François PLUVINAGE

SUR LES MÉTHODES ET LES RÉSULTATS DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Abstract. In a first part of this paper we analyse how didactics of mathematics was emerging during the 20th century. It seems to be a relation between the growth of education and the need of ever more acute educational studies. Structuralism has played an important role too. It introduced major changes in mathematics education and made didactics of mathematics an autonomous scientific field. In a second part we look how research work in this field considers mathematical contents and students activities. Constraints in using semiotic registers for building mathematical objects or concepts are specifically examined. We conclude with a survey of methods in use in didactics of mathematics.

Résumé. Dans une première partie, cet article analyse l'émergence de la didactique des mathématiques au cours du 20ème siècle. L'extension de l'enseignement semble être associé à un besoin d'études sans cesse plus précises. Le structuralisme a joué aussi un grand rôle. Il a introduit des changements importants dans l'enseignement mathématique et fait de la didactique des mathématiques un champ scientifique autonome. Dans une seconde partie, nous regardons comment la recherche dans ce champ envisage les contenus mathématiques et les activités des apprenants. On examine spécifiquement les contraintes dans l'usage des registres sémiotiques pour la construction d'objets ou concepts mathématiques. Un passage en revue de méthodes utilisées en didactique des mathématiques conclut cet article.

Mots-clés : Didactique des mathématiques, pédagogie, histoire, structuralisme, registres sémiotiques, changements de registres, représentations de nombres, contradictions.

Note préliminaire : Les participants au colloque Argentoratum 2002 s'étonneront peut-être de trouver ici un autre texte que celui qui leur avait été remis à cette occasion. Un article très proche de ce premier texte a en effet déjà été publié au premier trimestre 2003 (voir en fin de bibliographie) au sein d'un volume, coordonné par Alain Denis, intitulé *Didactique des mathématiques*. Le texte présenté ici résulte d'une rédaction entièrement nouvelle, hormis le §7 (présentant les programmes de travail en didactique des mathématiques), qui est repris du premier texte afin que les réactions des intervenants à la table ronde du colloque soient situées dans leur contexte. Le titre coïncide presque avec l'intitulé de la table ronde, qui était *Méthodes et résultats de la didactique des mathématiques*. J'ai simplement relativisé sa portée, pour que le lecteur ne confère pas à cet article un caractère trop fondamental ou généralisant, qui n'était pas recherché. Il s'agit simplement de faire un tour d'horizon, forcément incomplet malgré les efforts de l'auteur pour ne pas omettre d'aspect essentiel, sur ce qui s'est fait jusqu'à aujourd'hui en didactique des mathématiques et de réfléchir aux leçons à en retirer pour les travaux à venir dans ce domaine. En conformité avec les thèmes abordés

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 9, p. 7 – 43.

lors de la table ronde, la vision présentée de la didactique des mathématiques s'attache essentiellement à repérer l'émergence de ce domaine au courant du vingtième siècle et elle est accompagnée de quelques hypothèses explicatives sur le pourquoi de telle ou telle des évolutions signalées. En fin de l'article précité, la conclusion contenait une remarque laconique à propos de rigueur dans la recherche en didactique des mathématiques : La présentation de quelques *fondamentaux* de la didactique des mathématiques permet de développer une telle remarque. Sur l'utilisation de cadres mathématiques et de registres d'expression, des précisions me paraissaient s'imposer, notamment suite aux échanges que j'ai pu avoir durant le colloque. Depuis lors d'ailleurs, des conversations avec Raymond Duval m'ont fait apercevoir l'intérêt possible de l'un ou l'autre développement supplémentaire, qui a été inclus. La bibliographie a été enrichie, mais je lui ai conservé son organisation chronologique, plutôt que par ordre alphabétique des noms d'auteurs.

1. Préambule

Si les réflexions sur l'enseignement des mathématiques sont sans doute aussi anciennes que les mathématiques elles-mêmes (penser par exemple au dialogue dans lequel Platon met en scène la maïeutique de Socrate), le développement d'un champ spécifique de recherches ayant explicitement l'enseignement des mathématiques pour objet est en revanche récent. A quelle date convient-il de situer une institutionnalisation de la didactique des mathématiques au sens qu'elle a aujourd'hui dans l'école française ainsi que dans nombre de pays ? La discussion peut porter sur une période de l'ordre d'une dizaine d'années : des années 1960, avec les réflexions de la commission Lichnérowicz et le lancement de programmes d'expérimentation pédagogique et d'Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, aux années 1970, avec la création de diplômes universitaires de troisième cycle de didactique des mathématiques. Nous venons de citer des événements qui se sont produits dans le cadre hexagonal, mais nous y revenons dans les paragraphes suivants, car les phénomènes considérés ont eu un aspect largement planétaire. Un regard sur les évolutions qui se sont dessinées depuis lors, sur les productions qui ont surgi, peut conduire à faire le point, plus encore sur des questions à étudier aujourd'hui, des sujets à discuter, des chantiers à lancer, que sur les idées désormais acquises, des faits à considérer comme établis.

2. Scolarité généralisée et didactique à partir du début du 20^{e} siècle

Les mathématiques enseignées aux élèves à une époque donnée donnent déjà lieu à un certain nombre de disparités d'un pays à l'autre, sans parler des fluctuations au cours du temps. Et dans la formation des professeurs amenés à enseigner des mathématiques, on observe davantage encore de différences, dues aux spécificités des systèmes éducatifs, en particulier à leur recrutement d'enseignants et à leurs modes de désignation des responsables pédagogiques ou décideurs, tels les formateurs d'enseignants, inspecteurs, rédacteurs de programmes scolaires, auteurs de manuels, etc. Ces différences se sont traduites par l'existence dans certains pays d'institutions ou d'établissements n'ayant pas nécessairement leur pendant dans d'autres systèmes d'enseignement. Dans ceux qui comportaient des institutions supérieures chargées de la formation des enseignants avec des titres correspondants (exemple aux USA : *Ph.D. in mathematics education*), tels les Etats-Unis ou l'Allemagne, mais aussi du côté francophone la Belgique et la Suisse, le début du vingtième siècle vit déjà se publier des directives pédagogiques fondées sur des réflexions sur l'enseignement, englobant notamment celui des mathématiques. De nombreux écrits portent les traces de telles orientations, qui marquent évidemment ce qu'il convenait d'entendre par *didactique*.

Ainsi en langue allemande, le MEYERS Konversations-Lexikon, dont nous avons consulté la sixième édition en vingt volumes, datée de 1908, indique pour *didactique*[1] (nous traduisons ; le texte original allemand est en note) : *discipline ou science de l'enseignement, constituant la partie majeure de la pédagogie, laquelle englobe de plus la formation en science de l'éducation. La didactique apparaît pour partie comme didactique générale, qui développe les principes de base de l'enseignement à partir de fondements psychologiques, et pour partie comme didactique spécialisée ou méthodologie particulière, qui exploite ces principes de base dans les différentes disciplines d'enseignement*. Le mot *Didaktiker* (didacticien) y est même déjà mentionné, avec l'acception de *spécialiste ou enseignant de didactique* et accompagné d'une référence à l'ouvrage en deux volumes de Willmann, 1903, *Didaktik als Bildungslehre* (la didactique comme discipline de formation), Braunschweig, troisième édition. Notons qu'en allemand, le substantif féminin invariable *Didaktik* se distingue d'emblée de l'adjectif *didaktisch*. Dans la même langue allemande, une référence d'usage actuel est le dictionnaire WAHRIG, dont la première édition date de 1966, Verlagsgruppe Bettelsmann GMBH, et qui a été repris en 1975 puis 1980, Mosaik Verlag GMBH. Traduit en français, le sens qui est attribué à *Didaktik* est celui de *science de l'apprentissage et de l'enseignement, des contenus de la formation et de leur choix dans les progressions d'enseignement* et des termes comme *Unterrichtslehre, Unterrichtskunde*, auxquels correspond le mot français moins spécialisé *pédagogie*, en sont donnés comme des synonymes.

En France, la situation a été plus mouvante. La langue ne distingue d'ailleurs pas l'adjectif et le substantif *didactique*. Dans le Larousse Universel en deux volumes, édition de 1922, le substantif se trouvait présent et l'acception qui en était

---

[1] **Didáktik** (griech.), Unterrichtslehre oder Unterrichtswissenschaft, der eine Hauptteil der Pädagogik (s. d.), die außerdem noch die Lehre von der Erziehung umfaßt. Die D. ist teils allgemeine D., die auf psychologischer Grundlage die allgemeinen Grundsätze des Unterrichts entwickelt, teils besondere D. oder spezielle Methodik, welche die Anwendung dieser Grundsätze auf die einzelnen Unterrichtsfächer nachweist.

donnée était simplement *l'art d'enseigner*. Mais dans la première édition du Petit Robert, parue en 1967, l'article *didactique* ne mentionnait ce mot que comme adjectif, donc n'en faisait en particulier pas mention comme branche scientifique. Le contraste avec l'univers germanique est net. Mais dans l'édition revue, datée de 1993, le mot apparaît comme substantif, avec l'acception *théorie et méthode de l'enseignement ⇒ pédagogie*, accompagnée de l'exemple de la *didactique des langues*. Notons que dans une référence pourtant spécialisée, comme l'est l'ouvrage de Dimitri DEMNARD et Dominique FOURMENT, 1981, *Dictionnaire d'histoire de l'enseignement*, éd. J.P. Delarge, Paris, l'entrée *didactique* est tout simplement absente.

Si l'on élargit l'horizon du français à celui de la francophonie, on pourra au contraire y observer çà ou là des similitudes frappantes avec le point de vue allemand précédemment présenté Ainsi un ouvrage qui a fait date est celui de Raymond BUYSE, 1935, *L'expérimentation en pédagogie*. En guise de préface, l'entrée en matière de l'ouvrage est intitulée *Introduction à l'étude de la didactique expérimentale* ; il s'agit en fait, comme l'auteur finit par le signaler, d'un pastiche pédagogique de l'*Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*, ouvrage bien connu de Claude BERNARD. Les trois *parties fondamentales* que Raymond BUYSE distingue dans *la pédagogie scientifique* sont la *biologie*, la *psychologie* et la *didactique*. Pour cette dernière, qu'il verrait d'ailleurs bien désigner par le terme de *méthodologie*, il indique la distinction entre *didactique générale* et *didactique spéciale* (propre à une discipline d'enseignement). On ne peut manquer de remarquer la conformité avec la formulation précédemment extraite de l'encyclopédie allemande ; une telle convergence est pour nous à rattacher à des similitudes d'institutions de formation des enseignants dans beaucoup de pays européens, la situation française à cet égard constituant plutôt une exception. L'existence de telles institutions a amené dès le début du vingtième siècle la didactique à être l'objet d'une considération attentive, plus attentive sans doute qu'en France, sans pour autant apparaître comme une branche d'étude dotée de son autonomie.

C'est à propos de ce dernier point que va se créer la différence qui s'introduit au courant des années 1960-1970. Avant de la préciser, tentons de résumer la situation antérieure des réflexions sur l'enseignement, notamment celui des mathématiques.

Partout dans le monde, la *généralisation de la scolarisation* a en effet suscité le besoin de développer de telles réflexions. On peut dire qu'elles étaient plutôt dispersées en France[2], réparties entre psychologues, comme Alfred BINET (1857-1911) célèbre pour ses *tests d'intelligence*, pédagogues innovateurs tel Célestin FREINET (1896-1966) et spécialistes des mathématiques comme l'inspecteur général Emile BLUTEL, l'un des fondateurs de l'Association de Professeurs de Mathématiques en 1909 et propagateur de la *méthode de la redécouverte*. Au contraire elles étaient davantage concentrées dans d'autres pays, mais en s'appuyant en définitive sur les mêmes types d'apports fondamentaux relevant de champs disciplinaires différents :

- la psychologie avec une éventuelle spécialisation en psychopédagogie à l'instar du Genevois Edouard CLAPARÈDE (1873-1940), prédécesseur de Jean Piaget, et des expérimentateurs dont par exemple la revue américaine *Journal of Experimental Psychology* publiait des articles,
- la pédagogie, telle qu'elle se manifeste par exemple en Allemagne dans des ouvrages comme celui de W.A. LAY, 1910 (2e édition, la 1e édition datant de 1903), *Experimentelle Didaktik*, Leipzig, Nemnitz, ou telle qu'elle donnait lieu aux Etats-Unis dès les années 1920 à des études publiées dans la revue *Journal of Educational Research* et était largement marquée par l'autorité d'un John DEWEY (1859-1952), dont en particulier des aphorismes tels *"learning by doing"* ou *"education is life, school is society"* restent bien connus aujourd'hui.

Pour ce qui est des mathématiques, elles occupaient peut-être dans le contexte français une place un peu plus particulière et éminente que dans d'autres pays ; l'investissement dans l'enseignement consenti par certains mathématiciens confirmés avait pu contribuer à cette reconnaissance. Un exemple notable d'un tel investissement au niveau de l'enseignement du second degré (les collèges et lycées actuels) est constitué par la série des manuels de mathématiques rédigés par le mathématicien Emile BOREL (1871-1956). C'est le développement du contenu mathématique qui dicte alors les choix de présentation et non pas des considérations issues d'études sur son enseignement. En gros, l'auteur d'un manuel prend la responsabilité des réflexions théoriques (mathématiques) qu'il expose, considérant qu'ensuite intervient l'art de la pédagogie, lequel incombe entièrement à l'enseignant.

Dans des systèmes éducatifs s'appuyant sur des principes pédagogiques déclarés, les mathématiques tendaient à se présenter comme une discipline au même titre que d'autres. Ainsi sont rapportées de la même manière dans l'ouvrage déjà cité de Raymond BUYSE, 1935, des expérimentations faites sur certains acquis mathématiques, qui sont souvent de type opératoire algorithmique (les exercices

[2] Raymond Duval me signale qu'en France, la première chaire de *science de l'éducation* a été créée en 1896 et occupée par Ferdinand Buisson, mais qu'il faut attendre jusqu'en 1967 pour que l'on emploie institutionnellement l'expression *sciences de l'éducation*.

nommés *drills* en anglais, entraînement pour une exécution automatisée), que des observations concernant l'expression dans la langue maternelle des élèves. On ne fait donc pas de différence fondamentale dans l'enseignement élémentaire entre l'apprentissage de l'orthographe, de la grammaire ou du vocabulaire et celui de la bonne exécution des opérations arithmétiques ou du calcul fractionnaire par exemple. Si l'on songe par exemple aux traditionnelles acquisitions affichées pour la scolarité obligatoire, *savoir lire, écrire, compter*, les mathématiques sont présentes mais occupent simplement la troisième place de cette trilogie.

On s'est accordé néanmoins à conférer aux mathématiques une spécificité du point de vue des apprentissages. Cette spécificité d'ordre psycho-sociologique continuera à être évoquée alors même que l'enseignement mathématique prendra, sous une bannière de *mathématiques modernes*, un virage que nous étudierons. Ainsi William E. LAMON, éditeur de l'ouvrage collectif *Learning and the nature of mathematics*, 1972, écrivait-il en introduction[3] : *« Rare est l'enfant capable de mettre en jeu et de découvrir par lui-même des formules algébriques, alors que beaucoup d'enfants deviennent poètes en secret, sans aucune incitation extérieure ni aide autre que les choses du quotidien et des échanges verbaux. Le langage des mathématiques doit être appris ; sa pratique doit constamment être évaluée. »* A ce moment, on en reste pour les apprentissages à prendre appui sur des études de type psychologique et on ne se pose pas encore la question du pourquoi : Quelles particularités ce *langage des mathématiques* peut-il bien avoir pour *nécessiter* l'apprentissage ? La tentative d'apporter des réponses à cette question ne surgira que plus tard ; elle constituera précisément l'un des éléments conduisant à une certaine autonomie de la didactique des mathématiques. Nous y reviendrons.

3. Les structures et le virage des années 1960-1970

L'enseignement mathématique a vécu un mouvement d'ampleur planétaire avec les *mathématiques modernes*. Celles-ci se caractérisaient certes par l'attention portée à des objets d'études non considérés antérieurement, comme les ensembles, les relations et leurs propriétés ou les connecteurs logiques, mais surtout par la place essentielle dévolue aux structures. Cette place est attestée dans des ouvrages rédigés pour les enseignants et largement diffusés à l'époque, comme celui d'Irving ADLER, 1964, *Initiation à la mathématique d'aujourd'hui*, Paris, OCDL (traduit de l'anglais). L'extrait suivant présente cette *Mathématique*.

> *« Tout texte de mathématiques un peu avancées se hérisse aujoud'hui de termes tels que groupe, anneau, champ, homomorphisme, isomorphisme, et*

[3] It is the rare child who can go off and discover algebraic formulas on his own, while many children secretly become poets without any external push or any aid other than the stuff of everyday life and speech. The language of mathematics must be learned; its practice must be evaluated constantly. [Introduction, p. XIII, op. cit.]

homéomorphisme. Ces termes aux allures peu familières donnent à penser que les mathématiques ont abandonné leur ancien objet, et ne s'intéressent plus à l'étude des nombres et de l'espace. Ceci, évidemment, est faux. Les nombres et l'espace résident toujours au cœur même de la Mathématique. Les idées nouvelles sont nées avec une analyse plus pénétrante de leurs propriétés.
(…)
Le mathématicien voit l'ensemble numérique comme un complexe de ***structures*** *liées entre elles. Il étudie ces structures séparément, et aussi dans leurs relations les unes avec les autres.* » [op. cit. p. 12-13].

Vers la fin des années 1950, la référence aux structures avait imprégné de nombreux domaines des sciences humaines, notamment linguistique, psychologie, sociologie, anthropologie, économie, philosophie, histoire, sciences de la nature. La place de la linguistique en début de liste tient à ce que l'on s'accorde souvent à lui conférer un rôle moteur dans le structuralisme ; dès les années 1920, le cercle linguistique de Prague publiait ses réflexions, mûries à partir du *Cours de linguistique générale* de Ferdinand de SAUSSURE, paru en 1916.

La place particulière des mathématiques dans un tel mouvement tient sans doute à ce qu'elles sont la discipline qui a précisément en charge l'étude en soi des structures. Lorsque les spécialistes d'autres disciplines tombent sur des objets ou des propriétés que les mathématiques ont déjà mises en forme (ou permettent de mettre en forme), ils éprouvent une impression de rassurante solidité. Faire jouer les propriétés mathématiques peut aussi les intéresser, en faisant apparaître tel ou tel développement ou résultat auxquels on aurait pu ne pas songer. Un exemple connu est celui de Jean PIAGET avec le *groupe INRC de Piaget*, lequel est tout simplement isomorphe au groupe des isométries laissant globalement invariant un système de trois droites de l'espace supports d'un repère orthonormé.

Il y eut donc une convergence remarquable d'opinions favorables à la présentation, dès l'enseignement élémentaire, des mathématiques à partir des idées de structures. L'ouvrage collectif déjà cité, *Learning and the nature of mathematics*, réunit les signatures, entre autres, de Jean DIEUDONNÉ, Zoltan DIENES, Hans FREUDENTHAL, Robert GAGNÉ, Jean PIAGET. Aux deux extrémités de cette liste figurent deux éminentes personnalités qui ont soumis leurs vues de spécialistes (respectivement mathématicien et psychologue clinicien) aux pédagogues, sans s'avancer directement sur le terrain de l'enseignement. Au contraire, Zoltan DIENES, Hans FREUDENTHAL et Robert GAGNÉ sont intervenus sur ce terrain, en envisageant explicitement des problèmes signalés dans le système éducatif et en avançant des hypothèses ou des propositions. Notons que les linguistes sont absents de l'ouvrage cité. Il y a peut-être là un phénomène d'école : Il nous semble que l'apport possible des linguistes pour l'étude de questions touchant à l'enseignement mathématique était davantage considéré à l'époque en

Union-Soviétique ou dans le monde francophone, en particulier en Suisse où PIAGET bénéficiait de collaborations de linguistes, qu'aux Etats-Unis. Pour être précis, notons que, sans que des linguistes soient sollicités, il y avait néanmoins émergence aux USA de ce type de préoccupations : La traduction en langue anglaise[4] de l'ouvrage de VYGOTSKY, sous le titre de *Thought and Language*, a par exemple été publiée en 1962, l'édition russe originale datant de 1934.

Quelles étaient à l'époque les positions vis-à-vis de la mise en œuvre de ces *mathématiques modernes* dans l'enseignement ? Il y avait évidemment des **sceptiques**, souvent peu concernés eux-mêmes directement, qui contemplaient ce mouvement dans l'enseignement mathématique avec une certaine condescendance. Leur opinion pourrait être ainsi résumée : «Toute cette agitation ne rime pas à grand chose, de toute façon les mathématiques de l'école sont et resteront à des années-lumières de celles que pratiquent les mathématiciens. » De l'autre côté, c'est à dire parmi ceux qui se déclaraient partisans de changements, il n'y avait pas unanimité d'opinions. Les **enthousiastes** étaient persuadés que *la Mathématique* dans l'enseignement allait provoquer des changements bénéfiques : démocratisation, acquisition d'autonomie, meilleure compréhension amenant une diminution générale des difficultés à saisir les concepts et les pratiques mathématiques, meilleure préparation aux études supérieures. Le changement devant aussi porter sur les méthodes d'enseignement, désormais moins dirigées vers l'acquisition de recettes que de méthodes de travail et de recherche, la condition de son succès était la mise en place d'actions en direction des professeurs en exercice et des parents d'élèves, notamment afin de bien expliquer les principes et les démarches de ces *mathématiques modernes*. Au contraire, les **prudents** estimaient que de réels changements de méthode ne peuvent pas résulter de changements de contenus d'enseignement, en l'absence d'études spécifiques.

Quoi qu'il en soit, une réflexion sur l'enseignement des mathématiques s'imposait, ne serait-ce que pour mettre au point de nouveaux programmes scolaires, de nouvelles activités. Au besoin habituel de manuels scolaires s'ajoutait celui d'ouvrages destinés aux enseignants et d'ouvrages tout public. Et le nombre et les spécialités des personnalités impliquées par l'enseignement mathématique étaient accrus.

4. Généralisation de l'accès aux études secondaires et didactique des mathématiques

4.1. Une demande institutionnelle renouvelée

Parallèlement au mouvement des idées, un phénomène d'augmentation des publics concernés par les études secondaires amenait une demande d'ordre

[4] Une traduction française de Vygotski, plus complète que l'anglaise, a été publiée en 1985.

sociologique, comparable à celle qui avait résulté de la scolarité généralisée au début du vingtième siècle. Les systèmes éducatifs était intéressés par des études qui puissent être utilisables au moment d'envisager les problèmes liés à la massification de l'enseignement du second degré (en France, il s'agissait du *collège pour tous*). Or, par rapport à l'école primaire, l'enseignement du second degré se démarque par la spécialisation des professeurs dans une discipline d'enseignement. Un déplacement ou plus précisément un élargissement de la commande institutionnelle, va en résulter : Il ne s'agit plus seulement de s'intéresser à la pédagogie, mais aux problèmes spécifiques à l'enseignement d'une discipline. Après ce qui vient d'être dit concernant le mouvement en mathématiques, on comprend que cette discipline d'enseignement ait alors pu être l'objet d'une particulière attention.

4.2. Emergence de réflexions originales

Un ouvrage qui fut largement diffusé en France auprès des enseignants de mathématiques est celui de FLETCHER, 1966, sous l'intitulé de *Didactique*. Il s'agit de la traduction française de textes rédigés par une vingtaine de professeurs britanniques et édités par T.J. FLETCHER sous le titre *Some lessons in mathematics*, publié en 1962 par Cambridge University Press (Londres). Dans son introduction (op. cit. p. 13), FLETCHER pointe dans une même phrase les deux phénomènes que nous avons signalés :

« (…) l'esprit des mathématiques a changé et enfin on s'adresse à un public de plus en plus vaste alors que ces notions étaient réservées autrefois à une élite. »

La version française est préfacée par André REVUZ, l'un des fondateurs des IREM avec Jean FRENKEL à Strasbourg et Maurice GLAYMAN à Lyon. Cette préface (op. cit. p. 11-12) aborde elle-aussi l'élargissement de la diffusion des mathématiques dans un alinéa, lequel est ainsi conclu :

« (…) Etude et mathématisation d'une situation, c'est ce que l'on veut faire dans ce livre. Le mot situation a été introduit en pédagogie par Caleb Gattegno et l'idée qu'il exprime est à coup sûr extrêmement féconde, mais le mot risque de devenir la tarte à la crème de la pédagogie nouvelle et d'être utilisé sans que l'on comprenne son contenu. »

Sans en avoir conscience, étant donné qu'il parle uniquement de pédagogie, l'auteur situe un virage qui va être pris par la didactique des mathématiques, sans doute mieux d'ailleurs que ce qu'il redoutait. Une partie importante des travaux de Guy BROUSSEAU sera consacrée à l'étude des situations. Nous y reviendrons. L'auteur souligne aussi au passage un risque d'usage incontrôlé, que nous envisageons dans le paragraphe sur les *fondamentaux* de la didactique des mathématiques.

A l'époque, rares étaient toutefois les esprits suffisamment lucides, même parmi les *prudents* dont nous avons précédemment parlé, pour analyser les besoins qui pouvaient résulter du mouvement introduit dans l'enseignement des mathématiques, incluant sa démocratisation. L'un des plus pénétrants fut sans doute Hans FREUDENTHAL, qui écrivait dès 1963 dans la revue l'Enseignement Mathématique (voir FREUDENTHAL, 1963, p. 29 et p.31) :

« Dans ces dernières années, l'accent s'est porté sur les programmes. C'est inquiétant cette activité des programmeurs. A maintes reprises, j'ai insisté sur les recherches franchement didactiques. Il est vrai que jusqu'alors, le résultat de mes efforts est assez maigre(…) Si l'on adopte l'idée de l'apprentissage de l'invention, la matière qui doit être analysée, avant qu'on ne construise un système d'enseignement, n'est plus la matière à enseigner, mais le processus d'invention de cette matière. »

Dans les propos de FREUDENTHAL, qui parle par ailleurs de *didactique*, terme employé comme substantif pour référer à la façon d'enseigner, on notera la présence de l'expression *recherches didactiques*, qui pointe en fait un domaine spécifique. Le développement de ces recherches qu'il souhaitait devait toutefois attendre que l'on ait tiré du structuralisme un parti supplémentaire : Un champ d'études peut avoir une spécificité sans nécessairement qu'il amène à s'intéresser à des objets qui lui soient propres, mais simplement en raison de la particularité des systèmes qu'il conduit à envisager. Par conséquent la didactique des mathématiques peut constituer un champ d'étude spécifique.

4.3. Mise en place de la didactique des mathématiques

Nous avions cité bien évidemment Guy BROUSSEAU à propos de situations. Mais tous ses travaux relèvent de l'assertion que la didactique constitue un champ spécifique. Peut-être déborde-t-il çà ou là des mathématiques (le *contrat didactique* par exemple n'est pas propre à l'enseignement des mathématiques), mais cela n'est-il pas imputable au cadre principal de ses recherches : l'enseignement du premier degré ? Cela remet-il en cause l'intitulé du présent paragraphe, mentionnant l'enseignement du second degré ? Nous ne le pensons pas : Si le moteur des recherches résulte bien pour nous des problèmes dans l'enseignement du second degré, la compréhension des phénomènes en jeu obligeait néanmoins à ne pas se contenter d'études à ce niveau, mais à remonter aux premiers apprentissages mathématiques L'école Jules Michelet, pour laquelle Guy BROUSSEAU avait réussi à obtenir un statut expérimental, constituait un terrain d'observation certes riche, mais très prenant, au détriment certainement de rédactions détaillées qui devaient n'être couchées sur le papier que plus tard. C'est ainsi que le premier fascicule de formation des maîtres rédigé par Guy BROUSSEAU (voir BROUSSEAU, 1970) sous le titre de *Mathématiques pour l'enseignement élémentaire* comporte dans sa table des matières un chapitre 21 à l'intitulé prometteur, *Didactique et pédagogie des mathématiques*, mais la rédaction du-dit fascicule s'achève à la fin du chapitre 20.

Le bulletin de l'APMEP (voir BROUSSEAU, 1972) a publié un peu plus tard sous forme d'article ce chapitre 20, *Processus de mathématisation*. Mais il faut consulter un document de 1975 (voir *L'analyse de la didactique des mathématiques*, communications d'un colloque Inter-IREM, 1975) pour que l'on puisse lire ce qu'annonçait le chapitre 21. Il s'agit de la communication numéro 3 : *Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?* Une lecture rapide de cette communication pourrait faire penser à une définition circulaire, car elle recourt au terme didactique qu'il s'agit de définir, mais il y a là en réalité une conséquence de la même polysémie signalée précédemment à propos de FREUDENTHAL. En faisant simplement disparaître cette ambiguïté, nous obtenons dans cette communication la définition de la didactique des mathématiques comme une *réflexion sur la finalité de l'enseignement, sur la nature du savoir visé, sur les méthodes d'acquisitions spécifiques aux enseignés, sur les objectifs et sur les conditions particulières, théoriques et pratiques, des activités pédagogiques dans l'enseignement de la discipline*. C'est certes quelque peu étiré (et encore, nous avons extrait ce passage d'un texte plus développé, car Guy BROUSSEAU souhaitait pointer aussi précisément que possible tout ce à quoi le didacticien devait prêter attention), mais une remarque ultérieure constitue en définitive une formulation alternative beaucoup plus concise. Nous la citons en nous contentant d'ajouter entre crochets, pour la compréhension, une précision extraite de la phrase précédente : *L'étude des relations [que l'on utilise pour fonder les choix et les décisions d'enseignement] est l'objet fondamental de la didactique en tant que discipline.*

Même un terminologue exigeant ne rejetterait pas une telle définition d'une discipline par ses objets d'étude. Il convient pour nous de la particulariser au cas de l'enseignement des mathématiques, moyennant quoi elle reste d'actualité. Une conséquence essentielle à tirer du structuralisme est que la didactique des mathématiques apparaît comme une discipline (ou une spécialité, si l'on veut être plus modeste) dotée d'autonomie, dès lors qu'il y a un système éducatif, avec des établissements et des classes (même virtuelles dans l'enseignement à distance) où l'on enseigne les mathématiques. Certes elle n'indique pas ce qu'il convient de prendre en compte, au contraire de la formulation précédente ou de celle qu'Alain BOUVIER a présentée (voir BOUVIER, 1992) : « *La didactique des mathématiques prend en considération les élèves, l'enseignant, les institutions et la discipline dans une situation où l'enseignant a, vis à vis des élèves, l'intention d'enseigner cette discipline.* » Pour ce qui est des méthodes, de l'ingénierie de la didactique des mathématiques, aucune de ces définitions ne fournit de précisions. De même, la nécessité de la prise en compte par la didactique des mathématiques de domaines mathématiques, psychologiques, linguistiques, sociologiques reste à préciser. Nous y reviendrons. Aujourd'hui en tout cas, il y a eu suffisamment de travaux en didactique des mathématiques pour qu'une définition très simple suffise.

Définition. La *didactique des mathématiques* est la discipline qui étudie l'enseignement des mathématiques.

Tout l'arrière-plan évoqué précédemment, qui devait être explicité à une époque de fondation, avec notamment la nécessité de se démarquer de nombreuses études dirigées vers des phénomènes intéressant cet enseignement, mais ne l'ayant pas directement comme objet, s'impose avec maintenant le support des nombreuses recherches publiées ces dernières décennies. Les articles de revues, comme Educational Studies in Mathematics ou Recherches en Didactique des Mathématiques, portent pour l'essentiel sur la didactique des mathématiques. Cela n'empêche pas que des précisions, par exemple méthodologiques, soient toujours de quelque utilité et c'est pourquoi nous leur consacrons plus avant un paragraphe.

4.4. Recherches engagées au niveau du collège

La discussion précédente laisse de côté une question assez naturelle : Si la demande socio-politique de réfléchir à l'enseignement des mathématiques est à relier à une généralisation de l'enseignement du second degré (le collège pour tous), qu'a-t-on fait en réponse à cette demande ? L'orientation forte des réflexions des IREM en direction du collège est une réponse, de même que le lancement en France d'opérations d'évaluation à ce niveau, dont certaines institutionnelles perdurent à l'échelle nationale – les évaluations CE2 – 6e –, mais il y a eu aussi un effort important d'équipes de recherches qui se sont mises en place avec des projets d'études didactiques.

Ce fut le cas pour l'équipe de Strasbourg, dont le lecteur ne m'en voudra pas de dire quelques mots, pour lesquels je fais effort d'objectivité dans la mesure où mon implication personnelle intervient. L'intérêt précis pour l'heuristique du mathématicien Georges GLAESER, la présence dans l'équipe du psychologue Raymond DUVAL, pour référer à leurs "étiquettes" de recrutement, amenaient très naturellement l'équipe à s'intéresser de près aux comportements des élèves lors d'une activité mathématique en situation scolaire. En plus des raisons précédemment évoquées, le collège nous paraissait constituer un secteur dans lequel des investigations s'imposaient pour des raisons scientifiques.

- Si la grande majorité de la population est *alphabétisée* et disons *numérisée*, il n'en est pas de même pour l'*algébrisation* (et des articles du volume 8 des Annales, consacré avec ce volume 9 aux communications du colloque Argentoratum 2002, montrent que les études se poursuivent actuellement sur cette question complexe),
- la *démonstration* mathématique, du point de vue de son enseignement, méritait un examen attentif. Georges GLAESER exprimait le souhait que tout élève puisse dans sa scolarité avoir l'occasion de vivre *son* miracle grec. Il ne s'agit pas en effet d'un acquis conceptuel au même titre que les

notions de fraction ou de parallélogramme, pour ne citer que ces deux exemples.

Or aussi bien l'emploi de l'algèbre que la présentation de démonstrations formalisées apparaissent normalement au niveau du collège. Certes, comme des études didactiques l'ont d'ailleurs montré (nous pensons par exemple aux recherches de Régine DOUADY, voir par exemple DOUADY, 1987), le raisonnement intervient plus précocement dans l'enseignement, de même que des désignations de valeurs par des lettres. Mais nous faisons ici référence à des apprentissages qui puissent être considérés comme à mettre en place pour une grande partie des élèves et pour ceux-là, c'est bien le niveau du collège, lors duquel les élèves traversent notamment les changements de la puberté, qui apparaît bien approprié.

Non sans tourner à l'occasion les regards en amont (l'école) ou en aval (le lycée), l'équipe strasbourgeoise avait donc décidé d'entreprendre des recherches sur l'enseignement des mathématiques au collège. Le programme de travail était très standard :

- des séances régulières de séminaire,
- des observations empiriques dans des classes,
- une investigation plus contrôlée, avec un appui sur des questionnaires d'évaluation.

Le séminaire était orienté d'une part sur l'étude d'ouvrages ou publications qui semblaient dignes d'intérêt à l'équipe, d'autre part sur le compte-rendu de travaux en cours. Les observations en classe étaient faites régulièrement dans les mêmes classes, avec l'accord des professeurs concernés, qui bénéficiaient de la préparation d'un certain nombre d'activités en échange de la présence d'observateurs ; autrement dit, observateurs et professeurs avaient un intérêt commun à voir comment les élèves allaient réagir aux activités préparées. Il n'y avait pas pour autant de statut expérimental qui ait été sollicité auprès de l'administration, seule l'autorisation de se rendre dans des classes était accordée à quelques observateurs désignés. Et ces classes se déroulaient en conformité avec les programmes de mathématiques en vigueur, sans dérogation particulière. D'une part, il convient de rappeler la multiplicité au collège des disciplines d'enseignement autres que les mathématiques, d'autre part, il paraissait important à l'équipe de recueillir des observations dans un environnement scolaire aussi "habituel" que possible, tout en sachant que la présence d'observateurs introduit forcément des perturbations (d'ailleurs plutôt bénéfiques pour les élèves concernés). Quant aux évaluations, je me rends compte aujourd'hui, avec le recul, qu'elles relevaient d'une catégorie qui n'apparaît pas dans le gros traité sur l'évaluation[5] élaboré par BLOOM, HASTINGS et

---

[5] BLOOM Benjamin S, HASTINGS J. Thomas, MADAUS George F, 1971, *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*, New York, Mc Graw Hill Book co.

MADAUS : il ne s'agissait en effet ni d'évaluation *formative*, ni d'évaluation *sommative* (du type examen), mais d'une évaluation qui peut être qualifiée de *descriptive*. A l'époque, nous parlions d'*enquêtes* ; le terme est parfaitement approprié mais il recouvre un éventail de pratiques très diverses dont certaines sans rapport avec nos centres d'intérêt.

En songeant aux *statistiques descriptive*s, nous estimons justifié de parler d'*évaluation descriptive*. De même que les premières se proposent de dégager les grandes tendances observables dans un corpus et au contraire les cas qui semblent singuliers, de même les évaluations que nous élaborions et analysions étaient destinées à permettre de repérer les *démarches de réponse* mises en œuvre pour certains traitements mathématiques, autant les démarches communes à beaucoup d'élèves que celles qui peuvent présenter des singularités. Notons qu'en remplissant une telle condition, une évaluation apparaît véritablement comme un instrument dans une recherche de didactique des mathématiques. La bibliographie indique un article de Raymond DUVAL et moi-même, 1976 ; on y trouve des notes sur le type d'évaluations descriptives pratiquées et les traitements mis en œuvre.

La présentation des travaux conduits à Strasbourg est à voir comme un exemple d'illustration, car nombreux furent les centres où se développèrent des recherches poursuivant des objectifs comparables. Rien que dans le cadre français, nous pouvons citer en particulier Grenoble, où une partie notable des réflexions de Colette LABORDE (voir en bibliographie LABORDE, 1982) s'est dirigée vers le collège, Paris, avec, exemple pris parmi bien d'autres, des réflexions sur l'articulation école-collège dont certaines soutenues par l'INRP, et Rennes, avec notamment les travaux de Régis GRAS qui contribuèrent à la mise au point du logiciel de traitement d'évaluations CHIC[6].

5. Quelques fondamentaux de la didactique des mathématiques

Un survol de publications récentes de didactique des mathématiques, non pas tant du point de vue de leurs objectifs et résultats mais seulement des modalités d'action, permet de dégager ce que l'on peut appeler des *fondamentaux*. Par ce terme il convient d'entendre les règles et pratiques à mettre en œuvre dans une recherche, quels que soient son sujet et sa problématique propre. Il est intéressant de les répertorier, afin de pointer un certain nombre de *routines* utiles au chercheur. Le chercheur, l'équipe ou le groupe qui entreprend une étude ou une expérimentation s'interroge évidemment au premier chef sur les sujets qui lui paraissent constituer le cœur de ses préoccupations. Et c'est bien ce qu'il convient de faire. Mais une recherche effective en didactique des mathématiques comporte nécessairement des aspects contingents, liés précisément à l'objet même de la discipline. Disposer de *routines* limite les obligations d'improviser lors du

[6] Voir un descriptif de ce logiciel à l'adresse URL http://www.ardm.asso.fr/CHIC.html.

déroulement d'une recherche, permet des prises de décisions qui ne risquent pas d'empêcher des analyses projetées ou d'invalider des conclusions à dégager. Nous essayons de dégager un lot de questions qu'il vaut la peine pour un didacticien ou une équipe de se poser, afin de faciliter l'élaboration de son agenda et la sélection de ses routines de travail.

5.1. Domaines connexes

Rencontre-t-on dans d'autres disciplines des concepts ou des résultats dont une réflexion que l'on engage pourrait profiter ?

Il est évident qu'autonomie n'est pas isolement. Dans les observations résultant d'une recherche en didactique des mathématiques, tout lien avec ce qui est établi dans d'autres domaines est en premier lieu à rechercher, ensuite à exploiter. Cela impose au didacticien de se tenir au courant des résultats publiés dans d'autres disciplines, en rapport de près ou de loin avec ses propres préoccupations. On pense au premier chef aux mathématiques, la discipline d'enseignement étudiée, et à la psychologie, dont le fonctionnement intellectuel des individus et son évolution s'inscrivent dans les objets d'étude. Mais les disciplines qui s'intéressent aux moyens d'expression sont tout aussi importantes. Dès le début de ses réflexions, quelqu'un comme Guy BROUSSEAU était de ceux qui avaient pris conscience de cette importance. Voici par exemple un extrait du premier chapitre du fascicule BROUSSEAU, 1970, rencontré au troisième paragraphe, après des paragraphes sur l'*importance du signe* et la *désignation* :

« Langages. Pour faire des mathématiques nous utiliserons et étudierons plus *ou moins trois langages :*

- *L'écriture de la langue usuelle. Les signifiants sont des mots ou des phrases. Ils sont obtenus par un assemblage de signes typographiques : les lettres,*
- *l'écriture mathématique formalisée. Une théorie mathématique utilise des signes graphiques, des lettres, des signes particuliers ($\in$, =, +) et des assemblages de signes simples. Ces signes et ces assemblages sont dénués de sens a priori, mais ils peuvent recevoir éventuellement une signification ou une autre suivant les situations dans lesquelles on veut appliquer la théorie,*
- *le langage schématique, figuratif ou non. Les signes graphiques élémentaires (des points colorés par exemple) sont groupés en configurations, elles-mêmes assemblées pour former des images qui peuvent avoir une signification. »*

De cette présentation, que les études réalisées depuis lors sur les registres d'expression amènent à conforter tout en la précisant, il ressort que le didacticien ne pourra pas être ignorant de domaines de linguistique et de sémiologie, notamment la graphique. (Dans un article de l'Encyclopedia Universalis intitulé

Graphique, Jacques BERTIN précise les variables visuelles à prendre en compte pour la représentation de variables suivant la nature de celles-ci : nominales, ordonnées ou quantitatives.) Récemment à propos de l'enseignement à distance, ou *e-Learning*[7], j'ai eu pour ma part à connaître de préoccupations en matière de terminologie (en français et anglais) relative à ce domaine.

5.2. Importations

Comment s'adresserait-on aux auteurs ou aux spécialistes d'une discipline pour justifier l'utilisation en didactique des mathématiques d'un de leurs concepts ou résultats ?

Lorsque des notions d'autres disciplines apparaissent utiles pour une étude de didactique des mathématiques, il importe de réfléchir à leur particularisation à l'enseignement des mathématiques, voire leur détournement. Considérons à titre d'exemple la notion d'*obstacle* telle qu'elle ressort des études de Gaston BACHELARD (BACHELARD, 1938). Cette notion résulte de considérations sur des expériences physiques. Le philosophe n'a d'ailleurs que peu envisagé les mathématiques, hormis dans son premier ouvrage couronné par l'Institut[8]. On peut certes voir intervenir le champ physique en didactique des mathématiques (voir par exemple la communication de Robert ADJIAGE dans le volume 8 de ces Annales), mais comme une composante parmi d'autres dans la construction d'un concept mathématique. Le problème de la *connaissance objective* se pose d'ailleurs pour les concepts mathématiques et doit donc être envisagé, implicitement ou explicitement, si l'on souhaite faire intervenir la notion d'obstacle en didactique des mathématiques ; on notera que par exemple en parlant d'*ostensifs*, Yves CHEVALLARD aborde un tel sujet, qui est par ailleurs développé dans le point de vue des registres Ainsi dans un exemple récemment paru, présentant un dialogue entre des élèves à propos d'une question de limite (voir BALACHEFF, 2002, p. 11-13, consultable sur Internet), Nicolas BALACHEFF analyse un type de conflits inter-registres qui peuvent surgir lors d'une activité mathématique et sur lesquels nous reviendrons dans le §6.5.

D'autres importations sont encore plus délicates, car elles portent sur des notions pluridisciplinaires, comme c'est par exemple le cas pour des concepts de logique. Là une discussion doit être engagée sous peine de confusions sans fin. Dans une discussion disons sur l'implication, le didacticien devra au moins sommairement confronter le point de vue de la logique (des propositions ou des prédicats) avec celui de psychologues et de linguistes (voir DUCROT, 1972). Entre une assertion courante comme *"Pour aller à New York, il suffit de 200 €"* et un théorème tel que *"Pour qu'une fonction f continue sur l'intervalle [a, b] s'annule*

[7] Consulter par exemple le site http://www.internettime.com/Learning/Eglossary.htm.
[8] Gaston BACHELARD, 1928, *Essai sur la connaissance approchée*, Paris, Vrin.

en un point de]a, b[, il suffit que f(a)f(b) < 0", il y a tout un monde et c'est ce monde qui est pris en compte par exemple dans la communication de Janine et Marc ROGALSKI, dans ce même volume des Annales.

5.3. *Consommation* de didactique des mathématiques

Quelles sont les contraintes, les conditions d'emploi, d'une méthode ou d'un résultat de didactique des mathématiques que l'on souhaite utiliser ?

Pour des importations, nous venons d'envisager la nécessité d'adapter ; une telle nécessité vous place *ipso facto* en situation de production. A l'intérieur de la discipline, une telle obligation ne s'impose pas à tout coup ; on peut référer directement à tel résultat ou telle méthode, ce qui correspond à une situation de consommation, celle d'un savoir antérieurement produit. Le cas n'est évidemment pas propre à la didactique des mathématiques. En mathématiques par exemple, on n'arrête pas d'utiliser des théorèmes établis. Il y a toutefois alors une règle d'emploi explicite, qui est de préciser que les hypothèses d'un théorème utilisé s'appliquent. Pour la didactique des mathématiques, il n'y a pas un garde-fou aussi solide, ce qui peut engendrer des risques de dérive ou même d'inconsistance. C'est un tel risque que craignait déjà André REVUZ (voir supra § 4) à propos des situations, mais les précisions théoriques apportées ensuite sur le sujet ont heureusement rendu ces craintes infondées. A propos de contrat didactique, de jeu de cadres, de registres de représentation, le lecteur pourra rencontrer çà ou là des emplois à la légère. Pour les deux derniers indiqués en particulier, les conséquences peuvent en être gênantes, dans la mesure où des élèves qui n'en peuvent mais risquent de se trouver embarqués dans des pratiques d'enseignement inefficaces ou mêmes nuisibles pour les apprentissages visés. Or si une déontologie doit comporter au premier chef de respecter des élèves, c'est bien celle du didacticien. Plus avant dans cet article, nous revenons sur le cas des représentations.

5.4. Ingénierie

Quelles phases distinguer et quels moyens envisager pour un projet d'expérimentation, de recherche ? Penser l'ingénierie de bout en bout dès le départ permet d'éviter bien des impasses ou des travaux inachevés. Un article (voir ARTIGUE, 1987) de Michèle ARTIGUE traite explicitement de l'ingénierie. Son propos déclaré est l'expérimentation dans des classes, mais il peut également être consulté au service d'autres formes de recherche. Ainsi la réflexion épistémologique à entreprendre sur le sujet d'une recherche est de toute première importance indépendamment de sa méthodologie. Et plusieurs formes de recherche nous semblent avoir leur place en didactique des mathématiques. L'une d'entre elles a été à l'origine de plusieurs des communications du colloque Argentoratum rapportées dans ce volume des Annales ou dans le volume précédent. Il s'agit de l'expérimentation ou observation *parallèle* au déroulement d'un enseignement : Un ou plusieurs élèves, éventuellement regroupés en binômes, sont spécifiquement suivis ou se voient proposer des activités propres, sans cesser pour autant d'appartenir à une *cohorte* d'apprenants qui suivent un enseignement déterminé. Les objectifs d'une telle approche peuvent être variés, aussi bien préciser un processus d'enseignement – apprentissage en cours (voir les indications données par Moncef ZAKI dans ce volume sur des travaux conduits à Fès) que réfléchir à des aides individuelles (voir par exemple l'article de Florence FAUVET dans le volume 8). Outre ces recherches parallèles à un enseignement, signalons l'investigation *a posteriori*, que par exemple la communication de Jean-Claude RAUSCHER dans ce volume illustre et dont on comprend l'intérêt notamment en formation des professeurs.

Le choix des outils d'analyse à employer fait également partie de l'ingénierie. Leur adéquation à la nature des données recueillies est primordiale. À côté des moyens de traitement généraux (pour l'analyse du discours, l'analyse de données, etc.) il existe des outils spécifiquement conçus pour des recherches didactiques, comme le logiciel CHIC déjà cité en fin du §4. Parmi les communications du colloque Argentoratum, les articles de Athanasios GAGATSIS, M. SHIAKALLI et A. PANAOURA dans le volume 8 et de Saddo AG ALMOULOUD dans ce volume 9 s'appuient sur des travaux pour lesquels ce logiciel a été utilisé.

5.5. Intérêt des participants

Pour chacune des personnes (élèves et/ou professeurs) impliquées dans un projet de recherche, a-t-on veillé à l'intérêt qu'elle peut y trouver ? L'ingénierie dont il était question précédemment prend en compte l'idée qu'un observateur perturbe forcément le phénomène qu'il observe. L'expérience montre d'ailleurs que nombre de recherches fructueuses en didactique des mathématiques ont été le fait de binômes chercheur – enseignant. Chacun des deux membres d'une telle équipe y a trouvé son intérêt. Même lorsqu'une recherche n'amène pas une coopération aussi régulière, le didacticien bénéficiera de conditions d'autant meilleures que le ou les enseignants impliqués auront un intérêt à prêter leur concours. Cet intérêt peut être effectif, sous la forme par exemple d'un certain allègement dans la charge habituelle de travail (préparations, enseignements ou corrections) grâce à l'ingénierie mise en œuvre, ou purement intellectuel, sous la forme de retours à même d'enrichir le savoir professionnel. A leur niveau d'engagement, simplement personnel, il en est de même des élèves impliqués. Il est par exemple frustrant pour eux de fournir des réponses écrites et de ne rien savoir ensuite de leur devenir. Certains chercheurs pratiquent une double correction dans ce but : un relevé simple des réponses considérées comme exactes pour retour aux élèves interrogés, un relevé détaillé pour les analyses effectuées pour la recherche.

6. Regards didactiques sur la présentation de contenus mathématiques

Dans un scénario d'enseignement, la désignation des contenus mathématiques en jeu tient, si l'on peut dire, un des premiers rôles par ordre d'entrée en scène aux yeux de l'enseignant ou du didacticien. C'est à sa suite que les options pédagogiques du professeur et les réactions d'élèves occupent le devant de la scène. Et le fait d'envisager des contenus mathématiques pour l'enseignement conduit à les éclairer en quelque sorte de différentes manières en les plaçant sous différents projecteurs. L'éclairage épistémologique est certainement parmi les premiers qu'il convient d'envisager. Il est clair que pour des propositions d'enseignement touchant à un concept mathématique, il importe de connaître ce qui a pu amener la communauté mathématique ou plus généralement scientifique à l'introduire ou le développer.

L'analyse en termes de registres de représentation, intervenant à propos d'acquisitions conceptuelles ou dans la catégorisation de traitements d'énoncés, fournit un autre de ces éclairages. A la voir toute faite sur un exemple approprié, convenablement traité, elle paraît simple. Mais elle est plus exigeante qu'on ne l'imagine souvent. Le modèle cognitif de la représentation d'un objet ou d'un concept mathématique que Raymond DUVAL propose (cf. DUVAL, 1995, p. 67) résulte de l'interaction d'au moins deux registres sémiotiques. L'erreur didactique serait alors d'inférer que ce modèle s'applique dès lors qu'un même objet apparaît dans deux registres sémiotiques différents, en omettant de vérifier les contraintes dues à la *fonction d'objectivation* (expression de Raymond DUVAL) attendue du modèle. Tant le fonctionnement séparé des registres sémiotiques considérés que les conversions entre ces registres sont concernés.

6.1. Objectivation par des registres de représentation différents ?

Pour un modèle *opératoire* de la représentation, Raymond DUVAL présente un schéma (cf. DUVAL, 1995, p. 65), adapté de F. BRESSON, centré sur la *fonction de traitement*. Ce schéma met côte à côte un dispostif matériel avec son protocole d'utilisation et une maquette, c'est à dire sa représentation et les traitements auxquels on peut la soumettre. L'article de Raymond DUVAL présenté dans le volume 8 de ces Annales (cf. *Annales de didactique et sciences cognitives*, 2003) envisage la désignation et la visualisation, lesquelles fonctionnent souvent selon ce dernier schéma. Dans ce même volume 8 des Annales, Robert ADJIAGE rapporte de son côté une expérience d'introduction des nombres rationnels, qui s'appuie sur la séparation et l'articulation du champ physique et du champ mathématique. Dans une première phase, par exemple à propos d'un problème de mélange, on attend des élèves qu'ils se représentent l'expérience physique (de la réalisation du mélange jusqu'au contrôle par exemple de sa saveur s'il s'agit d'une boisson). Il y aura donc une activité de désignation ou de visualisation, fonctionnant selon un schéma centré sur la fonction de traitement. Il en était de même, jusqu'à la phase de formulation, dans une expérience à l'école que Guy BROUSSEAU avait pilotée, expérience mettant en jeu l'épaisseur de feuilles de papier, rappelée dans la communication citée de Robert ADJIAGE. Pour bon nombre de concepts mathématiques de base, le champ physique intervient ainsi dans la construction à côté de registres sémiotiques différents.

Il n'apparaît pas de risque de confusion lorsqu'il intervient une expérience physique et une seule représentation de cette expérience, s'appuyant sur les mêmes perceptions de base qui permettent d'*identifier les objets* en présence et de repérer les *coïncidences* et les *simultanéités*. Mais l'existence de deux représentations peut conduire sans autre forme de procès à conclure qu'il intervient deux registres pouvant avoir une fonction d'objectivation. Or il est tout aussi possible de se trouver alors simplement devant un schéma de deux représentations centrées sur la fonction de traitement, que devant un schéma combinant le centrage sur la fonction de traitement et le centrage sur la fonction d'objectivation.

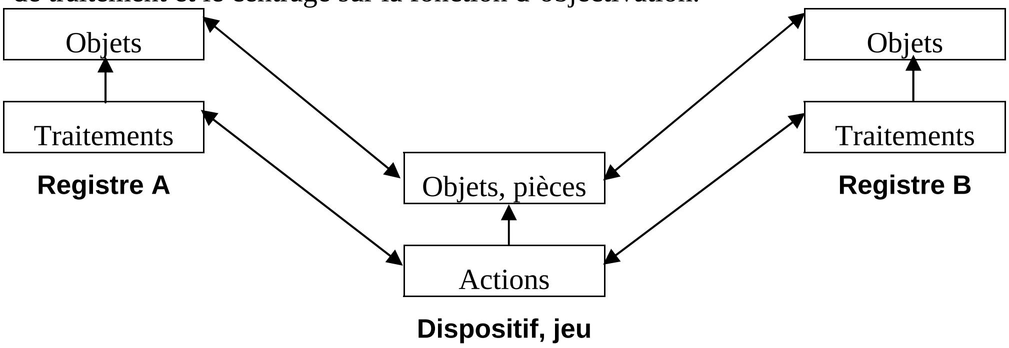


Figure 1 : Schéma de visualisation ou description dans deux registres sémiotiques, centré uniquement sur la fonction de traitement.

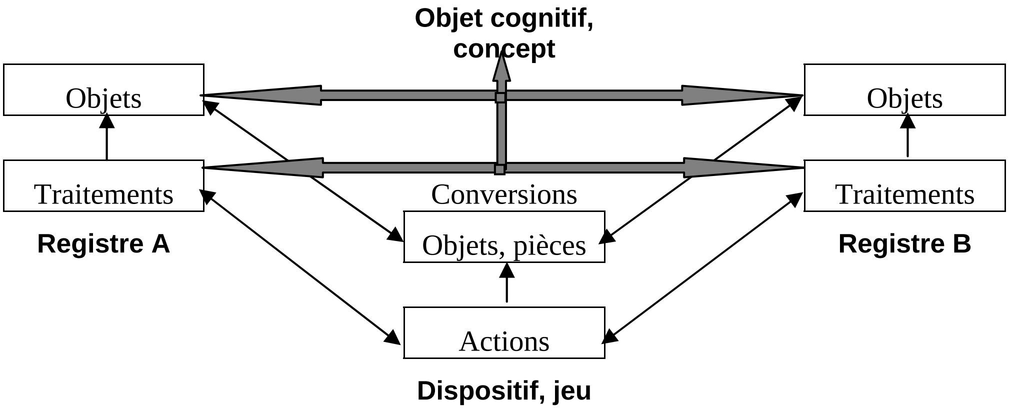
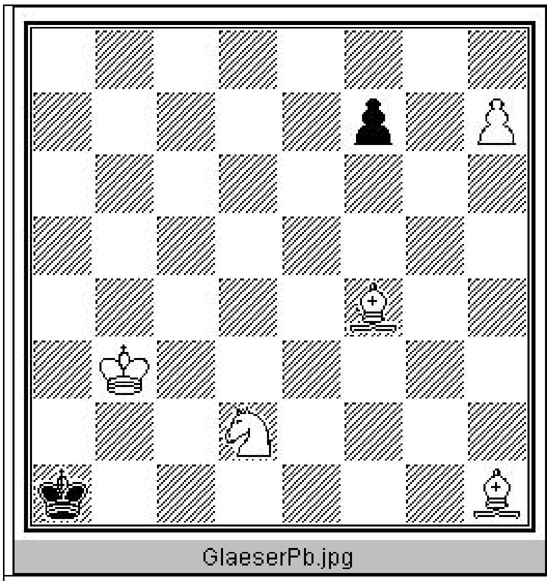


Figure 2 : Modèle de représentation dans deux registres sémiotiques, centré sur les deux fonctions de traitement et d'objectivation.

Seule la dernière situation est adaptée à la détermination d’un concept ou d’un objet mathématique. Et la distinction entre les deux modèles n’est pas aussi criante en pratique qu’elle n’apparaît sur les figures. En effet, puisque les traitements dans les deux registres envisagés correspondent à des actions sur les objets matériels ou les pièces en jeu, ils se correspondent nécessairement entre eux. Et de même pour les objets. Mais ces correspondances ne sont pas nécessairement des *conversions*. Il est donc tout particulièrement important de rappeler les contraintes concernant *traitements* et *conversions*[9]. La présentation de quelques exemples typiques nous paraît pour ce rappel préférable à un exposé systématique.

6.2. Deux représentations isomorphes d’un jeu : les échecs

Considérons comme premier exemple le jeu d’échecs, souvent rapproché des mathématiques car c’est un jeu à information complète, donnant de plus lieu comme les mathématiques à la résolution de *problèmes*. On peut représenter une position d’échecs soit par un diagramme, qui est une schématisation de la vue du jeu à ce moment, soit au moyen d’une notation.

<table>
<tr><td>
</td><td>La même position de jeu d’échecs sous forme de diagramme (à gauche) et en notation dite algébrique (ci-dessous).

Blancs : Rb3, Ff4 et h1, Cd2, Ph7.
Noirs : Ra1, Pf7.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Un problème à condition : Le mat <u>doit</u> être donné par le fou qui est placé sur le diagramme en h1 ; mat en trois coups.</td></tr>
</table>

Figure 3 : Un diagramme d’échecs et sa notation.

[9] Sur son schéma, Raymond Duval n'avait pas représenté de correspondance entre traitements, pour bien marquer que chaque registre dispose de ses traitements ; il indiquait toutefois les cas de congruence ou d'équivalence calculatoire, qui nous amènent ici à envisager des conversions entre les traitement dans les registres différents.

Dans la notation dite *algébrique*, les cases de l'échiquier sont désignées par un couple constitué d'une lettre, de a à h pour les colonnes, et d'un chiffre, de 1 à 8 pour les lignes ; la case inférieure gauche se note ainsi a1 ou la supérieure gauche a8. Pour plus de précisions, voir dans l'Encyclopedia Universalis l'article *Echecs (jeu d')*, qui a été rédigé par François LE LIONNAIS, lequel avait dirigé par ailleurs la rédaction du remarquable Dictionnaire des Mathématiques[10] (date de la première édition : 1979). Nous prétendons que le diagramme et la notation ne conduisent pas pour le jeu d'échecs à des registres de représentation indépendants.

Pour illustration, nous avons présenté un *problème d'échecs à condition*, créé par Georges Glaeser. Pour les connaisseurs du jeu, signalons au passage que ce problème est typique de l'esprit de Glaeser, épris à la fois de logique et de *pensée latérale*. Ils pourront mettre leur esprit d'analyse à l'épreuve en tentant de le résoudre (on notera que la condition exclut le mat trivial en un coup). Mais notre propos ici est autre : nous ne disons pas que deux registres distincts sont en présence, en raison de la *parfaite correspondance* de chacun des deux modes de représentations avec les déplacements de pièces sur un échiquier réel. En effet, la notation ne conduit à aucun traitement qui ne se reporte sur le diagramme ; la même chose s'exprime de deux manières certes différentes, mais parfaitement interchangeables. On pourrait faire une suite de diagrammes représentant les positions après les coups successifs des blancs et des noirs. Comme cela prendrait une place considérable, on préfère recourir par économie à la notation algébrique pour décrire les coups. Par exemple, pour le diagramme présenté, on pourra écrire 1 : Ra3, Pf5, si l'on veut dire que le premier coup des blancs à partir de la position donnée sera d'amener leur roi (qui était en b3) en a3 et que les noirs répliquent en déplaçant leur pion de deux cases (de f7 en f5) ; on continuera de même pour les coups ultérieurs. Les habitués du jeu sont entraînés à visualiser mentalement sur les 64 cases son évolution, les amateurs moins expérimentés la suivent en reportant les coups sur un échiquier.

6.3. Droite graduée et opérations (addition et soustraction des entiers)

A propos des premières opérations arithmétiques sur les entiers naturels, voyons l'utilisation d'une *règle à additionner*. Ceux qui ont pratiqué la *règle à calcul* reconnaîtront une version simplifiée de cet outil : La *règle à additionner* représentée comporte une graduation inférieure fixe, une graduation supérieure mobile et un curseur (la flèche sur les figures). Outre la possibilité d'une réalisation matérielle grâce à deux règles graduées coulissant en regard l'une de l'autre, un logiciel comme CABRI permet aujourd'hui une réalisation parfaitement opératoire.

[10] Alain BOUVIER, Michel GEORGE, François LE LIONNAIS, 1993 (4e édition mise à jour et augmentée), *Dictionnaire des Mathématiques*, Paris, PUF.

Nos illustrations (malheureusement statiques sur le papier) résultent de son utilisation.

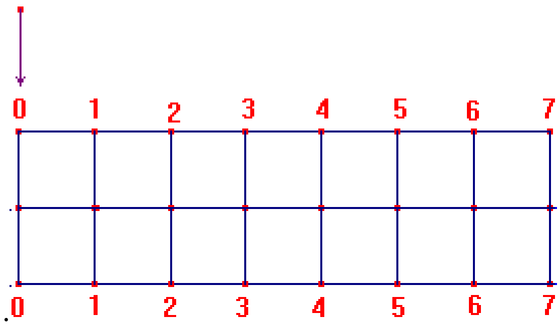


Figure 4 : Vue (partielle) d'une *règle à additionner* en position initiale.

Nous prétendons que la *règle à additionner* procure un registre différent de l'écriture arithmétique. Pour s'en convaincre, il suffit de noter que la position opératoire qui est représentée sur la figure 5 correspond aussi bien à l'égalité

$$3 + 4 = 7$$

qu'à l'égalité

$$7 - 4 = 3.$$

De plus, la vision n'est pas seulement concentrée sur la flèche, ce qui permet d'apercevoir sur la même représentation une égalité comme 3 + 7 = 10 ou d'autres encore, que des déplacements de la flèche mettront explicitement en évidence.

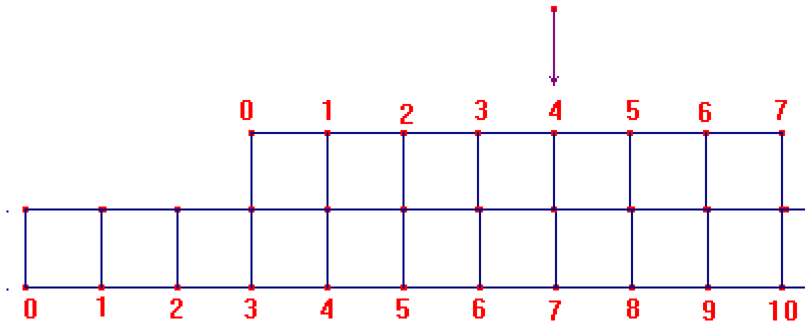


Figure 5 : Vue de la même *règle à additionner* en position opératoire.

Certes, il y a bien des correspondances : faire « 3 plus quelque chose », c'est amener le 0 de la graduation supérieure en regard du 3 de la graduation inférieure. Mais « 3 plus quelque chose » précisément n'a pas de pendant en écriture arithmétique. Inversement, je ne peux pas traduire une égalité comme

$$3 + 2 + 5 = 10$$

par un positionnement de la règle avec son curseur. Pour n'opérer qu'avec la seule règle, sans notation de résultat intermédiaire, deux placements successifs sont nécessaires : Le premier consiste à amener le 0 de la graduation supérieure en regard du 3 de la graduation inférieure et la flèche en regard du 2 de la graduation supérieure ; le second consiste à amener alors le zéro de la graduation supérieure en regard de la flèche et ensuite cette flèche en regard du 5 de la graduation supérieure. **Conclusion** : La règle permet d'effectuer une suite d'additions, mais seul le résultat de la dernière reste visible au terme du dernier déplacement.

Cette imperfection dans les correspondances, cette absence d'algorithme canonique de passage d'une représentation à l'autre, sont caractéristiques de *conversions*, selon le terme retenu par Raymond Duval. Et ce sont ces *conversions* qui mettent en évidence que deux ou plusieurs *registres de représentation* peuvent interagir dans un modèle centré sur la fonction *fonction d'objectivation*.

Par opposition, considérons les représentations de ces mêmes opérations dont l'article de Athanasios GAGATSIS, M. SHIAKALLI et A. PANAOURA, dans le volume 8 de ces Annales (*Annales de didactique et sciences cognitives*, 2003), a pointé les difficultés. La figure 4 illustre l'égalité déjà considérée, cette fois-ci sur une droite graduée avec emploi d'une flèche curviligne de déplacement.

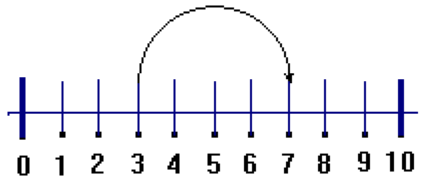


Figure 6 : L'égalité 3 + 4 = 7 illustrée par un déplacement sur une droite graduée.

Ici la correspondance entre l'égalité et son illustration est canonique. Par rapport à la représentation précédente, on notera que c'est à la représentation complète que l'addition est associée : la flèche curviligne part de 3 et aboutit quatre graduations plus loin. On remarquera surtout que la flèche curviligne n'est pas issue d'une lecture directe, mais suppose un comptage lié au second terme de l'opération, un surcomptage comme dirait Jean-Paul FISCHER (voir FISCHER, 1992). Et deux flèches curvilignes successives, l'origine de la seconde étant l'extrémité de la première, sont associées à un enchaînement d'opérations, tel que 3 + 2 + 5 = 10.

Discussion

Pour les opérations arithmétiques, addition et soustaction, les déplacements fléchés sur une droite graduée ne constituent pas un registre de représentation indépendant du registre numérique opératoire. C'est d'ailleurs pourquoi le terme d'illustration paraît plus approprié dans ce cas. Et l'acquisition de l'addition et de la soustraction des entiers naturels est la condition de compréhension de cette illustration.

Il nous paraît clair que c'est bien ce qui ressort en définitive des résultats rapportés dans l'article déjà cité de Athanasios GAGATSIS, M. SHIAKALLI et

A. ANAOURA. Entendons-nous bien : Il ne s'agit pas de nier que, pour des conditions appropriées, la doite graduée donne lieu à un registre de représentation spécifique. Dans le cas envisagé, nous avons vu par exemple qu'un *dédoublement* permet effectivement d'obtenir des traitements suffisamment autonomes.

Notons aussi que l'attention ne doit pas seulement se porter sur les résultats apparents, mais aussi sur les conditions de production d'une représentation. Supposons par exemple, pour le cas des déplacements fléchés sur une droite graduée, que l'on dote un logiciel des deux possibilités suivantes :

- Tracer une flèche curviligne d'origine 0 et d'extrémité un entier quelconque,
- déplacer (par translation) une telle flèche pour amener son origine en un entier quelconque.

Nous aurons alors un fonctionnement très proche de celui de la *règle à additionner*, évitant par exemple de devoir recourir à une activité de comptage. Mais il nous paraît didactiquement moins productif pour deux raisons :

- Une réalisation matérielle concrète peut être envisagée (par exemple en utilisant du papier calque), mais elle est plus compliquée et artificielle que de faire glisser en regard l'une de l'autre deux graduations identiques. L'analyse épistémologique met d'ailleurs en évidence la place prise dès le début des mathématiques (voir les *Eléments* d'Euclide, livre 5) par des opérations de report correspondant à un tel glissement,
- la reconnaissance visuelle de la translation entre deux flèches curvilignes d'origines différentes ne résulte pas d'une perception visuelle immédiate, contrairement au déplacement d'une règle graduée.

6.4. Ecriture de nombres en système décimal et en système binaire

Regardons à présent le cas de deux registres sémiotiques dans une situation où le rôle de l'environnement physique est limité à la logistique des registres, c'est à dire la production des objets et les traitements : Examinons l'écriture des nombres en numération de position, soit en système binaire, soit en système décimal.

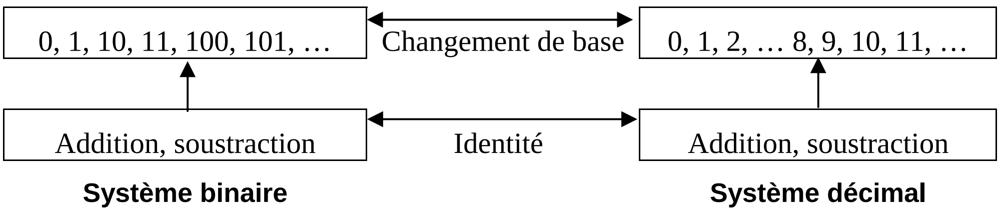


Figure 7 : Deux registres isomorphes pour la représentation des entiers.

Commençons par nous intéresser aux seuls entiers naturels. En base deux, les seuls chiffres sont 0 et 1 ; lus de droite à gauche, ils représentent successivement les unités, les paires, les quatuors, etc. Les premiers entiers sont ainsi zéro : 0, un : 1, une paire : 10, une unité et une paire : 11, un quatuor : 100, etc. En base dix, les chiffres sont les chiffres usuels de 0 à 9 et, lus de droite à gauche, ils représentent successivement les unités, les dizaines, les centaines, etc. Pour ces entiers et les opérations d'addition et de soustraction, on peut expliciter une correspondance complète entre les deux systèmes : passage de l'une à l'autre écriture des entiers par changement de base de numération, conservation des opérations. Signalons qu'il existe deux algorithmes pour changer de base : celui de la transformation chiffre par chiffre et celui des restes successifs dans la division euclidienne par la base de numération. On peut choisir indifféremment l'un ou l'autre ; en raison de la plus grande familiarité avec l'écriture décimale, on utilisera à la main plutôt le premier algorithme pour passer de l'écriture binaire à l'écriture décimale d'un entier et plutôt le second pour le passage inverse.

Par exemple, si je veux connaître l'écriture décimale du nombre dont l'écriture binaire est 101 000 111, j'effectue une correspondance chiffre par chiffre, suivie d'une addition.

Ecriture	1	0	1	0	0	0	1	1	1
Valeur	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Le nombre recherché est donc : 256 + 64 + 4 + 2 + 1 = 327.

Réciproquement, si je veux écrire dans le système binaire le nombre dont l'écriture décimale est 327, j'écris successivement

$327 = 2 \times 163 + 1$, $163 = 2 \times 81 + 1$, $81 = 2 \times 40 + 1$,
$40 = 2 \times 20 + 0$, $20 = 2 \times 10 + 0$, $10 = 2 \times 5 + 0$,
$5 = 2 \times 2 + 1$, $2 = 2 \times 1 + 0$, $1 = 2 \times 0 + 1$.

Son écriture binaire, formée des restes lus en remontant ces égalités, sera donc 101 000 111. On a bien retrouvé le nombre précédent, ce qui est rassurant ! Aux esprits chagrins qui s'offusqueraient de l'emploi de la division euclidienne alors qu'on est censé travailler seulement sur l'addition, faisons remarquer que c'est un cas simple qui est en jeu ici : la dissection. De même en géométrie, le pliage est une opération qui donne un sens particulier à la partition en deux d'un segment : on ne mobilise pas le théorème de Thalès en référant à un milieu.

Intéressons-nous à présent aux quatre opérations et aux nombres à virgule dans l'un ou l'autre des deux systèmes considérés. Pour le système décimal, on parle des nombres décimaux, pour le système binaire, des nombres dyadiques. On peut dire de manière synthétique (à des professeurs, pas à des élèves non préparés) qu'aussi bien pour p égal à deux (sytème binaire) que pour p égal à dix (système décimal), les objets considérés sont de la forme :

$$x = \sum_{n \geq m} a_n \times p^n \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_n \leq p - 1 \text{ et } a_m \neq 0,$$

tous les a_n étant nuls au delà d'un certain rang puisque l'écriture désigne un nombre. Le problème qui va alors surgir tient au fait que l'on n'obtient pas les mêmes objets dans les deux systèmes. (Il arrive que le recours à l'informatique fasse apparaître des conséquences pratiques d'un tel phénomène, à cause d'obligations de troncature.) Précisément, tout nombre dyadique se trouve être un décimal (parce que dix est divisible par deux), mais la réciproque est fausse : Ainsi, il faut un développement illimité dans le système binaire pour représenter le nombre décimal 0,2. Ce nombre exprime en effet la fraction « un cinquième » (la division de 1 par 5 en écriture décimale permet de s'en assurer) et voici en système binaire le début de la division de 1 par 101, écriture binaire du nombre cinq :

```
1000 |101
 101 |0,0011
  110
  101
    1
```

Ayant obtenu un reste égal à 1, on est sûr que le processus va se répéter indéfiniment, comme cela se produit par exemple dans le système décimal de numération, quand on effectue la division de 1 par 3 pour tomber sur le développement illimité 0,333… Ici on obtient le développement illimité 0,001100110011… dont la période est le groupe 0011.

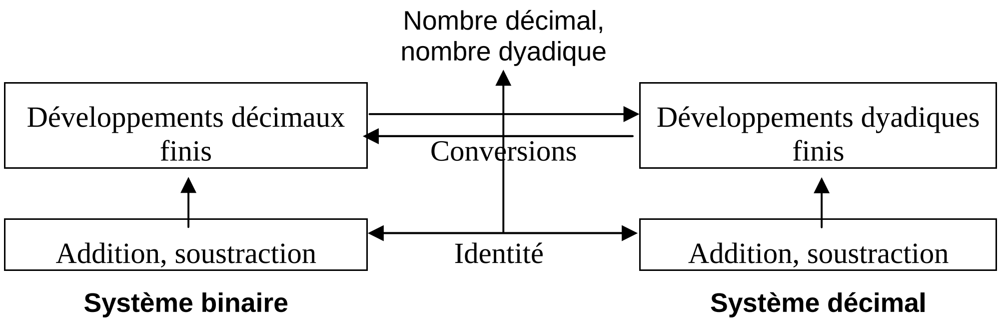


Figure 8 : Une objectivation du nombre décimal et du nombre dyadique.

Discussion : Le changement qui s'est introduit quand on est passé de l'écriture des entiers à celle de nombres fractionnaires est mince. Seule apparaît une *imperfection* dans le sens de la transformation d'un développement décimal en développement dyadique, obligeant par exemple à tronquer ou arrondir des résultats. Mais cette *imperfection* est fondamentale pour que l'on soit en présence d'une conversion. Elle nous dit en effet que l'on n'exprime pas exactement les mêmes choses dans le registre de l'écriture décimale et dans celui de l'écriture binaire. Par conséquent, <u>un changement de base de numération n'a pas d'intérêt conceptuel pour les opérations sur les nombres entiers ; au contraire, il peut contribuer à la conceptualisation de la</u>

notion de nombre décimal. Quand on sait que la très grande majorité des adultes d'aujourd'hui ignore ou méconnaît cette notion de nombre décimal, on voit se présenter une possibilité d'enseignement intéressante, en plus des conversions entre écritures fractionnaires et décimales.

6.5. Aperçu d'exploitations en didactique des mathématiques

Les exemples qui viennent d'être exposés ont été choisis en raison de leur caractère minimaliste. Certes, des concepts un peu plus avancés conduisent à des situations un peu plus complexes. Ainsi, les exemples choisis n'ont pas fait apparaître de *conversions* entre traitements dans des registres différents, alors qu'il en intervient dans des situations comme par exemple faire passer une droite par le point d'intersection de deux droites (registre graphique) et combiner linéairement les équations des deux droites (registre algébrique). Pour autant nos exemples constituent de notre point de vue un ensemble représentatif des questions rencontrées en didactique des mathématiques provenant des registres sémiotiques.

Conclusion d'ensemble à propos de registres différents pour un même contenu : Ce n'est pas seulement parce qu'un même contenu est l'objet de désignations distinctes ou de visualisations diférentes que l'on est en présence, pour ce contenu, de registres de représentation distincts. Cette présence suppose des fonctionnements (traitements intra-registre) autonomes et l'existence de *conversions* (traitements inter-registres) ; Raymond DUVAL a souligné que les conversions doivent avoir un caractère incomplètement algorithmique. Par rapport à une acquisition mathématique, une telle indépendance est fondamentale. Inhérente à la nature même des objets mathématiques, elle est aussi indispensable à une *double programmation*, de traitement et de contrôle, qu'un modèle de fonctionnement mathématique humain met nécessairement en jeu (cf. PLUVINAGE, 1983, et BALACHEFF, 2002).

Les analyses auxquelles les considérations de registres conduisent interviennent à de multiples occasions :

- élaboration de scénarios en vue de l'introduction de contenus mathématiques dans l'enseignement,
- détermination de la complexité d'énoncés mathématiques, en tenant notamment compte de la congruence ou non d'expressions dans des registres différents à mobiliser pour la compréhension puis la résolution,
- formulation d'hypothèses sur certaines démarches d'élèves observées lors d'une activité mathématique.

Dans ce texte, nous avons abordé le premier point. Pour le second, nous renvoyons le lecteur aux études effectuées par Raymond DUVAL (cf DUVAL, 1995, et *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 2003). Pour le troisième, un cas d'une importance particulière est la résolution de conflits, lorsqu'une contradiction surgit en raison de distorsions entre des expressions dans deux registres.

Dans sa thèse, Fernando HITT (HITT, 1978) avait déjà observé les effets possibles du repérage de contradictions. Une nette contradiction inter-registres est rapportée dans BALACHEFF, 2002, à propos du concept de longueur : Une suite de courbes (chacune constituée de demi-cercles de même rayon, voir la figure 9) “s’écrase” sur un segment [A, B] tout en conservant à chaque étape du processus une longueur totale constante, égale à $\frac{\pi}{2} \times AB$. Un élève qui, en l’occurrence, ne mobilise pas plusieurs registres reste bloqué sur le problème apparent que pose alors la longueur du segment, tandis que ses condisciples résolvent le paradoxe.

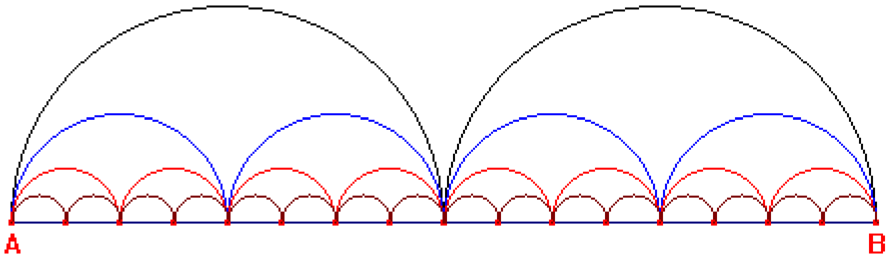


Figure 9 : Suite de courbes formées de demi-cercles *tendant* vers le segment AB.

Par ailleurs, plusieurs des communications présentées dans le volume 8 de ces Annales (cf. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 2003) mobilisent des registres différents pour des analyses de réactions d’élèves. Nous pensons en particulier aux représentations dessinées par des élèves qui sont reproduites dans l’article de Pierre BELMAS et à de savoureux dialogues franglais rapportés par Luis RADFORD, entre des élèves canadiens.

7. Programmes de travail en didactique des mathématiques

On a vu l’intérêt d’un fondement théorique pour l’examen de productions destinées à l’enseignement. Des principes d’économie, tels que ceux auxquels Yves CHEVALLARD se rattache volontiers (CHEVALLARD, 1985), peuvent s’avérer féconds dans cette voie. La méthode utilisée est alors une relecture, ou réinterprétation, de présentations ou de pratiques mathématiques à la lumière des fondements théoriques retenus. Ainsi, Yves CHEVALLARD énonce-t-il par exemple que la *théorie anthropologique du didactique* (TAD) situe l'activité mathématique dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales ; notamment, il en déduit qu'un des principaux moteurs de la TAD est la *problématique écologique*. Ce type de réflexion exige un talent certain, car les omissions, voire les glissements, constituent des pièges dans lesquels il est facile de tomber. Il s’agit en effet de respecter scrupuleusement les développements mathématiques considérés dans une conformité rigoureuse avec les principes invoqués. Pas évident !

En tout état de cause, un objectif qu'il convient d'assigner à la didactique est la description du fonctionnement général propre aux mathématiques. Cela suppose des analyses de productions, non seulement celles destinées à l'enseignement, mais celles qui émanent de l'enseignement, autrement dit des discours (qui peuvent être oraux ou écrits) d'élèves ou d'étudiants, comme nous en avons vus précédemment.

7.1. Suivi d'échanges entre élèves, notamment suivi de binômes

La situation standard d'enseignement n'est pas la seule qui peut amener de telles productions. Par exemple, Colette LABORDE s'était appuyée dans sa thèse déjà citée (LABORDE, 1982) sur des jeux d'échanges de messages décrivant des figures géométriques (en réalité, les récepteurs auxquels les binômes d'émetteurs étaient censés s'adresser n'existaient pas nécessairement ; ce qui importait à Colette LABORDE était la production de textes pour des destinataires). Le suivi pendant une certaine durée de binômes (la plus petite unité suscitant des échanges oraux) attelés à des tâches qui peuvent être variées, à l'instar de ce que les membres du Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques de Fès (Maroc) ont largement pratiqué, est particulièrement intéressant en vue d'une telle description. La lourdeur du travail de recueil des données dans ce contexte est encore considérable ; nous souhaitons que des enregistrements permettant des retranscriptions automatisées puissent l'alléger dans un avenir proche.

7.2. Sondages et entretiens

La recherche de l'origine de difficultés est un prolongement assez naturel de l'évaluation et constitue ainsi un objectif d'études didactiques. Il peut reposer sur des études cliniques ainsi que sur des enquêtes orientées vers des questions précises et adressées à des échantillons appropriés. Il n'y a d'ailleurs pas que des traitements mathématiques qui peuvent être proposés aux sujets interrogés. Dans des démarches relevant de la technique des sondages ou de celle des entretiens, il est possible de recueillir les opinions de sujets sur l'enseignement qu'ils ont suivi et l'activité mathématique qui leur a été demandée. C'est ainsi que nous avions conduit, à la demande de la Société Mathématique de France, une enquête intitulée "Les Maths et Vous" et qu'un chercheur comme Jean-Claude RAUSCHER de l'IUFM d'Alsace, (Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 2003, vol 8) procède à un certain nombre d'investigations. Notons au passage l'importance que peut avoir l'attitude devant les mathématiques, susceptible d'être source de difficultés énormes en raison d'une incompréhension globale de l'activité intellectuelle sollicitée. Un cas d'échec électif en mathématique (*le cas Gaël*) a ainsi été décrit par Guy BROUSSEAU, dans une étude postérieure de quelques années à celle de 1972 citée en bibliographie.

Pour des difficultés très spécifiques, la didactique peut apporter des propositions concrètes. Ainsi, une thèse de Mouloud ABDELLI (1985) à Strasbourg portait sur les apprentissages mathématiques d'enfants sourds ou malentendants. A l'époque le mot d'ordre dans l'enseignement dirigé vers ces enfants était de tout faire passer par l'oralisation. Inutile de dire que le temps nécessaire dans ces conditions pour la compréhension du moindre énoncé était rédhibitoire pour des apprentissages mathématiques même courants. Il était clair que prendre appui sur les capacités de repérage visuel de ces enfants pour un accès au sens ne pouvait qu'être plus efficace, ce qui est évidemment apparu dans la thèse. Personnellement, j'avais été à l'époque personnellement choqué de constater le manque d'efficacité des pratiques pédagogiques avec ces élèves et j'avoue être soulagé de savoir que la langue des signes ou le LPC (langage parlé complété) ont maintenant droit de cité dans leurs écoles.

7.3. Expérimentations ponctuelles et classes expérimentales

La question des compétences nécessaires à tel ou tel type de traitement, notamment mathématique, est d'actualité dans le système éducatif français. La constitution de groupes nationaux de réflexion sur ce sujet n'est d'ailleurs pas forcément la manière la plus efficace de l'approfondir. Il conviendrait plutôt, pour certains de ses aspects fins, de définir des programmes de recherche. Peut-être le monde politique souhaite-t-il des réponses plus rapides que celles qui peuvent être apportées par la recherche. La question conduit en effet à procéder à de véritables expériences, comme celles qui sont décrites par Jean-Paul FISCHER, 1992. Car ce n'est pas seulement la capacité ou non de procéder à certains traitements qui est en cause dans la notion de compétence, c'est aussi leur coût (pour les effectuer bien ou mal). Et cela peut exiger par exemple des mesures de temps de réaction suffisamment précises, aujourd'hui à la portée d'un chercheur en didactique pouvant mettre un ordinateur à la disposition des sujets de l'expérience.

La classe, complète ou répartie en groupes, et son fonctionnement est bien évidemment l'objet des préoccupations de l'institution et donc la source de demandes adressées aux didacticiens. Paradoxalement, il est difficile, du moins dans le système français, de réunir durablement des conditions correctes d'expérimentation dans des classes. Ainsi le fonctionnement de l'Ecole Michelet à Bordeaux n'a jamais été une affaire simple pour Guy BROUSSEAU. Notre objectif n'est pas l'analyse des obstacles d'origines variées, institutionnelles, déontologiques ou autres. Ne dénigrons tout de même pas trop notre système : chez nos voisins allemands, il a longtemps été quasiment exclu de pouvoir simplement se livrer à des observations dans des classes. Ce fait a d'ailleurs pu contribuer au caractère fortement livresque des études didactiques effectuées, avant que le secteur intitulé *empirische Forschung* ne connaisse un certain développement. Une pratique qui a été abondamment mise à profit en France est celle de *tandems* constitués d'un chercheur et d'un enseignant, qui s'associent pour préparer ensemble des séquences scolaires expérimentales, mener et observer leur déroulement et enfin analyser leurs résultats (Note : ce sont parfois, des équipes de trois ou quatre personnes au lieu de *tandems* qui ont réalisé de tels programmes d'expérimentation). Citons à ce titre Régine DOUADY pour le montage de ses jeux de cadres, avec notamment les activités autour de la recherche de la racine carrée de 27 (DOUADY, 1987), ainsi que Nicolas BALACHEFF, avec Bernard CAPPONI, pour plusieurs expérimentations de l'usage de l'outil informatique, notamment le tableur (CAPPONI et BALACHEFF, 1989). Plus récemment, Robert ADJIAGE (ADJIAGE, 2001) dont les travaux concernant les nombres rationnels ont été signalés, à propos de l'exploitation pédagogique des registres, a procédé à des recherches dans des classes d'une manière comparable, mais avec moins d'implication des enseignants des élèves concernés.

7.4. Last but not least

Que convient-il de faire pour la formation initiale et continue des professeurs ayant à enseigner les mathématiques ? Voilà une question qui a parfois dégringolé sous une forme aussi peu précise avec demande de réponses concrètes (en direction des professeurs des écoles et des professeurs de mathématiques dans l'enseignement du second degré) attendues de divers spécialistes, dont des chercheurs en didactique. Au risque de décevoir le lecteur, j'avancerai qu'une telle question ne me semble que très partiellement relever de la recherche en didactique envisagée dans cet article. Pour les professeurs des écoles, dont la formation initiale a pu être éloignée des mathématiques, certaines études didactiques ont été conduites, par exemple par Alain KUZNIAK (pour sa thèse soutenue à Paris 7 en 1994) et il est intéressant que perdure un secteur de travaux dans cette direction. Pour les professeurs de mathématiques, au-delà de la préparation des concours, la formule qui s'avère sans conteste la plus féconde n'est pas celle d'un *enseignement*, mais celle de la *recherche-action* telle qu'elle peut être pratiquée dans les IREM, avec un esprit d'égal niveau de contribution des participants. S'agit-il d'une méthode ? Probablement pas, mais bien plutôt d'un état esprit, éminemment souhaitable par ailleurs, quand on estime que la réflexion sur les plans de carrière dans l'enseignement mérite que beaucoup plus d'efforts lui soient consacrés que ce n'est le cas actuellement dans le système éducatif français. Je n'en dirai pas plus, pour ne pas être entraîné, à la lumière de mon expérience personnelle en matière de formation des professeurs, à des développements qui occuperaient tout de suite un certain nombre de pages et sortiraient du sujet de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

***Note :** La présentation est organisée non pas selon l'ordre alphabétique des auteurs, mais d'après les dates de la rédaction originale (le plus souvent celle indiquée en référence) des œuvres citées, hormis les articles de l'Encyclopedia Universalis regroupés en début de bibliographie.*

Articles de *l'Encyclopedia Universalis* concernant la didactique et l'enseignement des mathématiques (présents dans l'édition 2002) :

Régine DOUADY, Mathématiques (didactique des) ;
Pierre GRECO, Pédagogie – les problèmes de l'éducation scolaire ;
Daniel LACOMBE, Didactique et Didactique des disciplines ;
André REVUZ, Mathématique (enseignement des).

VYGOTSKY Lev Semenovitch, 1962, *Thought and Language* (traduction de E. Henfmann et G. Vakar, texte russe : 1934), Cambridge (Mass.), The M.I.T. Press.

BUYSE Raymond, 1935, *L'expérimentation en pédagogie*, Bruxelles, éd. Maurice Lamertin.

BACHELARD Gaston, 1938 (douzième édition : 1983), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin.

WITTGENSTEIN Ludwig, 1983 (traduction par M.A. Lescourret de l'édition posthume originale de 1956 rassemblant des notes écrites de 1937 à 1944), *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Paris, Gallimard – NRF.

DEWEY John, 1968, *Expérience et Education* (traduction de M.A. Carroi, texte anglais publié en 1938), Paris, Armand Collin.

GATTEGNO Caleb, 1965, *Pour un enseignement dynamique des mathématiques* (traduction par René Fonéré de *For the teaching of mathematics*, 1963), Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

FREUDENTHAL Hans, 1963, *Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques ?* L'Enseignement Mathématique vol. 9, 28-44.

FLETCHER T.J., 1966, *Didactique* ou *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui* (traduit du livre anglais *Some lessons in mathematics*), Paris, O.C.D.L.

BENVENISTE Emile, 1966, *Problèmes de linguistique générale* (tome 1), Paris, Gallimard.

GRIZE Jean Blaise, 1968, Analyses pour servir à l'étude épistémologique de la notion de fonction, in *Epistémologie et psychologie de la fonction*, Jean Piaget et al., 167 à 197, Paris, PUF.

BROUSSEAU Guy, 1970, *Mathématiques pour l'enseignement élémentaire*, collection Formation des maîtres, tome 1, Bordeaux, IREM.

Ce tome contient notamment le texte d'une conférence faite aux journées de l'APMEP de 1970, texte qui a été repris dans :

BROUSSEAU Guy, 1972, Les processus de mathématisation, in *La Mathématique à l'Ecole Elémentaire*, Bulletin de l'APMEP, n° 282 (spécial).

BLOOM Benjamin S., HASTINGS J. Thomas, MADAUS George F., 1971, *Handbook on formative and summative evaluation of students learning*, New-York, Mc Graw Hill.

DUCROT Oswald, 1972, *Dire et ne pas dire*, Paris, Hermann.

Learning and the nature of mathematics, 1972, William E. Lamon ed., Chicago, Science Research Associates Inc.

PIAGET Jean et INHELDER Bärbel, 1975, *La psychologie de l'enfant*, Paris, PUF.

L'analyse de la didactique des mathématiques, communications d'un colloque Inter-IREM, 1975, Bordeaux, IREM.

VAN HIELE Pierre M., 1976, *Wie kann man in Mathematikunterricht den Denkstufen Rechnung tragen*, Educational Studies in Mathematics, volume **7**,

157-169, Dordrecht, Reidel.

DUVAL R. et PLUVINAGE F., 1976, *Démarches de réponse en mathématique - Résultat d'une enquête à trois modalités auprès d'élèves de 5e d'âge moyen : 13 ans* - Educational Studies in Mathematics, volume 8/1, Dordrecht, Reidel.

WASON P.C.et JOHNSON-LAIRD P.N., 1976, *Psychology of reasoning, Structure and content*, London, Batsford.

REUCHLIN Maurice, 1981 (4ème édition, première édition : 1977), *Psychologie*, Paris, PUF.

HITT Fernando, 1978, *Comportements de retour en arrière après la découverte d'une contradiction*, Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

Didaktik der Mathematik, Hrsg. H.G. STEINER, 1978, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

DEMNARD Dimitri et FOURMENT Dominique, 1981, *Dictionnaire d'histoire de l'enseignement*, Paris, Jean-Pierre Delarge.

Colette LABORDE, 1982, *Langue naturelle et écriture symbolique* (2 tomes), thèse de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

PLUVINAGE François, 1983, Variations de questions, questionnaires à modalités, *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*, p. 465, Boston, Birkhäuser.

GLAESER Georges, 1984, *Racines historiques de la didactique des mathématiques*, Deuxième rédaction augmentée avec la collaboration d'Eric Chaney, Strasbourg, IREM.

ABDELLI Mohamed, 1985, Oralisation et apprentissage arithmétique par des élèves déficients auditifs, Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

RADFORD Luis, 1985, *Interprétation d'énoncés implicatifs et traitements logiques, contribution à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée*, thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

CHEVALLARD Yves, 1985, *La transposition didactique*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

DOUADY Régine, 1986, *Jeux de cadres et dialectique outil – objet*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 7/2, Grenoble, La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU Guy, 1986, *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 7/2, 33-115, Grenoble, La Pensée Sauvage.

VAN HIELE Pierre M., 1986, *Structure and Insight, a theory of mathematic education*, Orlando (Flor.), Academic Press.

FILLOY Eugenio, 1986, Teaching strategies for elementary algebra and the interrelationship between the development of syntactic and semantic abilities, *Proceedings of the 8th annual meeting for the Psychology of Mathematic*, North American Chapter, 108-113, Michigan, East Lansing.

VERGNAUD Gérard, 1987, Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances de l'enfant, in *Psychologie*, dir. J. Piaget, 821-843, Paris, Gallimard.

GRAS Régis, 1988, *Une situation de construction géométrique avec assistance logicielle*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 8/3, Grenoble, La Pensée Sauvage.

ARTIGUE Michèle, 1988, *Ingénierie didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 9/3, pp. 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage.

CAPPONI Bernard et BALACHEFF Nicolas, 1989, *Tableur et calcul numérique (spreadsheet and algebra)*, Educational Studies in Mathematics, volume **20**, 179-210, Dordrecht, Reidel.

GUZMAN RETAMAL Ismenia, 1990, *Le rôle des représentations dans la notion de fonction*, thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

CHARLOT Bernard, 1991, L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques, in *Faire des Math : le plaisir du sens*, R. Bkouche, B. Charlot et N. Rouche, pp. 171 – 193, Paris, Armand Collin.

BIDEAU Jacqueline, MELJAC Claire et FISCHER Jean-Paul, 1991, *Les Chemins du Nombre*, Les Presses Universitaires de Lille.

FISCHER Jean-Paul, 1992, *Apprentissages numériques, la distinction procédural – déclaratif*, Presses Universitaires de Nancy.

CHEVALLARD Yves, 1992, *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 12/1, Grenoble, La Pensée Sauvage.

BOUVIER Alain, 1992, *La mystification mathématique*, Paris, Hermann.

Didactics of mathematics as a scientific discipline, 1994, textes d'un groupe d'enseignants de l'INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK BIELEFELD, Dordrecht, Kluwer.

KUZNIAK Alain, 1994, Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres au premier degré, Thèse, Université Paris 7.

ROGALSKI Marc, 1994, *Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement des méthodes en analyse*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 14/1.2, Grenoble, La Pensée Sauvage.

DUVAL Raymond, 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Bern, Peter Lang.

DURAND–GUERRIER Viviane, 1996, *Logique et raisonnement mathématique, défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, thèse de l'Université Lyon 2.

Introduction à la didactique expérimentale des mathématiques, 1999, textes de Georges Glaeser recueillis et présentés par Bernard Blochs et Jean-Claude Régnier, complétés par les contributions de divers auteurs, Grenoble, La Pensée Sauvage.

ADJIAGE Robert, 2001, *Maturations du fonctionnement rationnel*, Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 7, IREM Strasbourg.

DUVAL Raymond, 2001, Ecriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? in : *Produire et lire des textes de démonstration*, ouvrage collectif IREM – IUFM, Paris, Ellipses.

BALACHEFF Nicolas, 2002, *Cadre, registre et conception*, Les cahiers du Laboratoire Leibniz, numéro 58, Grenoble, Leibniz-Imag.

Cet article est consultable à l'adresse URL http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers.

Groupe "Livre" de l'IREM de Strasbourg : BOURDENET Gilles, GASSER Jean-Luc, GIRAULT Paul, KRETZ Elizabeth, ZOLLER Patrick, 2002, *Ressources pour le programme de Sixième* (brochure et Cédérom d'accompagnement), Strasbourg, IREM.

PLUVINAGE François, 2003, Expression et représentation, leur rôle² dans les études sur l'enseignement mathématique in Didactique des mathématiques, 2003, *Revue du Centre de Recherche en Education*, n° 22-23 (décembre 2002) coordonné par Alain Denis, Saint-Étienne, Université Jean Monnet, 235-276.

Annales de didactique et de sciences cognitives, 2003, volume 8, Strasbourg, IREM.

Site web de l'IREM de Strasbourg, permettant notamment l'accès au logiciel Alexandrie pour consultation du fonds documentaire : http://irem.u-strasbg.fr/.

François PLUVINAGE
IREM de Strasbourg

e-mail : pluvin@math.u-strasbg.fr