnement de calculatrices et logiciels ont par exemple bien mis en évidence les potentialités de ces technologies pour développer et exploiter des dispositifs permettant de faire vivre très tôt dans l'enseignement une approche cinématique à l'analyse, en mettant en jeu les mouvements mêmes du sujet et leur représentation (Kaput, 1992). Elles ont aussi montré comment les possibilités graphiques et symboliques de ces technologies permettent, non seulement de travailler sur des objets plus complexes et moins scolairement apprêtés, mais aussi d'approcher des familles d'objets, de faire vivre des problématiques de généralisation, à un moment où l'enseignement est encore centré sur l'étude d'objets spécifiques et où les compétences techniques des élèves leur donnent difficilement accès, sans aide instrumentale, à ce travail de généralisation. Et même si on envisage le seul passage d'un point de vue global à un point de vue local, nous n'avons abordé la question que très partiellement, à travers le filtre de la dérivation, alors que nous aurions pu l'aborder par

exemple à travers l'étude des branches infinies, ce qui en aurait donné une image un peu différente.

Nous avons, aussi, dans ce qui précède, souligné l'importance qu'a en analyse le travail sur les ordres de grandeur. L'importance des ordres de grandeur va cependant bien au-delà de l'analyse et le rapport sur le calcul élaboré par la CREM (Kahane, 2002) dont nous avons piloté l'élaboration, comme l'annexe associée à ce rapport⁸, le mettent clairement en évidence. En fait, c'est dès l'école élémentaire que la notion d'ordre de grandeur intervient et doit intervenir pour raisonner le calcul, anticiper ses résultats ou les contrôler, en particulier quand ils sont produits avec une calculatrice. Au fur et à mesure de la scolarité, des notions et techniques mathématiques vont permettre d'enrichir un rapport aux ordres de grandeur qui joue un rôle crucial dans la vie quotidienne, dans les rapports entre mathématiques et autres disciplines. Ainsi en est-il, au collège des puissances (puissances de 10 notamment) et des techniques de calcul associé. Ce travail doit déjà permettre aux élèves de dépasser, dans leur rapport au nombre, l'image d'homogénéité associée en mathématiques à la droite réelle. Nous voudrions illustrer ceci par un exemple extrait de l'annexe au rapport sur le calcul déjà cité. Il illustre bien, nous semble-t-il à la fois cette non-homogénéité via l'existence du très grand et du très petit, mais aussi le fait que ces notions de très grand et de très petit dépendent des grandeurs engagées dans la comparaison. La négligeabilité y apparaît non comme quelque chose d'absolu mais comme quelque chose de relatif.

Combien y-a-t-il de molécules d'eau dans une goutte d'eau ? Y en a-t-il beaucoup plus, beaucoup moins que de gouttes d'eau dans la mer Méditerranée ?

Mais si l'enseignement qui précède l'analyse, en mathématiques, comme dans les autres disciplines, crée une familiarité avec la notion d'ordre de grandeur et fait comprendre son importance, l'analyse va lui conférer un autre statut. En analyse, l'approximation devient constitutive des concepts eux-mêmes et la notion d'ordre de grandeur, la comparaison des ordres de grandeur deviennent de ce fait fondamentales. Une fonction dérivable en un point est ainsi une fonction approximable au premier ordre par une fonction affine au voisinage de ce point. Il y a, sous-jacente, une reconstruction profonde du rapport aux ordres de grandeur que l'on ne saurait sous-estimer.

Conclusion

Nous avons, dans la première partie de ce texte, souligné les problèmes que pose l'enseignement de l'analyse aujourd'hui, en situant cet enseignement dans son histoire pour essayer de mieux comprendre ce qui faisait la spécificité de la situation actuelle. Dans une seconde partie, nous avons pointé un certain nombre de difficultés inhérentes à l'apprentissage de l'analyse, en mettant en particulier l'accent sur les nombreuses reconstructions que cet apprentissage nécessite, au fil de l'évolution des niveaux de conceptualisation dans ce domaine. Nous en sommes ensuite venue à deux évolutions qui nous semblaient emblématiques de l'entrée dans le champ de l'analyse : la localisation des points de vue et, au-delà de cette localisation, l'articulation dialectique des rapports entre point de vue local et point de vue global d'une part, l'intégration au calcul algébrique des notions d'ordre de grandeur et de négligeabilité d'autre part. Ces évolutions vont permettre d'opérationnaliser les notions introduites, dès les premiers niveaux de conceptualisation, avant même que ne se mette en place un rapport formalisé aux objets de l'analyse et elles

⁸ Cette annexe est disponible sur différents sites avec les autres rapports et annexes aux rapports de la CREM, par exemple le site de l'APMEP, le site de la SMF.

continueront ensuite à jouer un rôle essentiel. Ces évolutions sont, on le sait, délicates, d'autant plus délicates aujourd'hui que le contexte de l'enseignement est plus difficile (enseignement de masse, réductions substantielles des horaires...). Elles doivent être engagées et travaillées tôt, sont exigeantes tant du point de vue conceptuel que technique et l'on peut se demander s'il ne s'agit pas là d'ambitions irréalistes dans les conditions actuelles. Ce n'est pas notre position et, prenant en compte l'évolution des outils de l'activité mathématique et des outils de l'enseignement de cette discipline, nous nous sommes alors interrogées sur l'aide que pouvaient apporter les TICE à leur réalisation. Ces aides sont certaines même si, comme le montrent les recherches, la construction de scénarios didactiques permettant d'en tirer efficacement profit ne va pas tout à fait de soi. Et il nous semble qu'elles devraient pouvoir contribuer à rendre viables, si des efforts suffisants sont faits au niveau de la formation des enseignants et de la production de ressources didactiques adaptées, des choix curriculaires raisonnablement ambitieux.

Nous voudrions enfin, à travers ce texte, avoir contribué à convaincre ses lecteurs que l'enseignement de l'analyse a d'importants défis à relever, qu'il doit justifier la place qui lui est ou lui sera accordé à l'avenir dans l'enseignement secondaire et que ceci ne va pas de soi. Ces défis ne seront certainement pas faciles à relever car, si l'on ne vide pas l'enseignement de l'analyse de toute ambition, c'est un enseignement nécessairement difficile. Mais, si les conditions qui sont celles de l'enseignement actuel, par de nombreux aspects, ne facilitent pas la tâche des enseignants, ces derniers disposent par ailleurs aujourd'hui de ressources qui, si elles sont convenablement exploitées, ce qui est loin d'être le cas, devraient permettre d'atteindre des fonctionnements plus satisfaisants. Ceci suppose une cohérence entre les valeurs attribuées à cet enseignement, son contenu et les moyens qui lui sont attribués, une attention particulière aux conditions de viabilité des choix préconisés, mais nous avons peut-être la chance d'être à un moment où le statut quo ne peut perdurer.

BIBLIOGRAPHIE

- ARTIGUE M. [1993], Enseignement de l'analyse et fonctions de référence, *Repères IREM* **11**, 115-139.
- ARTIGUE M. [1996], Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée, in B. BELHOSTE & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, 197-217. Éd. Vuibert, Paris.
- ARTIGUE M. [1998], L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18.2**, 231-262.
- ARTIGUE M. et al. [1998], L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement des mathématiques au lycée. *Cahier DIDIREM*, n° spécial **3**, IREM Paris 7.
- ARTIGUE M. [2001], L'entrée dans le champ conceptuel de l'analyse : réformes curriculaires, recherches didactiques, où en est-on ?, in T. ASSUDE & B. GRUGEON (eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2000*, 277-301, IREM Paris 7.
- ARTIGUE M. [2002], L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques in D. GUIN & L. TROUCHE (eds), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BELHOSTE B. [1996], Réformer ou conserver ? La place des sciences dans les transformations de l'enseignement secondaire en France (1900-1970), in B. BELHOSTE & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, 197-217, Éd. Vuibert, Paris.
- BOSCH M. & CHEVALLARD Y. [1999], La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19/1**, 77-124.
- CASTELA C. [1995], Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **15/1**, 7-47.
- CHEVALLARD Y. [1992], Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12/1**, 77-111.
- DUBINSKY E. [1991], Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- DUBINSKY E. & McDONALD M. [2001], APOS : a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers (to appear).
- GUIN D. & TROUCHE L. (eds) [2002], *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- KAHANE J.P. (ed.) [2002], *L'enseignement des sciences mathématiques*, Paris, Odile Jacob.
- KAPUT J. [1992], Technology and Mathematics Education, in D. Grouws (Ed.) *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, 515-556, New York, Macmillan.

LAKOFF G. & NUÑEZ R. [2000], *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*, New York, Basic Books.

MASCHIETTO M. [2002], *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu local – global dans l'environnement de calculatrices*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

NUÑEZ R., EDWARDS L.D. & MATOS J.P. [1999], Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 45-65.

POINCARÉ H. [1904], Les définitions en mathématiques, *L'Enseignement Mathématique* **6**, 255-283.

ROBERT A. & SPEER N. [2001], Research on the teaching and learning of calculus / elementary analysis, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (to appear).

TALL D. [1996], Functions and Calculus, in A.J. Bishop al. (eds), *International Handbook of Research in Mathematics Education*, 289-325, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Michèle Artigue
Université Paris 7
Denis Diderot
Case 7018
16 rue Clisson
75013 Paris
iremp7@math.jussieu.fr

ROBERT LUTZ

RÉFLEXION SUR L'APPROCHE DE L'ANALYSE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR¹

Depuis 1993, nous avons mené à Mulhouse une réflexion approfondie sur l'enseignement de l'Analyse au niveau élémentaire, suivie à partir de 1996-97 par une campagne d'expérimentation au lycée et dans le premier cycle universitaire dans le cadre des IREM d'Alsace et de Picardie. Le concept fondamental sur lequel repose la démarche que nous avons mise au point est celui d'*ordre de grandeur absolu*. L'objet de cette conférence est de réfléchir avec vous sur les lignes de force et les résultats principaux de ces travaux, présentés dans les publications [1] et [2], en insistant sur leur signification intrinsèque et sur le sens de leur application pratique.

L'enseignement de l'analyse est centré sur la compréhension et l'assimilation progressive par les élèves des notions de *nombre réel*, *limite de suites et de fonctions*, *dérivées*, *intégrales*, ainsi que des notions géométriques associées: *tangentes*, *asymptotes*, *aires*... On aimerait évidemment, dans la mesure du possible, marier l'intuition et la rigueur, ou au moins distinguer nettement ce qui est admis à la suite d'une justification heuristique de ce qui est déduit.

Une pédagogie bien pensée s'appuie nécessairement sur un choix didactique qui relève d'une philosophie de l'acte éducatif. Celui que nous privilégions est sous-tendu par l'antique idée « d'accouchement des esprits », la *maïeutique* chère à Socrate. C'est dire que nous voulons essayer de faire émerger les notions fondamentales de l'analyse des profondeurs inconscientes où elles font partie du patrimoine archétypal de la personne humaine. Notre démarche est donc la conséquence d'un choix anthropologique qui nous conduit à connecter les lignes directrices de l'apprentissage des mathématiques aux racines profondes des concepts concernés. Quelle est l'origine de la notion de nombre réel ? De celle de limite ? La réponse ne peut venir des mathématiques, lesquelles sont auto-référentes pour la forme, mais pas pour le sens. *La réponse ne peut venir que d'une vision anthropologique de la notion de nombre.*

La notion empirique, ou plutôt anthropologique, de nombre entier est caractérisée par l'opération de succession qu'une personne humaine peut répéter autant de fois qu'elle veut, pourvu qu'elle en ait la capacité mentale. Cette opération est inusable ; elle ne porte aucune trace de ses utilisations antérieures. Elle détermine l'ordre entre les entiers et les opérations d'addition, de multiplication, d'exponentiation que l'on peut réaliser sur eux. Les procédés de numération nous permettent de nommer de manière condensée les nombres constructibles à partir de zéro par application répétée de la succession. Nous augmentons ainsi le rayon d'action de notre capacité à « écrire » des nombres. Mais nous avons bien conscience qu'il est impossible à quiconque d'épuiser, ou même simplement de concevoir, la liste de tout ce que l'algorithme de succession peut produire. Une part de la production reste fondamentalement inaccessible à l'homme. C'est seulement par analogie (entretenu par la confusion entre la notion anthropologique d'entier et la notion abstraite d'entier « naturel », qui nous a été inculquée sous ce nom par nos professeurs de mathématiques) que nous donnons encore le statut de nombre entiers aux constituants de cette production inaccessible. Cette analogie nous conduit à prétendre que :

¹ Cet article a été publié dans L'OUVERT 107 (2003).

- (i) tous les entiers plus grands qu'un entier inaccessible sont inaccessibles,
- (ii) si la somme ou le produit de deux entiers est inaccessible, au moins l'un des deux est inaccessible,
- (iii) si la puissance n -ième d'un entier est inaccessible, c'est que cet entier ou l'exposant n l'est aussi.

Bien entendu, nous pressentons qu'il y a des entiers qui n'ont pas encore été utilisés ou même nommés, mais qui sont susceptibles de l'être un de ces jours. Appelons les *potentiels*. Dès que, pour des raisons fortuites, ils auront été nommés par quelqu'un, ils seront devenus *contingents*. Mais tous les entiers déjà nommés ne sont pas contingents : certains d'entre eux sont *nécessaires* à la pratique des nombres, comme 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, 12 et bien d'autres sans lesquels la vie quotidienne ne serait pas possible. La frontière entre la catégorie des entiers potentiels et celle des entiers inaccessibles est *floue*. Il en est de même de la frontière entre la catégorie des entiers nécessaires et celle des entiers contingents. Ceci n'est pas surprenant pour des catégories liées à la perception humaine et à l'impossibilité d'obtenir des informations précises sur l'utilisation effective des nombres dans une communauté donnée. Notons que les quatre catégories sont reliées par deux relations d'analogie (« ne pas avoir été nommé » d'un côté, « avoir été nommé » de l'autre) et par une transformation entre entiers potentiels et entiers contingents qui est encadrée par les points fixes que sont les entiers inaccessibles et les entiers nécessaires. Par contre il n'y a aucune relation d'analogie entre entiers nécessaires et entiers non nommés, ou entre entiers inaccessibles et entiers nommés. La structure épistémologique des quatre catégories peut donc être représentée par un tétraèdre, de la manière suivante :

On peut montrer qu'une telle structure quaternaire différenciant une totalité –ici celle des nombres– se retrouve de manière universelle partout où la perception du monde par l'homme est concernée (voir [3], qui concerne en particulier un point de vue anthropologique sur les mathématiques). Nous allons voir qu'elle mène naturellement aux concepts de l'analyse pourvu qu'on les exprime dans un langage mathématique afférent à une modélisation qui préserve le caractère flou des transitions. En d'autres termes, il s'agit de faire correspondre au modèle anthropologique des entiers un modèle mathématique où se trouvent traduites en termes formels les propriétés (i), (ii), (iii) constatées ci-dessus et leurs conséquences logiques. Notons que la catégorie des entiers inaccessibles est une sorte de *néant numérique* pour l'homme, dont l'existence est indispensable à la différenciation entre entiers nommés et non nommés. C'est pourquoi le modèle mathématique que nous voulons constituer doit comporter un concept correspondant à celui d'entier inaccessible, vérifiant l'analogue des trois propriétés ci-dessus. Or il n'y a rien de tel dans les mathématiques classiques ! Il nous faut le construire. C'est pourquoi nous devons d'abord explorer un peu plus avant cette mathématique anthropologique qui préexiste aux mathématiques abstraites et formalisées. Voyons comment la notion de limite y trouve sa racine. Considérons par exemple le rapport d'accroissements

$$R(h) = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2 + h.$$

Newton nous invitait à évaluer la valeur de ce rapport « juste avant que h ne s'évanouisse », provoquant l'ironie de Berkeley qui y voyait poétiquement « le fantôme des quantités disparues ». Mais il n'y a pas de « juste avant... » newtonien, car les nombres réels ne sont pas bien ordonnés comme les entiers: entre deux réels il y en a une infinité d'autres. Dans un esprit différent, Leibniz nous invitait à calculer la « vraie valeur » de $R(h)$ lorsque h est *infinitement petit*, en précisant qu'il ne fallait pas prendre ceci pour une propriété de « quantités » mais *comme une manière de parler qui facilite l'invention*. En d'autres termes, nous dirions aujourd'hui *comme un formalisme qui facilite la découverte et le maniement du concept de limite*, c'est à dire exactement ce qui nous préoccupe dans ce colloque.

Les continuateurs de Leibniz, en particulier le baron de l'Hospital, ont voulu par force définir la notion de nombre infiniment petit en termes des mathématiques héritées des grecs, c'est à dire « dans le style d'Archimède » comme l'a écrit Leibniz. Ils s'y sont cassé les dents, faute de pouvoir se placer dans un contexte mathématique plus large. Mais l'intuition qui sous-tendait le formalisme leibnizien était fondée, sans qu'il en ait clairement conscience, sur le modèle anthropologique. N'oublions pas que pour Leibniz, aussi bien en mathématique qu'en physique, la notion de relation entre choses était première par rapport à la nature des choses.

Revenons à notre rapport $R(h)$ de « quantités évanouissantes ». Dans le modèle anthropologique, si nous pensons aux accroissements h tels que la partie entière de $\left\lfloor \frac{1}{h} \right\rfloor$ (soit inaccessible – appelons les *accroissements imperceptibles* –, nous constatons qu'aucune majoration explicite ou potentielle de $R(h)$ ne permet de le distinguer de la valeur 2. Nous dirons donc que la « vraie valeur » du rapport « à la limite » est 2. Ce constat purement statique permet de donner un sens à la notion de vitesse instantanée : il s'agit de la vitesse moyenne, connue à des fluctuations imperceptibles près, entre deux instants distincts de différence imperceptible. Comment allons nous calculer cette vitesse pour des points qui se meuvent de manière compliquée sur un axe ? Eh! Bien, nous allons utiliser des propriétés qui se déduisent logiquement des constats (i), (ii), (iii) sur les entiers inaccessibles. En voici quelques-unes :

- la somme et le produit de deux nombres imperceptibles sont imperceptibles,
- le rapport d'un nombre imperceptible et d'un nombre qui ne l'est pas est imperceptible,
- la somme et le produit de deux nombres qui ne sont pas de partie entière inaccessible ont la même propriété.

À quels types de « nombres » s'appliquent ces propriétés ? Parler de « nombres réels » n'a pas de sens dans le contexte anthropologique de notre discussion. Nous avons des entiers potentiels ou nommés et un « fond du paysage » constitué de ce que nous appelons entiers inaccessibles. Sur le « seuil » entre les potentiels et les contingents nous trouvons les entiers nécessaires à l'avènement des entiers potentiels dans le champ du contingent : par exemple les nombres de 0 à 9 qui nous servent à écrire des nombres dans le système indo-arabe. À partir de là nous pouvons construire des fractions, étendre l'ordre et les deux opérations et vérifier que deux fractions sont équivalentes ou non. Ce sont là les « nombres » auxquels s'appliquent les propriétés ci-dessus, deux fractions équivalentes déterminant le même nombre. Ces nombres se répartissent en « paquets » au sein desquels les différences sont imperceptibles. Certains de ces paquets contiennent des éléments qui se représentent par une fraction de numérateur et de dénominateur accessibles : ce sont les « rationnels accessibles ». D'autres paquets ne peuvent pas contenir de tels rationnels accessibles, par exemple le paquet des rationnels positifs dont le carré ne diffère qu'imperceptiblement de 2. En effet, dans le cas contraire, on aurait des entiers tels que $\frac{p^2}{q^2} - 2$ soit imperceptible, avec q accessible, donc aussi q^2 . On en déduirait que $p^2 - 2q^2$ est un entier imperceptible, donc nul (sinon son inverse serait inaccessible, alors que p^2 ne l'est pas). Si nous appelons $\sqrt{2}$, le paquet correspondant, dans tout calcul effectif ou potentiel, nous ne ferons qu'une erreur imperceptible en écrivant que le carré d'un élément de ce paquet est égal à 2.

Ces considérations laissent entrevoir que le modèle anthropologique des nombres entiers porte en lui l'essentiel du contenu scientifique de la théorie des nombres réels, et par là de l'analyse mathématique. Il justifie de ce fait toutes les approches didactiques où l'on évoque de manière heuristique des nombres « très grands » ou « très petits » en faisant confiance à l'intuition des élèves pour y mettre du contenu.

À partir de ces racines anthropologiques de l'analyse, revenons maintenant à la recherche d'une modélisation mathématiques susceptible de placer le contenu scientifique correspondant dans un cadre déductif abstrait ou formel.

Le modèle ensembliste classique fondé sur un ensemble N dont tous les éléments (à part 0) ont le même statut ne suffit évidemment pas. Il revient à évacuer des mathématiques tout ce qui pourrait rappeler les limitations naturelles des capacités efficaces de l'homme. L'adopter sans nuance, crée automatiquement une difficulté d'assimilation pour les élèves qui doivent se familiariser avec les mathématiques, *car on triche avec la réalité*. Depuis que les Grecs en ont édifié les canons, les mathématiques trichent d'ailleurs beaucoup avec la réalité, par souci de préserver la pureté d'un monde idéal sans erreurs où les entités mathématiques sont supposées vivre. Là où des droites idéales peuvent ne rencontrer un cercle idéal qu'en un seul point, alors que dans la réalité, on ne trouve que des pointillés plus ou moins alignés qui frôlent des pointillés plus ou moins circulaires dans une petite zone de taille imperceptible à l'œil nu. Il s'agit certes d'une démarche efficace *pour construire l'édifice mathématique*, mais à trop éluder le sens des choses, on crée des difficultés didactiques dont l'Analyse offre des exemples flagrants. Car ce n'est pas tant l'abstraction ou le formalisme en eux-mêmes qui effraient nos élèves ou nos étudiants que le manque de sens des concepts proposés par leurs maîtres (au sens propre et au figuré : on ne « sent » rien). Le sens fait tragiquement peur aux familiers des mathématiques, car il est riche de connotations humaines qui sont réputées pouvoir troubler l'entendement. On apprécie la froide rigueur des formules sorties de tout contexte sensible. Au risque de rendre ces mathématiques stériles, sans saveur et pour tout dire inutiles puisqu'elles sont déconnectées de la fécondité du monde réel *où tout n'est qu'approximation, essai, arrangement d'ordre et de non-ordre qui en constituent la vérité et la beauté et le rendent vivable*.

Adjoignons donc hardiment au langage mathématique classique les mots qu'il faut, disons *entier très grand*, comme contre-partie mathématique de la notion anthropologique d'entier inaccessible. Adjoignons les axiomes suivants, dits « externes » (par rapport aux mathématiques classiques) aux axiomes usuels (lesquels sont réservés aux objets des mathématiques classiques) :

- (i) *L'entier 1 n'est pas très grand,*
- (ii) *Tout entier supérieur à un entier très grand est très grand,*
- (iii) *Si la somme de deux entiers est très grande, l'un des termes est très grand,*
- (iv) *Si le produit de deux entiers est très grand, l'un des facteurs est très grand,*
- (v) *Si x^y est très grand, alors x ou y est très grand,*
- (vi) *Il existe un entier très grand.*

Bien entendu, il ne faut pas donner à ce « il existe » la signification concrète « voilà un exemple de nombre empirique très grand » ; cela reviendrait à confondre le concret et l'abstrait. Autre confusion, plus subtile, réservée aux mathématiciens (faussement ?) naïfs : « il existe » signifierait « voilà une construction ensembliste qui définit de manière unique un exemple d'entier très grand » ; j'y croirai lorsqu'on m'en aura montré un. En fait, l'axiome externe (vi) ne dit rien sur le contexte ensembliste classique : nous sommes dans un contexte plus riche, avec un langage et des axiomes qui complètent ceux du contexte classique. Cela permet une puissance modélisatrice des mathématiques plus grande, que nous pouvons mettre à profit pour introduire les concepts de l'analyse d'une manière qui soit en symbiose avec leurs racines anthropologiques.

Notons que le caractère flou des transitions anthropologiques se retrouve bien dans notre modélisation axiomatique, comme nous le souhaitons plus haut. En effet, il ne peut exister de plus petit entier très grand, sinon l'entier précédent serait aussi très grand, ce qui est

contradictoire. Sous réserve que la contradiction soit exclue de notre théorie, la conclusion en résulte. J'évoquerai ce point tout à l'heure.

Bien entendu il y a là un paradoxe apparent, puisque les propriétés de Péano assurent que toute partie de l'ensemble des entiers naturels admet un plus petit élément. Mais il se dissout si l'on se rappelle que seules les propriétés exprimables dans le langage ensembliste classique définissent automatiquement des sous-ensembles. Or « très grand » n'est pas de ce type, pas plus que « sympathique » ou « jaune ».

Si l'on accepte, comme on en a l'habitude, de faire l'impasse sur une introduction classique sérieuse des nombres réels, on peut introduire les concepts fondamentaux de l'Analyse, en considérant que la notion d'entiers naturels très grands structure les ordres de grandeur de nombres réels de la manière suivante :

- un réel positif (resp. négatif) dont la partie entière est très grande est dit très grand positif (resp. négatif),
- un réel est dit modéré si sa valeur absolue n'est pas très grande,
- un réel est dit très petit s'il est nul ou si la valeur absolue de son inverse est très grande,
- deux réels dont la différence est très petite sont dits très proches.

Les axiomes (i) à (vi) ont pour conséquences les « règles de Leibniz » :

$$\begin{aligned} \text{modéré} + \text{modéré} &= \text{modéré} ; \text{très petit} + \text{très petit} = \text{très petit} \\ \text{modéré} \cdot \text{modéré} &= \text{modéré} ; \text{très petit} \cdot \text{modéré} = \text{très petit} \end{aligned}$$

Ces règles permettent de lever n'importe quelle indétermination algébrique, bardée de polynômes, de racines, de fractions rationnelles *etc...*

Pour les autres indéterminations, impliquant des fonctions non algébriques comme le sinus, le logarithme ou l'exponentielle, il faut choisir des propriétés de base qui aboutissent à des constats en termes d'ordres de grandeur. Par exemple de l'encadrement empiriquement évident

$$\sin x \leq x \leq \tan x \text{ sur l'intervalle } \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right]$$

et de l'imparité du sinus, on déduit aisément que

$$\text{pour tout } h \approx 0, h \neq 0, \text{ on a } \frac{\sin h}{h} \approx 1 \text{ et } \frac{\cos h - 1}{h^2} \approx -\frac{1}{2}.$$

On peut, bien entendu, construire un cours sur la dérivation et l'intégration en utilisant ces concepts d'ordres de grandeur. Si l'on désire introduire la notion de fonction dérivée, il faut élargir un peu plus le contexte externe en introduisant les notions de nombre réel et de fonction explicitée qui sont les pendants abstraits des notions anthropologiques *de nombres et de fonctions accessibles à la connaissance de l'homme*. Je renvoie aux références [1] et [2] pour une abondante illustration de ce type d'enseignement, qui a fait l'objet des expérimentations citées au début de cette conférence. Les ateliers qui suivent vous en feront partager le charme et la saveur.

Pour terminer, je voudrais insister sur un point qui nous a constamment guidé au cours de ces années de réflexion et d'expérimentation. Tous les collègues, dont certains sont parmi nous, qui y ont participé ont voulu faire vivre leurs classes ou leurs amphithéâtres en donnant accès de manière intuitivement acceptable aux concepts de base, *tout en permettant à la fois une discussion riche sur les nombres réels et une pratique naturelle du raisonnement formel sur les nombres et les fonctions*. Du point de vue épistémologique, ce qui rend la réalisation de cette double ambition possible est le fait que les définitions de limites, dérivées *etc.* en termes d'ordres de grandeur rendent les démonstrations directes, car dans leurs expressions les quantificateurs « vont dans le bon sens ». Par exemple, dire que la suite explicitée u_n tend vers 1 en écrivant que « pour tout n très grand, u_n est très proche de 1 » permet d'enchaîner des

conséquences nécessaires qui vont de l'hypothèse à la conclusion par simple contemplation des valeurs obtenues à chaque étape du raisonnement. L'expression classique de la limite « pour tout $\varepsilon > 0$ il existe... » nécessite, dans la phase de construction du raisonnement, de remonter de la conclusion à l'hypothèse en enchaînant une suite de conditions suffisantes, ce qui est rarement naturel. La difficulté de l'analyse mathématique est concentrée dans ce constat...

Je n'ai rien dit à propos de la légitimité logique de l'approche en termes d'ordres de grandeur. Elle est abondamment discutée dans les brochures [1] et [2]. Il suffit de savoir que l'introduction des ordres de grandeur ne trahit ni par excès ni par défaut les mathématiques classiques. En termes spécialisés, nous travaillons dans une *extension conservative* de la théorie des ensembles classique, et par conséquent ni plus ni moins contradictoire que celle-ci. *Cela signifie qu'un énoncé du langage classique est un théorème dans la théorie étendue si et seulement si il est un théorème dans la théorie classique.* Il ne s'agit donc pas, pour ce qui concerne les propriétés exprimables dans le langage classique, d'un contexte mathématique alternatif, mais d'une autre formulation du même contenu conceptuel, plus directe et plus conforme à l'art d'inventer, comme le disait si bien Gottfried Wilhelm Leibniz de son calcul infinitésimal il y a trois siècles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LUTZ R., MAKHLOUF A. & MEYER E. [1996], *Fondement pour un enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur : les réels dévoilés*, Paris, APMEP, **103**.
- [2] Groupe « ORDRES DE GRANDEUR » de l'IREM de Picardie [2001], *Analyse en termes d'ordres de grandeur : de l'intuition aux concepts*, IREM de Strasbourg, **182**.
- [3] FROGER J.F. & LUTZ R. [2003], *Structure de la connaissance, sens des nombres et beauté des mathématiques*, Éd. DesIris, Méolans-Revel.

Robert Lutz
Université de Haute Alsace
42 rue des frères Lumières
68093 Mulhouse cedex
R.Lutz@uha.fr

NÉGLIGER DES TERMES ? OPPORTUNITÉS ET DIFFICULTÉS¹

Résumé. L'apprentissage de l'analyse mathématique donne l'occasion aux élèves d'identifier une nouvelle technique, la négligence de termes qui peut être ultérieurement institutionnalisée par le biais, soit du concept de limite, soit de celui de réels très proches. L'exposé montre comment une approche heuristique de l'analyse, qui fait la part belle à la modélisation des grandeurs, est susceptible de préparer les élèves à entrer dans une présentation axiomatique en termes d'ordres de grandeurs tout en faisant apparaître en amont de cette dernière quelques difficultés d'apprentissage potentielles liées à la définition de grandeurs telles que les aires ou les vitesses.

Un des objectifs du colloque organisé à Mulhouse sur le thème « Regards et perspectives sur l'enseignement de l'Analyse au lycée et dans les formations universitaires de base », était de confronter plusieurs enseignements de l'analyse avec une approche en termes d'ordres de grandeurs telle que développée par le groupe ORDRE DE GRANDEUR de l'IREM de Picardie. À cette occasion, nous avons présenté une approche heuristique de l'analyse, le projet AHA, qui fait la part belle à la modélisation des grandeurs, ainsi qu'à la phase d'expérimentation mobilisant divers registres. Il nous est apparu que cette approche était susceptible de préparer les élèves à entrer dans le jeu axiomatique que constituait une présentation de l'analyse avec une approche en termes d'ordres de grandeurs tout en faisant apparaître quelques difficultés d'apprentissage potentielles en amont de cette dernière. C'est cela que nous voulons illustrer dans ces quelques lignes, en nous inspirant d'écrits antérieurs qui présentent et analysent les enjeux du projet AHA (e.a. Groupe AHA, 1999a et 1999b ; M. Grang'Henry-Krysinska et al., 1993 ; C. Hauchart et al., 1996 ; M. Schneider, 2001a et 2001b). À cette fin, nous avons polarisé notre propos, d'une part, sur l'approche des asymptotes et, d'autre part, sur l'introduction des dérivées. Nous renvoyons aux références précédentes tout lecteur qui souhaiterait appréhender de manière plus globale les visées et les ressorts de ce projet.

1. Les asymptotes dans le projet AHA

1.1. Comportements asymptotiques de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

Dans le projet AHA, l'étude du comportement asymptotique de fonction prolonge celle du comportement asymptotique de plusieurs suites. Dans un premier temps, le tracé précis des graphiques de fonctions du type $y = x^n$ et $y = 1/x^n$ fournit aux élèves l'occasion de comparer des ordres de grandeurs au voisinage de certaines valeurs de la variable : si x est suffisamment grand, $1/x$ peut être considéré comme négligeable et *a fortiori* $1/x^2$, $1/x^3$, etc...

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ fait l'objet d'un examen plus approfondi, s'appuyant sur des registres numérique et graphique et favorisant les passages de l'un à l'autre. La construction du graphique et l'observation de tableaux numériques suscitent, chez les élèves, des propos tels que :

« Pour les x positifs petits, $\frac{1}{x}$ est positif grand, d'autant plus grand que x est plus petit. »

¹ Cet article a été publié dans L'OUVERT 107 (2003).

« D'autre part, dès que x croît, $\frac{1}{x}$ décroît et s'approche de plus en plus de 0 au fur et à mesure que x devient grand.»

« Quand x s'approche de 0 en venant de droite, le graphique de $\frac{1}{x}$ monte de plus en plus haut en s'approchant de l'axe Oy. »

« Une partie du graphique semble se confondre avec l'axe Oy quand on le regarde de loin.»

« Une partie du graphique semble se confondre avec l'axe Ox quand on le regarde de loin.»

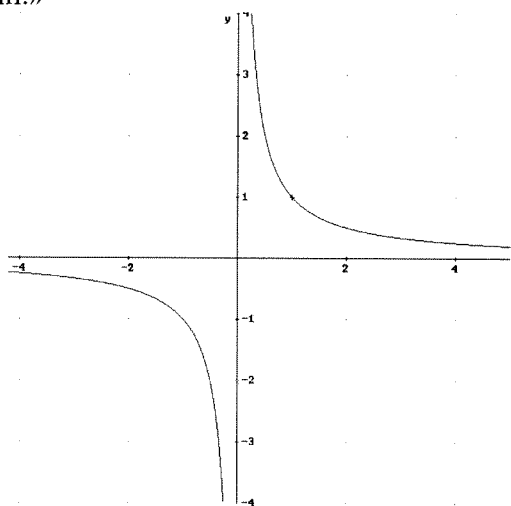


Figure 1

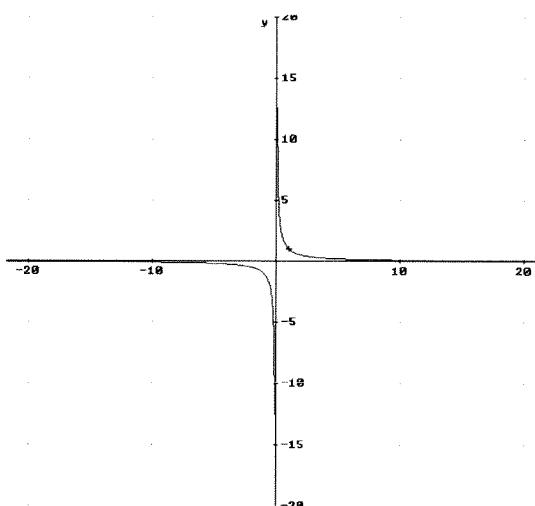


Figure 2

Cette expérimentation permet de donner une première signification au concept d'asymptote, mise en évidence par des choix judicieux de fenêtres sur une calculatrice graphique : « On dira dans ce cas que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale au graphique de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et que la droite $y = 0$ en est une asymptote horizontale parce que la courbe devient de plus en plus proche de ces droites au fur et à mesure qu'on la regarde de loin ». Les écritures canoniques en termes de limite sont introduites pour décrire le phénomène.

Les asymptotes des fonctions $y = 1/x^n$ se déduisent alors de la position de leurs graphiques respectifs par rapport à celui de la fonction $\frac{1}{x}$ (Figure 3).

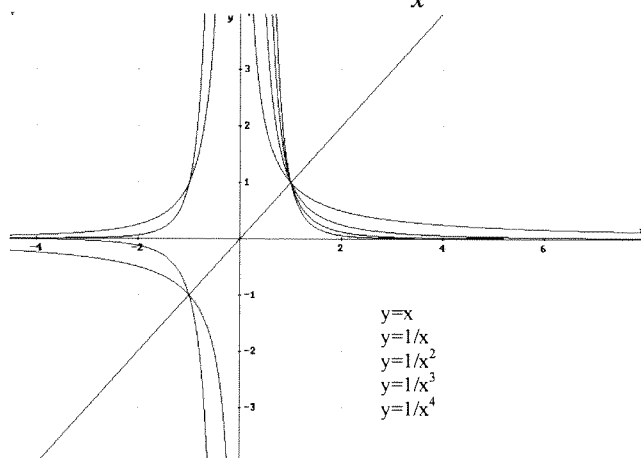


Figure 3

1.2. Comportements asymptotiques des fonctions de la classe $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Un premier exemple de fonction homographique apparaît dans un contexte de grandeurs : “ Un toit en pente s'appuie sur les murs d'une maison. Ceux-ci sont hauts de 3 m et écartés l'un de l'autre de 2 m. Le toit peut être plus en moins incliné.” (Figure 4). Les comportements asymptotiques de cette fonction sont mis sur le tapis par des questions telles que : “ Comment varie la hauteur h du faîte lorsque la distance x s'approche de 2 m ? Comment varie h lorsque x devient de plus en plus grand ? ”

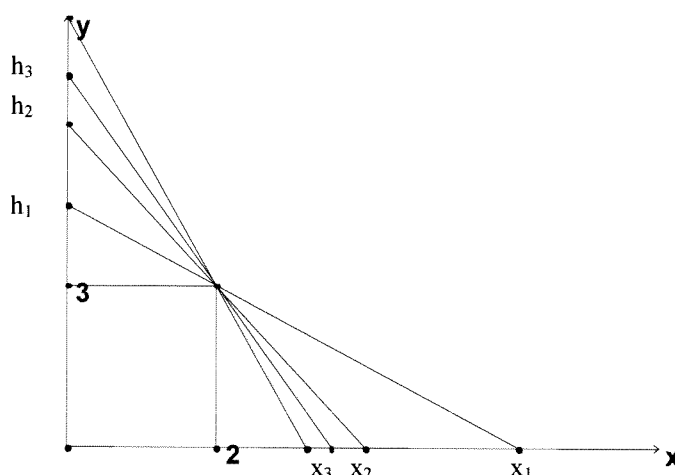


Figure 4

Ces comportements asymptotiques sont ainsi étudiés conjointement dans plusieurs registres : géométrique, numérique, analytique et graphique. D'abord, ce comportement peut être observé sur la Figure 4 : quand x s'éloigne de l'origine, h diminue en s'approchant de 3 ; quand x s'approche de 2, h devient de plus en plus grand. Ce comportement est ensuite traduit en deux expressions fonctionnelles :

$$h = \frac{3x}{x-2} \quad \text{et} \quad h = \frac{6}{x-2} + 3.$$

Quand on exploite des valeurs numériques de l'expression

$$h = \frac{3x}{x-2},$$

on observe que plus x est proche de 2, plus le dénominateur de la fraction est proche de 0 et plus la fraction est grande ; plus x est grand, plus la fraction est proche de 3. Quand on transforme la formule

$$h = \frac{3x}{x-2} \quad \text{en} \quad \frac{3}{1 - \frac{2}{x}},$$

on raisonne ainsi : “ lorsque x devient très grand, $\frac{2}{x}$ s'approche de 0 d'aussi près que l'on veut et la fraction s'approche de 3 d'aussi près que l'on veut pour autant que x soit suffisamment grand”.

Quant à la formule $h = \frac{6}{x-2} + 3$, elle suggère une façon de construire le graphique de h

en fonction de x par une suite de transformations de graphiques au départ du graphique de $\frac{1}{x}$ (une translation de 2 unités parallèlement à l'axe des y , une compression de rapport 6 parallèlement à l'axe des y , une translation de 3 unités parallèlement à l'axe des x).

Toutes ces approches se complètent et convergent vers une officialisation du phénomène en termes techniques mobilisant le concept de limite : la droite $y = 3$ est une asymptote horizontale au graphique de la fonction et la droite $x = 2$ en est une asymptote verticale.

Ces résultats se généralisent pour n'importe quelle fonction homographique $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

La validation des résultats s'appuie sur la "bonne forme" de l'expression analytique de ces fonctions :

$$f(x) = a + \frac{k}{x + d},$$

sur des propriétés établies pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et sur l'hypothèse que les asymptotes sont conservées d'une certaine manière par les translations et les dilatations. On établit aussi deux idéogrammes possibles du graphique de n'importe quelle fonction homographique (Figure 5).

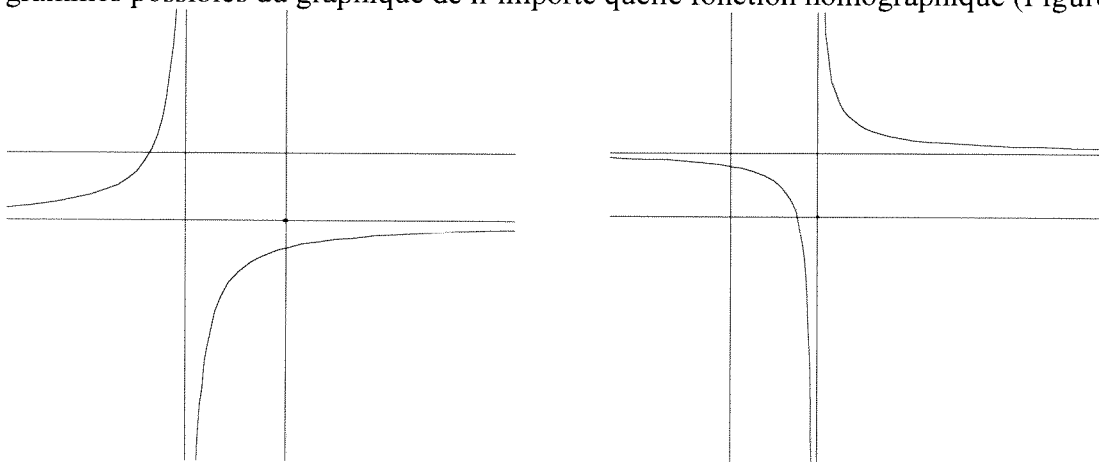


Figure 5

1.3. Comportements asymptotiques des fonctions de la classe $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$

La première asymptote oblique est rencontrée à propos de la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$; elle est traitée dans les registres numérique, graphique et analytique. Dans cette rencontre, on s'appuie sur le fait que la fonction se présente sous forme d'une somme de deux fonctions x et $\frac{1}{x}$ et sur le comportement asymptotique de $\frac{1}{x}$. On utilise les arguments suivants : " D'abord, on rend $\frac{1}{x}$ aussi petit que l'on veut en prenant x assez grand, auquel cas $x + \frac{1}{x}$ est aussi proche que l'on veut de x ou la différence $f(x) - x$ aussi petite que l'on veut [...]. La fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$ se comporte pratiquement (c'est-à-dire à peu de choses près) comme la droite $y=x$ pour x très grand. La droite $y = x$ est un exemple de ce qu'on appelle une asymptote oblique de $f(x)$ » (Figure 6).

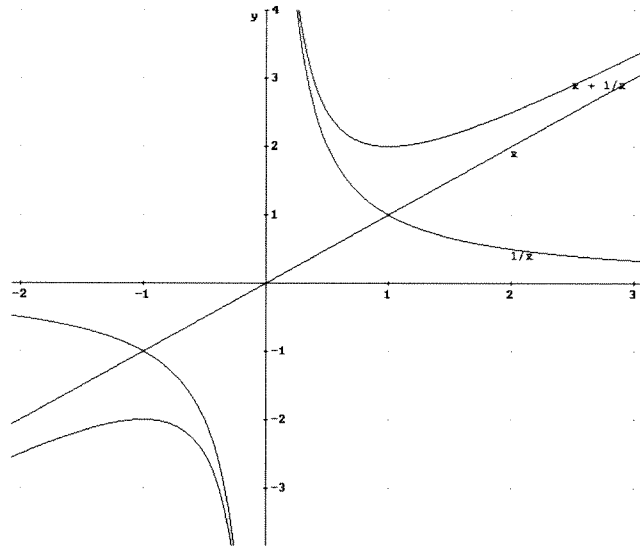


Figure 6

Quant à l'asymptote verticale de cette fonction, elle est *mutatis mutandis* étudiée dans les mêmes termes.

Le raisonnement mis en place pour étudier les comportements asymptotiques de cette fonction se généralise à d'autres fonctions de cette classe (Figure 7). Il se base sur la "bonne forme" de l'expression analytique de ces fonctions :

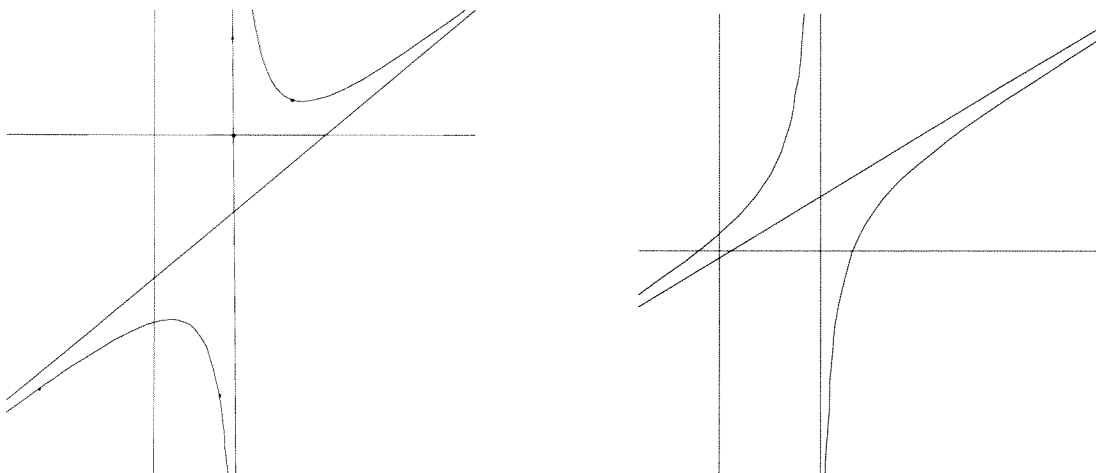
$$f(x) = mx + p + \frac{k}{x+d}.$$

Chacune de ces fonctions peut être considérée comme somme de deux fonctions données par :

$$mx + p \text{ et } \frac{k}{x+d}.$$

Le comportement asymptotique de la seconde est connu puisqu'il s'agit d'une fonction homographique. Ainsi, on considère la droite $y = mx + p$ comme asymptote oblique car le terme $\frac{k}{x+d}$ devient négligeable pour des valeurs de x positives très grandes ou négatives très grandes en valeur absolue.

À ce stade, on est amené à considérer la droite $y = mx + p$ comme asymptote oblique du graphique d'une fonction dont l'expression analytique est de la forme $mx + p + g(x)$ lorsque $g(x)$ devient négligeable pour des valeurs de x positives très grandes ou négatives très grandes en valeur absolue.



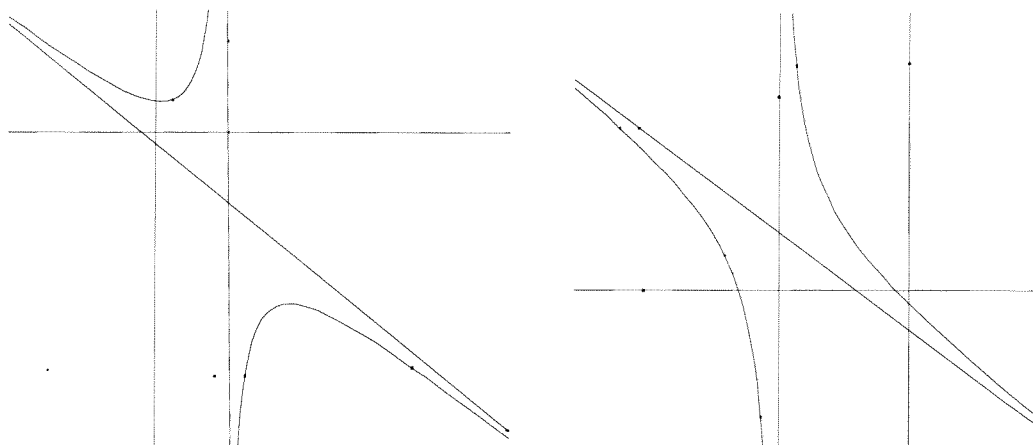


Figure 7

1.4. Comportements asymptotiques des fonctions de la classe $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

Quelques fonctions irrationnelles sont étudiées. Il s'agit principalement de racines carrées de fonctions du second degré et de sommes d'une telle fonction et d'une fonction affine. Ces fonctions sont mises sur le tapis à propos de problèmes d'optimisation. Ici aussi, c'est la recherche d'une "bonne forme" qui est la technique mise en évidence pour déterminer les asymptotes obliques, technique consistant ici à compléter le radicande en carré parfait. Cependant, dans le cadre de ces fonctions, le discours sur les parties négligeables qui pourrait s'ensuivre devient scabreux : ainsi, lorsqu'on considère la fonction

$$\sqrt{25t^2 - 8t + 1},$$

on peut être tenté de négliger les termes $-8t$ et 1 par rapport à $25t^2$ lorsque t devient grand et en conclure que les asymptotes obliques sont les droites d'équation $y = 5t$ et $y = -5t$ mais un raisonnement analogue à partir d'une autre écriture de la même fonction, soit

$$\sqrt{\left(5t - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}},$$

conduira aux asymptotes $y = \pm \left(5t - \frac{4}{5}\right)$. En épinglant cet exemple, les auteurs du projet mettent en évidence la nécessité d'un calcul de limite pour déterminer des asymptotes. De là, une nouvelle définition de l'asymptote qui sera institutionnalisée dans la synthèse par une phrase dans laquelle la connotation temporelle n'est pas absente : "la droite $y = ax + b$ est asymptote au graphique de la fonction $f(x)$ lorsque la différence $f(x) - (ax + b)$, prise en valeur absolue, possède une limite nulle aux infinis, c'est-à-dire devient et reste aussi petite que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand en valeur absolue". L'asymptote horizontale apparaît dès lors comme cas particulier et l'asymptote verticale y est définie de manière analogue.

Dans la synthèse, ce changement d'écriture des racines carrées de fonctions du second degré par complétion du carré est réalisé de manière littérale : les asymptotes en sont déduites de manière générale. La Figure 8 montre les deux dessins auxquels conduit le cas où a est positif.

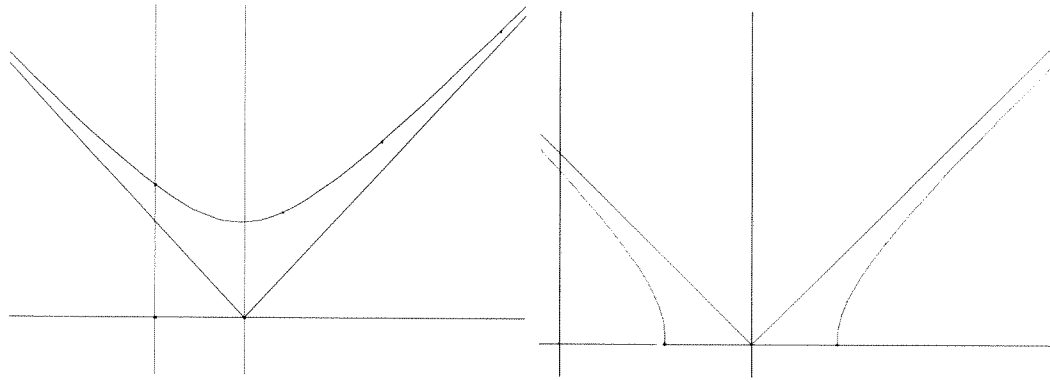


Figure 8

Un exemple montre comment obtenir, par sommation graphique, la somme d'une fonction affine et de la racine d'un second degré.

A propos d'un autre exemple, les auteurs du projet insistent sur le fait que l'expression " Plus x est grand, plus $f(x)$ se rapproche de b " ne suffit pas à assurer que $y = b$ est une asymptote horizontale.

Dans le projet AHA, la notion d'asymptote progresse ainsi, pas à pas, d'une famille de fonctions à l'autre. Elle s'approfondira avec l'étude des fonctions exponentielles et logarithmes et avec des exemples dont la fonction est de corriger des idées fausses sur les asymptotes. Par exemple, l'idée selon laquelle l'asymptote d'une courbe ne peut pas la traverser est contredit par la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}.$$

Le vocabulaire employé au début est intentionnellement naïf, quotidien et donc imprécis. Il évolue en fonction des cas rencontrés. C'est volontairement que les formules générales qui déterminent les paramètres d'une asymptote oblique ne sont pas utilisées pour privilégier un mode d'obtention des asymptotes lié à la bonne forme de chacune des classes de fonctions considérées, forme qui permet de mettre en évidence les termes que l'on jugera négligeables.

2. Un contexte cinématique pour introduire les dérivées

Des problèmes de vitesses liées constituent, dans le projet AHA, une autre première rencontre avec le concept de limite dans le cas des indéterminations du type $0/0$. Voici le premier énoncé proposé aux élèves et illustré par la Figure 9 : une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm par minute. L'angle au sommet du cône vaut 90° . Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à $100 \text{ cm}^3/\text{min}$?

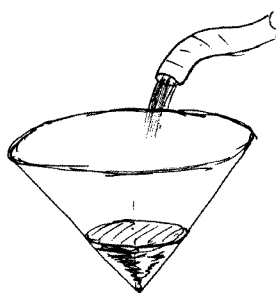


Figure 9

Ce problème constitue une expérience de pensée, paradigmatique d'une classe particulière de problèmes de vitesses liées, qui se caractérise comme suit : deux grandeurs y sont mobilisées (ici le volume d'eau et sa hauteur dans le vase). Elles varient toutes deux en fonction du temps, la vitesse de variation de l'une est constante et la vitesse de l'autre, sur laquelle porte la question, est variable. Ces deux grandeurs dépendent l'une de l'autre, ce qui fait que leurs vitesses sont liées. Là sont les caractéristiques a priori dépendant de la structure mathématique du problème. Il en est une autre relative au mental des élèves et qui a été testée dans les classes : le contexte du problème induit l'intuition que, si la vitesse d'une des deux grandeurs est constante, la vitesse de l'autre ne peut être que variable (c'est le cas de l'énoncé ci-dessus, mais ce n'est pas le cas de tous les problèmes de vitesses liées). L'énoncé ci-dessus se prête en outre à une validation particulière sur laquelle nous reviendrons.

Les enjeux didactiques de ce problème sont analysés autre part (M. Schneider, 1992 et 2001a). Nous nous contenterons donc ici de résumer cette analyse. Ce problème suscite plusieurs stratégies de base dont la plus "primitive", sans être la plus fréquente, consiste à diviser l'expression du volume versé au temps t , soit $V(t) = \frac{1}{3} \pi t^3$, par cette même valeur de t avant d'égaliser à 100. L'intuition effective que le débit croît constamment et les vérifications numériques contredisent le résultat trouvé par cette première stratégie. Elles poussent tous les élèves, y compris ceux qui avaient d'emblée évalué des débits sur de plus petits laps de temps, à procéder à un découpage du temps de plus en plus fin.

L'investigation qui vient d'être décrite ainsi que l'algébrisation du temps t et de l'incrément de temps Δt (qu'elle soit spontanément proposée par les élèves ou obtenue à l'invite du professeur pour alléger la recherche) conduisent à l'expression suivante qui donne le débit moyen de l'eau sur $[t, t + \Delta t]$

$$\frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

ou, dans le cas présent

$$(1) \quad \pi t^2 + \pi t \Delta t + \frac{1}{3} \pi (\Delta t)^2$$

Un retour au numérique, ou tout simplement la considération de l'expression (1) débouchent sur l'identification d'un passage à la limite : rendre nul Δt avant d'égaliser à 100 l'expression du débit. C'est l'occasion d'un débat sur la validité de ce calcul, sur le sens de l'indétermination 0/0, au cours duquel s'expriment des réserves analogues à celles observées par M. Schneider (1988 et 1992) à propos des concepts de vitesse et de débit instantané : "Un débit instantané, cela n'existe pas, car on ne peut avoir un débit avec un volume nul" ou "On ne peut obtenir une vitesse instantanée, car le temps de regarder sa montre, c'est du temps qui s'écoule". Ces réactions sont interprétées par cet auteur comme obstacle épistémologique, à savoir une vision positiviste des concepts mathématiques, supposés être un reflet exact du

monde tel qu'on peut l'appréhender par les sens et les mesures plutôt que des modèles inventés par les humains pour le comprendre.

Le problème décrit plus haut se prête à une autre expérience de pensée qui vise à les convaincre que la réponse obtenue ainsi est bien exacte. Il s'agit de poser un vase cylindrique de base 100 cm^2 à côté du vase conique et de les alimenter tous deux au moyen de pompes respectives de sorte que les niveaux d'eau montent régulièrement et simultanément de 1 cm/min (Figure 10). La pompe qui alimente le cylindre a évidemment un débit constant de $100 \text{ cm}^3/\text{mn}$. L'autre pompe devra verser moins vite que la première tant que le cône est plus étroit que le cylindre, et plus vite après. Les deux pompes auront donc un débit de $100 \text{ cm}^3/\text{min.}$, à l'instant précis où la superficie de l'eau dans le cône vaut 100 cm^2 , ce qui revient à évaluer à 100 l'expression du débit dans laquelle on a annulé Δt .

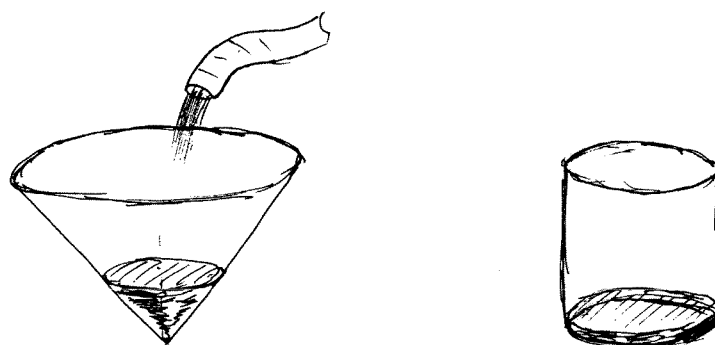


Figure 10

Cette expérience transcende une intuition exprimée par plusieurs élèves : à force de considérer des tranches de volumes de plus en plus petites, on prend des surfaces. Cette intuition conduit à la réponse exacte uniquement dans le cas où la vitesse de la montée de l'eau est unitaire (donnée délibérée ici pour cette raison). L'expérience de pensée, elle, est adaptable dans le cas contraire.

Les élèves sont ensuite invités à lire des propos de Berkeley exprimant à l'encontre du concept d'*ultima ratio* des réserves comparables à celles des élèves sur l'annulation de Δt et son interprétation en termes d'"instantané". S'ensuit un débat sur le statut des concepts mathématiques, produit de l'esprit humain plus que prolongement de l'expérience sensible.

À la suite de la résolution de ce problème, le concept de débit instantané est défini comme l'expression obtenue en annulant Δt dans l'expression du débit moyen sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, une fois faites toutes les simplifications algébriques. L'expression "limite du débit moyen pour Δt tendant vers 0" est utilisée pour décrire ce calcul.

3. Négligence de termes, ordres de grandeur et concept de limite

L'approche de l'analyse en termes d'ordres de grandeur proposée dans le cadre de l'IREM de Picardie s'inspire de l'analyse non-standard en ce sens qu'elle évite le concept de limite et qu'elle suppose, en échange, l'adjonction de nouveaux nombres. D'un côté, les entiers très grands, supérieurs à tout entier "classique" et les réels très grands positifs ou très grands négatifs supérieurs, en valeur absolue, aux entiers très grands et, de l'autre, des réels très petits, positifs ou négatifs, qui sont les inverses des réels très grands. Sur la base d'une axiomatique régissant les nombres très grands ou très petits, le concept de réels très proches, c'est-à-dire de réels qui diffèrent d'un réel très petit, permet de contourner le concept de

limite et de définir tant le concept d'asymptote que celui de nombre dérivé. Ainsi, la droite d'équation $y = 1$ sera appelée asymptote à la courbe représentative de la fonction

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$

en raison du fait que “ pour tout x très grand positif, $f(x)$ est très proche de 1 ”. De même, le nombre dérivé de la fonction f en a est défini, dans ce cadre, comme un réel très proche du quotient

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pour tout réel h très petit non nul tel que $a+h$ appartienne au domaine de f . De la sorte, cette définition permet d'identifier le réel $3a^2$ comme nombre dérivé en a de la fonction $f(x) = x^3$, celui-ci étant très proche pour tout h très petit non nul du taux d'accroissement de cette fonction dont la forme simplifiée est

$$3a^2 + 3ah + h^2.$$

Comme le montrent les exemples précédents, ces nombres très proches, que l'on présente traditionnellement comme le résultat d'un calcul de limite, sont obtenus par la suppression de termes contenant une puissance positive d'un réel très petit : $\frac{1}{x-2}$ en ce qui concerne le cas de l'asymptote et les termes $3ah$ et h^2 pour ce qui est de l'exemple de dérivée. Comme l'a argumenté R. Lutz lors du colloque de Mulhouse, cette façon de présenter les choses donne du sens à l'ultima ratio de Newton tout en lui évitant des significations sujettes à caution, telle que : “ la valeur de ce rapport juste avant que h ne s'évanouisse ”, ou encore “ la vraie valeur du rapport lorsque h est infiniment petit ” comme le dit Leibniz.

De ce point de vue, le projet AHA procurerait, nous semble-t-il, une expérience antérieure riche d'enseignement à tout élève qui devrait appréhender la notion de réels très proches. En effet, comme le montre la section 1, la transformation algébrique d'expressions analytiques de fonctions, classe par classe, fait apparaître de “ bonnes formes ” dans lesquelles l'élève identifie aisément les parties qu'il pourrait considérer localement comme négligeables. Or, c'est justement la négligence de ces termes qui le conduit au réel très proche considéré dans la présentation en termes de grandeurs. En outre, ce travail sur les asymptotes à propos des racines de fonctions du second degré fait apparaître le risque de conclusion induite que peut induire la négligence de termes et l'intérêt de travailler des différences “ très petites ”. De même, la section 2 illustre des conditions didactiques dans lesquelles les élèves sont amenés d'eux-mêmes à identifier l'acte de suppression de termes en Δt qui leur fournira le nombre très proche que cette présentation définit comme le nombre dérivé.

Faut-il pour autant se priver du langage des limites que le projet AHA lie d'emblée à cette négligence de termes ? Pour quelles raisons ? Les changements induits par la présence des nombres très petits ou très grands dans la façon de s'exprimer sont-ils déterminants pour l'apprentissage des notions d'asymptote ou de dérivée ? Il nous semble que cette question devrait être étudiée de plus près.

La section 2 met en évidence une difficulté particulière soulevée par la négligence de termes dans les cas où elle définit des grandeurs géométriques ou physiques. Pour comprendre cette difficulté, nous contrasterons le cas d'une asymptote et celui du débit instantané. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$$

dont la courbe ne traverse pas son asymptote horizontale $y = 3$. Cette valeur 3 est obtenue comme limite aux infinis de la fonction, c'est-à-dire par négligence de termes de la forme $\frac{a}{x}$ qui apparaissent lorsqu'on met x en évidence au numérateur et au dénominateur. Cette négligence s'accompagne du sentiment d'avoir commis quelques erreurs, sentiment bien

légitimé dans la mesure où le calcul opéré sur la fonction produit un objet proche de la courbe, mais qui lui reste cependant extérieur, donc distinct. Par contre, le même sentiment d'erreur suscite des réactions plus vives lorsque, en dépit de la négligence de termes, le calcul d'une limite donne la valeur exacte d'une grandeur cherchée telle un débit instantané, avec des arguments avancés du type de ceux repris à la section 2. M. Schneider (1988) a observé et analysé de semblables réserves chez les élèves à propos des aires curvilignes : celles-ci sont définies par la suppression de termes contenant des puissances de $\frac{1}{n}$ dans une somme de n rectangles qui les approxime par défaut ou par excès. Mais cette suppression même induit l'idée qu'elle ne peut conduire qu'à un résultat approximatif. S'ajoute à cela un effet mental de l'obstacle géométrique de la limite qui consiste à opposer le fait qu'une aire curviligne n'est pas "réductible" à un polygone formé de rectangles à celui qu'elle ne peut être obtenue en sommant des segments.

La négligence de termes soulève donc des problèmes particuliers dès qu'elle conduit à la définition de grandeurs. Mais là aussi, on doit se demander quelle est la part du langage utilisé, que ce soit celui des limites, ou celui des réels très proches.

Au delà du vocabulaire, nous nous sommes interrogées sur le prix que suppose chacune de ces approches de l'analyse. Nous l'exprimerons par référence à l'histoire du calcul infinitésimal au cours de laquelle une grande tension se manifeste entre trois aspects : primo, l'opérationnalité des calculs de dérivées et de primitives qui, même s'ils apparaissent sujets à caution parce que se soldant précisément par la négligence de termes, n'en permettent pas moins la détermination de multiples grandeurs tant physiques que géométriques, secondo, une forme de validation du calcul infinitésimal qui, faute de mieux, fait de larges emprunts à la métaphysique et tertio, la volonté de fonder ce calcul infinitésimal sur des bases cohérentes afin de conférer à cette discipline une légitimité interne qui la rende autonome vis-à-vis de la géométrie et à la physique. Cette tension se manifeste encore à l'heure actuelle dans l'enseignement de l'analyse par des choix didactiques très diversifiés, voire opposés, qui s'expriment par un déplacement d'accent entre, d'une part, la modélisation de grandeurs géométriques ou physiques et ce qu'elle suppose de travail sur l'intuition et, d'autre part, la cohérence et la légitimité mathématiques. Toute articulation entre ces deux pôles se paie d'un prix. Ainsi, l'approche en termes d'ordres de grandeur marie d'emblée une légitimité mathématique et une légitimité "métaphysique", ainsi que le développe R. Lutz. Mais le prix à payer est un acte de foi dans l'existence et le fonctionnement de réels non-standard ou l'acceptation d'un autre mode de rationalité. L'approche heuristique privilégie le processus de modélisation en travaillant les intuitions graphiques, géométriques et physiques pour construire progressivement une unité et une cohérence mathématiques. L'intention est de gérer la variété épistémologique a priori à laquelle donne lieu les différents calculs de limites selon qu'ils procurent des asymptotes, des tangentes ou des grandeurs. Mais, comme le développe M. Schneider (2001b), cette approche se solde par une organisation mathématique complexe où s'entrecroisent plusieurs types de validation qui n'ont pas le même statut et des techniques diverses dont certaines ont un caractère éphémère, voire anecdotique dans l'ensemble du projet.

Sans doute faudrait-il aller plus loin dans la confrontation de ces approches, en essayant de problématiser plus avant les hypothèses didactiques dont elles sont porteuses l'une et l'autre. Sans quoi, on risque fort de se cantonner à la conclusion que tout a un prix et que, décidément, on ne peut avoir à la fois le beurre et l'argent du beurre.

BIBLIOGRAPHIE

GRAND'HENRY-KRYSINSKA M. & HAUCHART C. [1993], Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente à une courbe, *Actes de la 1^{re} Université d'Été Européenne Histoire et Epistémologie dans L'Education Mathématique*, Montpellier, 431-442.

Groupe AHA (BOLLY P., CHEVALIER A., CITTA M., HAUCHART C., KRYSINSKA M., LEGRAND D., ROUCHE N. & SCHNEIDER, M.) [1999a], *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, manuel pour l'élève*, Bruxelles, De Boeck.

Groupe AHA [1999b], *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, guide méthodologique* Bruxelles, De Boeck.

HAUCHART C. & SCHNEIDER M. [1996], Une approche heuristique de l'analyse, *Repères IREM*, 25, 35-62.

SCHNEIDER M. [1988], *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.

SCHNEIDER M. [1992], A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics* 23, 317-350.

SCHNEIDER M. [2001a], Une ingénierie didactique passée au crible de concepts de didactique, In Mercier A., Rouchier A., Lemoyne G. (eds), *Sur le génie didactique : usages et mésusages des théories de l'enseignement*, De Boeck, Louvain-la-Neuve.

SCHNEIDER M. [2001b], Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. À propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en didactique des mathématiques*, 21 (1.2), 7-50.

Marysa KRYSINSKA
AHA et Groupe Enseignement Mathématique
Département de mathématique
Chemin du cyclotron, 2
B-1348 Louvain-la-neuve

Maggy SCHNEIDER
AHA et Université de Namur
FUNDP
Rue de Bruxelles, 61
B-5000 Namur
Maggy.Schneider@fundp.ac.be

LE JEU ENTRE POINT DE VUE LOCAL ET POINT DE VUE GLOBAL EN ANALYSE : UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE À VISÉE DIAGNOSTIQUE AU NIVEAU PREMIÈRE

Résumé. Cet article contient des éléments caractéristiques de notre recherche sur l'introduction à l'analyse au niveau de l'enseignement secondaire. Parmi les diverses facettes de l'entrée dans ce champ des mathématiques, nous avons en particulier étudié l'articulation entre point de vue global et point de vue local sur les objets fonctionnels (ce que nous avons appelé le 'jeu global/local'). L'étude est réalisée via la construction d'une ingénierie didactique à visée diagnostique dans l'environnement de calculatrices graphiques et symboliques. L'analyse des trois expérimentations menées en Italie met en évidence que l'introduction à l'Analyse via le jeu global/local est faisable et permet un travail significatif et riche pour les élèves.

Introduction

Notre recherche étudie l'entrée dans le champ de l'Analyse au niveau de l'enseignement secondaire. Les recherches conduites jusqu'à présent ont bien mis en évidence les difficultés des élèves mais aussi des étudiants dans l'apprentissage des concepts de l'Analyse. Dans un article de synthèse, M. Artigue (1996) distingue trois catégories principales de difficultés, celles liées respectivement à la complexité des objets de base de l'Analyse que sont les nombres réels et les fonctions, et au fait que ces objets sont en construction lorsque débute l'enseignement de ce champ conceptuel, celles liées à la conceptualisation de la notion clef de ce champ : la notion de limite et à sa formalisation, enfin celles liées aux ruptures nécessaires par rapport aux modes de pensée et de travail familiers aux élèves dans le domaine algébrique et aux spécificités qu'a le fonctionnement en Analyse sur les nombreux objets communs à ces deux domaines.

La plupart des recherches conduites jusqu'ici se sont surtout centrées sur les deux premières catégories de difficultés. Les difficultés classées dans la troisième catégorie n'ont pas fait quant à elles l'objet de recherches spécifiques, même si elles apparaissent de façon transversale dans de nombreux travaux. Elles concernent plus globalement les phénomènes liés à l'entrée dans le nouveau champ de l'Analyse, une entrée qui nécessite des changements dans les modes de pensée, de raisonnement, dans les techniques en jeu dans la résolution d'exercices et de problèmes. Notre recherche s'intéresse, elle, spécifiquement à l'étude de ces changements et aux reconstructions cognitives que ces changements impliquent. Elle s'inscrit donc dans une perspective globale d'étude de la transition¹ Algèbre / Analyse, et se situe plus particulièrement au niveau de l'enseignement secondaire, au moment où cette transition commence à se mettre en place.

1. Diverses facettes de la transition Algèbre / Analyse

L'étude de cette transition peut être faite selon des entrées diverses, chacune pointant l'attention sur des aspects spécifiques de l'enseignement et de l'apprentissage de l'Analyse. Nous avons, dans notre recherche, envisagé quatre entrées principales que nous avons qualifiées respectivement d'épistémologique, de symbolique, d'institutionnelle et de mathématique. Elles nous ont permis d'organiser les apports de différentes recherches qui,

¹ Le mot « transition » que nous utilisons ici ne veut pas signifier que la pensée « analytique » en tant que pensée propre au champ de l'analyse va se substituer à la pensée algébrique, mais que l'entrée dans ce nouveau domaine va conduire à la fois à une réorganisation nécessaire de la pensée algébrique.

tout en n'étant pas centrées généralement sur la transition, offraient des perspectives intéressantes et complémentaires pour approcher sa complexité. Nous présenterons, brièvement dans ce qui suit, cette phase préliminaire de notre travail, en nous centrant sur une ou deux recherches pour illustrer les apports relatifs à chaque entrée. L'étude transversale de ces entrées nous a permis de mettre en évidence un aspect de la transition que nous avons plus particulièrement développé dans notre recherche.

Pour l'entrée épistémologique, nous nous centrons ainsi sur les travaux de Legrand (1993) cherchant à identifier des caractéristiques de la pensée en Analyse, en les liant au raisonnement en jeu dans d'autres domaines déjà rencontrés par les élèves (comme l'algèbre et la géométrie). À travers l'analyse des différentes composantes envisagées (comme par exemple, le rôle dominant joué par les processus infinis par rapport aux processus finis, le détour par l'infini pour traiter des problèmes ayant une formulation finie), l'auteur souligne l'importance du jeu de majorations et de minorations, qui implique un travail nouveau avec des objets (relation d'ordre, inégalités, etc.) déjà rencontrés mais qui subitement deviennent des objets essentiels et sont gérés différemment. Il montre aussi que ce jeu de majorations et de minorations s'inscrit plus globalement dans un jeu d'approximation qui a ses règles propres. Même si Legrand identifie différentes caractéristiques de ce nouveau jeu (par exemple en ce qui concerne l'égalité), il laisse largement ouverte la question de la gestion didactique de l'entrée progressive des élèves et étudiants dans ses différentes facettes.

Des recherches conduites sur le rôle du symbolisme dans l'activité en Analyse comme celles de (Gray & Tall, 1992), (Maurel & Sackur, 2001) nous semblent bien illustrer les apports possibles de l'entrée symbolique par la façon dont elles mettent en évidence certaines différences de caractère et de gestion entre le symbolisme utilisé en Analyse et les symbolismes utilisés antérieurement par les élèves, en arithmétique ou en algèbre. Par exemple, l'analyse de la gestion du symbolisme lié aux développements limités à l'université² par Maurel et Sackur montre, nous semble-t-il, que l'utilisation d'un symbolisme, en apparence de nature algébrique comme le sont les notations de Landau en $o(x)$, peut renforcer, au moins dans un premier temps, les difficultés liées à la gestion de la négligeabilité. L'économie de calcul, mais aussi de pensée, apportée par l'utilisation du symbole $o(x)$ ne devient effective que si l'étudiant n'aplatissant pas abusivement ce symbolisme sur son apparence algébrique, est capable de lui restituer, en cas de besoin, sa dimension analytique cachée. La question est alors de savoir s'il est possible de « sensibiliser » au nouveau symbolisme, et à tout ce qu'il implique, les élèves du secondaire.

L'entrée institutionnelle nous permet, elle, d'identifier, parmi les difficultés envisagées par la recherche didactique lors de l'introduction à l'Analyse au lycée, celles qui résistent encore à l'université et de comparer la gestion qu'en font les deux types d'institutions. Les recherches que nous avons considérées (notamment celle de F. Praslon (2000) sur la transition Terminale S / DEUG Sciences par rapport au concept de dérivée et notre travail de DEA sur les rapports aux représentations graphiques dans la résolution de problèmes à l'université³) confirment ainsi le fait que les étudiants, dans leur entrée progressive dans le champ de l'Analyse, doivent faire face à de nombreuses reconstructions, la plupart étant cependant laissées entièrement à leur charge. Une reconstruction fondamentale que les recherches citées mettent en évidence tient à l'articulation entre aspects globaux et aspects locaux, fondamentale en Analyse. Elles montrent aussi la faiblesse de sa gestion didactique, les ruptures existant entre secondaire et supérieur, nous incitant à nous interroger sur la viabilité d'une gestion didactique explicite et progressive de cette articulation dès le début de l'enseignement de l'Analyse.

² DEUG MASS-MIAS 1^{ère} année.

³ M. Maschietto (2001).

L'entrée qualifiée de « mathématique » renvoie à l'étude des pratiques des mathématiciens, en Analyse, mais aussi plus globalement dans le domaine qualifié d'« Advanced Mathematical Thinking ». Pour cette entrée, des recherches comme celles de Robert (1998), Sfard (1994) et Praslon (1994) nous semblent particulièrement intéressantes par l'accent mis sur des caractéristiques importantes de la pensée mathématique avancée, parmi lesquelles nous trouvons l'autonomie et la flexibilité. Les recherches menées sur l'enseignement au lycée et à l'université montrent que la pensée des élèves et des étudiants est généralement très peu flexible. Pourtant, même si les pratiques attendues ne sont pas celles des mathématiciens, le succès des étudiants dans les cursus universitaires est lié à la capacité d'aller au-delà des simples applications. Et, comme le montrent les recherches citées, des formes de flexibilité qui, dans l'enseignement secondaire, restent étroitement pilotées par l'enseignant, passent brutalement dans l'enseignement supérieur sous la responsabilité des élèves. Ceci conduit à s'interroger sur la possibilité de mettre les élèves du secondaire dans des situations sollicitant ces aspects de la pensée mathématique et sur les situations à proposer pour un tel travail.

Ces différentes entrées nous ont conduite à nous centrer sur l'étude d'un aspect de la transition Algèbre/Analyse : l'articulation entre global et local. Pour tenter de répondre aux questions soulevées, il nous a fallu dans la recherche, analyser plus précisément ce que signifiait cette articulation entre local et global, et essayer d'identifier les reconstructions que sa mise en place pouvait nécessiter.

1.1. Le jeu global/local

Le rapport aux objets fonctionnels est, lorsque débute l'enseignement de l'Analyse, un rapport combinant deux points de vue : un point de vue ponctuel et un point de vue global, comme cela a été mis en évidence par Duval (1995). Les tableaux de valeurs, les calculs numériques mettent en jeu le caractère ponctuel, le repérage de formes, tant dans le registre algébrique que graphique, le repérage de fonctions prototypes, de familles, le passage des fonctions prototypes à des fonctions quelconques de la même famille, mettent en jeu le caractère global. Les propriétés de croissance, décroissance sur un intervalle, de périodicité, travaillées dans la première rencontre avec ces objets sont aussi des propriétés globales. L'entrée dans le champ de l'analyse requiert un enrichissement de ces deux points de vue par une localisation du regard. On localise le regard au voisinage d'un point, à distance finie ou infinie, et de nouvelles propriétés apparaissent puis deviennent centrales. On prend ensuite conscience du fait que ce regard local sur l'objet peut à son tour nous donner accès à des propriétés globales de l'objet, voire permettre de le reconstituer dans sa totalité ; l'articulation s'inscrit alors dans une dialectique entre points de vue local et global.

L'évolution nécessaire du rapport à la linéarité illustre de façon paradigmatique ce jeu et son caractère dialectique. Pour l'élève qui entre dans le champ de l'Analyse, la linéarité est un phénomène familier et global, attaché à la proportionnalité. En Analyse, la linéarité devient un phénomène local qui fonde la notion de dérivabilité. Mais la connaissance du signe de la dérivée sur un intervalle donne accès à des propriétés globales : croissance et décroissance, et ultérieurement la rencontre avec les équations différentielles et les primitives permet de montrer qu'une connaissance locale peut permettre, sous certaines conditions, de récupérer l'objet global.

Le jeu local/global concerne les divers registres sémiotiques (Duval, 1995) qui servent à représenter et travailler les objets fonctionnels. Il s'exprime aussi dans différents cadres (Douady, 1986). Dans le cadre géométrique par exemple, il impose une reconstruction du rapport à la droite tangente à une courbe qui d'objet global représenté paradigmatiquement par la tangente au cercle et pensé en termes de position par rapport au cercle et d'intersection

doit devenir un objet local intégrant l'idée d'approximation (Castela, 1995). Dans un cadre cinématique, il est impliqué dans les rapports entre vitesse moyenne et vitesse instantanée. Ce jeu peut donc être abordé de façons diverses : nous avons choisi quant à nous une entrée graphique, en cherchant à exploiter les potentialités offertes par les calculatrices actuelles. Mais son explicitation numérique et algébrique nous conduira à des raisonnements en terme d'ordres des grandeurs et de négligeabilité.

2. Les hypothèses de travail

Les recherches considérées sur l'étude de la transition Algèbre / Analyse nous amènent à prendre en compte une dimension particulière de cette transition : la mise en place du jeu global / local. Nous faisons l'hypothèse que cette dimension joue un rôle essentiel dans l'entrée dans la pensée en Analyse, qu'elle va s'inscrire au fil de l'entrée dans ce champ dans différents niveaux de conceptualisation mais qu'un premier niveau de conceptualisation devrait pouvoir se développer dans l'enseignement secondaire. Notre recherche se propose d'étudier la possibilité de commencer à faire vivre ce jeu dès le niveau de la classe Première S, où l'enseignement de l'Analyse débute institutionnellement, en s'appuyant sur la localisation du rapport à la linéarité mis en jeu dans la notion de dérivée, centrale à ce niveau d'enseignement. Notre ambition didactique est construire une ingénierie didactique viable dans l'enseignement secondaire pour mettre en place ce jeu.

Pour la construction de notre ingénierie, notre hypothèse de travail est que les calculatrices graphiques et formelles, par les commandes de zoom qu'elles fournissent, peuvent soutenir la localisation nécessaire du regard. La prise en compte d'études cognitives⁴ qui soulignent le rôle et la médiation de certains gestes dans la conceptualisation, l'importance des aller et retour entre les niveaux perceptif et mathématique, ainsi que du caractère dynamique de la situation de travail, nous induit à faire une autre hypothèse. D'après celle-ci, le recours aux calculatrices peut aider à mettre en relation les caractéristiques de cette localisation perceptives et dynamiques d'une part, mathématiques d'autre part.

3. L'ingénierie didactique et son expérimentation

Nous avons construit une ingénierie didactique (Brousseau, 1998) à caractère diagnostique pour mettre en place le jeu global / local et l'observer en classe. L'expérimentation a été effectuée dans des classes italiennes⁵ (correspondant au niveau de la Première S) en mai 2000 (exp.A) et mai 2001 (exp.B et exp.C). Nous avons travaillé les 6 séances prévues de l'ingénierie la première année et les trois premières seulement la deuxième année. L'enseignement de l'Analyse débute en Italie presque à la fin de l'année scolaire, au moment où les élèves et les enseignants sont très sollicités (devoirs surveillés, etc.). C'est pourquoi, la deuxième année, les enseignants n'ont pu consacrer à l'ingénierie plus de trois séances.

4 Quelques références bibliographiques :

Lakoff G. & Núñez R., 2000, *Where Mathematics Comes From : How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*, New York : Basic Books.

Núñez R. 2000, *Mathematical Idea analysis : What embodied cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics*, Proceedings of PME XXIV, Japon, Vol I, 3-22.

Longo, G. (1998). *The mathematical continuum, from intuition to logic*, Naturalizing Phenomenology: issues in contemporary Phenomenology and Cognitive Sciences, J. Petitot et al. (eds) Stanford U.P.

Longo G, Petitot J, Teissier B., 'Géométrie et Cognition', Projet de Groupe de Travail, <http://www.dmi.ens.fr/users/longo/geocogni.html>.

5 Il s'agit de classes suivant le programme de mathématiques du Plan National Informatique (PNI) de 1996.

Chaque séance était constituée de deux phases : une phase de travail en groupe (deux / trois élèves par groupes) et une phase de travail collectif de mise en commun gérée par l'enseignant. Nous avons effectué pour chaque séance une analyse a priori qui a servi de base au travail de mise au point et de négociation de l'ingénierie avec les enseignants impliqués dans l'expérimentation. Ceci a aussi permis d'insérer ces séances dans la progression mathématique de la classe, en les intégrant le mieux possible dans la culture de la classe. L'expérimentation a fait l'objet d'une évaluation finale au moyen d'un devoir surveillé et d'un questionnaire.

Les calculatrices (TI-89) ont été fournies aux élèves de deux classes pour mener à bien l'ingénierie tandis qu'une classe travaillait avec les calculatrices (TI-92) depuis 2 ans, parce qu'elle participait à un projet national sur l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques.

Pour chaque séance, nous avons filmé un groupe d'élèves pendant leur travail et ensuite la phase collective. D'autres groupes d'élèves ont été observés par des étudiants préparant leur mémoire de maîtrise en didactique des mathématiques.

3.1. Les séances et leur analyse

Nous présentons les éléments caractéristiques de notre ingénierie, en nous limitant aux trois premières séances. Nous rentrons dans les détails de deux premières séances par des extraits de protocoles d'élèves et de discussion collective. Ces extraits sont choisis pour montrer la « marge de manœuvre » des élèves dans le travail proposé d'une part, la gestion de la situation ainsi que les aspects pris en charge par l'enseignant d'autre part.

La première séance a pour objectif de provoquer et d'étudier la production par les élèves du phénomène de linéarisation locale d'une fonction au voisinage d'un point où elle est dérivable, au niveau perceptif, en utilisant comme indiqué plus haut la dynamique des zooms. Ce phénomène sera désigné dans la suite par l'expression de « micro-linéarité ».

La deuxième séance a pour objectif d'aboutir à une première mathématisation du phénomène. Il s'agit à la fois de s'appuyer sur l'invariant perceptif construit mais aussi de le questionner d'un point de vue mathématique pour faire de la notion de micro-linéarité une notion non seulement perceptive mais aussi opérationnelle. Pour motiver cette mathématisation et, en même temps faire évoluer le rapport à la perception, on cherche à attirer l'attention de l'élève sur le fait que le processus de zoom à lui seul ne permet pas de caractériser l'objet droit qui en est l'aboutissement, que cet objet est un objet qu'il va falloir mathématiquement construire. Les rapports à l'objet tangente commencent ainsi à être reconstruits.

La troisième séance permet de revenir sur la démarche qui a amené à la nouvelle détermination de la droite tangente à la courbe représentative d'une fonction et de travailler à la fois sur sa reconstruction et sur le nouveau calcul qui se met en place. La discussion collective permet à l'enseignant de mettre en place des propriétés du nouveau calcul et de souligner les propriétés du nouvel objet « tangente ».

3.1.1. La première séance

Travail en groupe

L'exploration d'un ensemble de courbes représentatives de fonctions choisies, au voisinage de points choisis, est proposée à l'aide des commandes de zoom de la calculatrice et est partiellement guidée par une fiche de travail. Mais la fiche de travail ne fixe pas les conditions d'arrêt de l'exploration. Il s'agit en effet d'étudier ce qui va être repéré comme phénomène intéressant par les élèves, d'analyser le discours et les gestes qui accompagneront ce repérage, les discussions qui accompagneront la prise de décision d'arrêt des explorations

et les critères qui seront plus ou moins explicitement évoqués. Dans cette partie du travail, l'enseignant prend en charge le bas niveau d'instrumentation de la calculatrice.

La classe est partagée en deux groupes qui travaillent sur les mêmes fonctions mais en des points différents. Une des fonctions est affine. Deux ne sont pas dérivables en un des points considérés : une présente un point anguleux, l'autre est la fonction :

$$x \rightarrow \begin{cases} 4+x\sin 1/x & \text{Si } x \neq 0 \\ 4 & \text{Si } x=0 \end{cases}$$

pour laquelle, au point $x = 0$, il n'existe ni dérivée à droite, ni dérivée à gauche.

Nous présentons ci-après quelques extraits du corpus relatif à un groupe d'élèves (exp.A) accompagnés de quelques commentaires. Ils illustrent bien, nous semble-t-il, la dynamique possible d'une telle situation dans la phase de recherche en groupes, l'identification du phénomène et les questionnements qu'il est susceptible de provoquer.

Première étape

Après avoir lu la consigne, les élèves (CF, CA et GL) considèrent $y_1(x) = x^3 - 7x - 2$. La représentation donnée par ZoomStd (fig.1) au démarrage de l'exploration, montre des caractéristiques des représentations graphiques que les élèves connaissent déjà : axes des coordonnées, échelles des axes, tracé d'une fonction régulière.

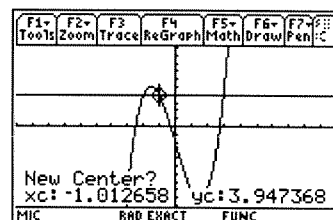


fig. 1

Deuxième étape

La démarche des agrandissements commence. Elle est au début guidée par la fiche, qui demande d'effectuer deux zooms et de représenter l'écran de la calculatrice sur une feuille donnée.

23. CA : «Fais deux Zooms ... Fais ZoomIn !» <i>Après deux ZoomIn successifs autour du point choisi, ils obtiennent l'écran de la fig.2</i>	La transition vers un point de vue local s'appuie bien sur des gestes nouveaux pour les élèves. Ces gestes stimulent une dynamique nouvelle : celle d'« entrer dans le graphique ».
24. GL : «Dessine la représentation graphique que nous avons obtenue» <i>CF représente une droite sur la feuille.</i>	Le dessin de CF dépend de son interprétation de l'écran de la calculatrice. Il entraîne une objection de CA sans doute liée au fait que droit et courbe réfèrent à des catégories perceptives différentes et qu'un zoom, à lui seul, ne peut, à ses yeux, suffire à produire un changement de catégorie.
25. CA : «qu'est-ce cette ligne ? Mais elle n'est pas droite !»	

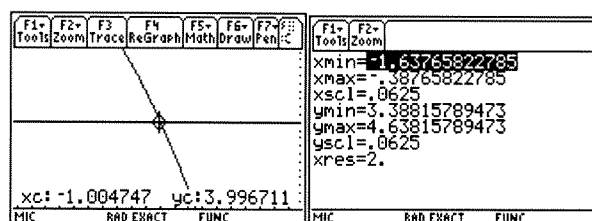


fig. 2

Troisième étape

L'exploration continue sous la gestion du groupe, qui doit décider quand l'arrêter et représenter l'écran final sur la feuille.

26. GL : «oui, cela semble devenir une droite ; elle devient de plus en plus semblable à une droite ! Elle tend à devenir une droite» <i>Après l'intervention #26, GL fait encore trois ZoomIn. L'exploration s'arrête et l'écran suivant est reproduit sur la feuille par CF.</i> <i>L'exploration de la première représentation graphique s'arrête sur l'écran de la fig.3, lequel est reproduit sur la feuille par CF.</i>	L'exploration continue avec un autre ZoomIn et renforce la prise de conscience perceptive du phénomène. GL, qui manipule la calculatrice depuis le début de l'activité, la formule dans un langage dynamique qui marque le rapprochement progressif avec le droit tout en maintenant la distance entre les catégories. Notre hypothèse que les élèves arrêteront spontanément l'exploration lorsqu'une stabilité leur apparaîtra dans les représentations affichées par la calculatrice se trouve ici confirmée.
--	--

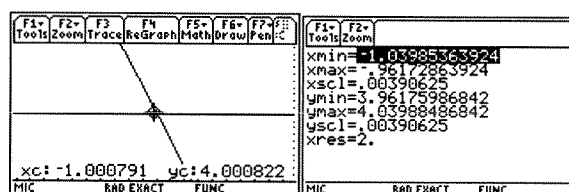


fig. 3

Dans les explorations qui suivent, les échanges entre les élèves du même groupe montrent d'une part que la linéarité locale n'est pas encore un critère d'arrêt fort, d'autre part que la répartition du travail entre les élèves influence leur perception de la localisation du regard. Par exemple, l'élève qui manipule la calculatrice, enchaîne les zooms sans se préoccuper de contrôler ce processus lorsque la fiche ne guide plus l'exploration, l'élève qui doit dessiner met en avant la perte de canons de représentation (notamment les axes coordonnés, l'origine) mais aussi une certaine ambiguïté de la consigne donnée (« dessiner ce qui apparaît à l'écran de la calculatrice »). Cette dernière requête semble imposer un traitement différent du registre graphique.

L'exploration d'une fonction non dérivable au point choisi met en évidence l'évolution du critère d'arrêt pour GL.

43. CF : «Ah, il y a un fossé !», <i>il dessine ensuite la courbe de la fenêtre standard.</i> 44. CA : «Agrandis-le », <i>il s'adresse à GL.</i> 45. CA : «Dessine ce truc-ci », <i>il s'adresse à CF.</i> <i>Après quelques zooms.</i> 46. GL : «Mais, cela ne devient jamais une droite ... Excuse-moi, quel était le point ?», <i>il obtient la figure 5 ci-dessus.</i> 47. CA : «reviens en arrière et recommence».	La représentation de la courbe dans la fenêtre standard présente une allure étrange pour CF, qui l'associe à un fossé (fig.4 ci-dessus). L'intervention #44 semble confirmer l'appropriation du jeu des zooms (cf. #31). L'obtention d'une droite est bien le critère d'arrêt de l'exploration (#46). Ne réussissant pas à l'obtenir, les élèves pensent d'abord avoir commis une erreur dans la manipulation. L'invariant est donc semble-t-il, déjà bien installé.
---	---

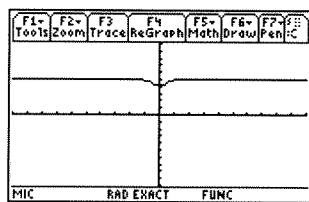


fig. 4

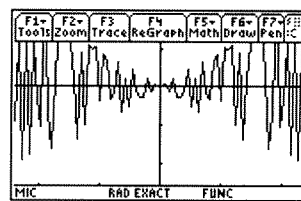


fig. 5

Discussion collective

Dans cette phase, l'enseignant recueille les résultats des explorations et porte l'attention sur le phénomène rencontré et son caractère local. La comparaison du travail des groupes permet de montrer en effet que toutes les fonctions n'ont pas nécessairement le même comportement par zooms successifs. Par exemple, on voit que la fonction explorée ci-dessous (ref. fig.4), a un comportement standard en d'autres points. Un autre élément important de cette phase collective est la proposition faite aux élèves d'introduire un terme pour traduire ce phénomène. Dans l'expérimentation dont le protocole ci-dessus est issu (exp.A), le terme⁶ choisi est « *zoomata lineare* ».

Dans les expérimentations, l'analyse des discussions souligne le fait que presque tous les élèves restent à un niveau perceptif à la fin de cette première séance. A ce niveau perceptif, ils ne distinguent pas nécessairement le fait d'obtenir « quelque chose de droit », comme c'est le cas du point anguleux (deux demi-droites), du fait d'obtenir une droite à l'écran de la calculatrice. Ceci est l'enjeu de la deuxième séance.

3.1.2. La deuxième séance

Travail en groupe

La consigne donnée à chaque groupe est : étant donnée une fonction, vérifier si elle est « micro-linéaire » au point choisi et trouver l'équation de la droite qui apparaît à l'écran de la calculatrice. On fait l'hypothèse que les élèves vont avoir des fenêtres d'arrêt différentes et partiront de données liées à cette fenêtre pour déterminer l'équation de la droite tracée.

Le choix de la fonction dépend de la classe concernée par l'expérimentation. Pour la première classe (expérimentation 2000), nous avons choisi⁷ la fonction $f(x) = x^2$ (à explorer au voisinage de $x = 2,5$), tandis que pour les deux autres (expérimentations 2001) nous avons choisi la fonction $f(x) = x^3/5$ (à explorer au voisinage de $x = 2$). Ce choix a été fait pour rendre difficile voire impossible (avec les connaissances des élèves à ce niveau) une démarche algébrique de résolution, sachant que les élèves avaient repris l'étude de la fonction $f(x) = x^2$ peu de temps avant le début de l'expérimentation. En général, les élèves italiens de ce niveau ont déjà étudié les tangentes aux coniques et savent par exemple déterminer algébriquement l'équation de la tangente en un point à une parabole à partir de son équation. Ce travail algébrique basé sur la recherche d'une racine double à une équation polynomiale ne met en rien en jeu la pensée d'approximation qui est visée ici. C'est dans un second temps que les deux points de vue sur l'objet tangente seront connectés.

Comme pour la première séance, nous donnons ci-après quelques extraits commentés du fonctionnement d'un groupe d'élèves (exp.B), où l'on voit le poids de la pensée algébrique dans le conflit entre la conception de la tangente liée à l'interprétation du résultat de l'exploration effectuée et la démarche algébrique qui en est induite pour la détermination de l'équation.

⁶ Nous avons gardé le terme en italien.

⁷ En accord avec l'enseignant de la classe.

<i>Les élèves (C et R) ont répondu à la première question de la fiche, qui demandait la vérification de la propriété de 'micro-linéarité' en un point choisi. Ils abordent ensuite la détermination de l'équation de la droite.</i> 22. C : «c'est la tangente, donc », <i>il s'adresse à R.</i> 25. C : «maintenant, système avec la courbe». 26. R : (...) <i>il continue à lire la consigne</i> «(...) Mais il n'y a pas écrit de faire un système ». 27. C : «nous devons trouver la tangente». 39. C : «comment fait-on le delta égal à zéro quand x est à la puissance trois ? ». 42. R : «attends une seconde. Je pensais au coefficient directeur. Même si elle est tangente ici», <i>il indique un point sur l'écran de la calculatrice avec son doigt</i>, «elle la rencontre ensuite en bas», <i>il continue sur la feuille, où la courbe a été tracée, à suivre la trace de la droite avec son doigt et après avec son stylo.</i> 43. C : «et tu dis qu'il n'existe pas de tangente ?».	C a tout de suite identifié la droite obtenue par zooms avec la tangente à la courbe, sans justifier sa conclusion à son camarade. Celle-ci lui permet de démarrer la démarche algébrique. Il écrit l'équation d'une droite passant par un point choisi et de coefficient directeur connu avec l'accord de son camarade. R porte l'attention sur la requête de justification des choix effectués présente dans la fiche et sur le fait que celle-ci ne contient pas de validation de la démarche qu'ils sont en train d'envisager. Avec cette remarque (#26), R semble avoir des réserves sur la caractérisation de la droite obtenue comme «Tangente», tandis que C est convaincu de la justesse de son interprétation (#27). Après avoir précisé que la détermination de la droite tangente est équivalente à la détermination du coefficient directeur de cette droite, la mise en œuvre de la démarche algébrique pose le problème prévu dans l'analyse a priori (#39). L'impossibilité pour ces élèves de suivre la démarche algébrique met en évidence leur conception de la tangente (#42) et pose la question de l'existence de la tangente, même si celle-ci semble exister au vu de la représentation graphique (#43). Dans la recherche de l'équation, des moments de silence s'alternent avec des phases de calcul n'aboutissant à rien de significatif. C arrive à la conclusion qu'il est impossible de déterminer cette équation.
--	---

59. R : «si tu veux, tu peux choisir un point ici et un point là », <i>il indique deux points sur l'écran de la calculatrice, un point au-dessus de la droite horizontale $y=8/5$ et un point au-dessous, « et calculer ensuite une droite».</i> <i>R déplace toujours le curseur sur l'écran de la calculatrice pour voir affichées les coordonnées des points qui pourraient être choisis.</i>	La situation de blocage se termine lorsque R revient à la représentation graphique de la calculatrice, et commence à travailler au niveau graphique, en déplaçant par exemple le curseur dans l'écran affiché. Ceci semble lui donner l'idée verbalisée dans l'intervention #59. Cette démarche n'aboutit pas, parce que R envisage des calculs trop complexes à faire. L'observateur intervient alors pour rappeler la disponibilité de la commande Trace⁸ de la calculatrice.
65. R : «alors ! Faisons cela !». 66. C : «nous en avons déjà un (point). L'autre choisissons-le». <i>Après avoir effectué les calculs, les élèves vérifient l'équation trouvée en faisant tracer la droite. Le test étant négatif, ils changent la valeur du coefficient directeur et refont le test graphiquement.</i>	L'intervention de l'observateur débloque la situation (#65), parce qu'elle confirme la démarche de R. Le passage à la fenêtre standard souligne une autre fois la conception globale de la tangente. Les élèves travaillent ici au niveau perceptif pour le changement de la valeur du coefficient directeur.
98. C : «parfait !» 99. R : «parfait ? pas du tout ! Elle doit être tangente en ce point-ci», <i>il indique le point fixé sur l'écran avec son doigt, «est-ce que tu vois qu'elle est tangente ailleurs ?»</i>	
137. R : «nous l'avons déjà fait auparavant et nous nous sommes trompés, parce que nous avons choisi le point dehors». <i>Une équation de droite satisfaisante est enfin trouvée, après quelques erreurs de calcul.</i>	La deuxième droite n'étant toujours pas tangente, R suggère de revenir à la fenêtre agrandie, obtenue par les zooms (dans la fiche, ils devaient noter ses dimensions) et il essaie d'expliquer les erreurs faites (#137). Pour lui, les points choisis n'étaient pas pris dans la fenêtre qui permis de vérifier la propriété de micro-linéarité. Ceci semble traduire une certaine localisation du regard.

Discussion collective

Dans cette phase, l'enseignante recueille au tableau les équations des droites obtenues par les élèves et en représente quelques-unes dans la fenêtre agrandie de la calculatrice qui lui a servi à contrôler la micro-linéarité. C'est de leur comparaison collective que peut naître l'idée de créer un objet idéal transcendant ces différentes réalités, un objet qui sera ensuite caractérisé en termes de qualité d'approximation (ce que la calculatrice ne peut donner directement à voir). L'enseignante a alors à gérer le conflit entre le caractère perceptif de la tangente, le fait que la tangente a une caractérisation précise pour les élèves et la présence d'autres droites candidates à l'être. C'est à ce moment qu'il faut préciser ce que l'on a obtenu en dehors du registre graphique.

La discussion sert à attirer l'attention sur les coefficients directeurs des droites et sur la caractéristique de celles-ci d'approximer la courbe autour du point choisi. La première idée

⁸ Elle permet d'encre le curseur à la courbe ; de cette façon, on peut lire directement les coordonnées des points de la courbe suivant le déplacement du curseur.

qui s'installe est celle de proximité numérique entre les diverses valeurs des coefficients directeurs. Le point-clef est l'introduction, par l'enseignant, d'un symbole, h , pour désigner le deuxième point utilisé pour déterminer l'équation de la droite, ce qui permet en même temps de rendre compte de tous les choix simultanément (le coefficient directeur est écrit sous la forme $2 + h$). La nature de h et les valeurs qu'il peut assumer sont données par l'activité en groupe et la première partie de la discussion collective.

Nous présentons ci-dessous deux extraits des discussions (exp.B) : le premier extrait concerne la présentation de la démarche du groupe, observé ci-dessus, à la classe, le deuxième extrait contient une partie de la discussion gérée par l'enseignant (Ens) sur la nature de h (d'autres élèves que C et R figurent comme A1, A2, A3 et A4).

C66. Ens : «Comment avez-vous fait ?» C67. R : «Nous avons pris, approximé... C'est-à-dire nous avons pris deux valeurs de la droite». C68. Ens : «De quoi ? ». C69. C : «De l'équation de la... nous avons considéré la <i>zoomata lineare</i> de la ... » C70. Ens : «Ici ? », <i>elle indique sur la représentation graphique de la fonction</i> C71. C : «C'est exact ! Et ensuite nous nous sommes déplacés sur la fonction... C'est-à-dire sur le petit morceau de droite nous avons pris une valeur très proche de... » <i>La discussion continue sur la recherche de la meilleure approximation de la courbe et la distinction entre droite et courbe.</i>	L'intervention de C (#69 et 71) résume la discussion et les essais faits pendant le travail en groupe pour le choix du deuxième point. Ces interventions de R et C permettent à l'enseignant de valider la démarche de détermination de la droite et de porter l'attention sur le choix du point.
C163. T : «Nous avons trouvé un point avec une valeur d'abscisse un peu plus grande que 2». C164. Ens : «Alors, nous avons considéré quelque chose en plus. En partant de x égale 2, la deuxième fois nous avons écrit x égale 2 plus combien ?» C165. T : «0,001» (...) C167. F : «Mais le mieux, ce serait encore moins (<i>la valeur proposée 0.001</i>)» (...) C172. Ens : «Appelons-le h ? (2) plus un petit morceau, c'est bien», <i>elle écrit au tableau $x=2+h$ « Comment doit-il être ce morceau ? »</i> <i>La séance termine avec l'écriture de l'expression du coefficient directeur, qui est ensuite transformée et simplifiée.</i>	La partie de la discussion concernant l'introduction du symbole h commence. Il semble qu'il y a une idée d'ordre de grandeur encore floue cachée derrière les interventions des élèves. Les termes utilisés pour désigner h sont par exemple 'très petit' et 'le plus petit possible'.

<i>La séance suivante commence avec le calcul du coefficient directeur avec h. Celui-ci s'appuie sur les expériences faites avec les zooms. Après la simplification par h, l'expression $\frac{h^2+6h+12}{5}$ est ainsi traitée :</i> C29. C : «h^2 devient négligeable, parce qu'il est très petit». C32. Ens : «(...)». C dit que h^2 devient négligeable et donc il reste » <i>elle écrit au tableau $\frac{6h+12}{5}$.</i> C35. A1 : «oui, oui» C36. A2 : «si h est négligeable, $6h$ l'est aussi». C37. A1 : «Eh, oui». C41. A3 : «il reste douze cinquième». C43. A4 : «si nous enlevons encore h il reste douze cinquième, qui est le coefficient directeur normal d'une droite». <i>La discussion continue, dans le but de commencer à reconstruire avec la valeur obtenue le rapport à la droite tangente à la courbe.</i>	Cette partie de protocole montre, selon nous, comment le passage au nouveau calcul sur h est délicat. Il faut lui donner un sens par rapport aux manipulations algébriques utilisées pour la transformation de l'expression, par rapport aux activités précédentes et par rapport à la nouvelle idée de négligeabilité qui se met en place. On voit ici que les raisonnements spontanés des élèves sont portés plutôt par une idée de négligeabilité absolue (une quantité est qualifiée de négligeable en soi) (#C29), même si la suppression des termes négligeables obéit à un ordre qui respecte les ordres de grandeurs relatifs (d'abord les h^2 et ensuite les h) (aussi #C42) et un contrôle pragmatique de la fin du calcul lié au fait qu'il n'y a plus de quantité négligeable, juste des nombres ordinaires (#C43), à rapprocher des critères utilisés au début du développement du calcul infinitésimal.
---	---

3.1.3. La troisième séance

Dans la troisième séance, les élèves travaillent sur une fiche qui leur permet de réinvestir ce qui a été fait dans la séance précédente, mais aussi de rencontrer des situations de calculs différentes du premier cas.

3.2. L'ingénierie et l'enseignement de l'Analyse en Italie

Comme nous l'avons précisé dans la présentation de notre ingénierie, les séances ont été construites et ensuite négociées avec les enseignants des classes concernées. Ceci a été fait à la fois pour impliquer les enseignants et pour insérer notre ingénierie dans le programme des classes. Cette ingénierie présente une approche de l'Analyse qui est d'une certaine manière nouvelle dans la culture mathématique du lycée scientifique en Italie. Le programme d'Analyse du lycée (filière scientifique) se caractérise en effet par une approche plutôt formelle, qui prévoit par exemple la définition de limite en termes de ε et δ ainsi que des exercices de détermination et contrôle de limites en utilisant cette définition. Le programme d'Analyse de Première S (programme PNI) prévoit l'étude des limites des suites numériques et des fonctions réelles d'une variable réelle, de la continuité et de la dérivée d'une fonction, des théorèmes de Rolle, des valeurs intermédiaires, de l'Hôpital. Tout cela a pour but l'étude et la représentation graphique de fonctions. Dans la pratique, l'enseignement de l'Analyse commence en fin de première (au mois de mai) et se limite souvent aux concepts de limite et de dérivée.

Nos expérimentations ont représenté une expérience forte pour les élèves et pour les enseignants. Les élèves ont été confrontés à des méthodes de travail en dehors de leur pratique mathématique usuelle (travail en groupe et discussion collective). L'introduction de la calculatrice a contribué à différencier les séances proposées de celles habituelles de

mathématiques. Le questionnaire que nous avons fait passer à la fin de l'expérience montre qu'elle a été prégnante pour ces élèves, comme l'attestent les quelques réponses ci-dessous :

- Cela a été une expérience intéressante parce qu'elle nous a permis d'aborder un thème des mathématiques de façon non classique (c'est-à-dire par le manuel ou un cours 'au tableau') mais avec des moyens d'avant-garde (TI-92, rétroprojecteur).
- Le travail est intéressant parce qu'il sollicite la curiosité d'aller s'occuper des points d'une courbe sans leur laisser d'intimité.
- Je me suis senti concerné par l'ensemble de ce travail, j'ai travaillé très sérieusement.
- La calculatrice a été notre loupe d'agrandissement. Elle a été indispensable pour aller chercher les '*micro-linearizzazioni*', sans elle le travail ne pouvait pas être proposé.

Les enseignants quant à eux ont été poussés à penser autrement l'introduction de l'Analyse et obligés de prendre en compte certains aspects, notamment le jeu global/local, qu'une approche plus traditionnelle ne mettait pas en avant. Ils se sont beaucoup engagés dans ce travail et, selon eux, en ont tiré des idées pour continuer leur travail en Analyse après l'expérimentation (surtout les enseignantes des expérimentations menées en 2001).

Conclusion

Dans cette recherche, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'entrée dans le champ de l'Analyse au lycée selon une optique de reconstruction de rapports aux objets mathématiques. Parmi les éléments caractérisant ce champ des mathématiques, nous nous sommes centrés sur l'étude du jeu global/local et ses possibilités de gestion didactique au niveau de l'enseignement secondaire. Ceci a abouti à la construction d'une ingénierie didactique à caractère diagnostique, expérimentée en Italie, visant la mise en place de ce jeu. L'analyse de cette ingénierie doit prendre bien sûr en compte les contraintes institutionnelles des expérimentations, qui réduisent nécessairement sa portée. Son intégration dans un processus d'enseignement n'allait pas de soi et le nombre de séances négociables était trop réduit pour aller au-delà d'une première rencontre avec un jeu complexe comme le jeu global/local. Malgré ces limites, l'analyse des protocoles faite jusqu'à présent nous apporte des éléments intéressants. Dans la première séance de l'ingénierie, les diverses explorations des fonctions ainsi que la discussion collective mettent en évidence la constitution d'un invariant perceptif qui représente le critère d'arrêt via la dynamique des zooms. Le langage construit autour de cet invariant représente un élément important : par exemple le terme « *zoomata lineare* » créé par les élèves condense en une expression les expériences vécues et le double ancrage dans la linéarité et le local. Les discussions et les difficultés rencontrées par les élèves lors de la deuxième séance, montrent que la mathématisation de cet invariant perceptif ne va pas de soi. Elle demande aux élèves de dépasser les techniques algébriques qui sont pour eux associées à la détermination de tangentes à une courbe, pour mettre en place des techniques s'appuyant sur la notion d'ordre de grandeur. C'est via ces techniques où le raisonnement et les calculs sur les ordres de grandeur s'intègrent au calcul algébrique, que la notion de micro-linéarité devient opérationnelle pour le travail mathématique. Autant la première séance semble facile à gérer, autant la seconde est plus délicate. La première peut fonctionner suivant un schéma essentiellement a-didactique, ce n'est plus le cas de la seconde, dans laquelle l'enseignant joue un rôle essentiel pour mettre en place le nouveau calcul et unifier à travers lui les diverses expériences des groupes d'élèves.

Les expérimentations menées semblent montrer que le jeu global/local peut être initié dans le cadre graphique et algébrique de façon dialectique entre ces deux cadres dans l'enseignement secondaire. Dans sa mise en place, la notion de micro-linéarité apparaît porteuse, parce qu'elle est attachée à une image graphique précise et permet de développer un langage lui aussi spécifique avec l'appui duquel les conceptions des élèves vont pouvoir évoluer. De notre point de vue, il s'agit de faire vivre ce jeu le plus possible pour permettre à cette évolution de se mettre en place. La calculatrice semble être pour cela un médiateur efficace. Elle joue un rôle fondamental dans notre ingénierie : elle soutient le passage entre global et local au niveau graphique puis sert à créer le besoin d'une mathématisation du phénomène observé.

Cette recherche est encore en cours. Elle prévoit une nouvelle expérimentation dans une classe de l'enseignant de l'exp. C, où l'on essaiera de donner plus de place au travail avec les ordres de grandeur.

BIBLIOGRAPHIE

- ARTIGUE M. [1996], L'enseignement des débuts de l'analyse : problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques, J.A.Dorta, Diaz et alii (eds), *La Universidad de La Laguna*, Tenerife, 27-53.
- BROUSSEAU G. [1998], *Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.
- CASTELA C. [1995], Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15** (1), 7-47.
- DOUADY R. [1986], Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7** (2), 5-31.
- DUVAL R. [1995], *Sémiosis et pensée humaine*, Bern : Peter Lang.
- GRAY E. & TALL D. [1992], Success and Failure in Mathematics : Procept and Procedure. Secondary Mathematics, *Workshop on Mathematics Education and Computers*, Taipei National University, 216-221.
- LEGRAND M. [1993], Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse, *Repères IREM*, **10**, 123-159.
- MASCHIETTO M. [2001], Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **21** (1.2).
- MAUREL M. & SACKUR C. [2001], Le symbolisme de l'algèbre dans l'approche de l'analyse, *Actes SFIDA16*, IREM de Nice.
- PRASLON F. [1994], *Analyse de l'aspect méta dans un enseignement de DEUG A concernant le concept de dérivée. Étude des effets sur l'apprentissage*, Mémoire de DEA, Université Paris 7.
- PRASLON F. [2000], *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/ DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7.
- ROBERT A. [1998], Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18** (2), 139-190.
- SFARD A. [1994], Reification as the birth of metaphor, in *For the Learning of Mathematics*, **14**, 1.

Michela Maschietto
 Università degli studi di Torino
 Dipartimento di Matematica
 Via Carlo Alberto, 10
 10123 - Torino - Italie
 ou
 Équipe DIDIREM
 Université Denis Diderot
 2, place Jussieu
 Case 7018, 75251 PARIS Cedex 05
maschietto@dm.unito.it

APPROCHE INTUITIVE DU CONCEPT DE LIMITE

Résumé. Plusieurs recherches au niveau international ont relevé de nombreuses difficultés et obstacles liés au concept de limite. Ces difficultés se situent à l'intersection de plusieurs niveaux : didactique, cognitif et méta-cognitif. En particulier la construction de ce concept exige un long travail didactique qui, en s'appuyant sur les intuitions les plus spontanées et immédiates, puisse les faire évoluer graduellement. Élément essentiel de cette évolution est la prise en compte et mise en discussion des convictions propres aux élèves.

L'approximation constitue selon nous une ressource précieuse pour une première rencontre avec l'infini potentiel, qui s'avère un passage crucial vers l'infini actuel impliqué dans la notion de limite. Cet article présente deux activités qui sont fondées sur cette ressource et qui ont l'objectif de faire émerger et de mettre en doute certaines convictions présentes chez les élèves.

1. Introduction

L'enseignement de l'analyse en Italie est présent dans tous les curricula (17-18 ans). Pourtant les concepts de limite, dérivée et intégrale, sont introduits de façon plutôt formelle, avec beaucoup de détails techniques et de démonstrations de théorèmes. Leurs applications se limitent aux exercices de routine avec la conséquence d'un apprentissage souvent mécanique et superficiel (Furinghetti et Paola (1991)).

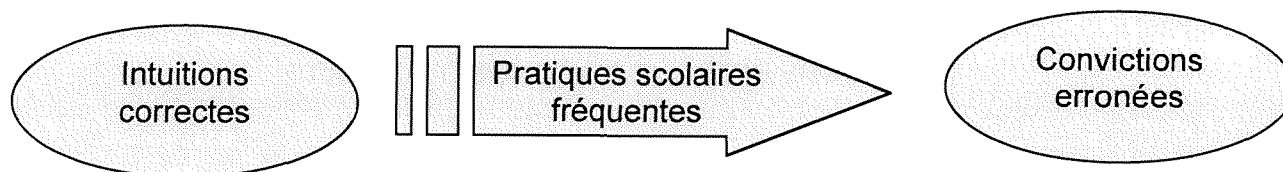
Plusieurs recherches au niveau international ont relevé de nombreuses difficultés et obstacles liés au concept de limite :

- d'ordre épistémologique (Brousseau (1998), Sierpiska (1985)), dus à des raisons internes aux mathématiques mêmes,
- d'ordre didactique (Artigue (1998), Brousseau (1998), CREM (1995), Groupe aha (1999)), dus aux pratiques d'enseignement peu efficaces,
- d'ordre cognitif (Cornu (1991), Dubinsky (1991), Sfard (1992), Tall & Vinner (1981), Tall (1996)), dus aux processus d'abstraction et de conceptualisation impliqués, d'ordre méta-cognitif (Zan (2001, 2002)), dus à l'ensemble des attitudes qu'adoptent les élèves dans leur rapport au savoir mathématique. Notre recherche se focalise sur l'interaction entre ces trois derniers aspects (didactique, cognitif et méta-cognitif), qui évidemment s'influencent réciproquement.

D'autres caractéristiques saillantes marquent et fondent l'activité de notre groupe :

- la verticalité, c'est-à-dire que tous les niveaux scolaires y sont représentés, tant chez les élèves que chez les membres du groupe,
- la prééminence accordée aux intuitions des élèves,
- la nécessité d'une familiarisation précoce avec l'infini.

En particulier, dans ces dernières années, nous avons conçu et réalisé une séquence d'activités diagnostiques des intuitions primaires des étudiants, autour de l'idée de limite. Celles-ci montrent, d'une part, l'existence d'intuitions propices chez les élèves les plus jeunes, d'autre part, le manque d'évolutions significatives au cours du parcours scolaire (Dallanocce et al. (2000), Alberti et al. (2001)). La pratique didactique, avec son insistance sur les techniques et sa formalisation précoce, semble ignorer ces idées naïves et générer parfois des convictions erronées :

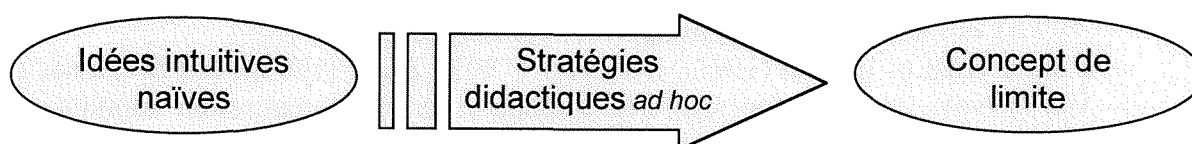


2. Notre proposition

Nous faisons l'hypothèse que les concepts complexes comme celui de limite ne peuvent être vraiment compris qu'après un long travail didactique. Celui-ci doit s'appuyer sur les intuitions les plus spontanées et immédiates pour pouvoir engendrer chez l'élève un cadre cohérent et solide d'images mentales. Il est alors nécessaire de conduire des activités d'explicitation et d'orientation des idées intuitives, pour qu'elles puissent évoluer graduellement. La formation des concepts pourra, ainsi, suivre le passage naturel du concret à l'abstrait. La formalisation ne serait ainsi plus vécue comme artificielle, mais, apparaîtrait comme une exigence fondamentale, dont les élèves mêmes percevront la nécessité : *"il est intéressant de construire l'analyse en termes d'objets mentaux jusqu'au moment où l'on perçoit que ceux-ci ne suffisent pas et où on peut comprendre les raisons qui imposent la formalisation en ε et δ "* (CREM (1995)).

Nous sommes aussi conscients que cette évolution n'est pas vraiment facile et naturelle, et que, souvent, de véritables conflits se vérifient entre les intuitions « naïves » et les concepts mathématiques en train d'être formés. Dans ce processus, on ne peut pas ignorer l'aspect méta-cognitif : les attitudes négatives envers soi-même ou envers les mathématiques risquent de devenir des obstacles supplémentaires pour l'apprentissage.

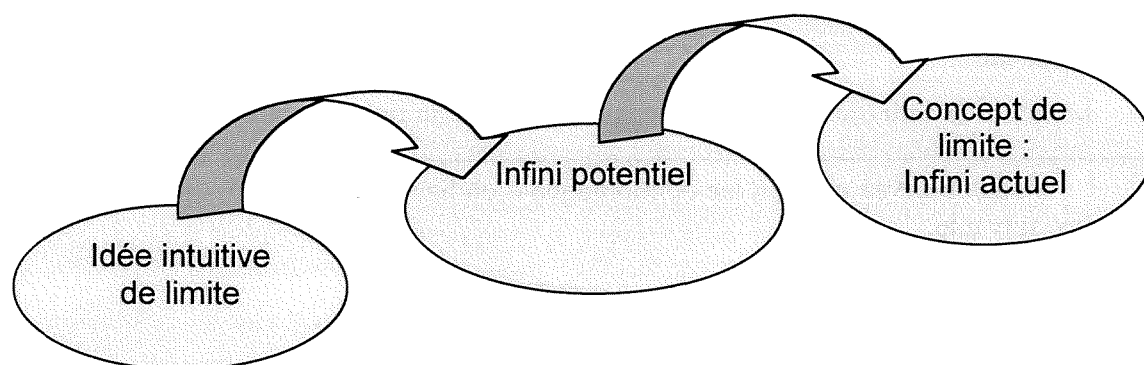
Il devient donc nécessaire de mettre au point des stratégies didactiques qui favorisent, d'un côté, le processus de conceptualisation et, de l'autre, la prise de conscience du « monde intérieur » d'idées, de convictions et de craintes.



Le travail de l'enseignant, doit, selon nous, se situer à trois niveaux différents :

- au niveau des contenus mathématiques, en saisissant les occasions, les plus favorables, présentes dans tous les programmes scolaires,
- au niveau méthodologique, en créant des situations d'apprentissage riches de sens qui permettent de fixer l'attention sur la stratégie (processus) plutôt que sur le résultat (produit),
- au niveau méta-cognitif, en permettant aux élèves d'explicitier et discuter leurs croyances implicites.

En ce qui concerne le premier niveau, pour construire le concept de limite, qui implique le recours à l'infini actuel, nous croyons essentiel le passage à travers l'infini potentiel.



Dans ce papier, nous présenterons des activités sur le thème de l'approximation qui peuvent réaliser le premier de ces passages.

Un autre terrain que nous avons reconnu riche de possibilités, aussi pour la perspective du deuxième passage, est celui des suites géométriques (Grugnetti et Rizza (2002)).

3. L'approximation

Comme nous venons de le dire dans le paragraphe précédent, l'approximation, en tant qu'idée de rapprochement toujours améliorable et contrôlable vers une limite théorique, constitue selon nous une ressource précieuse pour un premier contact avec l'infini potentiel.

D'autre part, comme le montrent Alberti et al. (2001) au fur et à mesure que l'élève avance dans sa scolarité, l'approximation semble perdre de sa légitimité et devenir quelque chose d'étranger, presque un empêchement au développement de l'activité mathématique. Les stratégies de résolution « empiriques » sont progressivement négligées en faveur de techniques de calcul de plus en plus sophistiquées. La pratique scolaire, avec son contrat implicite, contribue à renforcer chez les élèves la conviction que pour résoudre chaque problème il faut explicitement utiliser de la mathématique « véritable » ; en particulier,

1. au niveau des stratégies : chaque problème doit se résoudre par une formule ou un algorithme (Conv 1),
2. au niveau des résultats : chaque problème doit générer un « beau » résultat, exprimé par un nombre entier ou avec peu de chiffres décimaux (Conv 2).

Dans l'école italienne, on ne souligne pas suffisamment le fait que, en réalité, beaucoup de problèmes ne vérifient pas les conditions 1 et 2 et que les méthodes d'approximation constituent un aspect essentiel des mathématiques. En particulier l'analyse, en tant que moyen de modélisation du monde réel, ne peut pas ignorer les problèmes d'approximation qui surgissent de chaque opération de mesure. Même la définition ϵ - δ de limite peut être interprétée en termes d'approximation : on établit d'abord l'erreur qu'on est disposé à accepter (ϵ) et par conséquent on choisit une stratégie (δ) qui permet de ne pas dépasser tel seuil de tolérance.

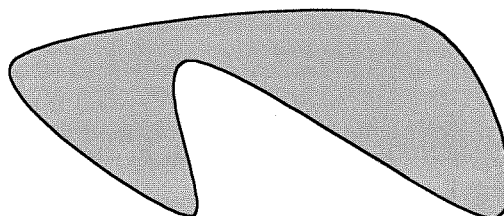
Nous montrons ici deux activités qui permettent, d'un côté, d'explicitier les convictions des élèves (Conv 1 et Conv 2), de l'autre, de rendre à l'approximation en mathématiques son statut de dignité et de pertinence.

Les activités ont été proposées à différents niveaux scolaires. Après une présentation générale des résultats, nous nous focaliserons sur la situation d'une classe de seconde (16 ans), où nous avons réalisé une discussion collective, et dont nous avons analysé plus en détail les réponses des élèves.

4. Le petit lac

La première activité a été proposée aux élèves, par la fiche suivante :

Vous observez un petit lac de montagne d'en haut et vous le dessinez en obtenant la figure suivante.



Qu 1 : Peut-on mesurer l'aire de la figure grise ?

Qu 2 : Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

4.1. Analyse a priori

Il s'agit d'une situation problématique, concernant la détermination de l'aire d'une figure irrégulière, assez rare dans l'école italienne, surtout au niveau secondaire où l'attention est au contraire consacrée avant tout au calcul d'aires de figures typiques (polygones et cercles), tandis que les méthodes empiriques de l'école primaire sont progressivement abandonnées.

Avec ce problème, nous envisageons de vérifier si les élèves :

- admettent la possibilité de calculer l'aire d'une figure irrégulière,
- sont disposés à utiliser des méthodes empiriques au lieu de règles et formules,
- prennent conscience de l'approximation nécessaire pour la mesure.

Ce problème est particulièrement indiqué pour présenter le thème de l'approximation, profitant du conflit qu'il provoque entre l'intuition que l'aire existe et l'impossibilité de la calculer exactement. De plus, en tant que problème de mesure, il favorise :

- le passage graduel des techniques opérationnelles à des constructions théoriques de plus en plus avancées,
- la maîtrise contemporaine de différents registres (graphique et numérique),
- la transposition en classe du développement historique du calcul infinitésimal.

L'emploi « vertical » de ce type d'activités, c'est-à-dire à tous les niveaux scolaires, avec, évidemment, des nuances et des possibilités d'approfondissement différentes, est, selon nous, très important.

4.2. Analyse a posteriori

L'activité a été proposée dans 15 classes, Nous montrons ici les résultats de 4 d'entre elles.

Le tableau suivant (Tableau 1) indique pour chaque classe, les pourcentages¹ des réponses positives, des réponses négatives et des élèves qui ne répondent pas à la première question (Qu 1) :

QUESTION 1

Classe	Age	Nombre	% oui	% non	% n. r.
Cl 1	9	19	0	100	0
Cl 2	13	22	9	82	9
Cl 3	14	22	59	41	0
Cl 4	16	12	67	17	17

Tableau 1

Nous pouvons remarquer que les réponses positives (« On peut mesurer l'aire de la figure ») augmentent avec l'âge, tandis que celles qui sont négatives diminuent. Les résultats semblent indiquer une bonne influence de l'enseignement sur la construction du concept d'aire. Mais nous montrerons, par l'analyse des réponses à la deuxième question (Qu 2) (Tableaux 2 et 3), que, même si l'existence de l'aire est affirmée, beaucoup d'élèves n'indiquent pas une stratégie de mesure ou choisissent des voies erronées. Les convictions des élèves semblent ici s'opposer à l'acceptation des méthodes de résolution approchées, nécessaires pour la résolution effective du problème.

4.2.1. « L'aire ne peut pas être mesurée car... »

Les justifications du « non » ont été classées par rapport aux arguments mathématiques utilisés.

Selon les élèves, on ne peut pas mesurer l'aire car :

- N1 la figure est courbe, est irrégulière, n'est pas régulière ... (description exclusivement qualitative),
- N2 la figure n'a pas de côtés, qu'on peut mesurer... (description avec introduction d'aspects quantitatifs),
- N3 la figure n'est pas un polygone, n'est pas un cercle... (impossibilité de se ramener à des figures connues),
- N4 il n'y a pas de formules pour cette aire... (absence de formules spécifiques),
- N5 Autres réponses (aucune justification ou réponses non pertinentes).

QUESTION D2 : « non »

Classe	N1 (%)	N2 (%)	N3 (%)	N4 (%)	N5 (%)
Cl 1	53	11	5	0	32
Cl 2	27	23	23	0	9
Cl 3	14	14	5	9	0
Cl 4	8	0	0	8	0

Tableau 2

¹ Le calcul de pourcentages sur des effectifs aussi faibles n'a pas beaucoup de sens d'un point de vue statistique, il n'est indiqué ici que pour faciliter la lecture comparative des différentes lignes de ce tableau et des suivants.

Nous remarquons que, chez les élèves les plus jeunes (9 ans), les justifications qualitatives (N1) sont les plus nombreuses : Anna : « [L'aire ne peut pas être mesurée car la figure] a des vagues » ; Martina : « [L'aire ne peut pas être mesurée car la figure] est courbe ».

Certaines caractéristiques non pertinentes sont aussi invoquées et classées dans les réponses (N5). Sara : « [L'aire de la figure grise ne peut pas être mesurée car] les couleurs ne se mesurent pas ».

Dans la classe Cl 2 (13 ans), le recours à des figures connues (N3), en particulier au cercle, dont les élèves viennent d'étudier l'aire, devient plus évident. Samuele : « [L'aire de la figure ne peut pas être mesurée car] les points ne sont pas à égale distance du centre et ils n'ont pas de rayons ou de diamètres ».

Chez les élèves plus âgés (14 et 16 ans) les justifications deviennent de plus en plus « mathématiques » : l'impossibilité, de résoudre le problème, est attribuée aussi à l'absence de formules (N4). Elena : « Selon moi, l'aire de la figure grise ne peut pas se mesurer parce qu'il n'existe aucune formule mathématique pour la calculer ».

4.2.3. « L'aire peut être mesurée car... »

Les justifications du « oui » ont été classées par rapport au degré d'explication de la stratégie de mesure à adopter.

Selon certains élèves, on peut mesurer l'aire mais...

O1 je ne sais pas comment, je n'ai pas les outils nécessaires...,

O2 il n'y a pas de formules....

D'autres élèves affirment qu'on peut mesurer l'aire car...,

O3 on peut transformer la figure en un polygone de la même aire...,

O4 on peut découper la figure en polygones ou la quadriller...,

O5 Autres stratégies.

QUESTION 2 : « oui »

Classe	O1 (%)	O2 (%)	O3 (%)	O4 (%)	O5 (%)
Cl 1	0	0	0	0	0
Cl 2	0	0	5	5	0
Cl 3	9	5	9	32	5
Cl 4	17	17	0	33	0

Tableau 3

Il y a un bon pourcentage d'élèves qui déclarent ne pas savoir calculer l'aire (O1, O2) parce qu'ils n'ont pas les outils ou les formules nécessaires. Même si l'existence de l'aire est admise, on retrouve ici des argumentations semblables à celles de la table précédente ; en particulier, on évoque la nécessité de formules, dont on ne dispose pas : Federica (16 ans) « Oui, mais je ne sais pas avec quelles formules on peut trouver l'aire ».

La première tentative effective de résolution du problème est celle de transformer la figure en un polygone de même aire (O3), sans considérer que l'égalité des périmètres n'implique pas celle des aires. Valentina (14 ans) : « Selon moi oui, [on peut mesurer l'aire], avec un procédé un peu long. On doit contourner la figure avec un fil aussi long que le contour. Puis, on dispose le fil de façon à former un rectangle et on calcule l'aire avec la formule $b \cdot h$ ».

Les réponses correctes font recours à des découpages en polygones ou à quadrillages (O4). Cependant on n'admet pas toujours explicitement que la méthode suivie produit une approximation. Même ceux qui le font, semblent lui attribuer une connotation négative, témoignée par l'emploi du terme « approximatif », au lieu d'« approché ». Leonardo (16 ans) :

« Peut-être que oui. En dessinant un treillis avec de très petits carrés, on pourrait peut-être avoir une idée approximative ». L'idée dynamique d'itération et d'approchement de plus en plus améliorée n'est présente dans aucune réponse.

Pour conclure l'analyse du tableau 3, nous soulignons que le pourcentage de la réponse O5 (5%) ne concerne qu'une seule réponse ; il s'agit d'une méthode « physique » proposée par un élève de 14 ans, Christopher. Il écrit : « Selon moi oui, [on peut mesurer l'aire] en découpant la figure et en la pesant ; après avoir obtenu le poids (la masse), la densité et ensuite obtenir le volume. Puis on doit calculer l'aire ».

4.3. Discussion

Dans une classe de seconde (indiquée par Cl 4 dans les tableaux 1,2,3 précédents), nous avons discuté, avec les élèves, de leurs réponses. Notre objectif était d'enquêter sur les convictions des élèves, en particulier à propos de la nécessité de formules (Conv 1) et de la nature du résultat attendu (Conv 2), et, par conséquent, de faire émerger les résistances à reconnaître la légitimité de l'approximation.

Nous avons, avant tout, comparé les réponses différentes et, assez tôt, la classe est arrivée à l'accord sur la stratégie du quadrillage. Cependant quelques élèves ont émis des doutes à propos de la légitimité de la méthode : celle-ci n'était pas « précise » ou elle n'était pas « juste ». Nous avons, alors, demandé à la classe de donner une définition de ce qu'ils entendaient pour « mesurer d'une façon précise ». Pour les élèves cela a le double sens de :

1. couvrir toute la figure (Déf 1),
2. trouver comme résultat un nombre entier ou décimal, avec un nombre fini de décimales (Déf 2, celle-ci renvoie à la conviction Conv 2 du « beau » résultat)

Il semble exister pour les élèves un lien très fort entre ces deux définitions. Tout le monde est sûr que, par exemple, la mesure de l'aire d'un rectangle est précise dans le double sens de Déf 1 et Déf 2 ; d'ailleurs, cette certitude émerge en lien étroit avec la conviction Conv 1, de l'existence d'une formule. Le rapport entre les deux convictions Conv 1 et Conv 2 semble donc être celui d'une double implication :

$$\text{Conv 1} \Leftrightarrow \text{Conv 2}$$

Au contraire, dans le cas du petit lac, aucune des deux convictions ne semble être viable et la classe est désorientée face à l'impossibilité de « mesurer d'une façon précise ».

Ensuite la classe s'est posée le problème de « comment améliorer la précision ». Les stratégies proposées par les élèves ont été les suivantes :

- avec des carrés plus petits,
- avec d'autres polygones (des triangles, par exemple, qui semblent mieux suivre le contour de la figure).

L'intervention de l'enseignant a été nécessaire pour suggérer l'idée d'itération impliquée dans la première stratégie. Les élèves n'étaient pas tout à fait convaincus que le problème pouvait avoir plusieurs résultats (approchés), de plus en plus précis.

Ce qui était décidément déstabilisant était la possibilité effective de trouver un résultat « précis » à la fin du processus d'itération. L'avancement progressif semble produire toujours de nouveaux décimaux. Ce constat fait apparaître une conception inattendue : pour une élève, Federica, (Cl 3) il est impossible d'arriver au résultat parce que « les nombres ne peuvent pas être arrêtés » : elle est sûre que la mesure « exacte » est irrationnelle et qu'elle ne peut jamais être atteinte avec des approximations rationnelles.

En conclusion, le problème posé a certainement permis une certaine explicitation et remise en question des systèmes de convictions des élèves. Après la discussion, que nous considérons comme partie essentielle de l'activité, nous pouvons distinguer entre :

1. les convictions erronées qui résistent :
 - le problème posé n'est pas un véritable problème de mathématiques parce qu'on ne trouve pas un résultat « précis »,
 - vu qu'on ne peut pas le trouver, probablement le résultat « précis » n'existe pas,
 - les approximations ne sont pas de véritables résultats car :
 - i. il est impossible de choisir la meilleure, parmi elles, et il est difficile de les comparer,
 - ii. il n'existe pas une formule qui garantit un résultat exact exprimé avec un « beau » nombre (donc la validité du système Conv 1 $\Leftrightarrow$ Conv 2).
2. les convictions correctes en train d'être construites :
 - beaucoup de problèmes exigent l'approximation, l'opération de mesure approchée ne donne pas un résultat unique,
 - la précision est toujours améliorable.

5. Le « jeu » de la cible

5.1. Description de l'activité

1. Les élèves et l'enseignant disposent d'une feuille blanche A4. L'enseignant dessine un point sur sa feuille et il donne les règles du jeu suivantes :
 - a. le vainqueur est celui qui saura dessiner sur son papier un point exactement à la même place que celui de l'enseignant,
 - b. pour déterminer opérationnellement le vainqueur, on pose la feuille de chaque élève sur celle de l'enseignant : Les deux points doivent coïncider exactement.
2. Les élèves jouent,
3. l'enseignant, sur un transparent, reporte le nuage des points, avec le numéro de l'élève relatif. Après avoir constaté que personne n'a touché le point, l'enseignant négocie un nouveau système de règles : il est demandé aux élèves de décider, respectivement, comment choisir le/les gagnants et comment le/les désigner opérationnellement. La définition de ce nouveau système de règles est à faire « à l'aveuglette », c'est-à-dire sans montrer le résultat collectif obtenu. On s'attend à construire une sorte de classement auquel est associée une suite de circonférences concentriques, comme dans le cas d'une cible,
4. l'enseignant dévoile le nuage des points avec l'ensemble des circonférences concentriques établi par la classe,
5. avec les nouvelles règles, les élèves jouent de nouveau,
6. l'enseignant demande s'il faut redéfinir les rayons des circonférences,
7. éventuellement les élèves jouent une troisième fois,
8. l'activité se conclut avec la consigne de rédiger individuellement la réponse à la question suivante : « À la lumière de ce qui s'est passé aujourd'hui, pourquoi peut-on accepter un résultat qui n'est pas exact ? Quand ? ».

5.2. Analyse a priori

5.2.1. Pourquoi un « jeu » ?

La présence des guillemets dans le titre est due au fait que, même si cette activité se présente sous la forme d'un jeu, nous sommes conscients que nous ne pouvons pas la considérer comme un véritable jeu au sens de la vaste littérature consacrée à cet argument.

Cependant, notre but didactique et de recherche se situe entre connaissances et méta-connaissances de l'élève. Il ne veut pas prendre en compte, en fait, seulement les connaissances mathématiques que l'élève possède, ou qu'il est appelé à posséder, mais aussi, les connaissances « individuelles et subjectives », que l'élève a sur soi-même, sur l'environnement et les mathématiques. Comme R. Zan (2002), nous avons justement appelé ces connaissances : « convictions ». Vu leur structure quasi-logique et leur organisation en grappes isolées, la modalité de « jeu » nous est, alors, par la plus favorable pour les révéler et pour mettre en doute leur domaine effectif de validité.

Même si cette activité ne peut non plus pas être considérée comme une situation véritablement adidactique, elle fait pourtant vivre des phases d'action, de validation, de formulation et d'institutionnalisation. En plus, elle assure une certaine dévolution du problème et permet la création de certains moments adidactiques.

5.2.2. Pourquoi ce « jeu » ?

La première hypothèse qui soutient le choix de cette activité est qu'il existe une forte analogie entre « possibilité de déterminer exactement une mesure » et « possibilité de déterminer exactement un point du plan ».

La deuxième hypothèse, que nous faisons, est que cette relation d'analogie étroite subsiste aussi au niveau des systèmes de convictions associées.

En travaillant, alors, sur les convictions inhérentes à la nature du jeu, (« le vainqueur est celui qui touche exactement le point, ou personne »), nous nous attendons à ce que, par prégnance analogique, il soit possible de conditionner et de modifier les croyances relatives à la mesure en mathématique (« soit la mesure peut être déterminée exactement, soit elle n'existe pas »).

5.2.3. Objectifs locaux

L'activité se propose d'agir à deux niveaux :

- déstabiliser la certitude de pouvoir toujours déterminer exactement une mesure. Ceci permet la remise en question de la puissance exclusive et exhaustive des formules, seules susceptibles de donner lieu à un résultat acceptable,
- discuter et légitimer un nouveau système de règles. Ceci permet de déplacer l'axe de l'attention de l'existence, ou non, d'un résultat (et d'une mesure) exact, et donc acceptable, à la qualité de l'approximation opérée.

5.2.4. Stratégies résolutives possibles

S1 : Jouer par hasard,

S2 : Jouer, en estimant la distance absolue de son propre point à celui de l'enseignant,

S3 : Jouer, en prenant en compte :

- la position de son propre point par rapport aux autres points,
- la suite de circonférences concentriques établies.

Il faut souligner que le passage d'une stratégie de type S2 à une stratégie de type S3, marque le passage d'une vision statique à une vision dynamique de l'approximation. Ce passage est favorisé, même s'il n'est pas obligé, par la répétition du jeu et par les discussions collectives qui concernent les fourchettes de tolérance admissibles.

Utiliser la stratégie S2 signifie adopter encore une vision de l'approximation comme une « opération rudimentaire de mesure » qu'on fait une seule fois. En revanche, utiliser S3, implique la prise de conscience, d'une part, de la suite des points convergents vers le point de l'enseignant, d'autre part, d'un processus itératif. L'approximation assume, alors, le caractère « dynamique » de procédé de mesure toujours améliorable.

5.2.5. Milieu et contrat didactique

Pour déstabiliser la conviction selon laquelle « il existe un et un seul vainqueur », nous l'avons supposée vraie (démonstration par l'absurde !) et l'avons désignée comme règle fondamentale du jeu.

Le résultat négatif de la première partie, avec ce premier système de règles, se révèle alors comme élément d'invalidation forte du système de convictions associées. La conviction d'un seul vainqueur ne résiste pas face à la rétroaction du milieu. Les règles fixées par l'enseignant engendrent un conflit, une rupture du contrat, et ouvrent la négociation d'un nouveau système de règles. Cette négociation se révèle significative pour un autre aspect : décider de la modalité à adopter pour définir des vainqueurs crée une ambiance favorable pour que le passage de la stratégie S2 à la stratégie S3 se fasse. En particulier la discussion sur l'utilisation du compas plutôt que de la règle graduée favorise la construction consciente d'une suite de circonférences de rayon toujours inférieur.

5.3. Analyse a posteriori

Nous avons proposé cette activité à 7 classes d'élèves de 13/14 ans et à des classes d'élèves de 17/18 ans.

Dans toutes les classes, le déroulement de l'activité a été presque pareil : après avoir joué la première fois, et avoir constaté l'inadéquation du premier système de règles, les élèves ont proposé comme vainqueur « celui qui est arrivé le plus près ».

Par contre, le problème de comment déterminer de façon opérationnelle le vainqueur a été difficile à surmonter. Le recours au compas n'a pas été immédiat, ainsi que l'admission de la possibilité de plusieurs vainqueurs.

Dans une classe de 14/15 ans, avant même de jouer pour la première fois, les élèves ont déclaré qu'il n'y aurait sûrement pas de vainqueur. L'activité s'est alors configurée comme moment de validation, plutôt que de conflit.

Dans d'autres classes (cinquième et première), nous avons observé des phénomènes d'interférence avec d'autres domaines des mathématiques (probabilité, théorie des erreurs en physique). Le lien analogique entre les deux activités (le petit lac et la cible) a été discuté de façon approfondie seulement dans une classe de seconde et il s'est révélé explicite seulement après le travail de médiation de l'enseignant.

6. Conclusions

L'activité du petit lac a permis de faire émerger certaines convictions, supposées présentes chez les élèves, probablement dues à la pratique didactique et d'en dévoiler d'autres, imprévues (Federica, Cl 3).

L'activité de la cible a permis de mettre en doute certaines de ces convictions, en plongeant les élèves dans un contexte problématique riche et inusuel. Les deux activités, ensemble, ont conduit les élèves à accepter la nécessité de l'approximation et sa légitimité en mathématiques.

Pourtant ces activités n'ont pas encore réussi à associer une valeur positive à l'approximation et à lui rendre son véritable statut mathématique ; les élèves n'ont saisi que partiellement l'approximation comme procédé.

Dans une prospective visée et par les résultats de notre recherche, nous espérons déstabiliser et corriger les convictions qui résistent encore. En particulier, Nous souhaitons miner la croyance que pour chaque problème existe toujours une formule (Conv 1) et un « beau » résultat (Conv 2) *vice-versa* (Conv 1 $\Leftrightarrow$ Conv 2). À ce propos, nous sommes maintenant en train de tester des activités concernant l'aire de rectangles où le rapport parmi les côtés est un nombre irrationnel.

Nous voudrions aussi avancer sur le terrain de l'approximation : il nous reste encore à achever le passage d'une vision statique à une vision dynamique de l'approximation, c'est à dire du concept de « résultat approché » à celui de « suite d'approximations » qui conduit à une limite. Nous poursuivrons ces objectifs par la conception et la mise en place d'autres activités de la même typologie que celle du « jeu » de la cible.

BIBLIOGRAPHIE

- ALBERTI N., ANDRIANI M. F., BEDULLI M., DALLANOCE S., FALCADE R., FOGLIA S., GREGORI S., GRUGNETTI L., MARCHINI C., MOLINARI F., PEZZI F., RIZZA A. & C. VALENTI [2001], Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite, *Riv. Mat. Univ. Parma*, (6) **3***, 1-21.
- ARTIGUE M. [1998], L'évolution des problématique en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **18** (2), 231-262.
- BROUSSEAU G. [1998], *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage ed.
- Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) [1995], *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM.
- Cornu B. [1991], Limits, *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (ed.), Kluwer Academic Publisher, 153-166.
- DALLANOCE S., GRUGNETTI L., MOLINARI F., RIZZA A. & AL. [2000], A cognitive co-operation across different sectors of education, en Ahmed, Kraemer, Williams (eds.) *Proceedings of CIEAEM 51*, Chichester, Horwood Publishing, 297-303.
- DUBINSKY E. [1991], Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical thinking*, 95-126, Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.
- DUVAL R. [1993], Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Sciences Cognitives et Didactique* **5**, IREM de Strasbourg.
- FISCHBEIN E. [1973], Intuition, structure and heuristic methods in teaching Mathematics in A.G. Howson (ed) *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press.
- FISCHBEIN E. [1987], *Intuition in Science and Mathematics*, D. Reidel Publishing Company.
- FURINGHETTI F. & PAOLA D. [1991], The construction of a didactic itinerary of calculus starting from students concept images (ages 16 –19), *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **22** n. 5, 719-729.
- GILBERT T. & N. ROUCHE [2001], *La notion d'infini*, Normandie Roto Impression s.a.
- GROUPE AHA [1999], *Vers l'infini pas à pas (approche heuristique de l'analyse)*, DeBoeck, Wesmael Bruxelles.
- GRUGNETTI L., RIZZA A. & AL. [2002], Piccole intuizioni crescono : alcune attività per sviluppare idee intuitive a livello di scuola dell'obbligo en Malara N.A., Marchini C., Navarra G., Tortora R. (eds.), *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora editrice, Bologna.
- MARCHINI C. [1999], Il problema dell'area, *L'Educazione Matematica*, anno XX-serie VI.1, 27-48.
- SFARD A. [1992], On the dual nature of mathematical conceptions: reflexions on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational studies in mathematics*, Kluwer Academic Publisher, Netherlands **22**, 1-36.
- SIERPINSKA A. [1985], Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, Grenoble **6**(1), 5-67.
- TALL D., VINNER S. [1981], Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational studies in mathematics* **12**(2), 151-169.

- TALL D. [1996], Fonctions and Calculus, in A. J. Bishop et al. (eds), *International Handbook of Research in mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 289-325.
- ZAN R. [2001], Metacognizione e difficoltà in matematica, *La matematica e la sua didattica* **2**.
- ZAN R. [2002], Verso una teoria per le difficoltà in matematica, *Seminario Nazionale Italiano di Didattica della Matematica 2002*, Pisa.

Rossana Falcade et Angela Rizza
Università degli studi di Parma
Dipartimento di matematica
Unità locale di ricerca
Via D'Azeglio, 85
I - 43100 Parma
Rossana.Falcade@unipr.it
Angela.Rizza@unipr.it

CATHERINE CRONCIN, BRIGITTE JAUFFRET, ABDENACER MAKHLOUF,
NICOLE NICOLAI et CLAUDE SERRIS

SUR L'APPROCHE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR ABSOLU DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Résumé. L'objectif de notre atelier est de présenter, à partir d'une série d'activités, les concepts de l'Analyse (limites, dérivées, intégrales). L'approche est fondée sur l'usage de notions d'ordres de grandeur absolus (nombres très grands, modérés ou très petits) issues d'un travail de réflexion mené dans les années 90 par E.Meyer, A.Makhlouf et R. Lutz et publié dans la brochure 103 de l'APMEP. L'adaptation pédagogique a été menée et expérimentée par des enseignants du groupe GROG en Alsace et en Picardie.

1. Le cadre logique

L'introduction des ordres de grandeur peut s'obtenir en se plaçant dans le cadre de la théorie des ensembles et en introduisant le prédicat unaire « explicité » avec les axiomes suivants :

- A1. 1 est explicité.
- A2. Si $x \in \mathbb{N}$ est explicité, alors tout $y < x$ l'est aussi.
- A3. Si x et y sont des entiers explicités, alors $x + y$, xy et x^y sont explicités.
- A4. Il existe un $x \in \mathbb{N}$ qui n'est pas explicité.

Définition

Un entier non explicité est dit très grand.

Définition des ordres de grandeur des nombres réels

- 1. Un nombre réel est très grand positif (resp. négatif) si sa partie entière (resp. l'opposé de sa partie entière) est très grande.
- 2. Un réel x est très petit (noté tp) si $x=0$ ou $1/|x|$ est un très grand positif.
- 3. Un réel x est modéré si $|x|$ n'est pas un très grand positif. Ceci est équivalent à $\lfloor |x| \rfloor$ est un entier explicité.
- 4. x est explicité s'il est bien défini dans la théorie des ensembles.

Règles de Leibniz

modéré+modéré = modéré
tp + tp = tp

modéré $\times$ modéré = modéré
tp $\times$ modéré = tp

2. Vers un équivalent de la notion de limite externe aux mathématiques classiques

Il s'agit d'introduire les ordres de grandeurs dans l'ensemble des entiers et des réels, ce qui est une bonne occasion pour parfaire la présentation de ces ensembles avec les élèves. Ensuite, grâce à une analyse rigoureuse sur les nombres, évaluer une expression numérique à un très petit près, ce qui prépare le terrain à l'Analyse sur les fonctions.

2.1. Ecriture décimale des nombres très petits

- a) Quelle est la 1 000 000 000^{ème} décimale d'un nombre très petit ?
- b) Que dire des décimales d'un réel très petit ?

2.2. Ordres de grandeur : très petit, modéré ou très grand ?

- Préciser l'ordre de grandeur des nombres 1^3 , $1^{100\,000\,000}$, où ∞ est un entier très grand.
- Même question pour 2^3 , $2^{100\,000\,000}$, 2^∞

2.3. Nombres très proches

Deux nombres réels sont dits **très proches** si leur différence est très petite, c'est-à-dire, si elle est nulle ou si la valeur absolue de son inverse est très grande. On note $x \approx y$.

- Soient a, a', b, b' des nombres réels tels que $a \approx a'$ et $b \approx b'$. A-t-on $ab \approx a'b'$?
- Soient a et b deux réels non nuls tels que $a \approx b$. A-t-on $\frac{1}{a} \approx \frac{1}{b}$?
- Soit h un réel très petit. Démontrer que $\sqrt{1+h} \approx 1$
- Donner l'ordre de grandeur de chacun des nombres suivants. Si le nombre est modéré, préciser le réel explicité très proche :

$$\frac{h}{h^2+5h} \text{ avec } h \text{ tp}, \quad \frac{2\omega+1}{\omega+3} \text{ avec } \omega \text{ tg}, \quad \frac{3a+1}{a-2} \text{ avec } a \approx 2; a \neq 2, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{h}\right) \text{ avec } h \text{ tp}.$$

L'introduction des ordres de grandeur amène à des discussions approfondies sur les nombres et permet de donner très naturellement la définition de la limite suivante :

Définition

Soit f une fonction explicitée $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \approx 0 \text{ alors } f(x) \approx 0$

3. Dérivation

3.1. Vitesse instantanée

Un mobile en chute libre suit approximativement la loi $D(t) = 5t^2$ (distance parcourue $D(t)$ en mètres, temps t en secondes).

On sait calculer la vitesse moyenne sur un intervalle de temps Δt . On peut ainsi déterminer cette vitesse moyenne sur des intervalles de temps d'une seconde, entre $t=0$ et $t=1$, puis $t=1$ et $t=2$, etc.

On conçoit ainsi que la vitesse du mobile n'est pas constante : elle varie avec t . On se fixe comme but de déterminer la vitesse atteinte à l'instant $t=10$. Comment parvient-on à définir ce nombre à l'aide des notions liées aux ordres de grandeur ?

3.2. Tangente à une courbe

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 4]$ par $f(x) = 4x - x^2$. Soit A le point d'abscisse 1 de $\mathbf{P}$, représentation graphique de f . Soit M le point d'abscisse x , variable, de $\mathbf{P}$.

- Déterminer le coefficient directeur de la droite (AM) .
- On suppose que M varie en restant très proche de A , c'est-à-dire que $x = 1+h$, avec h tp. On note alors D_h la droite (AM) . Que devient alors l'expression du coefficient directeur de D_h ? Déterminer complètement l'équation réduite de D_h .
- Si l'on prend deux réels très petits h et h' , les droites D_h et $D_{h'}$ sont distinctes, avec des coefficients directeurs différents.

On considère le point de D_h et le point de $D_{h'}$ qui ont pour abscisse 1000. Calculer la différence de leurs ordonnées. Quel est l'ordre de grandeur de cette différence ?

Plus généralement, que dire de la différence des ordonnées de deux points de D_h et $D_{h'}$ qui ont la même abscisse modérée a ?

Décrire ce qui se passe « visuellement » sur un graphique pour les droites D_h . On cherche maintenant à préciser ce phénomène :

- d) Prouver que les coefficients directeurs des droites D_h sont tous très proches d'un réel explicité m . Écrire l'équation réduite de la droite ?, passant par A et de coefficient directeur m . Quel rôle joue cette droite pour le faisceau des droites D_h sur le graphique ?

3.3. Synthèse des exercices précédents

La définition du nombre dérivé d'une fonction en un point à l'aide des notions liées aux ordres de grandeur peut être formulée ainsi.

Définition.

Soit f une fonction explicitée et a un nombre explicité. Le nombre dérivée de la fonction f en a est un nombre explicité (quand il existe) très proche de l'expression $\frac{(f(a+h)-f(a))}{h}$ avec h très petit.

3.4. Dérivabilité

- a) Montrer que la fonction « inverse » $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbf{R}^*$, est dérivable en $x=2$, et calculer $f'(x)$.
- b) Montrer que la fonction « racine » $r: x \rightarrow \sqrt{x}$ pour $x \in [0; +[$ n'est pas dérivable en $x=0$.
- c) Montrer que par contre, la fonction « racine » est dérivable en $x=1$ et calculer $r'(1)$.

4. Aires et intégrales

4.1. Aire sous un arc de parabole

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x)=x^2$.

La représentation graphique P de f est un arc de parabole. On cherche l'aire de la portion de plan limitée par l'axe (Ox) , P , et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

Définissons une fonction en escalier ? de la façon suivante :

φ prend les mêmes valeurs que f aux abscisses

$$x_0=0, x_1=\frac{1}{n}, x_2=\frac{2}{n}, x_3=\frac{3}{n}, \dots, x_{n-1}=\frac{n-1}{n}, x_n=1$$

et reste constante sur les intervalles

$$\left[0; \frac{1}{n}\right[, \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right[, \left[\frac{2}{n}; \frac{3}{n}\right[, \dots, \left[\frac{n-1}{n}; 1\right[,$$

avec n entier très grand

Nous appellerons « intégrale de φ entre a et b » le nombre noté

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k) \quad \text{où } c_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

- a) Prouver que, pour tout x de $[0 ; 1]$, on a $f(x) \approx \varphi(x)$.
- b) Prouver que $\int_0^1 \varphi$ est un réel modéré très proche d'un réel explicité. Quelle mesure de l'aire sous l'arc de parabole obtient-on ainsi ?

5. Prolongement

5.1. Ombre d'un nombre réel

Les questions suivantes nécessitent un axiome supplémentaire :

Tout réel modéré x est très proche d'un réel explicité (nécessairement unique) appelé son ombre, notée ${}^{\circ}x$.

- a) Prouver que cet axiome entraîne la propriété de Cauchy : Si (u_n) est une suite explicitée de nombres réels telle que pour tous entiers naturels m, n très grands on ait $u_m \approx u_n$, alors la suite est convergente.
- b) Soit une fonction explicitée f définie sur $[a ; b]$. Prouver que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (i) f est continue en tout point explicité de l'intervalle $[a ; b]$.
 - (ii) pour tous x, x' de $[a ; b]$, $x \approx x'$ implique $f(x) \approx f(x')$.

5.2. Application à l'intégration

Soit une fonction f , définie sur un intervalle $[a ; b]$.

On dit qu'elle est intégrable s'il existe un réel explicité très proche de $\int_a^b \varphi$ où φ est une fonction en escalier vérifiant pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \approx \varphi(x)$. Dans ces conditions ce réel est unique et s'appelle intégrale de f sur le segment $[a ; b]$. On le désigne par $\int_a^b f(x)dx$

Prouver que toute fonction f explicitée et continue est intégrable.

5.3. Déroulement de la séance

Les participants à l'atelier ont été disposés par groupe de 6 autour d'une table et encadrés par les animateurs. Chaque séquence est présentée à l'ensemble des participants. Ensuite les participants sont appelés à traiter les exercices individuellement avec bien sûr la possibilité de discuter entre eux et avec les animateurs. La séquence se termine par une discussion, souvent âpre, et une synthèse. Les réponses à tous ces problèmes se trouvent dans la brochure *Analyse en termes d'ordre de grandeur : de l'intuition aux concepts* (S182) de l'IREM de Strasbourg.

6. Conclusion

L'approche est très profonde et provoque une interrogation sur les mathématiques. Elle ne laisse aucune personne indifférente, car elle met le doigt sur des points très sensibles tel la distinction entre l'intuitif et le formel ainsi que la vision des nombres entiers et réels. Il est certain que la traduction formelle des notions intuitives pousse à plus de rigueur dans le raisonnement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LUTZ R., MAKHLOUF A. & MEYER E., [1996], *Fondement pour un enseignement en terme d'ordres de grandeur : les réels dévoilés*, Brochure APMEP N° 103.

[2] LUTZ R., MAKHLOUF A. & MEYER E. [1996], "L'enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : nécessité et fondement" Repère IREM.

[3] LUTZ R., MAKHLOUF A. & MEYER E. [1997], "L'enseignement de l'Analyse en l'an 2000", Bulletin vert de l'APMEP.

[4] GROG [2001], Analyse en termes d'ordre de grandeur : de l'intuition aux concepts ; IREM de Strasbourg S182.

[5] De nombreux documents sont consultables et téléchargeables à partir du site "Enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur", du serveur de l'académie de Strasbourg :

[http://www.ac-strasbourg.fr/rubrique mathématique en pédagogie](http://www.ac-strasbourg.fr/rubrique_mathématique_en_pédagogie)

ou plus directement

http://www.nt.ac-strasbourg.fr/microsites/maths_01/index.htm

Catherine Roncin
5 rue du Marais
60700 Saint-Martin-Longueau
catherine.roncin@ac-amiens.fr

Brigitte Jauffret,
8 rue Ambroise Paré
60180 Nogent-sur-Oise
brigitte.jauffret@ac-amiens.fr

Abdenacer Makhlouf
Université de Haute Alsace
Faculté des Sciences et Techniques
4, rue des frères Lumière
68093 Mulhouse cedex
N.Makhlouf@uha.fr

Nicole Nicolai,
4 rue Placeaux
60550 Verneuil-en-Halatte
n.nicolai@wanadoo.fr

Claude Serris
3 rue La Rochefoucault
60180 Nogent-sur-Oise
claud.serris@ac-amiens.fr

INTRODUCTION DU CONCEPT DE LIMITE À L'AIDE DES NOMBRES HYPERRÉELS

Résumé. Ayant une assez longue expérience dans l'enseignement des mathématiques à des étudiants inscrits dans une première année universitaire dans une Faculté d'Economie, nous proposons une présentation de l'analyse développée dans le cadre des nombres hyperréels qui forment un champ étendant celui des nombres réels. A l'instar de plusieurs pédagogues, tels Keisler et Pétry, nous ne décrivons pas à nos étudiants la construction robinsonienne des hyperréels, mais nous nous contentons de faire admettre leur existence au moyen de nombreuses représentations graphiques (réalisées à l'aide du logiciel *Mathematica*).

Pour de futurs économistes, cette approche semble correspondre fort bien à leurs besoins, par exemple en expliquant parfaitement le passage d'un modèle économique discret à son homologue continu. Au surplus, elle permet d'insister davantage sur les concepts théoriques de base de l'analyse ainsi que sur les raisonnements mathématiques : par exemple, elle élimine des difficultés techniques liées à la présentation classique, notamment en réduisant l'importance des quantificateurs dans la définition d'une limite.

1. Avant-propos

Depuis de nombreuses années, je suis responsable de la formation mathématique des économistes et des gestionnaires formés à l'Université de Liège et au Centre Universitaire de Luxembourg. Les étudiants qui suivent mes cours sont nombreux (environ 300 en première année). Ils forment un public fort hétérogène ; en effet, les futurs ingénieurs de gestion (5 années d'études) ont opté majoritairement pour un programme fort (au moins 6, et même souvent 8 périodes hebdomadaires) de mathématiques lors de leur dernière année du secondaire, tandis que les futurs licenciés (4 années d'études) proviennent principalement de sections comportant un programme moyen (avec 4 périodes hebdomadaires) de mathématiques. Enfin, mes étudiants ne souhaitent nullement devenir des mathématiciens professionnels : ils se sont inscrits dans des études universitaires qui comprennent inévitablement des mathématiques, mais ces dernières doivent, à leurs yeux, être avant tout utiles.

En fonction de ces caractéristiques de mon auditoire, l'objectif de mes cours en première année est triple. Je souhaite avant tout remettre tout le monde à niveau, en permettant notamment à ceux qui ont reçu préalablement une formation plus réduite en mathématiques d'acquérir des bases solides pour être capables de suivre ultérieurement des cours plus spécialisés dans des matières quantitatives. Ensuite, je désire présenter des cours adaptés à mes étudiants : je veux être fort pragmatique et montrer l'utilité réelle des mathématiques en économie et en gestion. Enfin, j'espère rendre mes cours non seulement utiles, mais aussi formateurs : j'attache beaucoup d'importance à un apprentissage progressif de la modélisation mathématique, ce qui me semble constituer un objectif primordial ... mais fort difficile.

C'est dans ce contexte particulier qu'est organisé mon cours de calcul différentiel et intégral qui porte exclusivement sur l'analyse des fonctions à une variable réelle. Cet enseignement se donne lors du second semestre de l'année académique et est précédé, en début d'année, par un cours de mathématiques discrètes qui comprend un apprentissage individuel (sur ordinateur) au logiciel *Mathematica* et dans lequel sont notamment rappelées les propriétés algébriques principales et les applications des fonctions élémentaires.

Les étudiants qui suivent mon cours de calcul différentiel et intégral ont dès lors un certain bagage mathématique derrière eux. En particulier, il convient de signaler qu'ils ont déjà tous reçu dans le secondaire un enseignement sur la notion de limite : d'après les

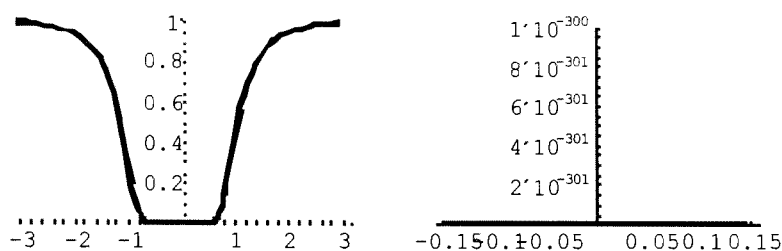
programmes, les matières vues dans ce domaine sont *les définitions des limites en ε, η ; limites en un point, finies et infinies ; limites en $+\infty$ et $-\infty$; limite à gauche et limite à droite ; asymptotes ; limites de fonctions trigonométriques de base, rationnelles et irrationnelles ; règles de calcul des limites ; cas d'indétermination* ; les mêmes documents officiels donnent les conseils méthodologiques suivants : *la notion de limite sera interprétée à partir des graphiques et des suites ... Les démonstrations ne sont pas au programme. On discutera en termes d'exemples et de contre-exemples de la pertinence des hypothèses.*

En résumé, je dois enseigner, à des futurs praticiens ayant un savoir-faire fort variable en mathématiques, le concept de limite déjà vu dans le secondaire, mais de façon superficielle. Jusqu'à la fin du siècle dernier, je me contentais d'approfondir l'approche vue dans le secondaire, c'est-à-dire à partir de la définition en ε, η . Je dois avouer que le formalisme des raisonnements semblait constituer un obstacle infranchissable pour beaucoup de mes élèves, notamment en raison de l'usage massif des quantificateurs et du rôle joué par les "fameux" ε, η . C'est pourquoi, je recherchais une présentation à la fois fort intuitive, pragmatique, simple et néanmoins rigoureuse. Il y a trois ans, j'ai essayé d'adapter pour mes étudiants l'approche par l'analyse non-standard, en évitant toutefois de faire référence aux délicats problèmes de logique qui sous-tendent cette théorie ; à trois reprises, j'ai présenté des versions de plus en plus affinées à mes étudiants de la seconde année (qui avaient donc reçu l'année précédente un enseignement "classique") et j'ai étudié leurs réactions. Puis, ayant eu entre-temps connaissance des travaux de l'équipe alsacienne de Lutz-Makhlouf et Meyer sur les ordres de grandeur, j'ai décidé au début de cette année académique d'introduire en première année le concept de limite à partir des nombres hyperréels. Je vais, dans les lignes qui suivent, montrer brièvement comment j'introduis désormais cette matière lors de mes cours.

2. Introduction des nombres hyperréels

Au début du cours, les étudiants sont invités à s'interroger sur la nature des nombres qu'ils connaissent et, tout particulièrement, de se demander quels nombres sont réellement utiles. Bien entendu, ils savent que la réponse à cette question dépend de la complexité du problème considéré ; c'est pourquoi, au cours de leur apprentissage, ils ont fait connaissance successivement avec les entiers naturels, puis les entiers relatifs, les rationnels et les irrationnels. Au fur et à mesure des besoins, l'éventail des nombres considérés a donc été progressivement élargi, toujours avec le souci de conserver les propriétés algébriques initiales et tout en étendant leur champ d'application de manière à pouvoir modéliser des situations nouvelles. Au total, on en est arrivé à travailler au sein de l'ensemble des nombres réels, qui inclut les autres nombres connus (à l'exclusion des nombres complexes, bien entendu), parce qu'il est en bijection avec l'ensemble des points d'un axe orienté : à tout point d'une droite correspond un et un seul nombre réel, et réciproquement.

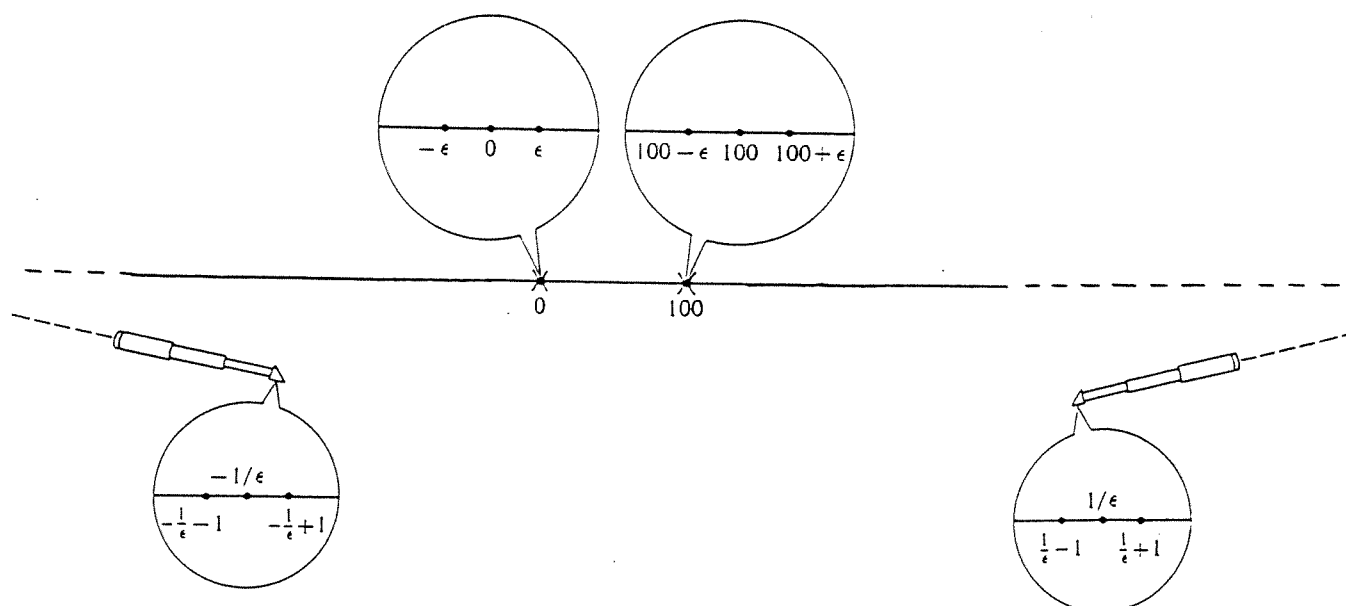
Après ces rappels élémentaires, nous suggérons l'idée que le cadre des nombres réels n'est pas suffisant pour présenter simplement et rigoureusement les concepts de base de l'analyse mathématique. À cet effet, nous montrons plusieurs figures, réalisées à l'aide de *Mathematica*, semblables à celles-ci qui sont relatives au graphique de la fonction $e^{-\frac{1}{x^4}}$ représentée sur deux intervalles contenant 0 :



De tels dessins suggèrent la présence de « nombres » positifs (car la fonction exponentielle ne prend que des valeurs positives) qui sont « aussi petits que l'on veut », c'est-à-dire, intuitivement, plus petits que tout réel positif fixé. Or, on peut démontrer que le seul nombre réel non négatif inférieur à tout réel positif donné ne peut être que 0. C'est pourquoi, il convient d'admettre l'existence de nouveaux « nombres » qualifiés d'*infinitement petits* et qui peuvent être positifs ou négatifs (ainsi que le suggère l'opposé de la fonction représentée ci-dessus) : il s'agit des « nombres », appelés *non-standard*, non nuls qui, en valeur absolue, sont inférieurs à tout réel positif. Bien entendu, ces infinitement petits ne sont pas des réels, et ne correspondent dès lors pas à des points de la droite numérique classique ; on peut toutefois les imaginer situés dans le *halo* de 0 et visibles au travers un « microscope infinitement puissant » pointé sur l'origine de l'axe réel. En déplaçant ce microscope pour le pointer sur un réel r non nul, on apercevrait dans l'oculaire d'autres « nombres » non-standard, de la forme $r + \varepsilon$, avec ε infinitement petit ; ainsi, tout réel x possède un halo composé d'un seul réel, à savoir x lui-même, et d'une infinité de nombres non-standard : tout élément y du halo de x est de la forme $x + \varepsilon$: on dit que y est *infinitement proche* de x , ce qui se note $x \approx y$.

Par ailleurs, il n'existe évidemment aucun nombre réel plus grand que tout réel positif, mais en prenant l'inverse des nombres infinitement petits, on introduit de nouveaux nombres non-standard, les *infinitement grands*, qui sont des nombres dont la valeur absolue dépasse tout réel. Ces derniers pourraient être vus au travers un « télescope infinitement puissant » dirigé vers l'extrême-droite (pour les infinitement grands positifs) ou vers l'extrême-gauche (pour les infinitement grands négatifs) de la droite numérique réelle.

La collection de tous les nombres réels et des nombres non-standard définis ci-dessus constitue une extension de $\mathbf{R}$: elle se note $\overline{\mathbf{R}}$ et ses éléments sont appelés les nombres *hyperréels*. Une image suggestive peut en être donnée en partant de la droite numérique classique, en ajoutant à chaque réel r un halo composé de tous les hyperréels infinitement proches de r et visibles grâce à un microscope imaginaire, plus tout à droite (resp. gauche) de l'axe réel la collection des hyperréels infinitement grands positifs (resp. négatifs) qui sont visibles au moyen d'un télescope fictif.

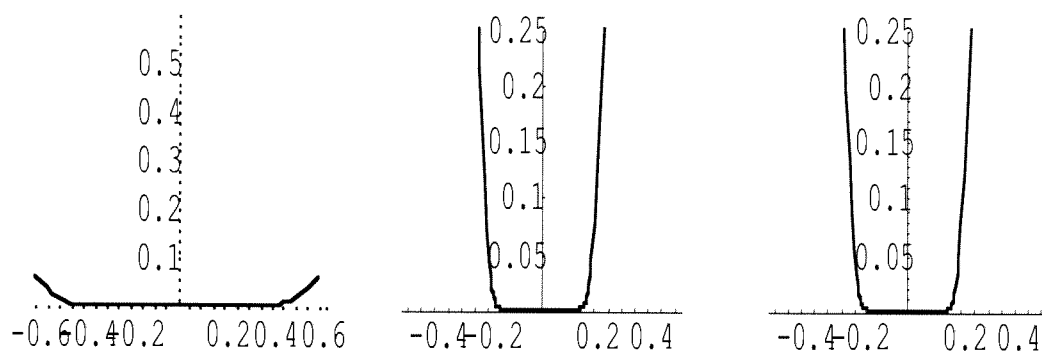


En résumé, la collection $\bar{\mathbf{R}}$ de tous les nombres hyperréels comprend différentes catégories : les *limités* qui comprennent les infiniment proches de 0 et les *appréçiables* (qui sont les hyperréels infiniment proches d'un réel non nul), et les *non-limités* (ou infiniment grands) ; le tableau suivant récapitule tous les cas possibles (en introduisant des abréviations utiles) :

Hyperréels					
	Limités (lmt)		Non limités ou Infiniment grands (ig)		
	Inf. pr. zéro (iprz ; $x \approx 0$)	Appréçiables (appr ; $x \approx r \neq 0$)	Négatifs	Positifs	
Réels	Zéro (0)	Réels non nuls ($r \neq 0$)	Infiniment grands négatifs (ign)	Infiniment grands positifs (igp)	Nombres non standard
	Infini. petits (ip : ipn ou ipp)	Non st. inf. pr. de réels non nuls ($x - r \approx 0$, $x \neq r$)			

3. Propriétés des nombres hyperréels

Les propriétés algébriques de $\mathbf{R}$ sont conservées mais "étendues" à $\bar{\mathbf{R}}$, de la même manière que, dans d'autres circonstances bien connues de mes élèves, on plonge $\mathbf{R}$ dans l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Ainsi, la collection $\bar{\mathbf{R}}$ de tous les nombres standard ou non est ordonnée en prolongeant l'ordre des réels standard de manière à respecter les règles « naturelles » suivantes : tout nombre compris entre deux ip (resp. lmt) est un ip (resp. lmt), tout lmt est inférieur à tout igp et supérieur à tout ign, tout nombre supérieur (resp. inférieur) à un igp (resp. un ign) est un igp (resp. ign). De plus, quelques règles arithmétiques additionnelles vont être définies sur $\bar{\mathbf{R}}$. Ces dernières, qui sont parfois attribuées à Leibniz qui les avaient formulées dans les grandes lignes et avec la rigueur et le langage de son époque, sont intuitivement fort "naturelles" et peuvent être démontrées [Boffa-Petry]. Nous allons toutefois nous contenter de les citer sous forme de tableaux faciles à lire, mais auparavant nous allons en suggérer une à l'aide de figures tracées à l'aide du logiciel *Mathematica*, toutes les autres règles de Leibniz pouvant être illustrées semblablement. Les figures ci-dessous illustrent la règle selon laquelle la somme de deux infiniment petits est infiniment petite.



3.1. Règles pour l'opposé et l'inverse d'un hyperréel (un signe – signifiant que l'expression en question n'est pas définie)

x	ign	appr < 0	ipn	0	ipp	appr > 0	igp
$-x$	igp	appr > 0	ipp	0	ipn	appr < 0	ign
$\frac{1}{x}$	ipn	appr < 0	ign	-	igp	appr > 0	ipp

3.2. Règles relatives à l'addition (un signe ? correspondant à une indétermination)

$x + y$	ign	appr	iprz	igp
ign	ign	ign	ign	?
appr	ign	lmt	appr	igp
iprz	ign	appr	iprz	igp
igp	?	igp	igp	igp

3.3. Règles relatives à la multiplication

$x \times y$	ig	appr	ip	0
ig	ig	ig	?	0
appr	ig	appr	ip	0
ip	?	ip	ip	0
0	0	0	0	0

Il convient encore d'énoncer les règles algébriques concernant la *partie standard* d'un hyperréel limité x : il s'agit de l'unique réel, noté $st(x)$, qui est infiniment proche de x ; ces règles sont "attendues" puisque l'on a, pour des nombres non standard a et b limités,

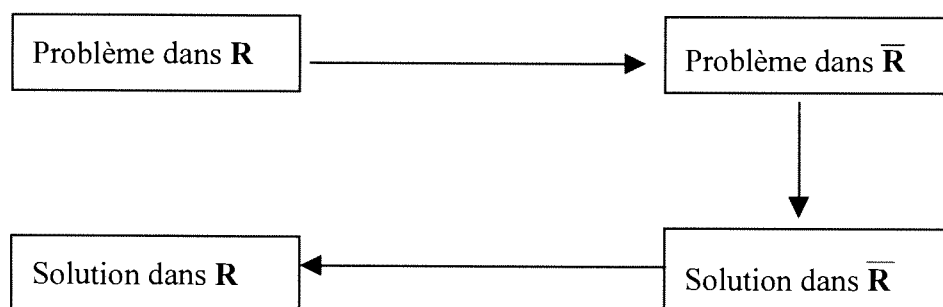
$st(a+b) = st(a)+st(b)$, $st(a-b) = st(a)-st(b)$, $st(ab) = st(a)st(b)$, $st(a/b) = st(a)/st(b)$ lorsque $st(b) \neq 0$; de plus, $st(a) < st(b)$ entraîne $a < b$, mais $a < b$ entraîne $st(a) \leq st(b)$. Attirons l'attention sur la possibilité de trouver deux nombres (non standard) a et b tels que $a < b$ avec $st(a) = st(b)$, ainsi qu'en attestent de nombreux exemples, dont celui d'un infiniment petit positif dont la partie standard est nulle.

4. Enoncé intuitif du principe fondamental de l'Analyse Non-Standard

L'idée de base est que toute "propriété standard", c'est-à-dire portant sur des réels standard, peut être étendue de façon naturelle et unique à $\bar{\mathbf{R}}$; inversement, la restriction à $\mathbf{R}$ de cette propriété dans $\bar{\mathbf{R}}$ redonne inévitablement la propriété standard initiale.

Bien sûr, seules les propriétés des réels standard sont intéressantes car, comme l'ont écrit A. Deledicq et M. Diener, *les objets non standard sont des objets soit inaccessibles parce que trop lointains, soit imperceptibles parce que trop petits, soit imperceptiblement proches d'un objet standard qui en serait "l'ombre"; les objets standard sont alors les objets observables sur lesquels on peut "expérimenter"; de même une propriété standard est une propriété que l'on peut vérifier expérimentalement* [Gaud – Guichard – Sicre - Chrétien, p. 83].

Néanmoins, il est intéressant d'effectuer un détour par $\bar{\mathbf{R}}$ au sein duquel il est plus facile de travailler. La démarche suivie est bien connue en didactique théorique puisqu'elle consiste en une transposition précédant une dé-transposition du problème [Antibi-Brousseau] ; elle peut être visualisée par le schéma suivant :



L'intérêt de ce passage par $\bar{\mathbf{R}}$ avant de retourner vers $\mathbf{R}$ peut sembler artificiel, mais il s'avère extrêmement efficace car les propriétés non standard sont souvent très intuitives et, surtout, sont beaucoup plus simples à formuler et à vérifier dans $\bar{\mathbf{R}}$ que dans $\mathbf{R}$.

Il convient de remarquer qu'un semblable détour n'est pas rare en mathématiques : par exemple, des propriétés de géométrie plane se prouvent plus aisément en plongeant les figures considérées dans l'espace à trois dimensions, ou encore des propriétés algébriques de polynômes à variables réelles s'obtiennent plus facilement en évoluant dans le champ des complexes.

Le principe ébauché ci-dessus s'adapte aux fonctions numériques réelles : une fonction $f: \mathbf{D} \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, qui possède une propriété $\mathbf{P}$ dans $\mathbf{D}$ peut être prolongée par une et une seule fonction

$$\bar{f}: \bar{\mathbf{D}} \subset \bar{\mathbf{R}} \rightarrow \bar{\mathbf{R}},$$

qui possède également la propriété $\mathbf{P}$ dans $\bar{\mathbf{D}}$ qui est "l'extension naturelle" de $\mathbf{D}$ dans $\bar{\mathbf{R}}$; inversement, la restriction de $\bar{f}$ à $\mathbf{D}$ redonne f ; on a donc, pour tout x de $\bar{\mathbf{D}}$

$$\bar{f}(\text{st}(x)) = f(\text{st}(x)).$$

Mais, il ne faut pas oublier que seules les valeurs standard sont observables et dès lors intéressantes. Dans la suite, nous ne ferons aucune distinction entre f et $\bar{f}$.

Par exemple, les fonctions "sinus" et "cosinus" sont étendues pour être définies sur $\bar{\mathbf{R}}$ et l'on a, pour tous hyperréels x et y , l'égalité $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$. Par ailleurs, on peut introduire la fonction $f(x) = [x]$ qui, à tout hyperréel x positif, associe le plus grand entier

inférieur ou égal à x : cette fonction donne naissance à des entiers non-standard infiniment grands qui vont jouer ultérieurement un rôle important, principalement dans l'étude des suites et des séries [MCKinzie – Tuckey].

5. La notion de limite

Soient a et b deux réels standard quelconques et f une fonction dont on ne prendra évidemment les valeurs qu'en des points appartenant à son domaine de définition¹.

On introduit la définition principale suivante qui est formulée dans $\overline{\mathbf{R}}$ et correspond à l'image mentale de la notion de limite, à savoir que $f(x)$ se rapproche imperceptiblement de b lorsque x s'approche suffisamment de a :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$ pour tout nombre x infiniment proche mais différent de a (ou, de façon équivalente, pour tout hyperréel x tel que $x - a$ est un infiniment petit), $f(x)$ est infiniment proche de b .

Remarquons que les nombres x considérés sont forcément non standard et que la fonction f peut ne pas être définie en a ; par exemple, en reprenant un exemple déjà traité intuitivement, on a $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^4}} = 0$.

Les autres définitions relatives aux limites finies s'introduisent aussi simplement ; elles sont faciles à interpréter et à illustrer à l'aide de fonctions élémentaires classiques :

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$ pour tout nombre x tel que $x - a$ est un infiniment petit positif, $f(x)$ est infiniment proche de b ,
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$ pour tout nombre x tel que $x - a$ est un infiniment petit négatif, $f(x)$ est infiniment proche de b ,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ pour tout nombre x positif et infiniment grand, $f(x)$ est infiniment proche de b ,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ pour tout nombre x négatif et infiniment grand, $f(x)$ est infiniment proche de b .

On définit de la même manière les « limites infinies » : on dit que, dans chacun des cinq cas considérés ci-dessus (à savoir $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow -\infty$), la fonction f *diverge* ou *tend vers* $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque, pour tous les hyperréels x adéquats, $f(x)$ est infiniment grand positif (resp. négatif).

Le lecteur est invité à illustrer toutes ces définitions par des exemples concrets, construits au moyen de fonctions élémentaires classiques et traités, par exemple, à l'aide du logiciel *Mathematica*.

¹ Cette convention ne sera plus rappelée par la suite.

6. Prolongements

Les propriétés des limites sont essentiellement standard, mais la formulation non standard des définitions permet de travailler dans $\overline{\mathbf{R}}$ où les raisonnements sont aisés, courts et limpides. Toutes les propriétés classiques des limites se démontrent par des raisonnements fort intuitifs sans complication d'ordre technique provenant de quantificateurs présents dans la définition classique, ni de majorations qui semblent quelquefois artificielles. En guise d'unique exemple, démontrons que la limite d'un produit est le produit des limites. Supposons que lorsque x tend vers a , $f(x)$ possède b pour limite et $g(x)$ possède b' comme limite. Pour tout hyperréel x tel que $x - a$ est un infiniment petit, $f(x) \approx b$ et $g(x) \approx b'$, d'où

$$[f(x) g(x)] - b b' = [f(x) - b] g(x) + [g(x) - b'] b$$

est, d'après les règles de Leibniz, infiniment petit, car $f(x) - b \approx 0$, $g(x) - b' \approx 0$, $g(x)$ et b sont limités, tandis que le produit d'un limité et d'un infiniment petit est lui-même infiniment petit. Cette présentation sera avantageusement comparée à la preuve classique en terme de ε - η .

Une fois la notion de limite introduite et ses propriétés démontrées, la suite du cours de calcul différentiel et intégral peut se poursuivre de manière « classique », avec seulement quelques aménagements de vocabulaire. Ainsi, la notion de continuité est particulièrement aisée à présenter dans cette théorie : une fonction f est dite continue en a si, pour tout hyperréel x infiniment proche de a , $f(x)$ est infiniment proche de $f(a)$: cette formulation rejoint l'idée intuitive fondamentale liée à cette notion. Une fonction f est dérivable en a si, pour tout hyperréel ε infiniment petit, le quotient $\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}$ est limité et indépendant de ε : sa partie standard vaut alors le nombre dérivé $f'(a)$. La notion d'intégrale définie d'une fonction f s'obtient aisément à partir de celle d'une fonction étagée partout infiniment proche de f , l'intégrale d'une fonction étagée φ étant facile à introduire puisqu'il s'agit de la somme des produits des valeurs de φ par les longueurs des différents sous-intervalles intervenant dans la définition de φ [I.R.E.M. de Picardie].

7. En guise de conclusion

Bien que cette présentation de l'analyse soit, pour moi, toute récente, je peux avancer qu'elle semble parfaitement bien adaptée à nos étudiants. En effet, elle insiste sur les idées fondamentales de l'analyse tout en restant fort intuitive et sans formalisme abstrait. De plus, l'introduction de la limite à l'aide des nombres infiniment petits me semble parfaitement bien adaptée pour des futurs économistes et gestionnaires qui sont souvent amenés à passer d'un modèle discret à un modèle continu : le recours aux ordres de grandeurs rend cette transition automatique et naturelle. D'ailleurs, les économistes utilisent de plus en plus en plus l'analyse non-standard dans leurs travaux de recherches [Handbook ; van den Berg ; Hildenbrand – Sonnenschein].

Bien entendu, ce cours devra être amélioré et il conviendra d'analyser les avantages et inconvénients de cette présentation, ainsi que de la comparer avec des approches similaires [Lutz – Makhlouf – Meyer].

BIBLIOGRAPHIE

- ANTIBI A. & BROUSSEAU G. [2000], La dé-transposition des connaissances scolaires, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **20**, n° 1, 7-40.
- BAIR J. [1993], *Mathématiques générales à l'usage des sciences économiques, de gestion et A.E.S.*, De Boeck Université, Bruxelles.
- BAIR J. & HAESBROECK G. [2001], *Mathématiques générales avec Mathematica*, dossier de l'IREM de Liège-Luxembourg, Liège.
- BOFFA M. & PÉTRY A. [1993], Des naturels non standard à l'analyse non standard, une introduction, *Mathématique et Pédagogie*, **94**, 39-54.
- DELEDICQ A. & DIENER M. [1989], *Leçons de calcul infinitésimal*, A. Colin, Paris.
- DIENER M. [1988], Enseigner l'analyse avec des ordres de grandeur, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **5**, 19-37.
- DIENER F. & DIENER M. [1995], *Nonstandard Analysis in Practice*, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.
- DIENER F. & REEB G. [1989], *Analyse Non Standard*, Hermann Editeurs des Sciences et des Arts, Paris.
- GAUD D., GUICHARD J., SICRE J.P. & CHRÉTIEN C. [1998], *Des tangentes aux infiniment petits*, Dossier de l'IREM de Poitiers.
- GAUTHERON V. [1998], Enseigner les débuts de l'analyse en utilisant des infinitésimaux, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **5**, 39-44.
- GAUTHERON V. & ISAMBERT E. [1996], Lire l'analyse non standard, in *Non Standard Analysis, Belgian Mathematical Society*, 29-49.
- GILBERT T. [1992], Qu'est-ce que l'analyse non standard ?, *Mathématique et Pédagogie*, **89**, 51-67.
- HILDENBRAND W. & SONNENSCHIN H. [1991], *Handbook of Mathematical Economics IV*, Chapter 39 Non-Standard Analysis with Applications to Economics, North-Holland.
- I.R.E.M. DE PICARDIE [2001], *Analyse en termes d'ordres de grandeurs : de l'intuition aux concepts*, I.R.E.M. de Strasbourg, 88 pages.
- KEISLER H.J. [1976], *Elementary Calculus*, Prindle, Weber and Schmid.
- MCKINZIE M. & TUCKEY V. [2001], Higher Trigonometry, Hyperreal Numbers and Euler's Analysis of Infinites, *Mathematics Magazine* **74**, n° 5, 339-368.
- LUTZ R., MAKHLOUF A. & MEYER E. [1996], *Fondement pour un enseignement de l'analyse en termes d'ordres de grandeur : les réels dévoilés*, Publication de l'A.P.M.E.P. **103**, Paris.
- PÉTRY A. [1995], Introduction à l'analyse non standard ou la redécouverte des infiniment petits, in « *Les bases scientifiques de l'étude du milieu* », par Aghion J. – Depireux J., CSIPWIC, Liège.
- PÉTRY A. [1996], Balade en analyse non standard sur les traces de A. Robinson, in *Non Standard Analysis, Belgian Mathematical Society*, 1-28.
- PÉTRY A. [1998], Enseigner l'Analyse sur base des méthodes non standard, deux aspects : microscope et ensembles internes, *Bull. Belg. Math. Soc.*, **5**, 45-62.
- ROBERT A. [1985], *Analyse Non Standard*, Presses Polytechniques Romandes.
- ROBINSON A. [1966], *Non-standard analysis*, North-Holland Pub. Comp., Amsterdam.
- VAN DEN BERG I. [2000], *Principles of Infinitesimal Stochastic and Financial Analysis*, World Scientific Pub.

Jacques Bair,
 Université de Liège,
 Faculté d'Economie, de Gestion et de Sciences Sociales,
 7 Boulevard du Rectorat,
 B31,
 4000 Liège, Belgique
 J.Bair@ulg.ac.be.

LE CONTRE-EXEMPLE ET L'ANALYSE MATHÉMATIQUE DES FONCTIONS : ÉTUDE DE CAS EN PREMIÈRE ANNÉE DE DEUG

Résumé. L'étude historique montre que le développement du statut du contre-exemple à la fin du 19^{ème} siècle a été fortement lié au développement du concept de fonction. Certains contre-exemples étaient à l'origine de la naissance de nouveaux concepts, tels la série de Fourier réfutant le théorème de Cauchy. À la suite de ce contre-exemple, Seidel a d'ailleurs pu mettre en évidence le concept de convergence uniforme. D'autres étaient à l'origine de la remise en cause des fondements des mathématiques telle la fonction de Weierstrass. Ce rôle montre l'importance de la production des contre-exemples en analyse mathématique et peut faire penser à « exporter » cette activité chez les étudiants.

Notre recherche porte essentiellement sur l'identification des démarches des étudiants en situation de production d'exemples ou de contre-exemples autour de l'analyse mathématique des fonctions, en mettant en avant les éléments pertinents qui caractérisent ces démarches.

À cet effet, nous avons suivi un nombre assez réduit de binômes en DEUG, sur des durées assez longues, travaillant sur le même ensemble de problèmes d'analyse de fonctions. L'analyse des corpus recueillis a été réalisée grâce à des méthodes factorielles multiples qui ont permis de dégager une première caractérisation des démarches des étudiants, en terme de stratégies globales et locales. Une analyse qualitative des productions des étudiants, basée sur les résultats d'analyses factorielles, a permis de raffiner les stratégies identifiées chez les étudiants en termes de stratégies « gagnantes » ou « perdantes », avec une grande précision sur les activités qui les caractérisent.

Une perspective didactique de cette recherche serait de proposer aux étudiants un travail en groupes, sur la production de contre-exemples à des propositions fausses qui sont des sources d'erreurs fréquentes. Les contre-exemples alimentent et enrichissent le concept de fonction lui-même, ainsi que les concepts d'analyse mathématique qui lui sont associés. Ils provoquent des besoins de précisions qui conduisent à énoncer des définitions et à formuler des conditions restrictives nécessaires à la validité des résultats. La construction d'exemples et de contre-exemples permettra ainsi une appropriation de l'analyse des fonctions de manière assez fine et plus riche que celle qui résulte des exercices habituels.

1. Introduction

Le contre-exemple, à travers l'histoire, a joué un rôle moteur dans la construction de concepts mathématiques. L'histoire des mathématiques montre que le développement du statut du contre-exemple, c'est-à-dire le rôle qu'on lui reconnaît dans la démarche mathématique, est très lié au développement du concept de fonction. Dès les observations préliminaires que nous avons effectuées, l'importance du statut des contre-exemples pour les étudiants était apparue. Un éclairage épistémologique, mettant en évidence la liaison entre le statut du contre-exemple et les fondements même de l'activité mathématique, peut permettre d'expliquer certains traitements, certaines réponses. La production et la construction d'exemples ou de contre-exemples par des étudiants de première année a été au centre de notre intérêt. Elle nous a permis de montrer qu'elle permet une appropriation des fonctions de manière assez fine et différente de celle qui résulte des exercices habituels.

2. Évolution du statut du contre-exemple

2.1. Le contre-exemple considéré comme exception à la règle générale

Jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle le recours au contre-exemple était occasionnel et son statut même de démonstration de la fausseté d'une conjecture n'était pas reconnu par tous les mathématiciens. Remarquons d'abord qu'il faudrait distinguer les conjectures selon qu'elles renvoient à des concepts relativement flous ou à des objets mathématiques parfaitement fixés. Dans le premier cas, l'activité du mathématicien consiste à dégager les règles de travail, sur des objets qu'il n'est pas libre de façonner. Dans le second cas, le mathématicien travaille avec des règles bien établies.

Ainsi, Euler a trouvé un contre-exemple en arithmétique réfutant ainsi une conjecture de Fermat (cf. Glaeser, 1971). Mais, le même Euler connaissait d'autres contre-exemples dans d'autres domaines, notamment en analyse, qu'il considérait comme des exceptions de peu d'importance (cf. Youschkevitch, 1981). Le fait de considérer les contre-exemples comme des exceptions se retrouve chez Abel qui écrit dans un article : « *Il me semble que ce théorème (de Cauchy) admet des exceptions* », et il donne l'exemple de la série :

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \dots \dots \text{etc.} \quad (\text{cf. Lakatos, 1976})$$

Dans ce cas, la notion de convergence était à affiner. Les deux notions de convergences simple et uniforme n'étaient pas dissociées pour qu'il soit possible d'énoncer un théorème. Ainsi, à travers les deux situations précédentes on assiste à une rupture quant au statut logico-mathématique du contre-exemple.

Établir un cours amène généralement à plus de précisions, mais ceci n'a pas empêché Jordan, dans l'introduction de son cours de considérer que les théorèmes fondamentaux qu'il a établis ont tous des restrictions (cf. Gispert, 1982).

Ceci prouve que jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle, les contre-exemples étaient considérés comme des exceptions de peu d'importance.

2.2. Le contre-exemple rejeté : quel objet accepter comme fonction ?

Le problème, en fait, tournait autour de l'acceptabilité de certaines fonctions. Ainsi, dans sa correspondance avec Houël, Darboux produisait des fonctions représentant des contre-exemples à des théorèmes que Houël considérait dans son cours ; mais Houël récusait ces contre-exemples en disant qu'il n'avait pas ces fonctions en vue (*ibid*). Néanmoins, il exprimait son inquiétude devant les contre-exemples que lui fournissait Darboux :

« Vous me donnez des inquiétudes mortelles sur les points que je croyais les mieux établis » (lettre du 31 janvier 1875) (*ibid*).

Mais Houël n'était pas le seul à éprouver des réticences vis-à-vis de certains contre-exemples. Ainsi, Poincaré considère que les nouvelles fonctions ne peuvent contribuer à l'avancement de l'analyse et qu'elles n'ont pour but que de mettre en défaut les raisonnements de ses prédécesseurs (cf. Glaeser, 1995). Jordan, en 1882, tout en affirmant l'existence « de fonctions continues dont la dérivée est toujours indéterminée » n'en donne aucun exemple et les qualifie de « fonctions anormales » et qui « ne seront pas abordées dans ce cours ». Ces réticences, on les retrouve jusqu'au début du 20^{ème} siècle. Ainsi, Lebesgue qualifie certaines fonctions de sorte de musée de monstruosités (cf. Gispert, 1982).

En fait, les débats sur les fonctions tournaient autour de leur acceptabilité quant à leur représentation graphique, et que l'on pourrait classer selon les quatre catégories suivantes :

- les fonctions dont la représentation graphique ne relève pas les éléments pertinents. À ce titre, on peut donner l'exemple de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, citée pour la première fois par Dirichlet (cf. Youschkevitch, 1981),

- les fonctions qui présentent des difficultés au niveau de la représentation graphique ; par exemple les fonctions $x \sin \frac{1}{x}$ et $x^2 \sin \frac{1}{x}$ citées toutes les deux par Péano et qui présentent des points « singuliers » au voisinage desquels elles changent de monotonie une infinité de fois,
- les fonctions qui ne peuvent pas avoir leurs propres représentations graphiques, mais plutôt celles de leurs approximantes. On peut citer ici les fonctions de Weierstrass et Bolzano qui représentent toutes les deux des fonctions continues partout et nulle part dérivable,
- les fonctions qui ne peuvent avoir ni une représentation graphique ni celle de leurs approximantes ; la fonction de Darboux en est un exemple.

Les mathématiciens avaient une représentation essentiellement intuitive de l'objet fonction, ce qui explique la difficulté d'acceptabilité des fonctions que l'on vient de citer et dont la représentation dépasse l'intuition.

2.3. Rôles constructifs des contre-exemples

Jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle, le contre-exemple n'était pas encore d'usage courant. Plusieurs auteurs de traités didactiques faisaient des développements au sujet des fonctions discontinues, mais sans donner de contre-exemple pour attirer l'attention des étudiants sur la délicatesse de certaines propriétés considérées comme évidentes.

Péano, ainsi que Darboux, furent les principaux promoteurs du recours au contre-exemple. Avant eux, on semble ignorer l'usage systématique du contre-exemple et son avènement est révélateur d'un changement de paradigme. Ils relevèrent plusieurs erreurs commises dans les ouvrages de leur époque. Ainsi, Péano releva l'erreur commise par Serret et Jordan, de la monotonie locale de toute fonction continue en exhibant un contre-exemple. Mais Serret ne corrigea pas son erreur dans la troisième édition de son cours (1886). Mittag Leffler, dans une lettre, adressée à Charles Hermite dénonça cet état de fait. (Cf Gispert, 1982).

Darboux attira aussi l'attention, dans son mémoire de 1875, sur l'existence de « *fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes sur aucun intervalle* ». Il utilise à plusieurs reprises dans sa correspondance avec Houël, les fonctions discontinues à titre de contre-exemples. Il écrit dans sa lettre du 21 mai 1874 :

« Prenez une fonction égale à $1/q$ pour $x = p/q$ et à 1 pour x incommensurable. Elle ne sera jamais nulle entre 1 et 2 et n'aura pas de minimum. Je sais que vous allez me dire que vous ne voulez pas de ces fonctions ; mais je vous répéterai pour la millième fois que la fonction au sujet de laquelle nous discutons n'est pas de celles que vous puissiez écarter puisqu'elle s'introduit dans vos raisonnements sans que vous ayez le droit de ne rien supposer sur son compte ». (Cf. Gispert, 1982).

Dans le tome de 1887, et contrairement au tome de 1882, Jordan utilise le contre-exemple pour montrer l'existence de fonctions intégrables qui ont, dans tout intervalle, une infinité de points de discontinuité. Il y introduit aussi le contre-exemple « emprunté à Weierstrass » d'une fonction continue, nulle part dérivable. Il y corrige également toutes les insuffisances repérées par Péano dans l'introduction au livre de Genocchi et donne de nombreux autres exemples et contre-exemples. Notons que dans le tome de 1893 Jordan, ayant eu une plus grande maîtrise des questions posées auparavant, n'a pas considéré les exemples qui figurent dans le tome de 1887. Néanmoins d'autres contre-exemples sur les séries de fonctions sont exhibés pour montrer que "l'uniformité de la convergence est une condition essentielle".

2.4. Contre-exemples et développement de l'analyse

Le rôle du contre-exemple ne s'est pas limité uniquement à déceler des erreurs, il a été aussi à l'origine de nouveaux concepts tels le concept de convergence uniforme. Cauchy, en 1821, démontra que la limite d'une série convergente de fonctions continues est continue. Quelques années plus tard, en 1826, Abel reconnaît que le théorème de Cauchy n'est pas vérifié par la série de Fourier, mais considéra celle-ci comme une exception au théorème. Il a fallu attendre plus de 20 ans pour qu'il y ait, en 1847, un examen de la démonstration de Cauchy. C'est à Seidel, qu'on doit cet examen et la mise en évidence du concept de convergence uniforme (cf. Lakatos, 1976).

Une autre contribution du contre-exemple et particulièrement de la fonction de Weierstrass a été d'amener les mathématiciens à vouloir expliciter en toute rigueur les fondements de l'analyse. Les mathématiciens qui avaient recours à l'intuition ont trouvé dans cette fonction un défi et une remise en cause de certains raisonnements. Le contre-exemple a donc eu pour conséquence le retour sur les fondements, mais il a aussi soulevé l'indignation des mathématiciens. Hermite (1822-1901) dans une lettre adressée à Stieltjes écrivait : « *Je me détourne avec effroi et horreur, de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivées* » (cf. Colette, 1979).

3. Le contre-exemple dans l'enseignement

Dans une classe de mathématiques, où régit un enseignement classique, le contre-exemple n'a pas le même statut que dans la communauté des mathématiciens. Il est généralement produit par l'enseignant à l'attention des étudiants pour signaler ou prévenir des erreurs courantes ou des défauts conceptuels. Il apparaît aussi comme un moyen de précision sur le rôle des hypothèses d'une proposition ou d'un théorème. Il est généralement perçu par les étudiants comme une catastrophe signalant qu'il faut changer de voie dans la résolution du problème. En outre, l'utilisation du contre-exemple, en tant qu'outil pour invalider un énoncé que produit l'étudiant, semble être assez rare, sinon inexistante. Dans son expérimentation, Hitt a constaté que les constructions de contre-exemples représentaient les exercices les plus difficiles. Cette difficulté est selon lui due entre autres à l'enseignement des mathématiques qui se limite à enseigner des algorithmes et à un niveau moindre à faire des démonstrations (cf. Hitt, 1998). D'autre part, dans l'enseignement classique *la vérité en classe est institutionnelle, ce sont le maître et le livre qui l'incarnent* (cf. Legrand, 1988). De ce fait, la gestion du vrai et du faux n'est pas à la charge de l'élève. La phase de conclusion est alors une *phase d'évaluation où la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel...Ce jugement n'appelle pas de réflexion de la part de l'élève au sujet de la validité de sa procédure ; il sait tout de suite si elle a abouti ou non. Il n'a plus rien à faire concernant la validité* (cf. Margolinas, 1993).

En se référant à la communauté des mathématiciens, Lakatos dans « preuves et réfutations » (cf. Lakatos, 1976), présente un modèle de la logique de la découverte et de l'élaboration des concepts en mathématiques. Le moteur du processus des preuves et réfutations est une dialectique articulant des phases de proposition de conjectures pour répondre à un problème ouvert, des phases de critique des conjectures à l'aide de contre-exemples, et des phases de dépassement de ces critiques. Lakatos différencie les conséquences d'un contre-exemple en vue d'un tel dépassement. Il peut rejaillir sur la conjecture, sur la preuve ou sur les connaissances ou leurs fondements rationnels. Il peut aussi avoir comme conséquence la critique et le rejet du contre-exemple lui-même.

Dans le débat scientifique que propose Marc Legrand, le contre-exemple apparaît comme un outil puissant pour réfuter une conjecture. L'erreur n'est plus alors considérée comme une faute dans l'apprentissage des mathématiques ; l'introduction de conjectures

fausses accompagnées en général d'un contre-exemple est non seulement utilisée dans la construction du cours, mais figure aussi dans les prises de notes des étudiants. Notons que dans ce débat, ce sont les étudiants qui produisent les contre-exemples pour réfuter une conjecture proposée par leurs pairs. Une séance spéciale est proposée aux étudiants pour leur fournir les moyens de réfuter un énoncé en explicitant la règle suivante : « *En mathématiques, un énoncé est vrai si et seulement s'il n'a pas de contre-exemples* » (cf. Legrand, 1990).

Cette même règle a été utilisée par R. Duvert (cf. Duvert, 1996) au collège pour montrer la nécessité de la démonstration. À ce propos, il fait d'ailleurs remarquer que c'est *le caractère fastidieux de la recherche de toutes les possibilités de contre-exemples qui peut faire saisir l'utilité de la démonstration au sens classique du terme*.

Le rôle clé joué par le contre-exemple dans le développement de l'analyse mathématique ainsi que dans l'élaboration du savoir mathématique chez les apprenants (particulièrement lorsqu'il est à leur charge) montre l'importance de la production des contre-exemples et incite à faire exploiter cette activité chez les étudiants.

4. Stratégies des étudiants en situation de production de (contre-) exemples

A priori, si on regarde la production de contre-exemples du seul point de vue logique, on peut n'y voir qu'une activité trop simple pour présenter un véritable intérêt. En revanche, lorsqu'il s'agit effectivement de fournir une réponse négative à une conjecture mathématique, la difficulté réside dans l'obtention d'un élément ayant des propriétés spécifiées. Dans notre expérimentation, l'objet à trouver dans l'activité de production qui nous intéresse, est une fonction réelle de variable réelle. Cette activité peut renvoyer à plusieurs types de constructions, entre autres :

- 1) des fonctions de référence [Réf], ou une construction à partir d'opérations sur les fonctions de référence usuelles [Op-réf],
- 2) une mise en œuvre de fonctions caractéristiques de parties de l'ensemble des nombres réels [Carac],
- 3) une construction graphique [Graph],
- 4) des procédés dont on prend en compte l'objet limite qui en résulte (exemple : courbe de Péano).

La recherche de fonctions satisfaisant à des contraintes données nous fournit donc un cadre d'activités fort riche. Les trois premiers types de production relèvent de méthodes classiques pour les mathématiciens qui sont susceptibles d'enseignement, alors que le quatrième type nécessite une recherche assez complexe qui ne peut être conduite dans un temps limité. Par conséquent, nous avons choisi pour notre expérimentation de solliciter auprès des étudiants seulement les trois premiers types de production. Nous donnons ici une partie des exercices qui ont été proposés aux étudiants.

4.1. Partie 1 du questionnaire

4.1.1. Donner 2 exemples de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante ayant une dérivée nulle en un point. [Réf, Op-réf, Graph]

4.1.2. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui n'est monotone sur aucun intervalle. [Carac]

4.1.3. Donner une fonction qui admet une asymptote d'équation $y = 2x - 1$. [Op-réf, Graph]

4.1.4. Donner un exemple de fonction continue en 0, non continue en tout point de $\mathbb{R} - \{0\}$ [Carac]

4.2. Partie 6 du questionnaire

- 4.2.1. Donner un contre-exemple pour montrer que la proposition est fausse : « Toute fonction continue sur R , bornée, admet une limite finie lorsque x tend vers l'infini ».** [Réf, Graph]
- 4.2.1'. L'observateur demande un autre contre-exemple à la même proposition.** [Op-réf, Graph]
- 4.2.2. Donner un contre-exemple pour montrer que la proposition est fausse : « Si f admet une limite à droite lorsque x tend vers x_0 , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que f est monotone sur $]x_0, x_0 + \varepsilon[$ ».** [Op-réf, Carac, Graph]
- 4.2.3. Donner un contre-exemple pour montrer que la proposition est fausse : « Soit f une fonction dérivable sur R . Si f est strictement croissante sur R , alors $\{x \in R \mid f'(x) = 0\}$ est fini ».** [Op-réf, Graph]

Pour notre expérimentation, 14 étudiants ont travaillé en binômes sur l'ensemble du questionnaire durant près de six heures réparties en deux séances de 3 heures. En début de séance, l'observateur fournit aux deux membres du binôme une seule feuille de papier, pour éviter un travail individuel. La confrontation des idées permet d'explicitier certaines procédures ou d'expliquer certaines décisions, qui n'auraient pas été mises en évidence dans un travail individuel (cf. Balacheff, 1988).

Pour obtenir un texte écrit reproduisant en plus du dialogue toute la production des deux membres du binôme, nous avons utilisé trois recueils :

- l'enregistrement sonore de la séance de travail des étudiants,
- le recueil des productions écrites des étudiants,
- la prise de notes de l'expérimentateur.

Nous avons, par ailleurs, procédé à un codage selon 4 variables, décrivant à la fois le type d'activité, le mode d'expression, le contenu et la correction relatifs à chaque unité de signification. Une unité de signification représente soit une phrase, soit un tableau de variation ou encore un graphe.

Pour analyser les corpus, il était donc a priori tout à fait justifié de recourir à une méthode d'analyse factorielle, et particulièrement à l'analyse factorielle de correspondances multiples (AFCM), qui est parfaitement adaptée au traitement d'un tel type de tableau de données (cf. Moretti, 1992). Nous avons ainsi procédé à l'analyse factorielle AFCM de manière séparée pour chaque corpus des binômes.

Pour l'interprétation, nous nous sommes limités au premier plan factoriel. En effet, ce plan représentait à lui seul, dans chaque analyse, largement les deux tiers de la dispersion globale de l'ensemble des variables actives. Par ailleurs, l'interprétation des axes de ce plan factoriel a débouché *a posteriori* sur les stratégies des étudiants, et par conséquent elle a permis l'identification des modalités des variables (éléments pertinents) qui caractérisent les démarches des étudiants.

Le premier axe s'interprète pour chaque binôme comme celui de stratégies globales. En effet, les modalités des variables qui ont fortement contribué à la construction de cet axe, ainsi que le retour aux corpus, ont permis de caractériser plusieurs procédures d'étudiants qui se réfèrent toutes à des conditions qui ne se limitent pas à celles de l'énoncé.

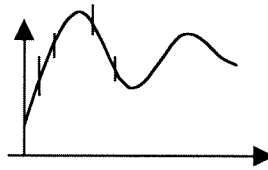
Le deuxième axe fait apparaître des stratégies que nous avons qualifiées de locales, car elles font référence dans ce cas-là à une condition extraite directement de l'énoncé.

Pour évaluer la portée de ces analyses quantitatives, nous avons effectué des analyses qualitatives. Le retour aux corpus a fait apparaître plusieurs types de procédures relatives aux

stratégies globales et locales (cf. Benbachir et Zaki, 2002). Nous donnons ici deux exemples illustrant des stratégies globales et un troisième exemple illustrant une stratégie locale :

Exemple 1 (4.1.2)

B31. : Si tu prends une fonction



Sur cet intervalle, elle est strictement croissante, et sur cet intervalle, elle est strictement décroissante... Il faut trouver une fonction qui ne peut jamais être comme ça ! Impossible ! attends.

$$\text{La fonction } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Exemple 2 (4.1.3)

B41 : $\lim f(x)/x = 2$ et $\lim f(x) - 2x = -1$. Posons $g(x) = f(x) - 2x$. Il faut que $\lim g(x) = -1$. On choisit une fonction qui tend vers -1 lorsque x tend vers $+\infty$.

B41 : $e^{1/x}$... lorsque x tend vers $+\infty$, $1/x$ tend vers $0+$ et $e^{1/x}$ tend vers 1 . Prenons $g(x) = -e^{1/x}$ donc $f(x) = g(x) + 2x$.

Dans le premier exemple, la fonction est recherchée en éliminant l'ensemble des fonctions qui 'admettent un graphe' et dans le second exemple il y a une reformulation de l'énoncé en le simplifiant et en réduisant le nombre de conditions que doit vérifier la fonction recherchée. Dans ces deux exemples, la stratégie engagée est globale parce que les conditions que s'imposent les étudiants ne se réduisent pas à celles de l'énoncé.

Exemple 3 (4.2.1)

$$B11 : f(x) = 1/q \quad x \in \mathbb{Q}$$

B12 : si tu considères $1/q$; il se peut qu'il soit.... on prend $f = \text{cste}$. continue sur $\mathbb{R}$, bornée, mais elle admet une limite

B11 : chx

B12 : chx n'est pas bornée

[...]

$$B11 : f(x) = \frac{1}{x^3} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ = 0 \quad x=0$$

B12 : mais f n'est pas continue en 0

[...]

$$B11 : x - [x] \quad [x] \leq x < [x] + 1$$

B12 : c'est toujours compris entre 0 et 1 ; la limite est finie.... c'est bornée mais admet une limite finie

B11 : lorsque x tend vers ∞ , ça n'admet pas de limite... bornée ?

B12 : c'est bornée, c'est compris entre 0 et 1 et n'admet pas de limite. Mais problème de continuité

Dans cet exemple, la stratégie locale n'amène pas à une bonne production, la recherche se fait en se focalisant sur une condition imposée par l'énoncé.

La caractérisation de ces stratégies a servi à l'élaboration de profils des binômes. En tenant compte de la réussite ou l'échec aux exercices proposés, ces profils nous ont permis de conclure que les stratégies globales contribuent généralement positivement à la découverte de la solution et que les stratégies locales contribuent généralement à l'avancement de la recherche du problème si elles sont accompagnées de stratégies globales et qu'elles sont vouées à l'échec dans le cas contraire (*ibid*).

5. Conclusion

5.1. Contre-exemples et apprentissage

Les observations menées dans le cadre de cette recherche permettent d'avancer l'hypothèse selon laquelle la construction d'exemples et de contre-exemples conduit à une appropriation des fonctions de manière assez fine, et certainement plus riche que celle qui résulte de situations d'exercices habituels. La construction conduit à élargir le champ des fonctions que les étudiants connaissent. Le fait de disposer d'un stock de fonctions variées peut éviter des erreurs de raisonnement. Autrement dit, les raisonnements produits par un étudiant vont être tributaires du stock des objets "fonctions" dont il dispose (cf. Richard, 1990). Dans notre introduction nous avons noté que Houël récusait les contre-exemples construits par Darboux parce qu'il considérait qu'il n'avait pas ces fonctions en vue. D'ailleurs, chez les étudiants observés, nous avons aussi noté le fait que la disponibilité de certaines fonctions pose plus de difficultés que leur acceptabilité.

Par ailleurs, les contre-exemples alimentent et enrichissent le concept de fonction lui-même ainsi que les concepts d'analyse qui lui sont associés. Ils provoquent des besoins de précisions qui conduisent à énoncer des définitions et à formuler des conditions restrictives nécessaires à la validité des résultats.

5.2. Contre-exemples et enseignement

Pour l'enseignement au niveau des premières années universitaires, nous avons en vue de doter les étudiants d'une panoplie de traitements, permettant entre autres, le recours personnel au contre-exemple. En particulier, il s'agit que l'enseignant ou les documents disponibles ne soient pas les seules références de l'étudiant en quête de vérité mathématique, mais qu'il dispose lui-même d'un lot de traitements-types variés pour éprouver cette vérité.

Nous suggérons que, parmi les activités d'enseignement, on propose aux étudiants un travail en groupes, sur la production de contre-exemples à des propositions fausses qui sont des sources d'erreurs fréquentes. En appui de ce travail, l'enseignant a pour tâches de relever *les procédures, essais, erreurs, réussite ... des élèves, [...]* Ce relevé n'est en aucun cas une simple énumération ; le professeur doit pouvoir classer les productions des élèves, et les mettre en correspondance avec des connaissances, des savoirs ... ou au contraire y reconnaître un (des) élève(s) aux prises avec une ignorance institutionnelle. (cf. Bloch, 1999). Le professeur, en incitant les élèves à produire des contre-exemples vis-à-vis d'erreurs commises, devrait *mettre en évidence des conflits entre des interprétations contradictoires des élèves* et les aider *au travail de collaboration dans les groupes* (cf. Sensevy, 1998). L'utilité d'un tel conflit pour l'apprentissage a été établie sous réserve que certaines conditions soient vérifiées ; Hasemann précise ces conditions et parle alors d'un type de conflit qu'il qualifie d'interne et conceptuel : celui qui *découle de l'apparition simultanée dans l'esprit d'un individu d'aspects du savoir différents et antagoniques, qui relèvent de schèmes ou de sous-systèmes de la pensée distincts* (cf. Hasemann, 1988). Un autre type de conflit est

qualifié par Hasemann d'interne-externe : celui qui *est déclenché par la confrontation de perceptions actuelles avec des expériences passées (ibid)*. Même si c'est un tel conflit interne-externe qui est provoqué par l'irruption d'un contre-exemple donné, il convient de noter qu'un second conflit interne et conceptuel, favorable à un processus d'apprentissage, risque d'en résulter.

Le travail en groupe peut favoriser la construction de contre-exemples par un enseignement de type « métaconnaissance » (cf. Robert, 1988) des différentes stratégies que nous avons relevées dans cette recherche et qui sont favorables à une production quantitativement abondante et qualitativement correcte.

Notons enfin que, si un étudiant à l'université, travaillant isolément, a généralement un registre préférentiel assez stable, le travail en groupe pourrait modifier la situation en amenant une prise en compte des diversités des registres (*ibid*).

BIBLIOGRAPHIE

- BALACHEFF N. [1988], *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*, Thèse, Institut National Polytechnique de Grenoble **84**, 155, 156.
- BENBACHIR A. & ZAKI M. [2002], Production d'exemples et de contre-exemples en analyse – Etude de cas en première année d'université, *Educational Studies in Mathematics* **47** n°3, (à paraître).
- BLOCH I. [1999], L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique, *Recherche en Didactique des Mathématiques* **19/3**, 135-194.
- COLETTE J.P. [1979], *Histoire des mathématiques*, Ed. Vuibert / ERPI Duvert, 1996.
- GISPERT H. [1982], *Camille Jordan et les fondements de l'analyse*, Thèse. Publications mathématiques d'Orsay, Orsay, 82.
- GLAESER G. [1971], *Mathématiques pour l'élève-professeur*, formation des enseignants, Paris, Hermann, 108.
- HASEMANN K. [1988], Conceptions 'alternatives' des élèves, conflits conceptuels et leur importance pour les processus d'apprentissage des mathématiques in *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 173-179, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- HITT H. [1998], Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction, *Annales de didactique et de sciences cognitives* **6**, 7-26, IREM de Strasbourg.
- LAKATOS I. [1976], *Proofs and refutations*, the Logic of Mathematical Discovery, Cambridge University Press, trad. Franç., Preuves et réfutations. Ed. Hermann, [1985], 167,171.
- LEGRAND M. [1988], Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique : le débat scientifique en situation d'enseignement, in *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* 53-66, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- LEGRAND M. [1990], « Circuit » ou les règles du débat scientifique, *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année*, commission INTER-IREM université.
- MARGOLINAS C. [1993], *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématique*, Ed. La Pensée Sauvage, 30,31.
- MORETTI M.T. [1992], *L'exploitation des analyses factorielles en didactique des mathématiques*, Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 50.
- RICHARD J.F. [1990], *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Ed. Armand Collin, 203.
- ROBERT A. [1988], Première année d'enseignement en DEUG scientifique : une démarche, in *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, 173-179, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- SENSEVY G [1998], *Institutions didactiques*, PUF L'éducateur, Paris.
- YOUSCHKEVITCH A.P. [1981], Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle, Traduction française dans *Fragments d'histoire des mathématiques*, brochure *APMEP* **41**.

Amina Benbachir et Moncef Zaki
 Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques
 Département de Mathématiques et Informatique
 Faculté des Sciences Dhar El Mehraz.
 B.P. 1796. Fès – Atlas. Maroc.
 Amina.benbachir@caramail.com
 Zaki.moncef@caramail.com

ACHILLE MAFFINI

CONTINUITÉ ET DISCONTINUITÉ UNE ACTIVITÉ AVEC DES ENSEIGNANTS EN FORMATION

Résumé. L'article traite des concepts de continuité et de discontinuité d'une fonction. Ce travail a été mené avec des stagiaires en formation. L'examen et l'analyse des définitions relatives au concept mathématique de fonction continue dans les livres d'analyse, nous ont conduit à donner 'notre' définition de la discontinuité.

Introduction

Le problème de continuité d'une fonction est traité en Italie dans le cours d'Analyse (qui d'habitude au lycée est proposé en cinquième et dernière année). Ce concept est, en général, introduit après celui de limite. Il est en revanche utilisé implicitement dans beaucoup de cas. Par exemple, l'introduction des nombres réels et la représentation des courbes dans un plan cartésien. Par ailleurs, dans l'introduction intuitive du concept de limite beaucoup de textes utilisent implicitement, la continuité pour «justifier» la définition de la limite.

Le problème, à mon avis, réside dans une relation-séparation entre le concept de continuité dans un sens global et le concept dans un sens local.

Le travail proposé est le fruit d'une activité, établie sous forme de réflexion, dans un laboratoire de didactique¹ des Mathématiques de l'Ecole de Spécialisation pour l'Enseignement Secondaire (SSIS) de l'Université de Parme. L'objectif principal dans ce sens, au-delà du document spécifique, était celui d'induire «une attitude» vers les approches possibles par rapport à un sujet². Cet objectif constitue l'axe principal de la recherche dans tout le laboratoire.

Le groupe avec lequel nous avons travaillé est constitué de 17 personnes en formation (15 présents) avec des Maîtrises en mathématiques, physique, profession d'ingénieur, tous avec des expériences (plus ou moins significatives) dans l'enseignement.

1. Orientation de l'activité

Comme activité introductive à celle-ci, on avait proposé précédemment une activité sur le concept et sur le sens d'une définition mathématique dont nous avons précisé la structure. En général une définition se présente comme une implication, où l'antécédent est formé par les propriétés qui indiquent l'entité à définir (posé comme conséquence). En fait, il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante (si et seulement si), où l'autre implication est implicite sur le plan syntaxique, tandis que sur le plan sémantique elle est explicitée à travers la caractérisation de l'entité à définir à travers les conditions posées. Cette précision peut être 'lue' aussi d'une autre manière ; si avec A nous indiquons le concept à définir et avec B les propriétés qui le définissent, la structure de la définition est du type $B \Rightarrow A$; mais il est aussi

¹ A l'intérieur de la SSIS le l'objectif du laboratoire (Aire 3) est celui de favoriser les projets et la réalisation d'activités didactiques utilisables pendant le stage ou, plus généralement, d'un point de vue méthodologique, dans la future carrière des enseignants.

² Dans le décret (instituteur des SSIS) MURST 26/5/98 qu'on clarifie comme dans la formation initiale de l'enseignant l'attitude du chercheur est importante : «... posséder des connaissances adéquates dans le domaine des secteurs disciplinaires de sa compétence, avec également des références aux aspects historiques et épistémologiques ; [...] continuer à développer et approfondir ses connaissances et ses compétences professionnelles, avec une attention pour les acquisitions scientifiques ; rendre significatives, systématiques, complexes et motivantes les activités didactiques à travers un projet curriculaire flexible qui inclut les décisions par rapport aux objectifs, aires de connaissance, méthodes didactiques ; [...]»

opportun, dans la pratique didactique, de mettre en évidence comment les entités qui ne vérifient pas les propriétés B ne sont pas de type A , c'est à dire $\neg B \Rightarrow \neg A$; dans une logique classique la conjonction des deux propositions porte justement à la double implication dans la définition.

Par exemple si je définis un parallélogramme comme un quadrilatère avec les côtés opposés parallèles, je suis en train de dire que :

Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles **alors** c'est un parallélogramme.

Ceci à priori n'exclut pas que je puisse appeler parallélogramme aussi d'autres objets (par exemple cela n'exclut pas que les trapèzes soient des parallélogrammes, vu que l'antécédent de la proposition serait faux et rendrait vraie la proposition même en n'excluant pas, s'agissant d'une définition, que la conséquence soit vraie).

Sur le plan didactique, on dessine, dans ce cas un trapèze pour dire que ce n'est pas un parallélogramme, c'est-à-dire :

Si c'est un quadrilatère, il **n'a pas** ses côtés opposés parallèles **alors** ce **n'est pas** un parallélogramme.

En substance on veut que les parallélogrammes soient tous et seulement tous les quadrilatères avec les côtés opposés parallèles.

En revenant sur l'activité de la continuité, on a distribué aux personnes en spécialisation des textes de lycées scientifiques et des textes universitaires et on leur a demandé de donner une formalisation logique schématique des définitions comme elles étaient présentées. Avec «logique schématique», on entendait une schématisation qui tienne compte de la structure générale de la définition d'un point de vue propositionnel. Les buts de cette première partie étaient essentiellement deux :

- 1) faire remarquer que les définitions ne sont pas toutes du même type,
- 2) faire trouver la structure logique d'une définition.

Si le premier objectif a été facilement atteint, certains ont rencontré des difficultés dans le second cas, ceci montrant le peu de familiarité, même de la part des étudiants avec une Maîtrise de mathématiques, avec les outils de la logique.

2. Les définitions trouvées

Avant d'analyser les définitions de fonctions continues tirées des livres d'analyse considérés (la référence entre parenthèses carrées renvoie au texte indiqué en bibliographie), nous citons quelques définitions tirées de livres universitaires.

Avant tout, pour parler de fonctions continues, il faut considérer une fonction définie sur un ensemble X à valeurs dans un ensemble X' dotés de structures topologiques. Pour notre étude, nous avons traité des fonctions réelles définies sur des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ avec la topologie ordinaire sur $\mathbf{R}$.

[CTV] Soit X et X' deux espaces topologiques et soit $f: X \rightarrow X'$ une application de X dans X' . Nous dirons que f est une application continue si l'image réciproque $f^{-1}(A')$ de chaque A' ouvert de X' est un ouvert de X [page 21].

Après dans le même texte [page 22], on donne une proposition où on démontre qu'une fonction entre espaces topologiques est continue si et seulement si l'image réciproque d'un fermé est un fermé. Dans cette définition, la «topologie ordinaire», définie par exemple avec les intervalles, joue un rôle décisif, dans le sens de la continuité de $\mathbf{R}$.

[P] Soit E, F deux espaces topologiques et soit $f: E \rightarrow F$ une application. L'application f est dite continue en $x_0 \in E$ si, pour chaque voisinage V de $y_0 = f(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que $f(U) \subset V$. Ce qui équivaut à dire : pour chaque voisinage V de y_0 $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0 , [page 113].

[AB] Si $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ (l'écriture est pour " f est une fonction de A dans $\mathbf{R}$ "), on dit que f est continue en x^* si³

$$\forall U \in \mathcal{F}_{f(x^*)} \exists V \in \mathcal{F}_{x^*} \forall x \in A \cap V \quad f(x) \in U, \text{ [page 281].}$$

Par la suite [page 282] dans le même texte on démontre une proposition où on affirme que la définition de la continuité équivaut à trois autres :

- a) $\forall U \in \mathcal{F}_{f(x^*)} \exists V \in \mathcal{F}_{x^*} \quad f(A \cap V) \subset U$;
- b) l'image réciproque d'un voisinage de $f(x^*)$ est un voisinage de x^* ;
- c) c1) x^* est un point isolé de A ou bien
c2) $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$.

3. Observations sur le concept de continuité

Les trois définitions précédentes n'indiquent pas toutes 'la même chose'. En particulier, [P] et [AB], tirées de textes d'Analyse, se réfèrent à des conditions locales (l'extension de la continuité à un sous-ensemble du domaine est donnée par la continuité en chaque point du sous-ensemble) tandis que [CTV], prise d'un texte de Topologie, se réfère à des conditions globales. Le concept de continuité de manière globale est repris dans [N] où on ne l'oppose pas tellement à celui de discontinuité mais à celui de discret. [N], en ce sens, se réfère clairement au concept de continuité qui caractérise les nombres réels et qui se retrouve ensuite dans les différents domaines qui utilisent un tel ensemble numérique comme modèle⁴.

Dans la didactique italienne, surtout au niveau du collège, la condition de continuité est donnée au niveau local, et comporte peu de problèmes de signification. Il n'y a pas de doute en effet que de cette manière on tend à perdre non seulement le concept global de continuité, mais aussi, avec celui-ci, le sens intuitif de la continuité. Il n'y pas de doute également que de cette manière on donne un instrument opératif maniable pour traiter le concept de continuité et ceci constitue une bonne motivation de caractère didactique.

L'analyse de la définition de continuité que l'on trouve dans la plus grande partie des textes de lycée, a montré qu'elle est déductible de la forme équivalente c2 à celle proposée par [AB] (c'est-à-dire l'égalité entre la limite et la valeur de la fonction calculée au point x^*). C'est ici, cependant que, l'analyse faite par les étudiants en spécialisation a mis en évidence toutes les différences qui amènent ensuite au concept de discontinuité.

Les conditions explicitées par c2 sont trois :

- a) que la fonction soit définie en x^* ,
- b) que x^* soit un point d'accumulation,
- c) que $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$

En indiquant avec :

- C : la fonction f est continue en x^* ,
- D : $x^* \in D_f$,
- A : $x^* \in D(D_f)$,
- L : $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = f(x^*)$.

³ Avec $\mathcal{F}_x$ nous dénoterons la famille des voisinages de x .

⁴ Le problème de l'usage de "continu" quand on parle de 'fonctions' et quand on parle de 'nombres réels' est traité en [L].

la définition de la continuité formalisée par les étudiants en formation peut être exprimée par les différentes propositions⁵

$$(1) \quad C \Leftrightarrow (D \wedge A \wedge L) \quad (\text{voir [BM], [CGV], [CM], [DBM], [PMA], [VB], [ZS]})$$

Ou bien

$$(2) \quad C \Leftrightarrow (D \wedge A \Rightarrow L) \quad (\text{voir [AMP], [B], [C], [CBM], [OCT]})$$

Dans [B], la définition est de la forme

$$(3) D \wedge A \Rightarrow (C \Leftrightarrow L) ;$$

Dans ce cas, le fait que la condition de continuité dépende seulement de la limite pour les valeurs du domaine, même si elles sont d'accumulation, semble explicite. Cela vaut la peine d'observer que, si on suppose C vrai, la (2) et la (3) sont équivalentes.

Les structures logiques précédentes méritent quelques observations, surtout par rapport à (2).

L'implication qui y apparaît est à comprendre, dans le sens logique, de manière classique. Si du reste, il en était ainsi, une fonction serait continue même en des points isolés (et ceci n'est pas perçu comme problème), mais aussi en des points qui n'appartiennent pas au domaine : ceci serait, par contre un problème ! Les antécédents de l'implication semblent donc être plus des prémisses (hypotheses) que des antécédents au sens strict. Ce que cependant les étudiants en formation ont mis immédiatement en relief est que les conditions (1) et (2) ne sont pas équivalentes, chose encore plus évidente si on passe aux propositions (équivalentes respectivement à (1) et (2) dans la logique classique), mais aussi aux formules qui peuvent mieux faire comprendre le rôle des antécédents dans (2)).

$$(1') \quad \neg C \Leftrightarrow (\neg D \vee \neg A \vee \neg L)$$

ou bien

$$(2') \quad \neg C \Leftrightarrow (D \wedge A \wedge \neg L)$$

Dans (1) et (1') en particulier les trois conditions qui caractérisent la continuité sont mises sur le même plan (ceci étant mis en relief par la conjonction) ; il est suffisant donc qu'une des trois ne soit pas vérifiée pour parler de fonction non continue en un point.

L'analyse des définitions sous cette forme a permis de faire émerger avec les étudiants une série de questions qui ont été à la base du travail qui a suivi :

Fonction non continue équivaut à discontinue (évidemment toujours de manière ponctuelle) ? Par rapport à la condition (1'), pas de manière 'classique' : pour une fonction de domaine $] -5; 0[\cup] 0; 5[$, qui se poserait le problème par exemple d'établir la discontinuité en 10 ? Selon la classification de la didactique usuelle (I, II III espèce) dans quelle catégorie cela rentrerait-il ? Pas seulement ; en un point isolé, selon cette définition, une fonction ne serait pas continue.

Par contre la (2') demande qu'on puisse parler de fonction non continue seulement en des points du domaine et d'accumulation pour celui-ci même⁶.

Comment procéder donc ? Et surtout quel 'poids' donner aux conditions qui définissent la continuité ?

En premier lieu, on a demandé aux étudiants combien opteraient, pour la notion de continuité discontinuité, le point appartenant au domaine de la fonction ou pour des points n'appartenant pas au domaine. Sur 15 présents, 4 limitent le concept de discontinuité à des

⁵ Quelques-unes de ces propositions ont été tirées des manuels sur la condition de discontinuité (négation de la continuité).

⁶ [CBM] à la page 64 parle de la discontinuité et il met en évidence en note comment il est impossible de parler de discontinuité (vue comme négation de la continuité) quand le nombre n'appartient pas au domaine de la fonction. Selon les auteurs c'est le choix fait dans *bonne part des manuels d'Analyse les plus modernes*.

points du domaine, 11 à des points n'appartenant pas au domaine. Cela montre que le concept de discontinuité coïncide avec la négation de la continuité.

À partir de ces considérations, le problème qu'on s'est posé est pourquoi il peut être important (si ça l'est) d'établir 'quelque chose' de relatif aux points qui n'appartiennent pas au domaine d'une fonction. Il est clair que ce 'quelque chose' (appelons-le de manière générique information) peut être établi pour les points d'accumulation ; c'est-à-dire l'information est locale.

Comme évoqué, dans la didactique usuelle, généralement on part du concept de limite (dont l'introduction intuitive utilise les continuités des fonctions) pour arriver à la continuité (dans des termes formels, mais après !). Un parcours inverse probablement serait intuitif (il est clair que quand on parle de continuité intuitive on l'entend dans un sens global) pour arriver ensuite à justifier la limite comme 'rétablissement' des continuités (quand c'est possible par exemple pour le troisième espèce) ou pour la classification des points dans lesquels une telle continuité n'est pas à établir ; nous parlerons dans ce cas de discontinuité (I et II espèce)⁷. Ce type de parcours a amené à critiquer les formulations canoniques de la discontinuité : dans la (1') les trois conditions n'ont pas le même poids ; en particulier on ne contemple pas le cas que x_0 doit être un point d'accumulation ; dans la (2') on parlerait seulement de discontinuité aux points du domaine. Cette dernière, évidemment, pourrait être un choix (voir par exemple les réponses des quatre en formation), mais si le problème est de 'rétablir' (où c'est possible) la continuité, comment faire pour savoir, à priori, en quels points ? Comment interpréter un résultat qui n'amène pas au but ?

4. Une définition de discontinuité

La conclusion à laquelle on est arrivé est que la discontinuité est, en un certain sens 'autre chose' par rapport à la continuité. Elle a été vue comme une continuité qui 'parfois' se traduit en acte et en ce sens peut servir à comprendre mieux la continuité (ponctuelle). Une fois niée l'opportunité de la considérer comme une négation de la continuité, on s'est occupé de lui donner une définition propre.

Il a donc été demandé aux étudiants de proposer une définition de la discontinuité d'une fonction en une valeur x_0 . L'aspect intéressant de cette phase a été justement l'idée qu'on donne, dans ce contexte, une définition autonome d'un concept mathématique. Les résultats obtenus peuvent être résumés comme suit (on parle toujours de 15 personnes en formation) :

14 ont demandé comme hypothèse que x_0 soit un point d'accumulation pour le domaine de la fonction.

Pour les conditions successives de discontinuité :

9 (par rapport aux 11 qui se sont 'déclarés') ont mis parmi les conditions que x_0 n'appartienne pas au domaine ;

Tous ont posé comme condition que les limites droite et gauche ne coïncident pas ou bien qu'il n'existe pas de limite ;

12 qu'au moins une des deux limites soit infinie ;

8 que, dans le cas où la fonction est définie en x_0 , la valeur de la limite soit finie mais différente de $f(x_0)$. À ce propos un étudiant a introduit la définition de « fonction alternée » en x_0 :

⁷ La classification des discontinuités n'est pas estimée significative par tous les manuels. Ceci est un exemple de confusion entre les **objectifs** et les **opportunités**. Un objectif significatif est celui de **redéfinir** d'une façon continue une fonction en un point. Si cet objectif ne se réalise pas, **une opportunité** est celle de classer les résultats obtenus, en les appelant d'une façon ou d'une autre.

Étant donné une fonction $y=f(x)$ de A dans $\mathbf{R}$ nous dirons qu'elle est alternée en $x_0 \in D(D_f) \cap D_f$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, l \in \mathbf{R}$.

Selon cette définition, si la fonction est continue en x_0 alors elle est aussi alternée, tandis que le contraire n'est pas valable. Cette implication justifie, selon l'étudiant, le nom donné, tiré du concept courant : un courant continu peut être vu comme un courant alterné de fréquence nulle, tandis qu'un courant alterné n'est en général pas continu.

Cela vaut la peine de reprendre le concept de fonction.

Enfin on observe que certains ont donné la définition par rapport à la classification classique des discontinuités, en confondant l'exigence de la définition avec le problème (suivant) de la classification.

Dans la suite de la discussion, on a mis en évidence comment certaines de ces conditions étaient à déduire des autres ce qui a justifié l'omission de conditions de la part de certains étudiants. En particulier on a observé que la condition que la limite soit infinie est un cas particulier où la valeur n'appartienne pas au domaine et où la limite est différente de $f(x_0)$. De même, la condition que la limite n'existe pas englobe aussi celle de la non coïncidence des limites droite et gauche.

Une fois fixé x_0 avec comme condition dont il faut tenir compte que soit un point d'accumulation pour le domaine de la fonction, on a discuté si une telle condition, dans un sens logique, était à donner comme antécédent d'une implication ou avec une conjonction. Pour éviter l'ambiguïté logique (dans une optique classique) de l'implication, on a opté pour la conjonction. On est donc arrivé à la définition suivante :

Définition. Étant donnée la fonction $y=f(x)$ et étant donné $x_0 \in D(D_f) \cap \mathbf{R}$ nous dirons que la fonction est discontinue en x_0 si

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ n'existe pas}$$

ou bien,

$$(2) x_0 \notin D_f,$$

ou bien,

$$(3) x_0 \in D_f \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Symboliquement si on désigne par :

Dis : fonction discontinue en x_0 .

D : $x_0 \in D_f$.

A : $x_0 \in D(D_f)$.

L : la limite existe.

L_f : la limite L_f existe et est finie.

la définition précédente deviendrait

$$\text{Dis} \Leftrightarrow (A \wedge (\neg D \vee (\neg L) \vee (D \wedge L_f \neq f(x_0))))$$

C'est le moment de rappeler que si on remplace la première conjonction par une implication, on ne doit pas l'entendre selon la logique classique mais comme hypothèse qui doit être vérifiée pour pouvoir parler de discontinuité.

Évidemment, la condition posée est peu opérative ; sa finalité formelle est liée au fait de l'opposer aux formalisations précédentes pour en mettre en évidence les différences substantielles. En outre, il faut souligner que dans les conditions posées les classifications des discontinuités sont récupérables comme d'habitude elles sont présentées dans la pratique didactique.

On peut enfin présenter quelques exemples de fonctions discontinues selon la définition proposée :

- a) la fonction de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbf{R}$, $y=1/x$ est discontinue en $x_0=0$ par (2),
- b) la fonction de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, $y = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 2 \\ 2x+3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ est discontinue en 2 par (1),
- c) la fonction de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$, $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0 par (3).

Comme un étudiant l'a fait remarquer, détacher la définition de la discontinuité de celle de continuité pouvait créer quelque problème au point de vue intuitif ; c'est pour cela qu'on a pensé que cette activité devait être accompagnée sur le plan didactique par de nombreux exemples surtout graphiques.

Il faut enfin souligner le scepticisme d'une étudiante sur tout le parcours, car selon elle, on avait mis en évidence seulement une condition, en la privilégiant par rapport à d'autres. À ce sujet on lui a fait observer que ceci est évident dans la pratique normale, mais que certains choix avaient été faits (comme parler de discontinuité en des valeurs qui n'appartiennent pas au domaine) de manière non unanime.

5. Conclusion

Les conclusions sur ce travail peuvent être sur deux fronts : le problème (didactique) du rapport continuité-discontinuité et comment la question a été affrontée dans le laboratoire.

Partons du rapport continuité-discontinuité. S'il est vrai que la condition de continuité est 'culturellement intuitive', ceci justifie la difficulté de l'introduction des discontinuités, vues justement comme 'accidents'. La même expression de 'fonction à traits' fait que la possibilité non immédiate de 'souder' les pièces d'une fonction lui donne un permis d'anomalie. Si c'est ainsi, il devient compréhensible, dans la didactique, de se 'préoccuper' des discontinuités de troisième type beaucoup moins que des autres, si ce n'est dans l'optique de donner un nom aux cas, si nous pouvons dire, irrécupérables. En effet si ce n'était pas pour cette exigence, cela pourrait sembler peu significatif de se préoccuper de discontinuité en des points n'appartenant pas au domaine ; tout ceci évidemment dans l'optique que la discontinuité soit la négation de la continuité et pas 'autre chose'. Souligner cet aspect de la didactique n'est pas opportun pour éviter des ambiguïtés dangereuses.

En ce qui concerne l'activité de laboratoire, comme on l'a dit, celle-ci s'insérerait dans un parcours général dans lequel on tendait à montrer la signification à donner à une définition et comment les choix (mathématiques) dans ce sens conditionnent les propriétés de l'entité définie. Le parcours qui, partant de la discussion de données canoniques, nous a amené à 'notre' définition a servi à illustrer comment d'un côté la présentation des concepts dans les livres peut être vue de manière critique et comment, d'autre part, on peut 'oser' le parcours de voies alternatives qui ont des objectifs didactiques précis.

BIBLIOGRAPHIE

- [A] GROUPE AHA [1999], *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles.
- [AB] Acerbi BUTTAZZO [1997], *Primo corso di Analisi matematica*, Pitagora.
- [CTV] Checcucci Tognoli VESENTINI [1972], *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli.
- [L] A. LEONELLI [1990], *Continuità e connessione*, Archimede, Novembre.
- [LAC&A] CEAUSHU Leozun Amit, ecc. [2000], *Pratique en classe ou formation intellectuelle. Appréhension différente entre enseignants et enseignés dans la formation permanente*, in *Cultural diversity in mathematics (education)* : CIAEM 51, Horwood Publishing.
- [N] NORDON [8-13 Juillet 1995], *Le continu quand il n'était qu'attribut*, Contribution à une approche historique de l'enseignement des mathématiques – Besançon.
- [P] PRODI [1970], *Analisi matematica*, Boringhieri.

Textes de lycées scientifiques

- [AMP] Andreini Manara Prestipino [1999], *Matematica controllo per i programmi sperimentali*, McGraw Hill, 158.
- [B] Bagni [1996], *Corso di Matematica 3*, Zanichelli, 1371.
- [BM] Battelli Moretti [1992], *Corso di matematica sperimentale e laboratorio*, Le Monnier, 184.
- [C] Cedrazzi [1985], *Analisi Matematica*, Zanichelli, 79.
- [CBM] Cateni Bernardi Maracchia [1987], *Analisi matematica*, Le Monnier, 63.
- [CGV] Castelnuovo Gori Giorni Valenti [1988], *Elementi di analisi matematica*, La Nuova Italia, 85.
- [CM] Ciolli Michelassi [2000], *Corso di matematica 3*, Principato, 44.
- [DBM] Doderò, Barboncini, Manfredi [1991], *Elementi di Matematica 5*, Ghisetti e Corvi, 101 e 115.
- [OCT] Oriolo Coda Testa [1996], *Matematica*, Bruno Mondatori, 144.
- [PMA] Progetto Matematica Archimede [1999], *I matemoduli F*, Archimede edizioni, 52.
- [VB] Venè M., Betti F. (a cura di) [1998], *Matematica*, Sansoni, 30.
- [ZS] Zwirner, Scaglianti [1998], *Analisi Infinitesimale*, CEDAM, 94.

Achille Maffini
 Lycée scientifique G. Falcone- Asola (MN)
 Unité locale de recherche en Didactique des Mathématiques de l'Université de Parme
 Università degli Studi di Parma
 Dipartimento di Matematica
 Via M. D'Azeglio, 8
 43100 Parma (Italia)
 a.maffini@inwind.it

LE PROJET CASYOPÉE : UN ENVIRONNEMENT DE CALCUL FORMEL POUR L'ÉTUDE DE PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS AU LYCÉE

Résumé. Le travail rapporté dans cet article part d'une réflexion sur l'usage éducatif de logiciels de calcul formel. Cette réflexion nous¹ a conduit à la conception d'environnements d'apprentissage pour l'algèbre et l'analyse au lycée. Ces environnements sont conçus pour gérer des objets mathématiques, leurs propriétés et leurs différentes représentations. Ils permettent ainsi à l'élève des démarches associant exploration numérique, graphique et algébrique et preuve, et donnent au professeur les moyens de préparer l'activité de l'élève. Pour assurer ces fonctions, ils ont recours au noyau symbolique d'un logiciel de calcul formel existant. L'article présente notre réflexion, puis un exemple d'utilisation de Casyopée², le plus récent des environnements, et développe les choix de conception et les apports de ce travail.

1. Introduction

1.1. L'usage éducatif de logiciels de calcul formel : intérêt et difficultés

Voici comment nous voyons l'utilisation du calcul formel après une dizaine d'années d'expérimentation.

En premier lieu, le calcul formel nous apparaît comme un moyen moderne de faire des mathématiques en ce sens que l'automatisation des tâches, spécialement celles qui demandent de l'application et de la minutie est une tendance forte de la vie actuelle. Les manipulations algébriques font partie de ces tâches et nous pensons qu'à moyen terme, les élèves n'accepteront plus de consacrer autant de temps que dans le passé à l'entraînement que suppose une pratique experte. Le calcul formel offre aussi des potentialités pour l'apprentissage. Les nouvelles représentations des objets mathématiques et les nouvelles possibilités d'action qu'il apporte peuvent en effet contribuer aux conceptualisations, dans une articulation à trouver entre le travail sur ordinateur et la pratique papier/crayon³. Permettant notamment de traiter des objets plus généraux (par exemple des familles de fonctions, plutôt que des fonctions isolées), le calcul formel est un moyen de dépasser le caractère particulier des exemples qu'il est possible de traiter "à la main", de développer des techniques de portée plus vaste et d'accéder ainsi à la généralité. L'utilisation du calcul formel nous paraît donc une condition et un moyen pour que l'algèbre continue d'exister comme pratique scolaire.

Pourtant, le calcul formel tarde à prendre sa place dans les classes. Les expérimentations de cette technologie dans les classes ont contribué à une prise de conscience chez les chercheurs et les innovateurs : l'utilisation d'un logiciel mathématique met en jeu de façon liée des connaissances mathématiques spécifiques et une compréhension du fonctionnement du

¹ Deux équipes sont impliquées dans ce travail, l'une à Paris (INRP, Tecné) et l'autre à Rennes (IREM) dans le cadre du projet de recherche INRP 40122. Les idées, réalisations et observations de classe présentées dans cet article sont le produit de ce travail collectif. Dominique Lenne (Maître de Conférence à l'Université Technologique de Compiègne) pilote le projet dans son ensemble et dirige l'équipe de Paris. L'auteur dirige l'équipe de Rennes. Pour en savoir plus sur la composition et l'activité du groupe, consulter <http://www.inrp.fr/recherche/encours/rec40122.htm>.

² Casyopée est l'acronyme de Calcul Symbolique Offrant des Possibilités aux Elèves et à l'Enseignant.

³ Nous donnons ici seulement les éléments de réflexion directement utiles. Une discussion plus approfondie sur les apports conceptuels des manipulations algébriques avec et sans calcul formel peut être trouvée notamment dans Guin & Trouche (eds., 2002).

logiciel. Ces connaissances et cette compréhension ne sont en rien prédéterminées. L'utilisateur les construit dans un processus que l'on appelle genèse instrumentale (Trouche 2000). Bien que cette problématique "instrumentale" ne soit pas spécifique du calcul formel, je voudrais souligner que, lors des expérimentations, les genèses instrumentales du calcul formel nous ont paru poser des difficultés particulières chez les élèves. Une de nos hypothèses est que ces difficultés sont pour partie dues à la conception très ouverte des logiciels⁴ qui ne tient compte ni du domaine de tâche ni des connaissances de l'utilisateur. L'élève est confronté aux multiples fonctionnalités de la machine qui lui offrent de nouvelles capacités d'action, mais qu'il (elle) peut difficilement adapter à l'objectif qu'il (elle) vise. Il lui faut beaucoup de temps et des situations spécifiques pour "faire le tri" parmi ces fonctionnalités et les relier à ses connaissances mathématiques. Certes, il existe des exemples de genèses instrumentales réussies, mais elles se placent dans le contexte d'expérimentations impliquant un usage relativement intensif du calcul formel qu'il serait hasardeux de penser directement transposable aux classes "ordinaires".

La conception très ouverte des logiciels nous semble aussi à l'origine de difficultés rencontrées par les enseignants expérimentant l'usage du calcul formel dans leurs classes. Organiser de véritables situations d'apprentissage suppose que l'enseignant anticipe les comportements des élèves et le fonctionnement du logiciel. Les enseignants que nous avons observés nous ont paru n'être pas en mesure de le faire, du fait de la multiplicité des comportements et fonctionnements possibles, notamment dans le pilotage des calculs. Nous avons en effet observé des séances très ouvertes à l'évolution imprévisible et des travaux très guidés ne laissant pas d'initiative aux élèves, mais peu de véritables situations où l'élève puisse développer librement des stratégies identifiables, a priori par l'enseignant⁵.

Ces difficultés d'intégration de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques ne sont pas particulières au calcul formel, mais certains indices montrent qu'elles sont plus résistantes dans le cas de cette technologie. Les logiciels de géométrie dynamique ou de calcul approché (tableurs-grapheurs, calculatrices graphiques) sont très fortement encouragés par les instructions officielles et commencent à être utilisés dans les classes, ce qui n'est pas le cas du calcul formel. Cette tendance s'accompagne d'une importance plus grande donnée aux pratiques de résolution approchées et à la visualisation graphique au détriment des méthodes algébriques.

1.2. Notre projet

L'intégration du calcul formel dans les classes nous paraît nécessaire, notamment pour que l'introduction de l'ordinateur dans les classes ne se traduise pas par un recul des pratiques algébriques et par l'utilisation exclusive du calcul approché et de la visualisation graphique, mais elle nous paraît aussi difficile avec les logiciels existants. Ces logiciels sont constitués d'un moteur de calcul formel (ou noyau symbolique) et d'une interface. Les fonctionnalités du

⁴ Les logiciels expérimentés ont été DERIVE (Soft Warehouse) et le module principal de la calculatrice TI-92 (Texas-Instruments). Ils sont considérés comme les plus facilement utilisables dans les classes de lycée. Les réflexions sur la conception des logiciels de calcul formel, issues de notre expérience avec ces logiciels s'appliqueraient a fortiori à d'autres logiciels conçus plutôt pour un usage universitaire.

⁵ Monaghan (2000, p.159) note que le caractère ouvert des logiciels de calcul formel (notamment le fait qu'ils sont indépendants du domaine de tâche et des connaissances de l'utilisateur) séduit une minorité d'enseignants curieux et provoque chez eux un intérêt nouveau pour les mathématiques. Il donne l'exemple de la résolution de l'équation $\sin(x)=2$ avec DERIVE, qui conduit à un résultat paradoxal dans le cadre des connaissances des enseignants de mathématiques. Il montre aussi que la majorité des enseignants est loin d'être prête à exploiter cette ouverture et que les tâches avec calcul formel généralement proposées en classe contraignent fortement l'activité de l'élève.

noyau reprennent les différentes techniques algébriques (factorisation, développement, résolution d'équations,...) et calculs utiles en analyse (limites, dérivation, intégration,...) L'interface vise simplement à mettre à disposition de façon "conviviale" les fonctionnalités du noyau et s'adresse à un utilisateur supposé avoir les connaissances mathématiques nécessaires. L'implémentation des techniques sous forme d'algorithmes varie notablement d'un logiciel à l'autre. En revanche l'interface diffère peu.

Notre projet est d'incorporer un noyau de calcul formel dans un environnement basé sur un schéma d'interaction impliquant l'élève et le professeur plutôt qu'un utilisateur non spécifié. Un schéma général est donné figure 1. À la différence des logiciels existants qui considèrent principalement des expressions, l'environnement est conçu pour gérer des objets mathématiques, leurs propriétés et leurs différentes représentations. À titre d'exemple, les objets considérés dans l'environnement Casyopée sont les fonctions d'une variable réelle, avec ou sans paramètres.

Il nous semble important, pour une pratique consistante du calcul formel, d'inscrire les propriétés comme des éléments visibles et manipulables dans l'environnement et d'offrir à l'élève des aides logicielles à la preuve. La preuve algébrique de propriétés motive en effet la recherche d'expressions pertinentes et de formes adaptées. Elle donne ainsi du sens aux manipulations formelles. Elle est complémentaire de la visualisation qui, par la mise en relation des différentes représentations, donne une existence aux objets⁶. Elle suppose que l'environnement gère les propriétés de façon à permettre l'enchaînement de pas de preuve et donne un diagnostic sur les preuves élémentaires (application d'un théorème ou d'une proposition algébrique).

L'idée de proposer différentes représentations des objets n'est pas spécifique à notre projet. Elle est cohérente avec l'importance donnée aux démarches de visualisation et d'exploration assistées par l'ordinateur. En revanche, les propriétés et leur preuve algébrique sont souvent considérées comme du domaine du papier/crayon. Notre schéma les intègre clairement comme des objets et actions bénéficiant elles aussi de l'assistance de l'ordinateur.

Pour la gestion des objets, l'environnement a recours au noyau de calcul formel. L'appel au noyau permet de vérifier la cohérence de la définition d'une fonction et d'en obtenir différentes expressions algébriques (factorisée, développée,...). Les possibilités de calcul approché du noyau sont utilisées pour les représentations graphiques et numériques. Les capacités symboliques du noyau permettent à l'environnement de donner un diagnostic pertinent à l'élève lors des preuves élémentaires.

Les possibilités de paramétrage sont cohérentes avec la nécessité soulignée plus haut de tenir compte des connaissances de l'élève. Elles sont en principe dédiées à l'enseignant, même si elles peuvent à l'occasion être utilisées par les élèves. Des outils spécifiques, s'appuyant sur les capacités symboliques du noyau peuvent permettre au professeur d'anticiper l'interaction de l'élève et de l'environnement. Par exemple, pour un problème centré sur l'étude d'une fonction, il est très utile à l'enseignant de disposer des différents objets et représentations pouvant être obtenues à partir de cette fonction par un élève utilisant l'environnement, et donc un module les donnant automatiquement sera une aide précieuse.

⁶ Comme le disent les commentaires du programme de Seconde : "On n'atteindra une certaine maîtrise du calcul algébrique que si on développe une aptitude à anticiper les effets d'une modification d'écriture. Pour ce faire, on développera la réflexion sur les différentes formes possibles qu'une expression peut prendre et sur les questions auxquelles chacune de ces formes permet de répondre."

Pour une discussion plus approfondie, voir Kieran (2002).

1.3. Méthode de développement

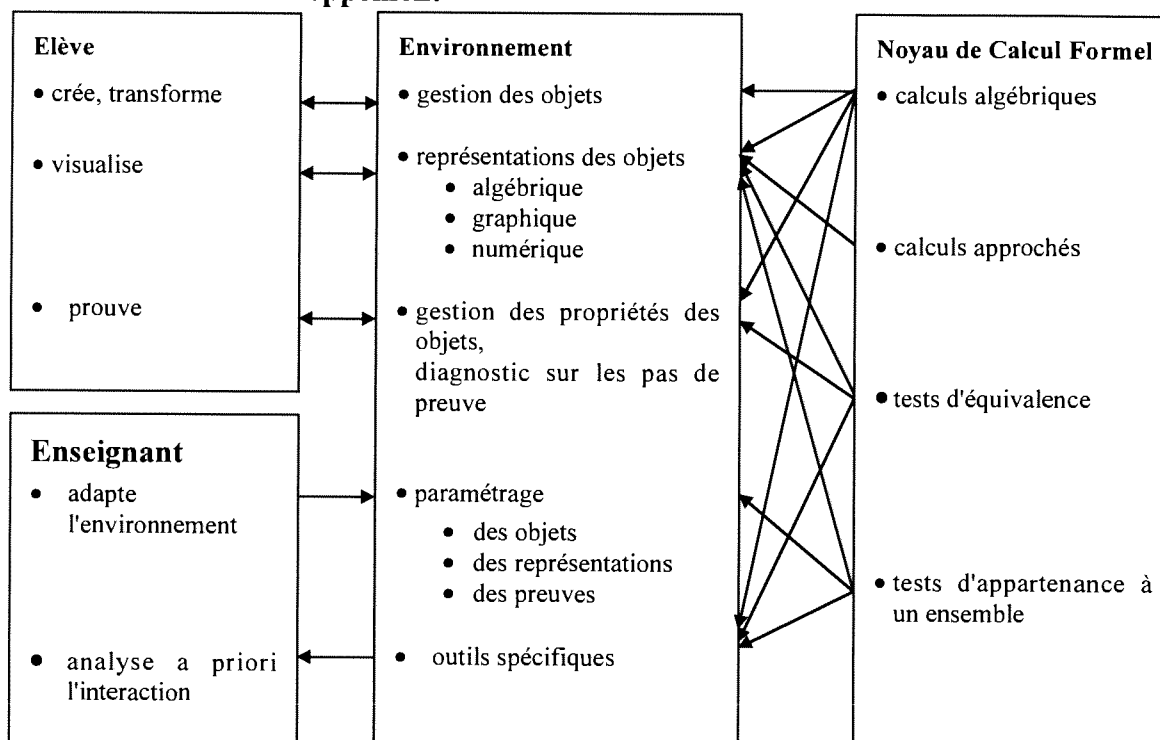


Figure 1

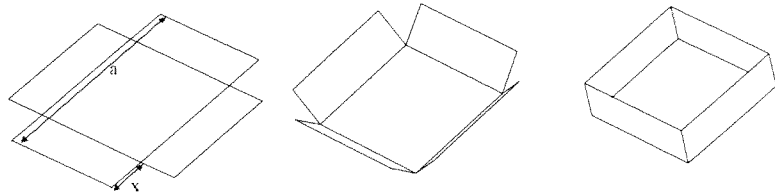
Pour développer et expérimenter des environnements à partir du schéma ci-dessus, nous avons adopté une méthode itérative en quatre pas. En premier lieu, nous définissons un domaine de tâche, nous spécifions le schéma en fonction de ce domaine, puis nous développons un environnement logiciel et enfin nous faisons des expérimentations auprès d'élèves de façon à vérifier la cohérence du développement avec les principes à la base du schéma. À l'issue de ce quatrième pas, nous repartons au premier pas en élargissant le domaine de tâches.

Nous nous situons actuellement à la seconde itération et travaillons à nouveau à un développement logiciel et à des expérimentations. Les travaux réalisés à Paris et à Rennes lors de la première itération sont rapportés respectivement par Lenne & Gelis (2002) et par Lagrange & Py (2002). J'en reprendrai certains éléments au moment de préciser les principes de conception et les apports de nos environnements. Auparavant, je vais exemplifier le schéma de la figure 1 en présentant l'utilisation de l'environnement Casyopée pour la résolution d'un problème classique.

2. Un exemple de réalisation

Le texte du problème est donné par la figure 2. Il s'agit du problème bien connu de l'optimisation du volume d'une boîte que je propose de résoudre par une technique algébrique accessible à des élèves de Seconde.

Considérons une feuille de papier de forme carrée de côté a . À chacun des quatre coins, nous coupons un carré de même côté x . Ensuite, nous plions pour faire une boîte. La boîte est ouverte sur le dessus.



Le problème est de déterminer la valeur de x pour laquelle le volume de la boîte est maximum.

Figure 2

Je vais d'abord montrer ce que peut être une exploration géométrique et graphique du problème à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, puis comment Casyopée permet d'aller plus loin dans l'exploration algébrique, la preuve et la généralisation.

2.1. Exploration géométrique et graphique

Avec le logiciel de géométrie dynamique Géoplan, il est possible (figure 3), après avoir choisi par exemple la valeur 18 pour a , de construire une figure dépendant d'une variable x évoluant de 0 à 9. En "pilotant"⁷ x , un point se déplace sur la courbe représentant le volume en fonction de x , en même temps que la figure se redessine. Cette exploration suggère qu'un maximum du volume ait atteint pour la valeur 3 de x .

Il s'agit de l'exploration visuelle d'un cas numérique, intéressante pour donner du sens au problème, mais que nous pensons insuffisante pour des élèves qui ont à se confronter à l'algèbre et à la puissance de ses méthodes.

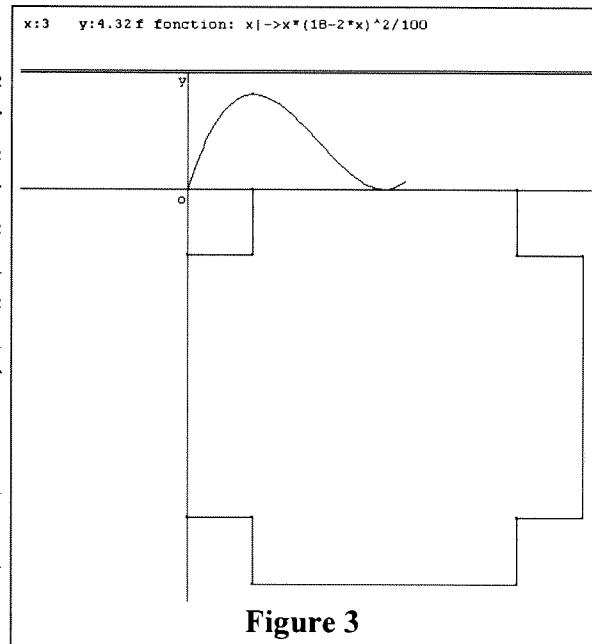


Figure 3

⁷ L'aide de Géoplan, rubrique "Pilotage d'un objet libre" indique : "On peut piloter les points libres et les variables numériques. Tous les objets qui en dépendent seront modifiés en conséquence. Les variables numériques (non dessinables) sont pilotées à l'aide (des touches flèches du) clavier".

Nous avons transposé cette fonctionnalité dans Casyopée d'une façon qui est montrée dans la suite du texte.

La figure 4 montre l'interface de Casyopée. La fenêtre de gauche est celle des fonctions. A la différence des expressions des logiciels standards les fonctions ont un nom (ici y_0), un intervalle de définition donné par des valeurs de la fenêtre des x (à droite) et différentes expressions qui peuvent être obtenues à l'aide de fonctionnalités symboliques de la fenêtre de calcul (au milieu, au dessus). Les fonctions ont aussi des propriétés qui peuvent être prouvées à l'aide de "justifications" qui correspondent à des pas de preuve élémentaires (au milieu, en bas).

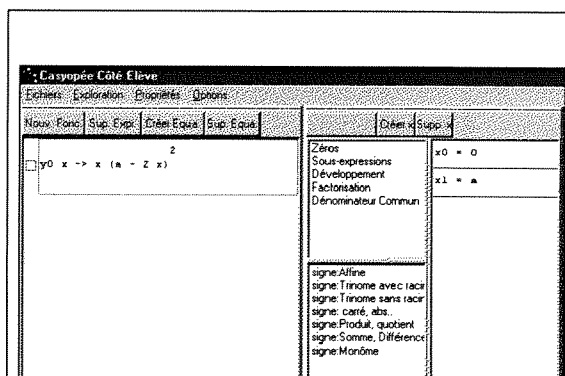


Figure 4

Les fenêtres de calcul et de justification ont été paramétrées par le professeur. Par exemple, il n'y a pas de calcul de dérivée, en cohérence avec le niveau auquel nous proposons la résolution du problème. La fonction donnant le volume pour un carré initial de côté a a été entrée et nommée y_0 . A ce stade, la fonction dépend du paramètre formel a et donc l'exploration numérique et graphique n'est pas possible.

Pour rendre possible l'exploration, l'élève peut choisir de "piloter" a . En donnant ainsi à a la valeur 18, l'exploration montre volume maximum pour x proche de 3. Avec Casyopée il est possible de prouver algébriquement cette propriété.

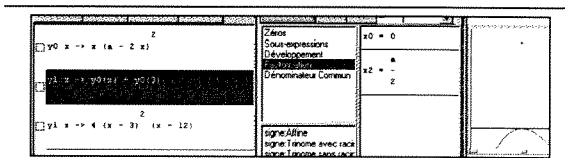


Figure 5

Une nouvelle fonction y_1 est définie par $x \rightarrow y_0(x) - y_0(3)$. Son graphe (figure 5) semble en dessous de l'axe des x , ce qui est aussi une exploration.

2.2. La preuve

La preuve commence par la factorisation de y_1 obtenue à l'aide de l'item correspondant de la fenêtre de calcul. Les deux facteurs ont la propriété d'être de signe constant sur l'intervalle de définition. La preuve continue donc par la définition des deux facteurs comme nouvelles fonctions à l'aide d'un item spécial (sous-expressions) de la fenêtre de calcul. L'une (y_2) est un carré et l'autre (y_3) est une fonction affine.

Des items de la fenêtre de justification (respectivement **carré**,.. et **affine**) peuvent être utilisés pour la preuve de leur signe (respectivement positif and négatif), ensuite la règle des signes pour un produit (**produit/quotient** dans la fenêtre de justification) permet de prouver que y_1 est négative sur l'intervalle (voir la fenêtre d'historique sur la droite, figure 6). Ceci prouve l'existence

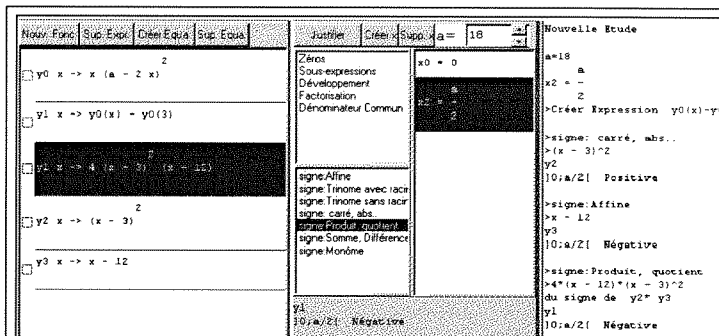


Figure 6

d'un maximum du volume pour x égal 3. La figure 7 donne un exemple de la façon dont une justification s'effectue. Pour appliquer la règle des signes, l'élève choisit les facteurs parmi les fonction dont le signe a été prouvé ou conjecturé.

L'environnement vérifie que la fonction considérée est bien le produit des facteurs donnés (à une constante près). L'élève propose ensuite une conclusion dont la cohérence est vérifiée par l'environnement.

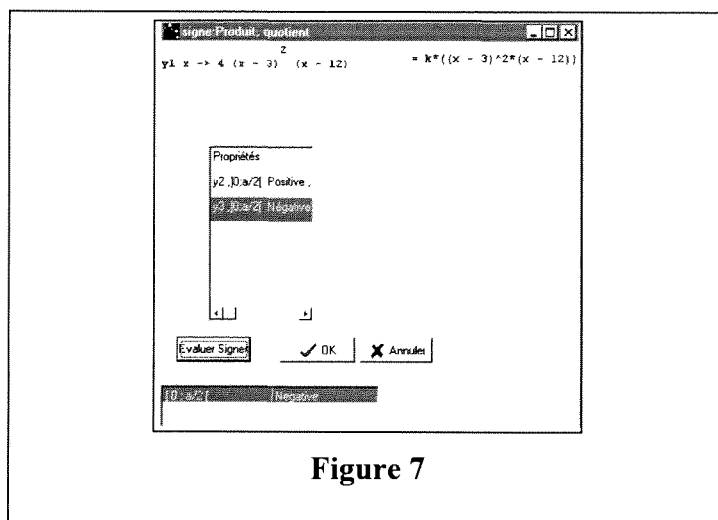


Figure 7

Le pilotage du paramètre a permet l'étude semblable d'un nouveau cas. Pour une valeur de a différente de 18, $y_0(x) - y_0(3)$ change de signe pour x égal 3, ce qui signifie que 3 est la valeur de x donnant un volume maximum seulement pour $a=18$. L'exploration et la preuve peuvent s'opérer sur des valeurs différentes de a en adaptant la valeur de y_1 (comme nous le verrons plus loin), jusqu'à ce qu'une conjecture générale apparaisse selon laquelle la valeur de x donnant un volume maximum est le sixième du côté du carré initial.

2.3. Généralisation

Une étude générale est alors possible. Pour cela, il faut que, comme au début de la résolution, le paramètre a ne soit pas piloté. C'est alors un paramètre formel. La définition de y_1 est modifiée en $x \rightarrow y_0(x) - y_0(a/6)$. y_1 se factorise et les signes des facteurs puis de y_1 peuvent être prouvés à l'aide des justifications présentées ci-dessus.

3. Choix de conception

Je vais maintenant expliciter les choix que nous avons fait au long des deux itérations. Il était important pour nous de choisir un domaine de tâche car nous pensons qu'un élève de lycée ne conçoit pas les objets algébriques et leurs transformations en elles-mêmes, mais dans un domaine donné. Par exemple Casyopée, comme nous venons de le voir, porte sur les propriétés élémentaires des fonctions (signes, variations). L'équipe de Rennes a ainsi fait le choix de se centrer sur une approche fonctionnelle de l'algèbre où les objets et transformations sont différents par exemple de ceux rencontrés dans la résolution d'équations. L'équipe de Paris a choisi un autre domaine relatif aux fonctions, qui mobilise des techniques algébriques spécifiques : la détermination de limites.

Comme je l'ai dit plus haut, le domaine de tâche évolue à chaque itération. L'équipe de Rennes a commencé par un domaine restreint (fonctions sans paramètres, tâches "classiques" d'étude de fonctions) qu'elle a étendu lors de la seconde itération pour inclure des problèmes de modélisation et de généralisation comme le problème de la boîte que je viens de présenter. L'équipe de Paris a ajouté lors de la seconde itération une dimension d'exploration graphique et numérique qui n'existait pas dans la première.

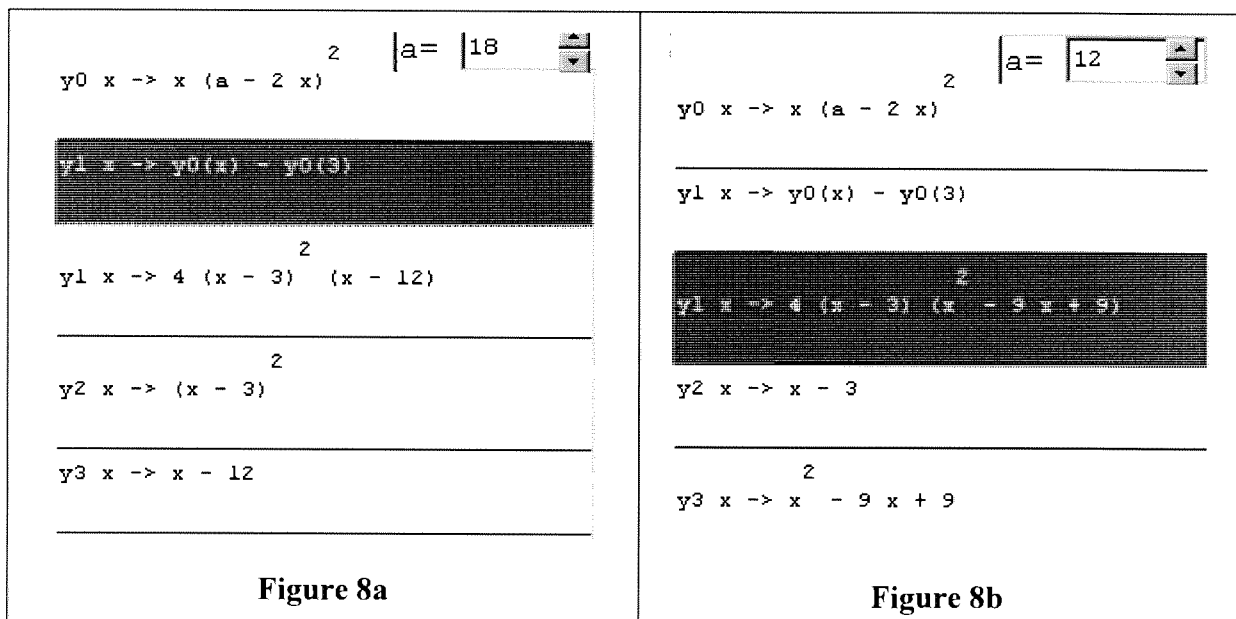
La spécification et le développement d'un environnement logiciel consistent à concevoir l'organisation des objets dans l'environnement, les calculs et justifications offertes aux élèves, les représentations permettant l'exploration et les différents paramétrages et outils spécifiques permettant à l'enseignant d'adapter l'environnement en fonction de ses objectifs.

L'environnement fait appel à un noyau de calcul formel existant, selon les modalités de la figure 1. Nous avons utilisé successivement les noyaux de différents logiciels de calcul formel avant d'opter pour le noyau de Mupad⁸ qui doit permettre plus facilement à des enseignants extérieurs aux équipes d'utiliser le logiciel dans leurs classes.

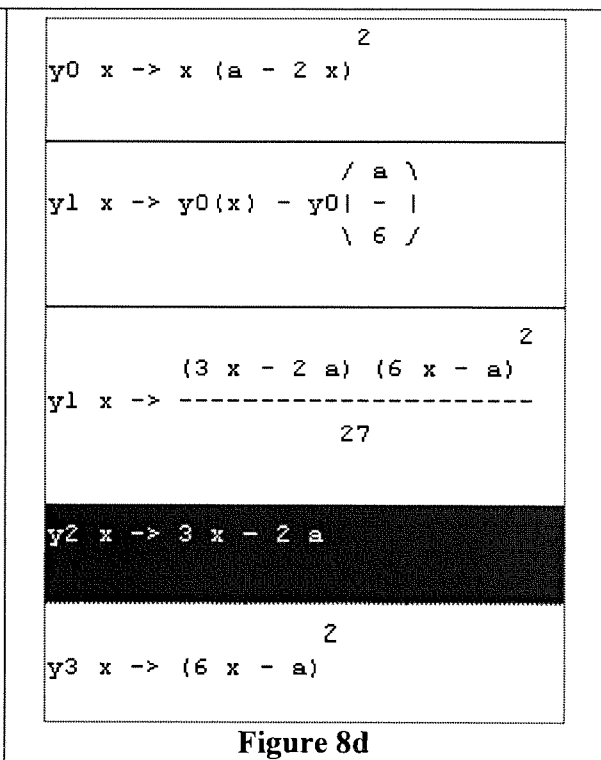
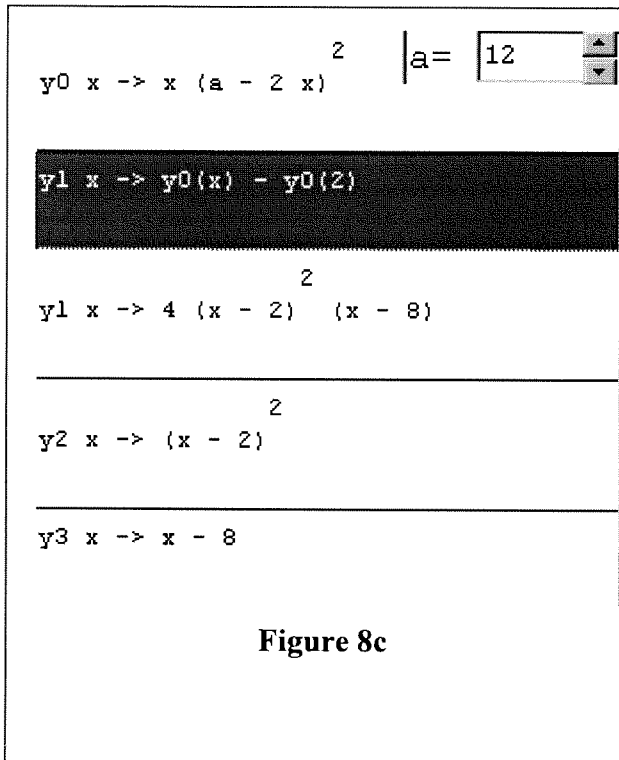
Pour l'équipe de Rennes, les calculs sont les transformations algébriques standard que nous avons vues plus haut (figure 4). L'élargissement du domaine de tâches dans la seconde itération nous a conduit à une organisation dynamique de la fenêtre de fonctions, déterminée par les calculs qui ont créé les fonctions. Voici un exemple montrant cette organisation, à partir du problème étudié ci-dessus.

Supposons que, comme dans la figure 8a ci-dessous, un étudiant a résolu le problème pour la valeur 18 du côté a du carré initial. Pour cela, il a défini la fonction, a obtenu sa forme factorisée, et a créé les fonctions y_2 et y_3 comme sous-expressions de y_1 . Il a prouvé le signe de y_2 et y_3 puis de y_1 , en utilisant les justifications que j'ai indiquées ci-dessus.

Supposons qu'il se propose maintenant d'étudier le problème pour $a = 12$. Il change la valeur du paramètre a et l'environnement met à jour les expressions dans la fenêtre de fonctions (figure 8b). Visiblement y_2 change maintenant de signe pour $x = 3$ et donc 3 n'est plus une valeur de x maximisant le volume. Une exploration graphique suggère alors que 2 est cette valeur. L'élève change donc la définition de y_1 en $x \rightarrow y_0(x) - y_0(2)$. Les expressions sont de nouveau mises à jour (figure 8c), et y_2 et y_3 sont de nouveau de signe constant sur l'intervalle, ce qui montre que 2 est bien la valeur cherchée. La généralisation que j'ai présentée ci-dessus peut également s'effectuer dynamiquement en "libérant" le paramètre a et changeant la définition de y_1 en $x \rightarrow y_0(x) - y_0(a/6)$ (figure 8d).

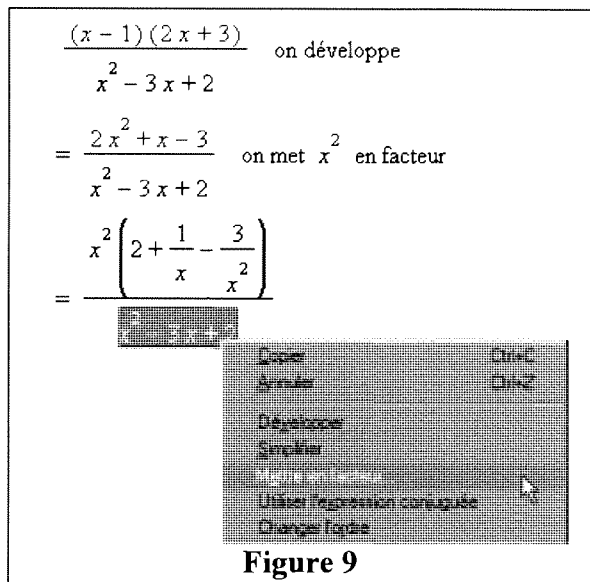


⁸ Distribué par SciFace : www.sciface.com. Pour une discussion sur les problèmes posés par la communication entre l'environnement et le noyau voir Lenne & Gelis (2002) p.143.



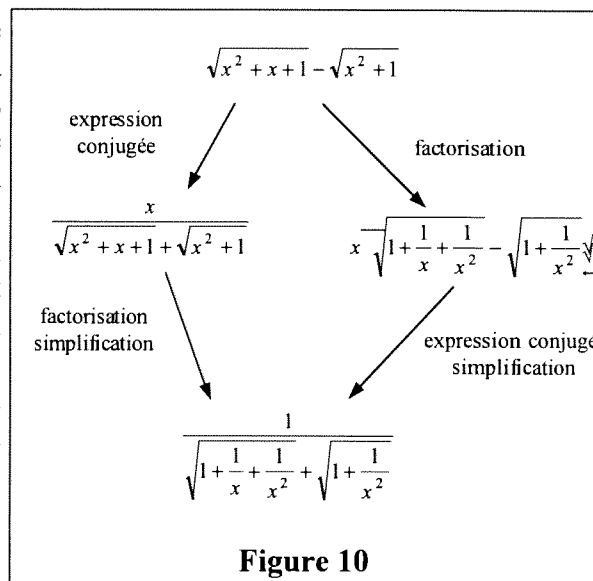
Nous préparons actuellement les expérimentations de la seconde itération. Nous attendons de cette organisation dynamique qu'elle donne de nouvelles possibilités d'exploration algébrique et de généralisation et nous travaillons à concevoir des situations pour cela.

S'intéressant aux limites, l'équipe de Paris a eu à concevoir de nombreuses transformations spécifiques en ce sens qu'elles ne sont pas obtenues directement dans les logiciels de calcul formel standard. Par exemple, la factorisation d'un terme dans une somme est une transformation appropriée pour lever des indéterminations et elle n'est pas obtenue facilement dans les logiciels de calcul formel. L'équipe de Paris a identifié et implémenté 34 transformations différentes, qui sont accessibles à l'utilisateur via des menus contextuels dépendant de la structure de l'expression (figure 9)⁹.

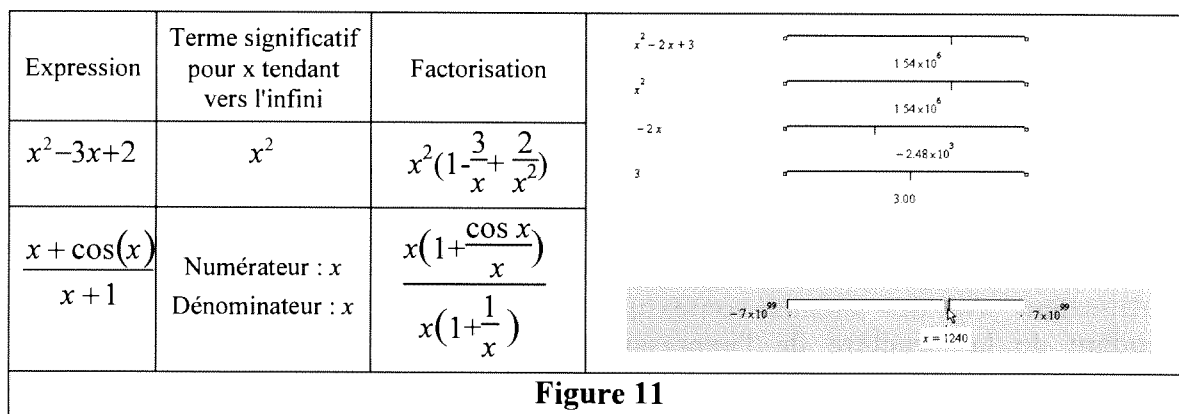


⁹ Les figures 9 à 12 sont reprises ou adaptées de Lenne & Gelis (2002).

Sur l'exemple d'un problème d'indétermination, je vais préciser la nature du travail demandée aux élèves. Les transformations symboliques étant faites par le noyau, ce travail pourrait sembler facile et peu exigeant sur le plan cognitif. Au contraire, comme le montre la figure 10, la détermination de la limite d'une expression bien choisie peut s'effectuer via différentes stratégies (expression conjuguée d'abord, ou factorisation d'abord dans l'exemple). Le travail de l'élève consiste en décisions stratégiques de cette nature qui, selon nous, donnent du sens aux transformations.



Toujours à propos de limites, je vais préciser la notion d'exploration spécifique et comment elle est liée aux transformations dans l'activité de l'élève. Reprenons l'exemple de la factorisation d'un terme dans une expression, une transformation intervenant dans une technique de levée d'indétermination. Un point crucial dans la mise en œuvre de cette technique est le repérage du terme de la somme significatif au voisinage concerné, comme le montre le tableau de la figure 11 (partie gauche). Pour un élève débutant, ce repérage est loin d'être immédiat et c'est pour cela qu'une exploration spécifique a été introduite. La figure 11 (partie droite) est une copie du module permettant cette exploration. La valeur de x est pilotée via un curseur. Des expressions sont entrées par l'utilisateur (un polynôme et ses termes dans l'exemple) et leurs valeurs approchées respectives sont représentées par un tiret sur une échelle. Il est alors possible d'observer l'évolution respective des valeurs des expressions quand x varie et d'identifier ainsi le terme significatif.



Une autre fonctionnalité importante, que les logiciels de calcul formel standard n'offrent pas à l'utilisateur de façon simple, est la possibilité de travailler sur des sous-expressions. Les deux équipes ont implémenté une fonctionnalité de ce type, mais de façon différente. Dans l'environnement développé à Paris, la sélection s'opère par manipulation directe et les transformations et justifications sont effectuées sur la sélection. Dans Casyopée, développé à Rennes, une transformation spéciale permet de définir de nouvelles fonctions à partir des termes d'un produit ou des facteurs d'une somme comme nous l'avons vu dans l'exemple figure 6.

La gestion des propriétés des objets et le diagnostic sur les pas de preuve passe par la conception et l'implémentation de "justifications". Dans Casyopée, ces justifications correspondent à des propriétés variées des fonctions. Dans les mathématiques du lycée, certaines sont considérées comme élémentaires, d'autres ont le statut de théorème. Les propriétés les plus élémentaires portent sur les variations et le signe de fonctions du premier et du second degré et sur les liens entre variations et signe (par exemple, une fonction croissante sur un intervalle et positive ou nulle à la borne droite est positive sur l'intervalle). Les théorèmes sont le théorème de Lagrange sur les variations d'une fonction dérivable et le théorème des valeurs intermédiaires sur l'existence d'un zéro pour une fonction continue monotone. Dans l'environnement, elles sont implémentées indépendamment de leur statut par les données (une fonction et un intervalle où elle est continue), les hypothèses à vérifier (par exemple, la fonction est monotone et de signe différent aux bornes) et la conclusion (il existe un zéro sur l'intervalle). Les justifications sont opérées de la façon montrée ci-dessus figure 7. L'élève choisit les données et la justification à effectuer, puis il (elle) donne des éléments concernant les hypothèses à partir desquels l'environnement rend un premier diagnostic¹⁰. L'élève donne ensuite les conclusions et l'environnement rend un diagnostic sur la cohérence de la déduction. Un paramétrage permet que cette dernière étape soit allégée, l'environnement donnant lui-même les conclusions.

La gestion des propriétés des objets dans Casyopée est conçue pour que l'élève organise sa preuve librement. Pour cela il est possible d'entrer des conjectures et d'opérer des justifications dont les prémisses sont des conjectures. Un "arbre de preuve" permet que ces justifications soient validées lorsque les conjectures sont elles-mêmes prouvées.

Dans le projet de Paris, les justifications correspondent à des théorèmes généraux sur l'algèbre des limites (figure 12). À la différence de Casyopée, les justifications ne sont pas paramétrables individuellement. Trois niveaux sont définis. Au premier niveau (à gauche figure 12) les preuves sont demandées de façon plus détaillée qu'au troisième niveau (à droite figure 12).

Le paramétrage des justifications est un élément important d'adaptation des démarches de preuve offertes par le logiciel aux connaissances des élèves. Quand un(e) élève rencontre un théorème pour la première fois il est intéressant qu'il (elle) en considère tous les détails. En revanche, lorsque l'application de ce théorème devient une étape routinière dans la résolution d'un problème, il n'est plus nécessaire que l'élève entre dans tous les détails et un allègement lui permet de se concentrer sur les aspects stratégiques.

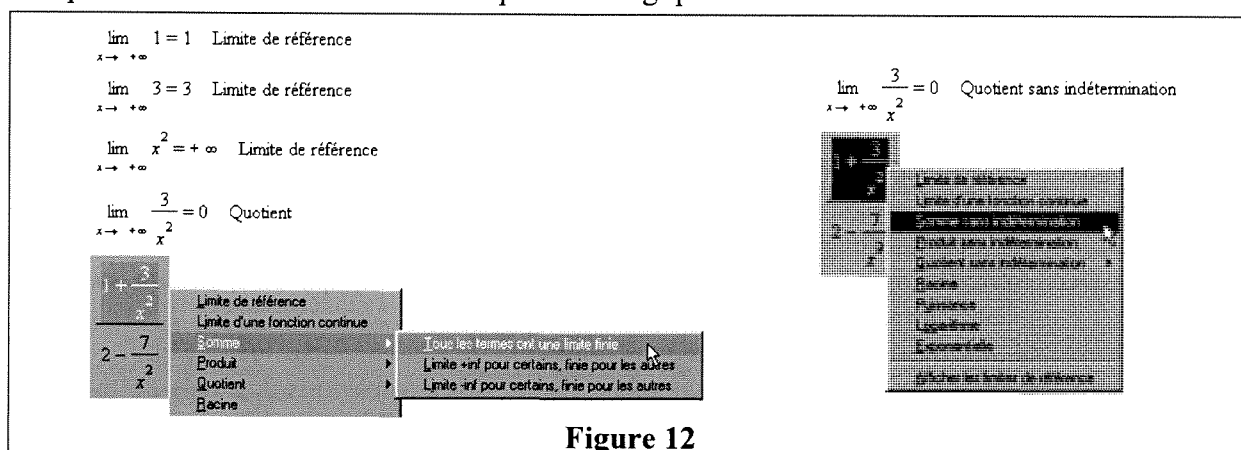


Figure 12

¹⁰ La nature de ces éléments et le diagnostic rendu par l'environnement dépendent de la justification. Il est donc impossible de les expliciter ici. L'exemple de la justification du signe d'un trinôme du second degré est développé par Lagrange & Py (2002, page 107).

Ce paramétrage fait partie des possibilités données au professeur pour adapter l'environnement aux connaissances de ses élèves et à ses objectifs.

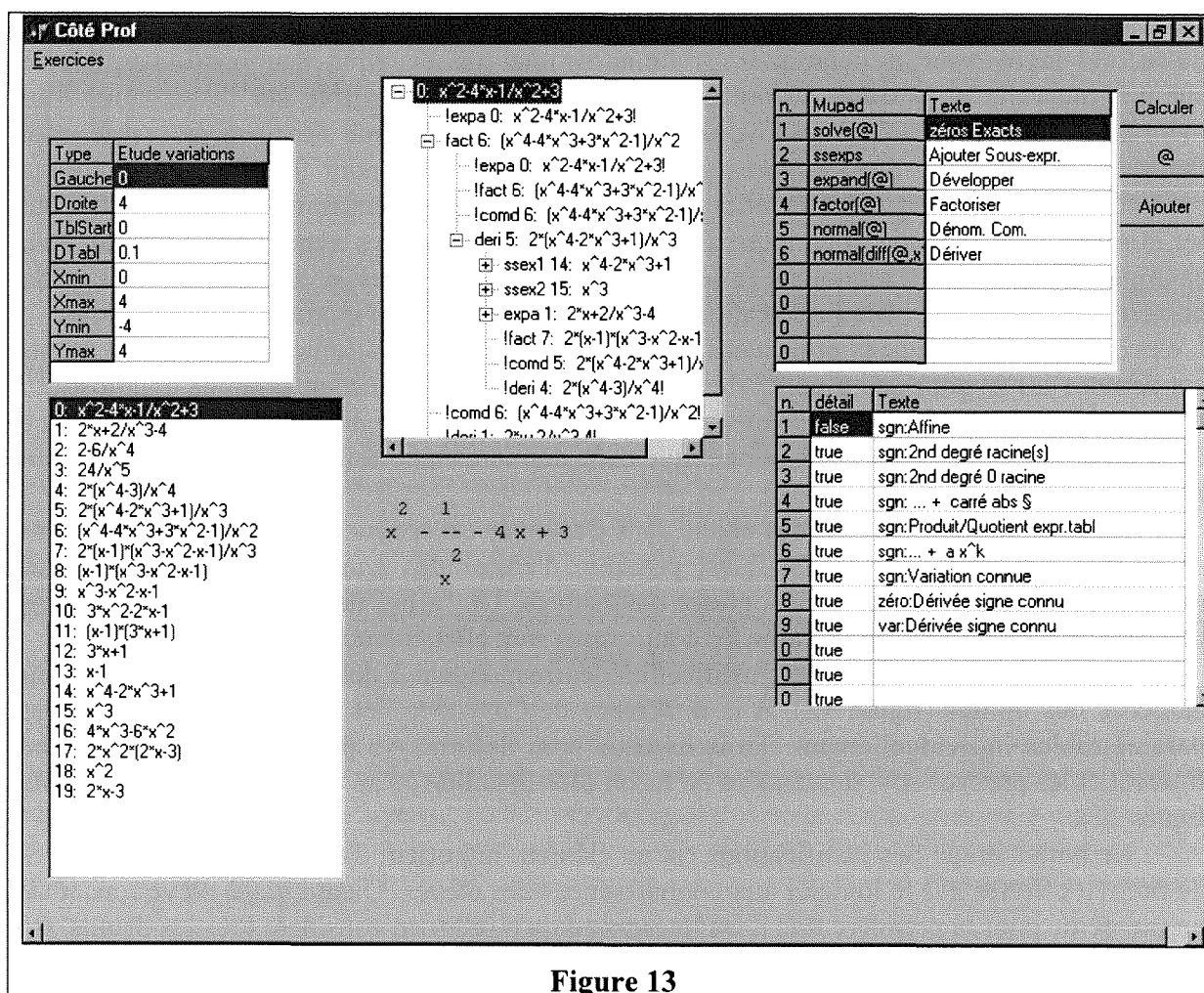


Figure 13

La figure 13 montre l'écran d'un module spécial développé dans le projet de Rennes comme aide au professeur pour cette adaptation. Dans la fenêtre en haut à droite le professeur sélectionne et nomme les calculs qu'il souhaite mettre à disposition de ses élèves. Dans la fenêtre en bas à droite il (elle) fait de même avec les justifications et opère le paramétrage dont je viens de parler. Il peut définir de nouveaux calculs en entrant la formule correspondante selon la syntaxe du noyau de calcul formel.

Pour l'étude d'une fonction particulière, le professeur peut aller plus loin dans la préparation en entrant l'expression et l'intervalle la définissant, ainsi que des valeurs initiales pertinentes pour les fenêtres d'exploration graphique (fenêtre en haut à gauche). Il utilise les différents calculs pour anticiper les expressions pouvant être obtenues par les élèves (en bas à droite). Pour chacune des expressions il visualise l'arbre des expressions dérivées de façon à avoir une vue d'ensemble des résolutions possibles (fenêtre au milieu).

4. Une expérimentation

Dans ce paragraphe, je vais rapporter une expérimentation par l'équipe de Rennes à la fin de la première itération. Comme je l'ai dit plus haut, le but de nos expérimentations est d'évaluer à partir d'observations d'élèves la cohérence du développement avec nos principes

de base. Dans cette première itération, nous n'avions pas encore mis l'accent sur l'exploration algébrique et la généralisation. Les principes portaient donc sur la compréhension par les élèves des différentes expressions d'une fonction et leurs propriétés, la contribution d'une assistance à la preuve et de moyens donnés au professeur pour préparer la résolution ainsi que sur la possibilité d'une instrumentation plus aisée du calcul formel. L'environnement avec lequel nous avons expérimenté était une maquette développée sur la calculatrice symbolique TI-92. J'indique ici seulement les grandes lignes de la méthodologie d'observation et les résultats. Le lecteur intéressé pourra se reporter à Lagrange & Py (2002) pour plus de détails.

Les élèves avaient été choisis avec des profils variés et ont été observés lors de la résolution de cinq problèmes différents au long de l'année civile 2000. Ils étaient en Première Scientifique au début de cette année, et avant qu'ils abordent la dérivation, nous leur avons proposé un problème de position relative de courbes. Après l'introduction de la dérivation, nous leur avons posé des problèmes classiques d'étude de variations d'abord pour une fonction rationnelle puis pour une fonction incluant une racine carrée. Après les vacances d'été et leur passage en Terminale, ils ont abordé le théorème des valeurs intermédiaires et nous leur avons posé deux problèmes impliquant des zéros non explicites de fonctions, l'un pour l'étude des variations d'une fonction rationnelle, l'autre pour les positions relatives d'une sinusoïde et d'une droite.

La méthode générale d'observation a consisté à identifier a priori des étapes "obligatoires" dans la résolution et à enregistrer un script de toutes les actions de chaque élève dans l'environnement. Nous avons ensuite noté la position des étapes "obligatoires" dans chacun des scripts. Cela nous a conduit à identifier comme "critiques" des étapes dont les élèves, à cause de l'état de leurs connaissances, parviennent difficilement à considérer comme nécessaires. Une étape critique est considérée et accomplie par un élève seulement après qu'il (elle) ait essayé un nombre parfois important d'autres actions plus ou moins pertinentes pour la résolution. Par exemple, un élève qui ne voit pas comment continuer l'étude de variation d'une fonction après le calcul de sa dérivée peut se lancer dans une exploration graphique qui est une action pertinente, mais ne conduit pas directement à la preuve des variations ou demander la forme développée de la dérivée, ce qui n'a pas d'intérêt dans le problème.

Cette identification d'étapes critiques dans les scripts des élèves et des actions plus ou moins significatives qui les précèdent nous ont permis d'apercevoir comment les élèves parviennent à franchir ces étapes et à leur donner une signification. Voici quelques résultats.

Le premier est que les caractéristiques des situations d'utilisation du calcul formel que nous avons soulignées dans l'introduction demeurent dans une certaine mesure. La multiplicité des actions, souvent non pertinentes, précédant une étape critique est, comme avec les logiciels standards, permise par la facilité d'obtention des résultats. Cependant, l'organisation des objets, le paramétrage par le professeur des fonctionnalités offertes ainsi que la nécessité de la preuve ont permis davantage aux élèves de se concentrer sur le but.

Des étapes identifiées comme critiques ont été par exemple le calcul de la différence des fonctions définissant les deux courbes dans le cas d'une étude de positions relatives et la factorisation de la dérivée pour l'étude de son signe dans le cas d'une étude de variations. Les élèves les moins à l'aise les ont souvent découvertes après avoir épuisé les autres possibilités offertes par l'environnement. Ce type de recherche d'une solution par essai plus ou moins exhaustif des fonctionnalités est aussi un comportement observé dans l'usage des logiciels de calcul formel. Cependant ici les "fausses pistes" sont plus rapidement abandonnées quand il devient clair que les résultats qu'elles donnent ne peuvent être utilisés dans les preuves. Envisagée seulement après l'échec des fausses pistes, une étape critique ne prend évidemment pas sens immédiatement. Le fait qu'elle ouvre sur la justification de la propriété cherchée (par exemple la règle des signes pour la factorisation) aide néanmoins l'élève à prendre conscience de l'intérêt de la forme obtenue.

Nous avons pu observer également des effets d'instrumentation se traduisant par la mise en relation par les élèves, au long des cinq rencontres avec l'environnement, de fonctionnalités de l'environnement avec leurs connaissances mathématiques. Des élèves ont eu par exemple lors des premières utilisations des difficultés à comprendre ce qui leur est demandé lors des étapes de justification. Le type de preuve exigée par l'environnement leur semblait éloigné des productions requises en papier/crayon¹¹. Ultérieurement, les élèves ont mieux intégré les exigences de l'environnement, les voyant plus clairement comme constitutives de la preuve mathématique. Ils (elles) ont aussi situé plus clairement les connaissances mathématiques liées aux fonctionnalités proposées. Par exemple, lors de la quatrième observation, les élèves avaient étudié en classe le théorème des valeurs intermédiaires mais n'avaient pas encore rencontré la justification correspondante. Ayant reconnu la nécessité de faire appel à ce théorème pour pouvoir considérer un zéro d'un polynôme du troisième degré non donné par le calcul formel, il n'a pas fait de doute pour eux (elles) qu'une justification relative à ce théorème devait exister dans la liste fournie par l'environnement. Ils (elles) ont pu facilement sélectionner l'item pertinent dans cette liste, bien que le nom qui lui était donné ("zéro: variations connues") n'évoque pas directement le théorème.

5. Bilan et perspectives

Comme je l'ai dit plus haut nous avons fait le choix d'une méthodologie de développement itérative et nous situons à la seconde itération. Les environnements développés lors de la première itération concernaient seulement un domaine restreint et des tâches très classiques. En ce sens, ils ont pu apparaître limités par comparaison avec la grande ouverture des logiciels de calcul formel. Ils nous ont cependant permis, par des expérimentations telles que celle rapportée ci-dessus, de valider le schéma général d'un environnements gérant des objets mathématiques, leurs propriétés et leurs différentes représentations et faisant appel pour cela à un noyau de calcul formel non directement accessible à l'élève.

La seconde itération nous a conduit à étendre le domaine de tâche et les fonctionnalités pour développer les possibilités d'exploration et de généralisation en associant approches graphico-numériques et gestion dynamique des représentations algébriques. Le schéma général conçu au cours de la première itération se trouve bien adapté à cette extension. En vue d'une expérimentation, nous préparons actuellement des situations d'utilisation. Ces situations sont moins simples à concevoir qu'il n'y paraît au premier abord, car l'organisation dynamique des expressions et les tâches de généralisation n'ont pas de correspondant direct dans les pratiques papier/crayon ou avec calculatrices. Ce travail devrait être néanmoins profitable en donnant une dimension nouvelle à l'étude en classe de problèmes de modélisation fonctionnelle.

¹¹ Un élève déclare par exemple : "(en papier/crayon) on fait plein de trucs les uns à côté des autres, et puis après on ajoute tout. Là (avec le logiciel) c'est dur".

BIBLIOGRAPHIE

GUIN D. & TROUCHE L., eds. [2002], *Calculatrices symboliques, Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

KIERAN C. [à paraître], The core of algebra : Reflections on its main activities, In K. Stacey & H. Chick (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. An ICMI Study*. Dordrecht, The Netherlands : Kluwer.

LAGRANGE J.B. & PY D. [2002], Développer un environnement d'apprentissage utilisant le calcul formel. Hypothèses, méthode, première réalisation, *Sciences et Techniques Educatives*, Hermes **9.1-2**, 91-120.

LENNE D. & GÉLIS J.M. [2002], LIMITES, un environnement d'apprentissage fondé sur un système de calcul formel, *Sciences et Techniques Educatives*, Hermes **9.1-2**, 121-148.

MONAGHAN J. [2000], Les enseignants et la technologie, In Guin D. (ed), *Actes du congrès « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »*, Mai 1998, IREM de Montpellier, 159-163.

TROUCHE L. [2000], « La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques », *Educational Studies in Mathematics* **41**, 239-264.

Jean-Baptiste Lagrange
IREM de Rennes
IUFM de l'Académie de Reims
23, rue Clément Ader
B.P. 175
51685 REIMS CEDEX 2
jb.lagrange@reims.iufm.fr

LISTE DES PARTICIPANTS AU COLLOQUE

Luis ALBUQUERQUE (Lisbonne)	Robert LUTZ (Mulhouse)
Jérôme AUDEOD (Strasbourg)	Abdenacer MAKHLOUF (Mulhouse)
Michèle ARTIGUE (Paris 7)	Danielle MATTHYS (Angers)
Hélène AUTHIER (Reims)	Achille MAFFINI (Parme)
Jacques BAIR (Liège)	Jean-François MARCHINA (Mulhouse)
Abdelaziz BANAIS (Mulhouse)	Michela MASCHIETTO (Paris 7 et Turin)
Amina BENBACHIR (Fes)	Alain MERCIER (Marseille)
Alain BIREBENT (Grenoble)	Etienne MEYER (Strasbourg)
Jean-Pierre BOSCATO (Mulhouse)	Gilles MICHEL (Montpellier)
Annick BRISINGER (Strasbourg)	Philippe MICHEL (Strasbourg)
Richard CABASSUT (Strasbourg)	Jean PERRIN (Strasbourg)
Micheline CITTA (Louvain)	Jacques PINAUD (Olivet)
Jean-Claude CHASSANG (Mulhouse)	Jean-Paul QUELEN (Strasbourg)
Stéphane CZERNIAK (Strasbourg)	Catherine RANCON (Amiens)
Jean DREYER (Guebwiller)	Laurent-Marie RICHARD (Strasbourg)
Bernard EHINGER (Mulhouse)	Jean-Pierre RICHETON (Strasbourg)
Rossana FALCADE (Parme)	Angela RIZZA (Parme)
Lucia GRUGNETTI (Parme)	Tewfik SARI (Mulhouse)
Véronique HEMMERLIN (Mulhouse)	Hassan SOUFI (Strasbourg)
Michel HENRY (Besançon)	Suzette ROUSSET-BERT (Strasbourg)
Mourad IDIRI (Mulhouse)	Maggy SCHNEIDER (Louvain)
Francis JAMM (Mulhouse)	Christian SCHULTZ (Barr)
François JAQUET	Éric SIGWARD (Sarreguemines)
Brigitte JAUFFRET (Amiens)	Claude SIRRI (Amiens)
Jean-Pierre KAHN (Mulhouse)	Hélène TANO (Colmar)
Joël KIEFFER (Thionville)	César TRUJILLO (Colmar)
Marysa KRYSIŃSKA (Louvain)	Jacques VALLAT (Mulhouse)
Alain KUZNIAK (Strasbourg)	Françoise WILLIEME (Strasbourg)
Jean-Baptiste LAGRANGE (Reims)	

- Titre :** **REGARDS ET PERSPECTIVES SUR
L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE**
Actes du colloque de Mulhouse 8-9 mars 2002.
- Auteurs :** Abdenacer MAKHLOUF (Ed.), Michèle ARTIGUE, Jacques BAIR, Amina BEN BACHIR, Catherine CRONCIN, Rosanna FALCADE, Brigitte JAUFFRET, Manpa KRYSSINSKA, Jean-Baptiste LAGRANGE, Robert LUTZ, Achille MAFFINI, Michela MASCHIETTO, Nicole NICOLAI, Angela RIZZA, Maggy SCHNEIDER, Claude SERRIS, Moncef ZAKI.
- Mots-clés :** Analyse - didactique - limite - continuité - ordre de grandeur - calcul formel.
- Date :** Avril 2004.
- Nombre de pages :** 120 pages A4.
- Editeur :** IREM de Strasbourg (S. 188)
<http://irem.u-strasbg.fr>
Pour les brochures :
Courriel : bibirem@math.u-strasbg.fr - Tél. : 03 90 24 01 61.
- ISBN :** 2-911446-23-2
- Public concerné :** Chercheurs en didactique et Professeurs de mathématique au lycée et dans les 1^{er} cycles universitaires.
- Résumé :** Il s'agit de présenter les différentes approches et réflexions concernant l'enseignement de l'Analyse au lycée et dans les formations universitaires de base.
- Prix :** 11 € (+ 3,50 € de frais d'envoi).