**Charalambos LEMONIDIS**

# L'ENSEIGNEMENT DES PREMIERES NOTIONS ARITHMETIQUES SELON L'ANALYSE DES DIFFERENTES REPRESENTATIONS DES QUANTITES

**Abstract.** Several representations of arithmetical quantities play important role in teaching and knowledge of early arithmetic concepts. Those representations may appear in various forms like: iconic, symbolic, etc. These different expressions on the one hand refer to different teaching situations and on the other they create different calculation strategies and another type of understanding in behalf of students. In this study we accomplish a detailed analysis of different arithmetical representations and we compare them with the calculation strategies of the students. Finally, we present empirical data of two groups of students. The experimental group which been taught with emphasis to the different representations of arithmetic quantities has much better performance in the execution of simple calculation in relation with the other group which been taught with the traditional teaching.

**Résumé.** Les différentes représentations des quantités arithmétiques jouent un rôle très important pour l'enseignement et l'apprentissage de premières notions arithmétiques. Ces représentations peuvent apparaître sous des formes différentes, telles que : l'iconique, le symbolique, etc. Ces différentes expressions impliquent, d'une part, des situations différentes d'enseignement, et d'autre part, elles impliquent des procédures de calcul différentes et un autre type de compréhension de la part des élèves. Dans le présent travail nous réalisons une analyse détaillée des différentes représentations arithmétiques ainsi que la mise en parallèle de ces représentations avec les procédures de calcul des élèves. A la fin, nous présentons, les résultats d'une expérimentation menée devant deux groupes d'élèves. En ce qui concerne la réussite aux opérations simples, le groupe expérimental, qui a reçu un enseignement régulier concernant les différentes représentations des quantités arithmétiques, a eu des résultats bien supérieurs au deuxième groupe, à qui on a enseigné avec des méthodes classiques

Mots Clés : Premiers apprentissages numériques, représentations arithmétiques, procédures de dénombrement, opérations, congruence, classe expérimentale.

---

## 1. Introduction

L'apprentissage des notions arithmétiques, au début de la scolarité, est un domaine très important. L'enseignement des premières notions arithmétiques est une procédure sensible qui exige des maniements délicats car, à moins que les élèves aient déjà des acquis préexistants, et mises à part les habiletés qui diffèrent d'un élève à l'autre, leurs attitudes sont influencées et transformées par les situations didactiques proposées. C'est à dire que, pour les jeunes élèves, la difficulté et les procédures cognitives utilisées diffèrent selon qu'ils effectuent

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, volume 9, p. 101 – 115.

l'addition avec les doigts, mentalement, à partir des illustrations d'objets ou avec les objets eux-mêmes.

Dans notre bibliographie nous rencontrons des recherches qui analysent et classifient les différentes sortes de problèmes de type additif (G. Vergnaud, 1982, Carpenter & Moser 1983, Carpenter, Hiebert & Moser 1981, Riley, Greeno & Heller 1983). D'autres recherches analysent et inventorient les différentes procédures que les élèves utilisent pour la résolution de simples additions ou soustractions (Carpenter, T.P., Moser, J. M., 1982, Steffe, L.P., Cobb, P., 1988, Fuson, K.C., 1992). De ces recherches en découlent trois grandes catégories des procédures qui peuvent être utilisées dans les opérations de l'addition et de la soustraction.

### 1.1. Premier niveau

Les enfants utilisent les objets ou leurs doigts pour construire un modèle direct de l'opération de l'addition et de la soustraction. Ils regroupent et comptent tous les objets qu'ils doivent additionner ou retirent et comptent les objets qui restent quand il s'agit de soustraction. Pour ces procédures, on proposera l'appellation de **procédures à matériaux,** et on distinguera celles pendant lesquelles les enfants utilisent leurs doigts (**doigts**) de celles pendant lesquelles les enfants utilisent des objets (**objets**) pour modéliser l'opération.

### 1.2. Deuxième niveau

À ce niveau les enfants peuvent compter avec des mots-nombres en utilisant la chaîne numérique verbale par opposition au niveau précédant où les élèves comptaient seulement des objets. Ils peuvent également réduire le comptage des premiers termes. Ces procédures seront appelées par la suite **procédures de comptage**. Plus particulièrement, concernant l'addition (p. ex. 3+5), il se peut que les enfants commencent à compter un par un dans un ordre ascendant. Il se peut qu'ils partent du plus grand nombre (5),6,7,8 ou du plus petit (3),4,5,6,7,8. Dans ce comptage, ils peuvent utiliser leurs doigts pour compter **(Comptage A**. **Doigts)** ou ne pas utiliser leurs doigts **(Comptage S**. **Doigts)**.

### 1.3. Troisième niveau

Les procédures de ce niveau sont appelées **procédures de récupération.** Dans cette catégorie de procédures on distingue deux cas : Des procédures de **récupération directe**, pendant lesquelles l'enfant a recours à un résultat qu'il connaît par cœur (p. ex. valeur de la somme 7 + 7), c'est-à-dire qu'il connaît l'opération et son résultat, immédiatement récupérable de sa mémoire de longue durée. Il y a également des procédures de **récupération d'opérations**, pendant lesquelles, l'enfant, pour arriver à trouver le résultat d'une opération, récupère de sa mémoire d'autres opérations connues sur la base desquelles il construit la réponse. Par exemple, pour l'opération 7+7, un enfant peut faire 7+3=10, 10+4=14.

Dans ce cas, l'enfant a tiré de sa mémoire les opérations 7+3=10, 10+4=14, 4+3=7 et, en les combinant, a construit la réponse.

Bien sûr la distinction de ces trois niveaux n'est pas absolue. On peut rencontrer d'autres procédures qui combinent des comportements relevant de deux niveaux différents, par exemple, des procédures **de calcul avec les doigts**, pendant lesquelles l'enfant calcule le résultat (3ème niveau), mais le vérifie en même temps en se servant de ses doigts (2ème niveau).

J. P. Fischer et F. Pluvinage (1988) ont appliqué la technique de mesure des Temps de Réponse à des calculs élémentaires (opérations arithmétiques sur les petits entiers naturels) à la fin de l'école élémentaire (élèves d'environ 11 ans). Certains de ces résultats sont utilisés dans le travail présent.

Des recherches ont été réalisées (Carpenter & Moser, 1983, De Corte & Verschaffel, 1987), pour examiner, en relation directe avec les problèmes additifs, le changement des différentes procédures de la part des élèves dans l'exécution des opérations d'addition et soustraction. Un facteur important, qui n'est ni analysé ni examiné à fond, mais qui détermine la différenciation des procédures et plus généralement la compréhension des notions arithmétiques, est la présentation sémiologique des quantités arithmétiques. Dans ce travail nous faisons l'effort d'analyser les différentes représentations des quantités arithmétiques participant à l'organisation des nombres et des opérations. Pour cette analyse, nous avons été inspirés par les travaux de R. Duval (1995, 1996, 1999). Ces travaux nous ont aidés, d'une part, à analyser et classer les différentes représentations, et d'autre part, à examiner les situations dans lesquelles il y avait ou pas de la congruence entre les modes de représentation et les procédures utilisées par les élèves. L'existence ou pas de la congruence entre les modes de représentation des quantités et les procédures, influence le type de compréhension des élèves et plus particulièrement leur comportement cognitif dans les différentes situations.

Dans le présent travail on essayera de répondre aux questions suivantes : Quels sont les différents modes de représentation des quantités, au moyen desquels on présente habituellement dans l'enseignement les nombres et les opérations ? De quelle manière ces modes de représentation des quantités arithmétiques influencent-ils la compréhension par les élèves de l'addition et la soustraction et l'emploi des procédures opératoires ? Dans quelles situations y a-t-il de la congruence entre les représentations et les procédures que les élèves utilisent ? Quelles situations ralentissent ou, au contraire, accélèrent l'apprentissage et la compréhension des élèves ?

## 2. Les différents modes de présentation des quantités arithmétiques

### 2.1. Les objets de la numération

On utilise différents objets matériels pour représenter les quantités dans les procédures arithmétiques. Les quantités utilisées peuvent être continues ou discrètes. Pour les quantités discrètes, l'unité de mesure est contenue dans la quantité (*un* objet), tandis que les quantités continues nécessitent une unité de mesure extérieure et arbitrairement déterminée. Dans le présent travail on s'occupe de quantités discrètes. En tant qu'objets de numération, on peut même considérer les doigts de la main. On peut distinguer deux catégories d'objets : 1) des objets qui sont *organisés selon une structure*. 2) des objets présentés *sans aucune structure*. Une collection d'objets a une structure quand, en dehors de la distinction unitaire des ses éléments, elle contient des groupes d'objets, considérés comme des entités et des unités de mesure. Par exemple, de tels ensembles d'objets sont les doigts de la main, le boulier, les dés, etc. On peut avoir des ensembles qui contiennent peu d'objets (deux, trois ou quatre) et dans ce cas le regroupement a pour base l'appréhension perceptive immédiate, ou *subitizing*. Les ensembles peuvent aussi contenir plus de 10 objets ($2\times10$, $3\times10$, 100, etc.), c'est à dire, deux ou trois lignes d'un boulier, un bloc de 100 unités. Il faut, même dans la catégorie des objets organisés selon une structure, distinguer des objets comme le boulier, qui sont des instruments et qui acceptent des maniements et des calculs (par déplacements et regroupements) de ceux qui, comme les dés, n'acceptent pas des maniements. Le premier groupe d'objets, auquel appartient le boulier, est partiellement isomorphe à un système de numération avec un nombre de boules par ligne (équivalent à une base n). Les dés ne font que mobiliser le *subitizing* d'une collection d'éléments. Par la suite on va parler de **présentation matérielle** à propos des situations dans lesquelles on utilise des objets matériels pour présenter les quantités arithmétiques. D'habitude, ce sont ces objets là qui sont considérés comme des *objets de comptage*.

### 2.2. Analyse des différentes représentations des quantités arithmétiques

Pour les premières activités de comptage et même les premières opérations additives, la compréhension des systèmes de numération de position en base n n'est pas nécessaire. Celle-ci ne devient nécessaire qu'avec de plus grands nombres. Un traitement fondé par exemple sur la numération décimale ne peut se faire que dans le mode d'une production écrite. En revanche les activités de comptage d'objets matériels ou de traits ou le dénombrement de petites collections ne requièrent qu'une production orale et mentale. Et même si on utilise les noms de nombres en référence au système de numération décimale, les propriétés de ce système ne sont pas toutes nécessaires et son fonctionnement sémiotique n'est pas perçu par les élèves. Le recours à l'écrit ne remplit ici qu'une simple fonction de trace ou de matériau.

Les activités de comptage ainsi que les opérations additives sur de petits nombres relèvent de mathématique purement orale. L'écriture et les systèmes de numération de position ne sont nécessaires à ce niveau d'activité.

Pour pouvoir distinguer et classer les différentes représentations des quantités arithmétiques on va utiliser certains critères de R. Duval (1999). Premièrement, nous allons utiliser le **critère formel** qui est « *la présence ou l'absence de ressemblance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté* ». Avec ce critère de la ressemblance, nous pouvons distinguer deux grandes catégories : les représentations iconiques et les représentations symboliques.

A) Pour les *représentations iconiques*, le contenu de la représentation présente une relation de ressemblance avec l'objet représenté. On se rapporte aux différentes situations arithmétiques qui sont représentées avec les photos, les dessins, les croquis, etc. Ainsi, dans la représentation iconique, les images représentent les objets de numération dans leur entité physique. D'habitude dans les représentations iconiques il y a la possibilité du comptage des objets. Excepté dans le cas où les images présentent des objets dont certains sont cachés. Les illustrations sont très utilisées dans la pratique scolaire, par exemple dans les manuels scolaires.

On considère un autre critère de R. Duval (1999), le **critère réel** qui est celui du mode de production de la représentation. R. Duval distingue deux types de systèmes permettant de produire des représentations : Les systèmes sémiotiques avec leurs règles propres de production pertinente. Les systèmes physiques ou organiques avec leurs processus propres de production. Sur la base de ce critère nous pouvons séparer les dessins, les croquis ou les esquisses, que l'on peut faire des objets, et les photos, que l'on peut prendre avec un appareil.

B) Pour les *représentations symboliques*, le contenu de la représentation ne présente aucune relation de ressemblance avec l'objet représenté. Mais entre ces représentations, il est important de distinguer celles qui donnent accès à un comptage de celles qui ne donnent pas un tel accès.

1) Dans le cas des représentations symboliques qui donnent accès au comptage, on utilise comme objet de numération des symboles comme les points, les traits, etc. N'y sont pas représentées les caractéristiques spécifiques des objets, par exemple la couleur, la forme, le volume etc., mais seulement les caractéristiques qui aident à leur comptage. Il n'est pas sans importance que les symboles aient une structure ou pas. Des points à disposition arbitraire sont un exemple de symboles sans structure, tandis que les points dans la disposition que l'on voit sur les dés ont une structure organisée.

2) Comme représentations symboliques qui ne donnent pas accès au comptage nous pouvons distinguer les suivantes :

- Les représentations **langagières**. Les expressions langagières exprimant les quantités arithmétiques peuvent être orales ou écrites. Par exemple, des expressions orales sont les phonèmes des mots-nombres ou l'énoncé oral de la suite des nombres. Des quantités arithmétiques langagières écrites peuvent être les mots-nombres écrits, le mot 'trois' par exemple. On doit souligner que la langue naturelle, dans son expression orale, est un moyen de communication facile, que les enfants possèdent très tôt.
- Les représentations par des **chiffres**. Les quantités arithmétiques sont représentées par des chiffres et le signifiant de la quantité n'a aucun rapport avec le signifié. Dans le cas des chiffres, on représente les quantités par écrit dans une forme tout à fait abstraite.

## 2.3. Les fonctions que peuvent remplir les différentes représentations

Outre la distinction des différents types de représentations possibles par rapport aux systèmes qui permettent de les produire, if faut prendre en compte les différentes fonctions auxquelles leur production par les différents registres sémiotiques peut répondre. R. Duval distingue les fonctions des représentations lorsqu'elles sont produites comme autosuffisantes ou lorsqu'elles sont produites à titre de représentation auxiliaire.

Dans une situation autosuffisante, les représentations peuvent remplir trois fonctions qui sont fondamentales pour le fonctionnement cognitif au niveau de la conscience du sujet : fonction de communication, fonction de traitement et fonction d'objectivation.

Les représentations auxiliaires peuvent remplir les fonctions suivantes :

### *2.3.1. Apport d'informations complémentaires*

La représentation auxiliaire apporte des informations qui ne sont pas contenues dans la représentation principale ou qui ne peuvent pas être inférées à partir de son seul contenu. Très souvent aux situations arithmétiques un dessin ou des croquis qui représente une quantité des objets accompagne un texte.

### *2.3.2. Interprétation explicative*

Par exemple, un dessin ou croquis de la quantité remplace un chiffre ou un mot-nombre dans l'énoncé.

### *2.3.3.Sélection d'éléments pertinents*

Par exemple, si la représentation principale contient un énonce du problème additif, la représentation auxiliaire sélectionne et présente les éléments pertinents pour le calcul.

#### *2.3.4. Exemple*

Le contenu de la représentation principale correspondant a une catégorisation de formes, de propriétés ou de traits pouvant être rencontrés dans des contextes multiples, la représentation auxiliaire instancie en quelque sorte la représentation principale.

#### *2.3.5. Illustration*

Cette fonction correspond a un changement de registre particulier : Par exemple, si la représentation principale appartenant à un registre de type discursif (énonce) ou symbolique (calcul écrit symboliques), la représentation auxiliaire appartient à un registre de type iconique.

#### *2.3.6. Matériau (substitut d’objet)*

La représentation auxiliaire sert de matériau pour des opérations dont l’effectuation est nécessaire pour la compréhension de ce que la représentation principale représente. Très souvent les représentations auxiliaires avec des images, matérialisent les chiffres ou les calculs, et servent à l’opération de comptage.

### 2.4. La congruence du mode de la représentation des quantités et des procédures arithmétiques utilisées par les élèves

Pour les jeunes enfants, la construction cognitive du nombre dépend, en grande partie, du mode qui a été utilisé pour représenter les quantités. Par exemple, pour la présentation matérielle et pour les représentations iconiques de grandes quantités, non organisées selon une structure, on utilise la procédure du dénombrement des objets pour faire la numération. Pour les petites quantités ou pour les grandes quantités organisées, la numération se fait par *subitizing* ou avec la procédure mixte du *subitizing* et du dénombrement. Lorsqu’il s’agit de la représentation des chiffres, la numération se fait obligatoirement à un niveau abstrait.

Il existe des représentations qui favorisent certains types de procédures de calcul ou de compréhension des nombres. On peut dire que quelques représentations sont congruentes avec certaines procédures arithmétiques, tandis que quelques-unes ne le sont pas. Lorsque les représentations et les procédures arithmétiques ne sont pas congruentes alors on a besoin de transformations mentales et d'adaptations. Ce fait précisément, c’est à dire l'activité d'adaptations mentales, coûte cher, et quelquefois, crée des difficultés supplémentaires aux élèves. Dans la suite, nous présenterons et analyserons les situations pour lesquelles il existe une congruence entre les représentations et les procédures arithmétiques, ainsi que celles pour lesquelles il n’en existe pas.

Lorsqu’on a affaire à des situations dans lesquelles les quantités sont présentées avec *du matériel sans structure***,** *des représentations iconiques sans structure et des représentations symboliques qui donnent accès au comptage***,** les procédures à matériel doivent être utilisées de préférence, ainsi que les procédures de comptage. L’existence du matériel, surtout dans une forme sans structure, nous oblige à passer par une procédure de certitude ou par un dénombrement des quantités de chaque terme de l’opération. Il est clair que les situations ci-dessus sont congrues aux premier et deuxième niveaux des procédures (les procédures à matériel et les procédures de comptage). Les élèves faibles qui travaillent aux deux premiers niveaux ne peuvent éviter l’emploi des objets ou des doigts. Pour les élèves travaillant au troisième niveau, l’existence même des objets les oblige à passer par le dénombrement pour faire la numération de la quantité et travailler par la suite avec les nombres. Ainsi, si, par exemple, des élèves capables de travailler dans un niveau abstrait (le 3ème) étaient mis dans des situations où ils devraient utiliser des objets, ils feraient des pas en arrière.

Quant nous avons des situations qui présentent *des matériels ou des représentations iconiques organisées selon une structure***,** c’est à dire si une numération directe est possible, alors les situations mènent vers une conception des quantités comme des nombres et des procédures mentales de calcul sont ainsi favorisées. C’est à-dire qu'il y a une congruence avec le deuxième et troisième niveau des procédures. Dans ces procédures ou les élèves utilisent les nombres en tant que tels et ils n’ont pas besoin de la matérialisation ou du comptage pour les concevoir. Si quelques élèves sont capables de travailler au premier niveau, avec les procédures à matériel, en leur offrant des situations avec du matériel possédant une structure organisée, on les pousse à travailler dans un niveau plus élevé (*du calcul sur les objets*).

Pour les quantités arithmétiques qui s’expriment avec des représentations *symboliques qui ne donnent pas accès au comptage (représentations langagières et chiffres)*, on suppose que les élèves peuvent directement concevoir les nombres qui sont représentées sous la forme d’expression orale ou écrite et utiliser le troisième niveau des procédures mentales. Ainsi on peut dire qu’il y a congruence avec ce niveau là. Mais en général, les procédures qui vont être utilisées sont conformes au niveau de l’élève. C’est à dire qu'il est possible que les trois groupes de procédures soient tous utilisés. Par exemple, si un élève ne peut pas utiliser les nombres à un niveau abstrait, alors il peut manipuler l’énoncé d’un problème ou d’une opération arithmétique au premier niveau des procédures à matériel. Il va expliquer chaque quantité du problème à l’aide des objets matériels. Les énoncés avec une représentation langagière exigent une reconstruction des données du problème. Ainsi au premier niveau des procédures, c’est à dire à celui des procédures à matériel, il n’y a pas de congruence directe parce que les nombres doivent être traduits sous forme d'objets matériels ou de doigts. Même au deuxième niveau, celui des procédures de comptage, il n’y a pas congruence parce que les nombres doivent se traduire en des pas de montée ou de descente.

## 3. Résultats expérimentaux d'un nouvel enseignement

Au cours de l'année universitaire 1997-1998 on a effectué un enseignement expérimental avec la 1ère classe (C.P.) d'une école élémentaire (âge des enfants : 6 ans). Pour l'expérimentation nous avions constitué deux groupes : le groupe expérimental (les élèves de deux classes qui ont suivi un enseignement expérimental) et le groupe témoin (élèves de deux classes qui ont suivi un enseignement classique).

Actuellement l'enseignement des mathématiques en Grèce est influencé par le mouvement des 'Mathématiques Modernes'. C'est à dire qu'il y a une séparation entre les notions pré-arithmétiques et les notions arithmétiques, les notions pré-arithmétiques étant basées sur la théorie des ensembles. On a encore en Grèce l'emploi du manuel scolaire unique dans tout le pays. En ce qui concerne les différentes manières de présenter les notions arithmétiques, on peut dire que c'est la présentation illustrée et symbolique du livre qui domine et qui constitue le principal et presque unique moyen d'enseignement.

L'enseignement expérimental a été une proposition nouvelle, tant du point de vue du contenu, que du point de vue du mode de l'enseignement (Lemonidis, 2001). Nous avons cherché et nous avons utilisé comme point de départ de notre enseignement les connaissances arithmétiques acquises des enfants. On a insisté sur les calculs mentaux. L'analyse, ainsi que la synthèse des nombres dans une somme, a été une des caractéristiques de notre enseignement. En ce qui concerne les matériels utilisés, on a plutôt travaillé avec des matériels organisés en structure, et pour le commencement sur la base de cinq et de dix (p. ex. le boulier bicolore). Au cours de cet enseignement et pour la présentation des situations arithmétiques, on a utilisé les diverses expressions conformes au niveau cognitif des élèves. Notre but a été la conversion d'une représentation en une autre afin de réussir à créer des situations didactiques fertiles. On a essayé de proposer des situations didactiques conformes à la «zone proximale de développement » des élèves et capables d'avancer leur apprentissage.

### 3.1. Présentation du comportement des élèves

Dans la suite on présentera certains résultats concernant le progrès de deux groupes d'élèves (groupe expérimental et groupe témoin) et qui se rapportent aux procédures utilisées par les élèves dans les opérations de l'addition et de la soustraction. Cet examen a été réalisé dans la première classe (C.P.) et à la fin de l'année scolaire. Les élèves ont été interrogés individuellement, une interview durant ente les 30' et 45' minutes. Toutes les questions ont été posées oralement aux élèves. Dans cette interview on a noté les réponses des élèves et les procédures qu'ils utilisaient dans leurs calculs. Devant chaque élève, il y avait de petits cubes en plastique prêts à être utilisés dans leurs calculs. L'examinateur essayait de comprendre les procédures utilisées par les enfants pendant leurs calculs, grâce à des manifestations repérables : Il observait s'ils utilisaient leurs doigts et comment ils s'y prenaient, ainsi que le temps de réponse. Si la procédure utilisée n'était pas évidente il leur demandait de la lui décrire.

En général les élèves du groupe expérimental (G.E) ont présenté plus de progrès que les élèves du groupe témoin (G.T) dans l'ensemble de la matière enseignée : nombres, système arithmétique, opérations de l'addition et de la soustraction (mentales ou écrites) et résolution des problèmes. Pour les opérations mentales on a proposé aux élèves neuf additions et huit soustractions.

| | | | Procédures de Récupération | | Procédures de Comptage | | Procédures à matériaux | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Opérat** | Groupes d'élèves | **Réussite** | Récupérat. Directe | Récupérat. d'operat. | Compt. S. doigts | Comptage A. doigts | Doigts | Objets |
| **4+4** | Gr. tém. | **29 (100%)** | 25 (86%) | | 1 (3,5%) | | 7 (10,5%) | |
| | Gr. exp. | **30 (97%)** | 28 (93,5%) | 2 (6,5%) | | | | |
| **9+9** | Gr. tém. | **24 (83%)** | 12 (50%) | 1 (4%) | 1 (4%) | 7 (29%) | | 3 12,5%) |
| | Gr. exp. | **29 (93,5%)** | 25 (86%) | 3 (10,5%) | | 1 (3,5%) | | |
| **2+7** | Gr. tém. | **28 (96,5%)** | 1 (3,5%) | 7 (25%) | 4 14,5%) | 10 (35,5%) | 4 (14,5%) | 2 (7%) |
| | Gr. exp. | **30 (97%)** | 9 (30%) | 15 (50%) | 4 13,5%) | 2 (6,5%) | | |
| **7+3** | Gr. tém. | **28 (96,5%)** | 6 (21,5%) | 1 (3,5%) | 7 (25%) | 13 (46,5%) | 1 (3,5%) | |
| | Gr. exp. | **29 (93,5%)** | 15 (51,5%) | 7 (24%) | 3 10,5%) | 3 (10,5%) | | |
| **6+5** | Gr. tém. | **27 (93%)** | 8 (29,5%) | 3 (11%) | 4 (15%) | 9 (33,5%) | 1 (3,5%) | 1 (3,5%) |
| | Gr. exp. | **30 (97%)** | 7 (23,5%) | 14 (46,5%) | 6 (20%) | 2 (6,5%) | | 1 (3,5%) |
| **9+8** | Gr. tém. | **22 (76%)** | 1 (4,5%) | 4 (18%) | 4 (18%) | 7 (32%) | 2 (9%) | 4 (18%) |
| | Gr. exp. | **27 (87%)** | 2 (7,5%) | 17 (63%) | 3 (11%) | 4 (15%) | | 1 (3,5%) |
| **10+6** | Gr. tém. | **29 (100%)** | 16 (55%) | | 3 10,5%) | 7 (24%) | 1 (3,5%) | 1 (3,5%) |
| | Gr. exp. | **30 (97%)** | 27 (90%) | | 2 (6,5%) | | | |
| **14+4** | Gr. tém. | **24 (83%)** | 2 (8,5%) | 4 (16,5%) | 7 (29%) | 6 (25%) | 1 (4%) | 4 (16,5) |
| | Gr. exp. | **28 (90,5%)** | 11 (39,5%) | 15 (53,5%) | | 1 (3,5%) | | 1 (3,5%) |
| **12+7** | Gr. tém. | **21 (72,5%)** | | 3 (14,5%) | 5 (24%) | 8 (38%) | | 5 (24%) |
| | Gr. exp. | **28 (90,5%)** | 2 (7%) | 13 (46,5%) | 5 (18%) | 4 (14,5%) | | 4 14,5%) |
| **17+3** | Gr. tém. | **26 (89,5%)** | 2 (7,5%) | 3 (11,5%) | 8 (31%) | 8 (31%) | 1 (4%) | 4 (15,5%) |
| | Gr. exp. | **27 (87%)** | 6 (22%) | 14 (52%) | 4 (15%) | 1 (3,5%) | 1 (3,5%) | 1 (3,5%) |

**Tableau 1** : Taux de réussite et procédures utilisées, par les deux groupes, aux additions.

Si on considère la réussite sur les neuf additions, les élèves du groupe témoin ont une réussite en moyenne de 7,89, tandis que les élèves du groupe expérimental une réussite de 8,29. Cette différence de la moyenne est statistiquement importante selon le test de Mann Whitney avec p=0,05.

Selon le tableau ci-dessus on remarque que les procédures utilisées par les élèves du groupe expérimental pour les additions sont beaucoup plus avancées que celles utilisées par les élèves du groupe témoin. C'est à dire les élèves du groupe expérimental utilisent plus des procédures de récupération (récupération immédiate et récupération des opérations), moins des procédures de comptage et encore moins des procédures à matériaux.

Les élèves du groupe expérimental utilisent avec un plus grand pourcentage la procédure de la *récupération immédiate* des opérations de la mémoire de longue date dans les opérations suivantes : doubles sommes (9+9), somme des nombres à un chiffre plus petite de 10 (2+7), somme des nombres à un chiffre égale à 10 (7+3), somme de type 10+n (10+6), somme de type 1n+n (14+4), et somme d'une dizaine entière d'un nombre à deux chiffres avec un nombre à un chiffre (17+3). Les sommes en question sont fondamentales et elles sont très souvent utilisées pour le calcul d'autres sommes, par conséquent les élèves doivent bien les connaître afin qu'ils puissent facilement les récupérer de la mémoire de longue date.

En plus les élèves du groupe expérimental utilisent souvent la procédure de la récupération d'autres opérations pour la construction de la somme dans les opérations suivantes : 2+7, 7+3, 9+8, 14+4, 12+7 et 17+3. Quand les élèves du groupe expérimental utilisent la procédure de la récupération d'opérations, ils font des combinaisons d'opérations bien plus variées que les élèves du groupe témoin.

### 3.2. Soustractions

Les élèves ont été également examinés oralement sur huit soustractions.

| | | | Procédures de Récupération | | Procédures de Comptage | | Procédures à matériaux | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Opérat°** | Groupes d'élèves | **Réussite** | Récupérat. Directe | Récupérat. d'operat. | Comptage S. doigts | Comptage A. doigts | Doigts | Objets |
| **9-2** | Gr. tém. | **28 (96,5%)** | 7 (25%) | 1 (3,5%) | 6 (21,5%) | 12 (43%) | 2 (7%) | |
| | Gr. exp. | **29 (93,5%)** | 10 (34,5%) | 9 (31%) | 6 (20,5%) | 3 (10,5%) | | 1 (3,5%) |
| **8-5** | Gr. tém. | **26 (89,5%)** | 2 (7,5%) | 2 (7,5%) | 7 (27%) | 12 (46%) | 2 (7,5%) | 1 (4%) |
| | Gr. exp. | **30 (97%)** | 13 (43,5%) | 7 (23,5%) | 4 (13,5%) | 4 (13,5%) | 1 (3,5%) | 1 (3,5%) |
| **10-4** | Gr. tém. | **29 (100%)** | 7 (24%) | 3 (10,5%) | 2 (7%) | 14 (48,5%) | 3 (10,5%) | |
| | Gr. exp. | **30 (97%)** | 13 (43,5%) | 11 (36,5%) | 4 (13,5%) | 1 (3,5%) | | 1 (3,5%) |
| **16-6** | Gr. tém. | **24 (83%)** | 10 (41,5%) | 4 (16,5%) | 1 (4%) | 4 (16,5%) | | 5 (21%) |
| | Gr. exp. | **29 (93,5%)** | 23 (79,5%) | 3 (10,5%) | 1 (3,5%) | | | 2 (7%) |
| **14-7** | Gr. tém. | **21 (72,5%)** | 3 (14,5%) | 3 (14,5%) | | 9 (43%) | | 6 (28,5%) |
| | Gr. exp. | **29 (93,5%)** | 1 (3,5%) | 16 (55%) | 4 (14%) | 2 (7%) | | 6 (20,5%) |
| **18-6** | Gr. tém. | **19 (65,5%)** | | 2 (10,5%) | 5 (26,5%) | 6 (31,5%) | | 6 (31,5%) |
| | Gr. exp. | **26 (84%)** | 3 (11,5%) | 13 (50%) | 1 (4%) | 2 (7,5%) | | 6 (23%) |
| **17-9** | Gr. tém. | **21 (72,5%)** | 1 (5%) | 2 (9,5%) | 2 (9,5%) | 7 (33,5%) | | 9 (43%) |
| | Gr. exp. | **30 (97%)** | | 19 (63,5%) | 3 (10%) | 1 (3,5%) | | 6 (20%) |
| **16-11** | Gr. tém. | **19 (65,5%)** | 4 (21%) | | 1 (5,5%) | 3 (16%) | | 11 (58%) |
| | Gr. exp. | **23 (74,5%)** | | 10 (43,5%) | | 2 (8,5%) | | 11 (48%) |

**Tableau 2** : Taux de réussite et procédures utilisées, par les deux groupes, aux soustractions.

En ce qui concerne la réussite totale, c'est à dire la réussite dans les huit soustractions, les élèves du groupe témoin ont un succès, en moyenne, de 6,44 tandis que les élèves du groupe expérimental ont un succès de 7,29. Cette différence de la moyenne est statistiquement importante selon le test de Mann Whitney avec p=0,008.

Quant aux procédures utilisées par les élèves de deux groupes, dans la réalisation des soustractions, on peut dire que, les élèves du groupe expérimental utilisent des procédures beaucoup plus avancées que les élèves du groupe témoin. Les élèves du groupe expérimental utilisent la procédure de récupération directe à un niveau supérieur, par rapport aux élèves du groupe témoin, aux opérations 8-5, 10-4 et 16-6. Ces soustractions là sont essentielles et elles sont utilisées dans le calcul d'autres soustractions, plus complexes. Ainsi, il est important que les élèves connaissent ces opérations et les récupèrent directement de leur mémoire.

En plus, les élèves du groupe expérimental utilisent beaucoup la procédure de la récupération d'autres opérations pour le calcul des résultats. Cette procédure est utilisée statistiquement beaucoup plus souvent par les élèves du groupe expérimental dans toutes les soustractions qui ont été proposées, sauf dans la soustraction 16-6, pour laquelle 79,5% de ces élèves ont utilisé la procédure de récupération directe.

Lorsque les élèves du groupe expérimental utilisent la procédure de la récupération d'autres opérations, ils utilisent une plus grande variété de combinaisons d'opérations que les élèves du groupe témoin.

## 4. Résultats-propositions pour l'enseignement

On a pu analyser et distinguer les différents modes d'expressions avec lesquels on peut présenter les quantités en situations arithmétiques. Ayant comme point de départ les différentes représentations des quantités arithmétiques, ainsi que les procédures que les élèves utilisent, on a pu distinguer les différentes situations et examiner le niveau de leur congruence avec les capacités cognitives des élèves.

Les quantités arithmétiques donc, peuvent être représentées différemment : représentations iconiques, langagières, chiffres, etc. Ces représentations créent différents modes de communication et de compréhension pour les élèves. Par exemple, les mots-nombres énoncés oralement, à l'aide du langage naturel, sont compris dès le plus jeune âge et on peut, en les utilisant, communiquer facilement. Au contraire, les nombres écrits en chiffres exigent un niveau d'abstraction plus élevé et sont utilisés plus tard par les élèves. Ces représentations sont congrues à certaines procédures utilisées par les élèves dans leurs calculs, mais pas à d'autres. Supposons que, dans la représentation des quantités avec des symboles qui n'ont pas de structure (par exemple des points disposés arbitrairement), on demande aux élèves de compter des quantités. La situation est congrue aux procédures du premier et du deuxième niveau, dans lesquelles on retrouve le comptage un par un. En revanche, si la représentation des quantités est dotée d'une structure (exemple de la disposition des points sur les faces d'un dé) alors la situation est congrue au troisième niveau, dans lequel les nombres sont directement utilisés.

Il en résulte que, pour l'enseignement des premières notions arithmétiques, il est important que les différentes représentations des quantités arithmétiques soient connues, ainsi que les influences cognitives de ces représentations sur l'esprit des élèves. Les enseignants, pour leur part, doivent connaître ces différentes représentations et aussi pouvoir s'en servir, afin qu'ils puissent créer des situations didactiques qui coïncident avec le niveau des élèves pour arriver à contribuer à l'évolution de l'apprentissage. De la théorie découle que, pour que l'apprentissage évolue et que les élèves conquièrent de plus en plus de capacités arithmétiques évolutives, les situations qui leur sont proposées correspondent aux caractérisations suivantes : mobiliser des représentations arithmétiques congrues aux procédures que l'élève utilise ou encore des représentations se rapportant à un niveau supérieur, au cas où l'élève serait capable de s'en servir. Avec un traitement convenable, une situation arithmétique peut se rapporter à un niveau d'abstraction beaucoup plus élevé que celui d'origine. C'est par exemple le cas si l'on a à faire à une situation avec des objets matériels ou des images, représentés par des traits, et qu'on pose des questions aux élèves sur certains objets ou traits cachés (situation cachée-apparente). Les élèves n'ayant pas sous les yeux tous les objets à compter sont obligés de chercher mentalement et d'engager cette réflexion dans la voie d'une certaine abstraction. De même, une situation qui se rapporte à un niveau de procédures plus élevé que celui qu'expriment les quantités arithmétiques, est la procédure *du calcul sur les objets*. Dans cette procédure, les élèves utilisent des objets, mais sous une forme organisée. Quand ils utilisent alors les objets avec une structure ou en correspondance avec les doigts, ils ne les comptent pas un à un, mais ils mobilisent les nombres entiers comme au troisième niveau, à la seule différence près qu'ils utilisent des objets pour les présenter. On a remarqué dans les résultats expérimentaux qu'un enseignement sur les notions arithmétiques ayant les caractéristiques qui ont été mentionnées a des effets positifs sur les élèves. Il les pousse plus vite vers des niveaux de réflexion abstraite et les rend plus adroits dans le maniement des situations arithmétiques.

## BIBLIOGRAPHIE

CARPENTER T.P., HIEBERT J. and MOSER J.M., 1981, Problem Structure and First-Grader children's Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, (1), 27-39.

CARPENTER T.P., MOSER J.M., 1982, The development of addition and substraction problem-solving skills. In Carpenter, T.P. - Moser, J.M. - Romberg, T.P. (Ed.). *Addition and Sustraction. A cognitive perspective*, Hillsdale, Erlbaum.

CARPENTER T.P., MOSER J.M., 1983, The acquisition of addition and subtraction concepts. In Lesh, R. - Landau, M. (Eds.) : *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, 7-44.

DE CORTE E., VERSCHAFFEL L., 1987, The effect of semantic structure on first-graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 18, 363-381.

DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuells*, Berne : Peter Lang.

DUVAL R., 1996, Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des mathématiques*, 16/3, 349-382.

DUVAL R., 1999, Conversion et articulation des representations analogiques. *IUFM Nord Pas de Calais. Seminaires de recherche.*

FISCHER J. P., et PLUVINAGE F., 1988, Complexités de compréhension et d'exécution des opérations arithmétiques élémentaires, *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9/2, 133-154.

FUSON K. C., 1992, Research on whole number addition and subtraction. In D. Grouws (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 243-275, New York : Macmillan.

LEMONIDIS Ch., 2001, Une nouvelle proposition d'enseignement de mathématiques pour les premières classes de l'école élémentaire. Thèmes in Education, No 3. Athènes.

STEFFE L.P., COBB P., 1988, *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York : Springer-Verlag.

RILEY M.-S., GREENO J.-G., HELLER J.-I, 1983, Development of children's problem-solving ability in arithmetic, In H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*,153-196, New York : Academic Press.

VERGNAUD G., 1982, A classification of cognitive tasks and operations of thougth involved in addition and subtraction problems In Carpenter, T.P. - Moser, J.M. - Romberg, T.P. (Eds.), *Addition and Sustraction. A cognitive perspective.* Hillsdale, Erlbaum.