# Errata, coquilles et autres erreurs ou la vie torturée d'un rédacteur en chef

Qu'il est difficile de passer de la confortable vie de lecteur d'une revue à celle pleine de risques de rédacteur en chef de l'Ouvert. Il fut un temps, pas si lointain, où relevant une erreur dans un texte imprimé et suivant mon humeur je m'étonnais, je souriais ou même je bondissais. Mais toujours je me demandais comment il était possible de laisser passer de telles bourdes. Les temps ont changé et aujourd'hui je suis le passeur d'erreurs.

Et oui, c'est ainsi que Miquel, auteur d'un fameux théorème qu'à peine six semaines avant je présentais dans un cours sur les applications des nombres complexes à la géométrie, ce Miquel donc prenait dans l'Ouvert un air espagnol et s'appelait Miguel... et j'avais laissé passer cela. Pire encore, dans le même article ma très charmante collègue Claudine Mitschi à qui je fais la bise chaque fois que je peux, voyait son nom précédé d'un dangereux et équivoque "M.". Comment me faire pardonner cette bévue? Comment sans rougir de honte, la croiser encore?

Loin de vouloir me faire passer pour extraordinaire, mais il faut tout de même avouer que le rédacteur en chef ordinaire possède sur moi un avantage précieux : il ne mange pas au restaurant universitaire avec ses lecteurs ! Il peut oublier au fond d'un tiroir, voire même au fond d'une corbeille, les lettres de tous ces mécontents sans visages, mais mon lecteur, souvent un ami, a un visage et aussi une voix et il trouve toujours la force, entre deux bouchées de couscous, de rappeler la source de son irritation.

Est-ce tout? Hélas non, la ciguë est encore à venir. Mon ciel déjà zébré de lourds nuages allait définitivement s'abattre sur moi sous la forme apparemment anodine de la transformée de Radon : transformation que j'avais totalement ignorée jusqu'à ce jour où elle m'est apparue au détour d'un article fort intéressant sur les TPE. D'une lecture rapide, trop rapide, j'avais surtout retenu que cette transformation avait l'intéressante application de m'éviter désormais de palper les camemberts dans les supermarchés : l'analyse par un scanner y suppléait. Mais voilà d'aucuns m'ont vite fait savoir qu'avant d'avoir une vocation fromagère et médicale, la transformée de Radon était d'abord une transformation mathématique et que ce statut exigeait une définition précise sur des espaces moins comestibles que ceux sur lesquels je me situais. Je passe de nombreux détails et vous invite à lire la mise au point contenue dans ce numéro.

Comment, si c'est possible, sinon justifier du moins expliquer toutes ces erreurs et inexactitudes. On peut certes, sans trop y croire, rappeler l'anecdote de cet éditeur qui avait décidé de publier un livre sur les fautes de frappes dont le titre était « les coquilles ». On imagine le luxe de précautions prises et le nombre de relectures faites pour éviter la moindre erreur. Croyant son travail terminé, on comprend alors la stupeur de l'éditeur lorsqu'il vit, sur la couverture du livre, que le « q »avait disparu du titre.

Plus sérieusement, peut-être, les délais de parution et la volonté de produire des numéros avec une fréquence raisonnable expliquent en grande partie les problèmes rencontrés. Bien que située dans un environnement très riche, entourée de chercheurs brillants, de jeunes docteurs dynamiques et de plus de soixante animateurs IREM triés sur le volet, notre revue ne reçoit que peu d'articles parfois à peine rédigés ce qui nous conduit dans certains cas à publier un article plutôt que prévu et voilà le dangereux engrenage lancé.

Mais heureusement, si j'ose dire, les lecteurs veillent et certains ne se contentent pas de venir me harceler, ils écrivent leurs remarques, passent du temps, parfois beaucoup de temps, pour que dans le numéro suivant les inexactitudes soient corrigées ou que des compléments soient apportés. Je les en remercie d'autant plus que cela me permet de gagner quelques pages pour mon travail de Sisyphe.

On l'aura compris plutôt qu'un plaidoyer pro domo, je souhaite simplement lancer un nouvel appel à tous pour envoyer des articles et à certains plus motivés pour rejoindre l'équipe de rédaction car finalement c'est aussi très intéressant de publier une revue avec un vrai travail d'équipe. Cela fait aussi plaisir, une fois quitté la fournaise strasbourgeoise, d'entendre la rumeur favorable qui entoure l'Ouvert hors de nos murs.

Enfin, terminons par l'essentiel : le contenu de ce numéro. Il est en grande partie constitué par des contributions issues du Colloque sur l'enseignement de l'analyse organisé par l'IREM à Mulhouse en mars 2002. Nous publions trois articles qui résument les conférences et qui chacun à leur manière éclairent le problème de l'enseignement de cette partie des mathématiques assez malmenée au Lycée. Pour clore le numéro, un article sur le septième problème d'Hilbert nous est offert par deux jeunes collègues, Haristoy et Oudet.

Alain Kuzniak

# ÉVOLUTIONS ET PERSPECTIVES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE AU LYCÉE

Michèle ARTIGUE, Université Paris 7

## 1. Introduction

L'enseignement des débuts de l'analyse est aujourd'hui un secteur d'enseignement déstabilisé, en crise, partout dans le monde, en dépit des différences institutionnelles et culturelles. Le symposium organisé à Genève en octobre 2000, pour commémorer les cent ans de la revue « l'Enseignement Mathématique », qui a consacré une demi-journée de ses travaux à cet enseignement, retraçant son histoire au fil du siècle et essayant de penser ses perspectives futures, l'a bien mis en évidence[1]. Quelles sont les sources de cette crise ? Comment s'explique-t-elle ? C'est à ces questions que nous essaierons de répondre dans la première partie de ce texte, en nous appuyant sur l'histoire de l'enseignement secondaire de l'analyse en France et en rappelant brièvement ce qu'a été son évolution au cours du siècle dernier. Mais si une telle analyse permet de tirer les leçons de l'histoire et aide à comprendre la situation actuelle, elle ne saurait suffire pour penser le futur de l'enseignement secondaire de l'analyse. C'est à ces questions de prospective que nous nous attacherons dans la suite de ce texte, en nous centrant sur deux dimensions qui nous semblent fondamentales pour penser l'entrée dans le champ de l'analyse : celle de la localisation des points de vue et celle de l'extension du calcul algébrique par intégration des ordres de grandeur. Nous nous interrogerons ensuite, dans une dernière partie, sur la viabilité de perspectives qui découlent de cette réflexion, dans l'environnement technologique qui est celui de l'enseignement des mathématiques aujourd'hui ou devrait l'être du moins dans un futur proche.

## 2. L'évolution de l'enseignement secondaire français de l'analyse au XX$^e$ siècle

*Pour comprendre la situation actuelle de l'enseignement des débuts de l'analyse, il nous semble nécessaire de percevoir l'enseignement actuel comme le produit d'une histoire et de s'intéresser donc à son évolution. C'est à travers cette histoire, marquée par des caractéristiques culturelles et institutionnelles particulières, que se sont forgées des valeurs pour cet enseignement, au fil des continuités et des ruptures. Ce sont des valeurs qui nous sont, partiellement au moins, devenues transparentes, qui se sont naturalisées, mais pour comprendre la situation actuelle, pour penser les futurs possibles, il est nécessaire de les considérer comme des objets problématiques. Le regard historique va nous y aider, comme pourrait le faire, dans un registre différent, le regard porté sur d'autres cultures et d'autres choix d'enseignement.*

[1] On pourra se référer sur ce point aux actes de ce symposium qui seront publiés dans un numéro spécial de la revue *l'Enseignement Mathématique*.

Lorsque l'on se penche sur l'histoire de l'enseignement des débuts de l'analyse en France, on ne peut manquer d'être frappé par le contraste saisissant entre la situation du début du XX$^{e}$ siècle, que nous qualifierions volontiers d'idyllique, et la situation actuelle. C'est ce contraste que nous allons interroger dans cette partie, en distinguant dans l'histoire de l'enseignement au cours du XX$^{e}$ siècle quatre périodes principales : la période qu'amorce la réforme de 1902 et qui couvre toute la première moitié du siècle, la période de la réforme des mathématiques modernes qui s'amorce avec la réforme des années 60, la contre-réforme des années 80 et, enfin, la situation qui a prévalu jusqu'aux infléchissements apportés par les nouveaux programmes entrés en vigueur en première en 2001-2002 et en terminale en 2002-2003.

## 1. La situation idyllique du début du siècle : l'entrée du calcul différentiel et intégral (CDI) dans l'enseignement secondaire

C'est en effet avec la réforme de 1902, et son ambition de fonder des humanités scientifiques à égalité de statut avec les humanités littéraires qui, traditionnellement, assuraient la formation des élites de la nation (Belhoste, 1996) que l'enseignement du CDI se généralise en France au niveau secondaire. Cette introduction est un succès comme l'attestent la stabilité des programmes ainsi que les nombreux textes et rapports publiés (Artigue, 1996). Ceci n'est pas un phénomène isolé. L'étude internationale lancée sur ce thème par la CIEM en 1911, dont le rapport, connu sous le nom de rapport Beke est publié en 1914 par la revue *l'Enseignement Mathématique,* le montre à l'évidence, tout en nous aidant à comprendre les ressorts de ce succès.

L'entrée du CDI est tout d'abord une entrée modeste dans un enseignement où la géométrie règne en maître. Il ne fait pas l'objet d'une rubrique séparée dans les programmes, étant intégré à la partie d'algèbre, et, par exemple, dans le programme de terminale scientifique, cette partie n'occupe qu'une page sur les huit que compte le programme de mathématiques. Le CDI se veut essentiellement un calcul efficace pour faire face aux besoins tant des mathématiques, dont l'enseignement inclut à l'époque, rappelons-le, mécanique, cinématique et astronomie, que des autres disciplines scientifiques, notamment la physique. C'est un enseignement qui, sans déstabiliser le curriculum, apporte un progrès évident. Il permet de se libérer de techniques ad hoc auparavant utilisées dans un certain nombre de calculs, de proposer des méthodes simples et unifiées, libérées de la métaphysique des infinitésimaux. Ces méthodes rencontrent les canons de rigueur de l'époque. Priorité est donnée à l'outil CDI, les ambitions théoriques sont clairement limitées et cette limitation est soutenue par les mathématiciens influents de l'époque comme par exemple Henri Poincaré. Ces derniers d'ailleurs produisent des ressources pour les enseignants, allant au-delà des seuls manuels du secondaire. Des ouvrages comme ceux des frères Tannery, de Carlo Bourlet ont un retentissement international. Cet enseignement d'une analyse algébrisée, que la culture géométrique, cinématique et mécanique aide à motiver et prendre sens, est à l'évidence un enseignement qui marche. Les pionniers qui se sont investis dans l'aventure récoltent les fruits de cet investissement et ont tout lieu de se déclarer pleinement satisfaits.

Rappelons pour compléter la description de ce contexte que cet enseignement s'adresse à une petite élite, tant côté élève que côté enseignant.

## 2. Le tournant du milieu du siècle : des ambitions nouvelles pour l'enseignement de l'analyse

*Avec le tournant du milieu du siècle, et l'évolution du champ mathématique, l'équilibre ancien se rompt. L'enseignement de l'analyse se dote de nouvelles ambitions. Il ne s'agit plus pour lui de mettre en place un calcul fonctionnel algébrique efficace, il s'agit d'approcher le champ de l'analyse comme champ théorique où les valeurs d'approximation jouent un rôle essentiel. L'évolution s'amorce dès la réforme du début des années soixante mais, dans un contexte très marqué par la culture ancienne. Même si des définitions formelles sont introduites, il n'y a pas alors de bouleversement spectaculaire. Dans la culture ancienne, toujours dominante au lycée, des ilôts se construisent où commencent à vivre les nouvelles valeurs et l'analyse des manuels des années soixante, dans leur diversité, est ici particulièrement instructive. La réforme des mathématiques modernes, au début des années 70, par son radicalisme, crée la véritable rupture, même si l'analyse est loin d'être une de ses priorités. Les exigences de rigueur, de formalisation, la centration sur les questions de fondements en sont le moteur, un moteur d'autant plus puissant qu'il transcende le champ de l'analyse. L'enseignement de l'analyse ne connaît cependant pas de crise. Il s'adresse toujours à une petite proportion de la classe d'âge et la séparation entre filières, dès le début du lycée, favorise la viabilité des ambitions théoriques de la filière C, conçue par ailleurs comme filière d'excellence. La part de l'analyse, excepté en terminale C, reste d'ailleurs limitée dans des programmes où les structures algébriques tiennent le haut du pavé.*

## 3. La contre-réforme des années 80 ou l'analyse triomphante

Si elle rejette les valeurs de la réforme des mathématiques modernes, ses ambitions théoriques et ses excès de formalisation, la contre-réforme des années 80, contrairement à ce que l'on pourrait penser, ne rejette pas l'ambition de fonder dès le lycée le champ de l'analyse comme champ de l'approximation, bien au contraire. L'effondrement de l'algèbre des structures, la disparition des éléments de théorie des ensembles, non contrebalancée par l'introduction de nouveaux champs, offrent de plus à l'enseignement de l'analyse un espace où se déployer. L'analyse l'occupe effectivement et sa part relative, dans les programmes augmente substantiellement. Les valeurs de l'approximation sont fortement présentes et ce, dès la classe de seconde, soit un avant que ne débute officiellement l'enseignement de l'analyse. En témoignent les extraits suivants du programme de 1982.

> « *c) Comportement local*
>
> *Exemple d'études au voisinage de zéro :* $x \mapsto (1+x)^2$, $x \mapsto (1+x)^3$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
>
> *Exemples d'approximation locale par une fonction affine : utilisation de majorations dans le calcul approché des valeurs d'une fonction et le calcul d'erreurs.*
>
> *On entraînera ici encore les élèves à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place de majorations, par exemple :* $0 \leq \dfrac{1}{1+x} - (1+x) \leq 2x^2$ *sous la condition suffisante* $|x| \leq \dfrac{1}{2}$. »

La progression dans ce champ de l'approximation, l'évolution des moyens pour l'étude des problèmes emblématiques de l'analyse que sont les problèmes de variation et d'optimisation, les problèmes d'approximation de nombres, organisent un paysage mathématique que l'on ne cherche plus à structurer suivant l'organisation « logique » des notions. L'analyse est ainsi, en quelque sorte triomphante, face à une géométrie qui cherche à reconstruire ses valeurs.

## 4. Le déclin et la crise

*Les ambitions épistémologiques que s'est donné la contre-réforme en analyse sont ambitieuses. Comme c'est souvent le cas, la réflexion épistémologique n'a pas été suffisamment accompagnée d'une réflexion de nature plus didactique et écologique, cherchant à étudier les coûts, les conditions de viabilité des choix effectués, comme nous l'avons montré par ailleurs (Artigue, 1993). L'opposition entre apprentissage de concepts et apprentissage de techniques qui se développe dans l'enseignement, dans le cadre d'un constructivisme mal compris, n'aide d'ailleurs pas à poser correctement les problèmes, et en particulier à s'interroger sur le coût réel de l'opérationalisation souhaitée des techniques d'approximation. La massification rapide de l'enseignement au lycée, la réduction des horaires sur toute la scolarité secondaire, la disparition de la filière C, rendront les ambitions initiales de plus en plus irréalistes et le déclin s'amorcera inéluctablement.*

La situation qui en résulte à la fin du siècle est une situation de crise. Cette crise n'est pas, comme nous l'avons souligné dès le départ, un phénomène isolé et ce, même si l'évolution française que nous venons de retracer très sommairement présente des spécificités indéniables. De nombreux pays, par exemple, n'ont pas connu le phénomène de contre-réforme que nous avons vécu, la réforme des mathématiques modernes ayant été dans peu d'endroits aussi radicale que chez nous. Dans d'autres, l'enseignement de l'analyse au lycée, souvent optionnel, est resté essentiellement un enseignement de calcul, au sens initial du terme, les ambitions théoriques étant réservées aux enseignements universitaires. Pourtant, quelles que soient les évolutions, le sentiment de crise est uniformément ressenti. Plusieurs raisons contribuent à l'expliquer, comme l'a montré L. Steen au Symposium de Genève déjà cité, se renforçant mutuellement par leurs interactions et nous en retiendrons ici plus particulièrement trois :

### 1. La place qu'occupe l'analyse dans les curricula

Nous avons souligné l'accroissement important de la part relative de l'analyse dans les curricula au cours du XXe siècle. Le maintien de cette position ne va en rien de soi. Reflète-t-elle le rôle que joue l'analyse dans les mathématiques actuelles ? Reflète-t-elle les besoins sociaux et culturels de la formation en mathématiques ? Répond-t-elle aux besoins professionnels en mathématiques au sens large ? Sur tout le siècle passé, l'organisation du curriculum du lycée s'est posée en termes d'équilibres entre algèbre, géométrie et analyse. On perçoit bien les limites actuelles d'une telle organisation. Au fil du XXe siècle, de nouveaux domaines mathématiques ont pris leur essor. L'évolution de l'informatique, celle du calcul scientifique créent des besoins mathématiques nouveaux. Les probabilités, encore marginales en mathématiques au début du siècle, sont aujourd'hui un des moteurs clefs du développement mathématique dans les domaines les plus divers. De plus en plus, on considère une familiarisation certaine avec les raisonnements mettant en jeu l'aléatoire, avec les notions statistiques, comme une composante incontournable de la formation du citoyen, s'il veut prendre la part qui lui revient dans les débats actuels de société. Peut-on en dire autant de la capacité à calculer des dérivées et intégrales ? L'analyse doit aujourd'hui justifier la place qu'elle occupe dans les curricula.

### 2. L'évolution technologique

Que l'enseignement de l'analyse soit resté simple « *calculus* », pour reprendre l'expression anglo-saxonne, ou qu'il se soit donné des ambitions plus théoriques, force est de constater que, dans la plupart des pays, ce qui est réellement appris et ce qui est évalué, pour des raisons diverses, ne va guère au-delà d'une analyse algébrisée, enfermée dans un nombre limité de routines. C'est justement cette analyse que les logiciels de calcul symbolique prennent en charge aujourd'hui, des logiciels implantés même sur des calculatrices. Ceci ne peut que renforcer l'idée que l'enseignement de l'analyse pourrait être drastiquement réduit sans que cela induise une réduction substantielle des compétences des élèves. Les choses sont bien sûr moins simples, comme le montrent différents travaux concernant les calculatrices symboliques[2], mais le poids de tels arguments, dans et surtout à l'extérieur de l'institution scolaire, contribue à fragiliser l'enseignement de l'analyse et renforce le sentiment de crise.

### 3. La massification de l'enseignement au lycée

La massification de l'enseignement au lycée, l'hétérogénéité qui en résulte, l'injonction qui est faite aujourd'hui à l'École d'assurer la réussite de tous les élèves, accroissent bien sûr la déstabilisation. Nous n'insisterons pas plus sur cette dimension de la crise qui est sans doute celle à laquelle le monde éducatif est le plus sensible.

Aujourd'hui donc, il semble donc impossible d'éviter une réflexion approfondie sur un certain nombre de questions. Certaines ne sont pas nouvelles et on les voit apparaître, de façon récurrente, dans les débats qui se sont succédés concernant l'enseignement de l'analyse. C'est par exemple le cas des questions suivantes :

- Comment répercuter dans le choix des contenus d'enseignement les valeurs épistémologiques de ce domaine, son évolution propre comme celle de ses rapports avec les autres domaines mathématiques, avec les autres disciplines ?
- Comment prendre en compte la diversité des besoins des élèves et étudiants ?
- Comment trouver un juste équilibre entre intuition et rigueur dans les premiers contacts avec le monde de l'analyse ?

D'autres sont plus actuelles :

- Comment penser l'enseignement de l'analyse aujourd'hui, compte-tenu de la massification de l'enseignement secondaire, et maintenant universitaire, et de l'hétérogénéité croissante des élèves et étudiants qui en résulte ?
- Comment prendre en compte efficacement dans cet enseignement l'évolution technologique ?
- Qu'offre enfin, pour penser l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse, la recherche didactique qui s'est développée maintenant depuis plus de vingt ans dans ce domaine et que pourrait-on en attendre de plus[3] ?

*Ces questions nous indiquent, s'il en était besoin, que les problèmes qui sont à résoudre aujourd'hui, même s'ils nous paraissent par certains aspects très proches de ceux du passé, sont en fait profondément différents : les contraintes et les possibilités qui conditionnent les futurs possibles ont profondément changé. Les solutions aux problèmes actuels d'enseignement et d'apprentissage de l'analyse ne peuvent donc être simplement empruntées au passé, quelles qu'aient été les réussites du passé. Mais, ce passé, pourtant, tant par ses réussites que par ses*

[2] Sur ce point, le lecteur pourra notamment se référer à l'ouvrage coordonné par D.Guin et L.Trouche (Guin & Trouche, 2002).

[3] Nous n'aborderons pas cette question dans ce texte, renvoyant le lecteur à divers textes de synthèse : (Tall, 1996), (Artigue, 1998, 2001), (Robert et Speer, 2001).

*échecs, nous instruit et nous pouvons en tirer un certain nombre de leçons. Nous nous limiterons ici à en mentionner quelques unes qui nous semblent particulièrement criantes. Ce sont les quatre suivantes :*

1. Il n'existe pas de voie royale pour l'enseignement des débuts de l'analyse, diverses organisations cohérentes sont sans aucun doute possibles mais toutes s'appuient nécessairement sur des niveaux de conceptualisation provisoires.
2. L'apprentissage de l'analyse impose, notamment de ce fait, des reconstructions cognitives que l'enseignement doit organiser et sérieusement prendre en charge, sans les laisser à la seule charge du travail personnel des élèves et étudiants.
3. Les ambitions de l'enseignement secondaire de l'analyse doivent être à la fois épistémologiquement convaincantes et institutionnellement viables.
4. Les ambitions conceptuelles de cet enseignement ne peuvent pas être pensées indépendamment de la réflexion sur le travail technique qui permet leur réalisation.

Elles sembleront peut-être au lecteur de simples évidences, n'ayant pas leur place dans un article. Pourtant, force est de constater que l'étude de l'histoire de cet enseignement montre à quel point ces évidences ont été souvent ignorées et quels effets désastreux cela a eu dans le moyen et long terme. Dans le moyen et long terme, en effet, car c'est assez rarement dans le court terme que les effets des décisions curriculaires sont réellement appréciables.

Comment penser, à la lumière de ce passé, mais aussi des contraintes et potentialités actuelles, l'enseignement de l'analyse au lycée ? C'est la question que nous aborderons maintenant en essayant d'abord de préciser quelques phénomènes marquants, à nos yeux, de l'entrée dans le champ de l'analyse.

## 3. L'entrée dans le champ de l'analyse

Dans cette partie, nous évoquerons d'abord de façon synthétique les diverses reconstructions que nécessitent l'entrée et les premières avancées dans le champ de l'analyse, avant de nous centrer sur deux d'entre elles : la localisation des points de vue sur les objets fonctionnels d'une part, l'enrichissement du calcul algébrique par introduction des ordres de grandeur d'autre part.

### 1. La diversité des reconstructions qui marquent l'entrée dans le champ de l'analyse

Rentrer dans le champ de l'Analyse c'est rencontrer un nouveau monde mathématique faits de nouveaux problèmes, de nouveaux objets, de nouvelles techniques, de nouveaux modes de pensée. C'est aussi reconstruire son rapport à des objets connus mais qui vont prendre un sens différent dans ce nouveau champ. La recherche didactique a été, depuis ses débuts, sensible à ces reconstructions, tout en les approchant à travers des cadres théoriques divers (Artigue, 2001). Elle a aidé à les analyser, elle a montré aussi que le coût cognitif de ces reconstructions est généralement sous-estimé par les systèmes éducatifs qui laissent beaucoup d'entre elles à la charge du travail personnel de l'élève puis de l'étudiant.

Les reconstructions requises pour l'entrée dans le champ de l'analyse sont de nature diverses. Certaines d'entre elles concernent des objets et des pratiques mathématiques que les élèves ont rencontrés et avec lesquels ils se sont familiarisés avant que l'enseignement de l'analyse ne commence. C'est le cas par exemple de l'objet tangente.

Comme l'a bien montré par exemple C. Castela (1995), la tangente connue des élèves avant le début de l'enseignement de l'analyse est un objet qui hérite de la tangente au cercle, premier exemple de tangente rencontré, un certain nombre de caractéristiques. Elle est perçue globalement comme une droite qui rencontre la courbe en un point et un seul et ne la traverse pas. Elle est construite géométriquement dans le cas du cercle et peut être déterminée algébriquement dans des cas simples, par exemple dans le cas de courbes représentatives de fonctions polynomiales de degré deux, en écrivant qu'une équation a une solution double. Pour devenir un objet de l'analyse, la tangente doit devenir un objet caractérisé par une propriété locale et non plus globale, une propriété qui, de plus, n'était pas présente dans les conceptions premières de la tangente : la propriété de « communauté de direction » ou de « meilleure approximation affine ». Et de nouvelles techniques vont en résulter pour sa détermination.

Les nombres réels qui objets algébriques à l'origine doivent devenir des objets topologiques, en fournissent un autre exemple, où les reconstructions sont à la fois plus délicates et beaucoup plus cruciales. En effet, quand l'enseignement de l'analyse débute, les élèves ont rencontré depuis plusieurs années des nombres réels : rationnels et irrationnels. Ces objets ont été engagés dans des pratiques mathématiques et les conceptions qu'ils ont développé à leur propos en émergent. Ces pratiques mathématiques peuvent être décrites, si l'on se réfère à l'approche anthropologique du didactique élaborée par Y. Chevallard (Chevallard, 1992), (Bosch & Chevallard, 1999), en termes de praxéologies. Ces praxéologies sont organisées autour de types de tâches, de techniques développées pour résoudre ces tâches, de discours technologiques utilisés pour motiver, expliquer, justifier les techniques, et de théories qui organisent et structurent les discours précédents. Les nombres réels qui émergent ainsi des pratiques des élèves sont des objets algébriques, munis d'un ordre dense, d'une représentation géométrique : la droite numérique, de représentations et approximations diverses parmi lesquelles les développements décimaux fournis par les calculatrices jouent un rôle essentiel. Entrer dans le champ de l'analyse requiert d'importantes reconstructions qui, quelles que soient les stratégies d'enseignement mises en place, on le sait aujourd'hui, ne sont pas aisément réalisées. Les recherches didactiques ont bien montré par exemple que, même si les étudiants savent et déclarent que l'ordre des réels est un ordre dense, ils sont tentés de penser que certains nombres peuvent être, en un sens, successeurs. Par exemple, 0,999… est très souvent considéré comme le prédécesseur de 1, comme si la notation symbolique utilisée, évoquant un processus infini dont tous les termes sont strictement inférieurs à 1, empêchait les étudiants de détacher le résultat de ce processus du processus lui-même. Des tests passés à l'entrée à l'université ont également régulièrement montré que la majorité des étudiants scientifiques répondaient à la question : « Que pouvez-vous dire des nombres a et b si, pour tout entier positif n, on a : $|a - b| < 1/n$ ? », en disant qu'alors a et b étaient infiniment proches ou successeurs. De telles conceptions rendent évidemment difficile la compréhension des preuves en analyse et *a fortiori* leur production.

Les reconstructions ne concernent cependant pas que des notions rencontrées avant l'entrée dans le champ de l'analyse. D'autres, tout aussi importantes, vont concerner les objets nouveaux que l'enseignement de l'analyse va introduire. Elles résultent en partie de la polysémie des objets mathématiques, pensons par exemple au concept de dérivée ou d'intégrale, et au fait que les différentes facettes de ces objets ne peuvent être toutes introduites simultanément.

Mais les plus problématiques pour l'enseignement sont plutôt liées au fait que, comme l'avait déjà souligné Henri Poincaré au début du XX[e] siècle, dans une conférence célèbre sur les définitions mathématiques (Poincaré, 1904), généralement, un concept mathématique ne peut être introduit aux élèves dans sa forme la plus élaborée. Différents niveaux de conceptualisation doivent être progressivement atteints, chacun d'eux correspondant à une sorte d'équilibre qui est partiellement rompu quand on veut passer à un niveau de conceptualisation plus avancé. Ainsi les recherches montrent-elles, par exemple, que les conceptions que les élèves ont de la droite réelle dans les débuts de l'enseignement de l'analyse ne sont pas celles qui seront attendues, à un certain niveau de conceptualisation. Une conception « naturelle » de la continuité se développe sur la base de nos expériences physiques liées à l'espace et au mouvement notamment (Lakoff & Nuñez, 2000), (Nuñez, Edwards, Matos, 1999). Une courbe continue est ainsi d'abord perçue comme engendrée par un mouvement continu, comme sa trajectoire. Les points n'en sont pas des constituants, ils sont perçus comme des positions possibles d'un mobile sur cette trajectoire, ou comme des repères, des bornes, le long d'une route. Des propriétés comme la convergence des suites croissantes majorées (respectivement décroissantes minorées), conséquences directes de la complétude de l'ensemble des réels, y sont naturelles, soutenues qu'elles sont par des métaphores cinématiques : un mobile qui se déplace dans une direction donnée sur une route mais ne peut dépasser telle position finira bien par s'arrêter quelque part. Concevoir une courbe continue comme constituée de points, associer la continuité à l'absence de trous et comprendre le rôle fondamental joué ici par la propriété de complétude de l'ensemble des réels, comprendre que les fonctions continues sont celles qui préservent la continuité des ensembles de départ, en préservant la proximité, tout ceci requiert d'importantes et difficiles reconstructions[4].

Comment organiser ces reconstructions ? Lesquelles privilégier dans un premier contact avec le champ de l'analyse ? C'est la question que nous allons aborder maintenant, en nous centrant sur deux aspects des reconstructions qui nous semblent essentiels à l'entrée dans le champ de l'analyse : la localisation des points de vue et l'enrichissement du calcul algébrique par l'introduction des ordres de grandeur. Ils peuvent et doivent commencer à se mettre en place, nous semble-t-il, très tôt, à un moment où l'accès à un niveau de conceptualisation correspondant à celui de l'analyse formalisée, assujettie aux définitions et preuves en $\varepsilon$ - $\eta$, est encore peu accessible.

## 2. La localisation des points de vue, l'enrichissement du calcul

Quand débute l'enseignement de l'analyse, les élèves ont déjà une certaine expérience du monde des fonctions et leurs conceptions des objets fonctionnels émergent de cette expérience et des pratiques associées. Aujourd'hui, généralement, ces pratiques sont liées à une introduction des fonctions qui se fait à travers la modélisation fonctionnelle de situations internes ou externes au champ mathématique, et combine des approches numériques, graphiques et algébriques. Des problèmes de variation et d'optimisation ont déjà été abordés mais généralement traités sur la base « d'évidences » numériques ou graphiques ou, en s'appuyant sur les propriétés des fonctions prototypes que sont les fonctions de référence. Les pratiques fonctionnelles ont été jusque là de nature ponctuelle ou globale. L'entrée dans le

[4] Les auteurs cités ci-dessus montrent, en analysant le discours de mathématiciens, que reconstruction ne signifie pas simple remplacement d'un point de vue par un autre. Dans leurs discours, les mathématiciens ne se privent pas d'utiliser des expressions, des métaphores qui sont caractéristiques de la continuité naturelle. Ils savent, en revanche, que les preuves qu'ils vont produire se situent, elles, dans le registre de la continuité ensembliste qui est soutenu par d'autres verbalisations, d'autres métaphores.

champ de l'analyse conduit à les reconsidérer en prenant en compte la localisation des points de vue qui est une des caractéristiques du travail dans ce champ, et en développant progressivement un jeu dialectique entre points de vue local et global. Ainsi, la linéarité qui était jusque là un concept global va-t-elle avoir à devenir aussi une propriété locale, partagée par une large classe de fonctions, une propriété à la base du calcul différentiel. Et les élèves auront aussi assez rapidement à comprendre comment, sous certaines conditions, des informations de nature purement locale permettent de caractériser des objets globaux, comme c'est le cas dans la résolution des équations différentielles.

Même sans aller jusqu'à entrer dans une analyse formelle en $\varepsilon-\eta$, ce qui n'est plus une ambition de l'enseignement secondaire français de l'analyse[5], les pratiques algébriques des élèves doivent elles aussi être reconsidérées. Dans le travail algébrique antérieur, les différents composants d'une expression algébrique avaient tout le même poids, résoudre une équation, une inéquation signifiait trouver tous les nombres satisfaisant cette équation, cette inéquation. En analyse, même lorsque le travail technique avec les objets reste essentiellement algébrique, des discontinuités apparaissent. Le traitement des expressions algébriques doit impérativement prendre en compte les différents ordres de grandeur des composants des expressions considérés. Ceci suppose une notion de négligeabilité qui sera de nature absolue ou relative, suivant que l'on se situe dans le cadre de l'analyse non standard ou de l'analyse standard, et le développement de techniques de calcul intégrant cette idée de négligeabilité sous des formes appropriées au choix (non-standard ou standard) effectué. Le travail avec des inéquations, qui devient en analyse prédominant sur le travail avec les équations, n'obéit pas, lui non plus, au même jeu que dans l'algèbre ordinaire. Il ne s'agit pas de trouver toutes les solutions d'une inéquation, il s'agit de trouver un intervalle de solutions, en raisonnant par conditions suffisantes et en jouant simultanément sur l'expression et son traitement différencié suivant les ordres de grandeur d'une part, sur le caractère local du travail mené d'autre part. Le travail technique en est profondément modifié et complexifié, aussi bien dans sa dimension opératoire, que dans les raisonnements qui servent à le piloter et le contrôler.

Il est frappant de constater que les étudiants avancés, même s'ils ont acquis des compétences formelles en analyse, n'ont pas forcément bien compris ces changements de jeu et ne savent pas les gérer de façon toujours efficace. Nous en donnerons un exemple issu d'expériences répétées avec des étudiants préparant le CAPES. Il s'agit de l'étude, banale à ce niveau, de la convergence d'une série numérique, la série de terme général : $u_n = (-1)^n \dfrac{n\,\mathbf{ln}(n)}{(n^2+1)}$. Les étudiants de CAPES disposent de techniques efficaces pour aborder une telle tâche. La première question qu'ils se posent généralement est celle de la convergence absolue. Pour y répondre, une technique économique consiste à déterminer un équivalent de la valeur absolue du terme général de la série, ce qui revient ici à considérer que 1 est négligeable devant $n^2$, et on aboutit à l'expression : $\dfrac{\mathbf{ln}(n)}{n}$. La reconnaissance d'une série de référence (série de Bertrand) ou plus

[5] De nombreuses recherches didactiques (cf. les synthèses mentionnées au début de cet article) ont montré les problèmes posés par un enseignement qui voudrait trop prématurément s'inscrire dans une telle analyse formelle, sans laisser aux élèves le temps de construire un champ d'expérience et des rapports aux objets de l'analyse se situant à un niveau de conceptualisation moins exigeant. Les nouveaux programmes du lycée, tout en réintroduisant des définitions précises pour la convergence des suites numériques et la notion de limite d'une fonction à l'infini, et en soulignant la nécessité de pouvoir disposer d'un nombre minimal de définitions pour pouvoir conduire des raisonnements précis et rigoureux, faire comprendre les raisons d'être de certains théorèmes clefs, nous semblent tout à fait cohérents avec ce point de vue.

simplement la comparaison avec la série harmonique permettent alors de conclure à la divergence de la série des valeurs absolues. Jusqu'ici tout fonctionne comme une mécanique bien rodée avec des techniques devenues routinières.

La série est aussi une série alternée, et les étudiants disposent, pour ce type de série, d'un théorème qui permet d'assurer la semi-convergence. Ce théorème assure que si la suite $(|u_n|)$ a pour limite 0 et si elle est décroissante à partir d'un certain rang, la série est convergente. Le branchement est, pour ces étudiants, automatique. Il est clair aussi pour eux que la limite de la suite est bien nulle. Il reste donc à montrer la décroissance, ce qui en revanche ne va pas de soi. Lorsque la différence ou le quotient de deux termes successifs ne conduit pas de façon immédiate au résultat, la stratégie usuellement développée consiste à introduire une fonction auxiliaire associée à la suite et à étudier ses variations. Ici il s'agit de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\,\mathbf{ln}(x)}{(x^2+1)}$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée est égale à : $f'(x) = \dfrac{(1-x^2)\mathbf{ln}x + 1 + x^2}{(1+x^2)^2}$. Comme le lecteur s'en rendra compte aisément, déterminer le signe de cette expression sur $]0,+\infty[$ n'est pas évident. C'est pourtant à résoudre cette sous-tâche que s'acharnent, année après année, ces étudiants, introduisant une nouvelle fonction auxiliaire associée au numérateur de la dérivée, dérivant et re-dérivant cette nouvelle fonction, sans généralement aboutir. Le fait que le problème qu'ils ont à résoudre : celui du signe de la dérivée, n'est pas un problème global mais un problème local : seul nous intéresse en effet le signe de la dérivée, au voisinage de l'infini, leur échappe complètement. Même confrontés à de sérieuses difficultés techniques, ils ne changent généralement pas de point de vue, s'enferrant dans une approche globale du problème. Chaque année, l'introduction finalement de cette perspective locale, après maints errements de leur part, semble pour eux une découverte. Quoi ? Il suffisait de chercher la limite du numérateur de cette dérivée en $+\infty$, en l'occurrence $-\infty$, le terme prépondérant étant : $-x^2\,\mathbf{ln}(x)$, pour pouvoir garantir que la dérivée était négative au voisinage de l'infini et donc la fonction décroissante, et cela suffisait !

Et, pourtant, si l'on analyse les problèmes de CAPES, même à ce niveau avancé, c'est bien plus ce calcul enrichi par la manipulation des ordres de grandeur, associé à une bonne maîtrise de la localisation du regard qui y est en jeu qu'une analyse véritablement formelle. Celle-ci est en fait généralement encapsulée dans les théorèmes qui vont organiser et justifier la démarche suivie, comme ici le théorème assurant que deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents sont de même nature, ou le théorème des séries alternées.

Localisation des points de vue, enrichissement du calcul algébrique sont, comme nous avons essayé de le montrer, des évolutions majeures, emblématiques de l'entrée dans le monde de l'analyse. Peut-on aujourd'hui, dans les conditions qui sont celles de l'enseignement au lycée, amorcer ces reconstructions et en faire sentir aux élèves la profondeur épistémologique ? C'est ce point que nous aborderons dans la troisième partie de ce texte, en étudiant plus précisément comment les instruments technologiques actuels peuvent aider à rendre viables des choix didactiques dont on mesure bien à la fois l'importance et la complexité.

## 4. Enseignement de l'analyse et TICE

De très nombreux travaux de recherche ont étudié l'aide que les technologies informatiques pouvaient apporter à l'enseignement de l'analyse. Dès le début, deux voies principales ont été explorées : celle de la programmation dans les langages spécifiques et celle de la visualisation. Ce sont ces deux voies que nous présenterons brièvement, en nous référant à des travaux qui en sont emblématiques, pour commencer, avant de nous centrer sur deux recherches ayant cherché à exploiter plus particulièrement les TICE pour conjuguer localisation des regards et enrichissement du calcul par l'intégration des ordres de grandeur.

### 3. Deux potentialités privilégiées au départ : programmation et visualisation

La première voie : celle de la programmation est particulièrement bien illustrée par les travaux initiés par E. Dubinski (1991) qui ont conduit au développement de la théorie APOS et du langage ISETL (Dubinsky & Mac Donald, 2001). De façon très résumée, la théorie APOS6, basée sur l'épistémologie piagétienne, modélise la conceptualisation mathématique de la façon suivante : des actions sont intériorisées en processus, eux-même ensuite encapsulés en objets qui peuvent être réinvestis ensuite dans de nouvelles actions et de nouveaux processus. Ainsi en est-il par exemple du concept de fonction qui émerge comme processus par l'intériorisation d'actions menées sur des objets fonctionnels particuliers et, une fois encapsulé en objet, peut-être réinvesti dans d'autres processus, tels les processus de dérivation et d'intégration qui deviendront à leur tour des objets. Objets et processus sont enfin reliés à d'autres objets et processus à l'intérieur de schémas.

La deuxième voie est celle de la visualisation et le travail mené par David Tall, dès le début des années 80, en termes de "generic organiser" (voir pour une synthèse (Tall 1996)) en est un exemple pionnier et paradigmatique, à la fois. L'idée à la base de ce travail est de visualiser concepts et théorèmes, en utilisant les possibilités graphiques des ordinateurs. Elle conduit ainsi D. Tall à la notion de « tangente pratique ». Cette notion est associée aux approximations de la tangente mathématique, obtenues en considérant les droites passant par le point de la courbe en lequel on cherche à déterminer la tangente et un point très voisin (obtenu en fixant un pas h sur x). Ces droites se confondent à l'écran avec la tangente mathématique, dès que le pas h est suffisamment petit, se comportant pratiquement donc comme la tangente. Cette visualisation lui sert à introduire la notion de dérivée en un point puis de fonction dérivée. De même, la démonstration, dans le cas continu, du théorème fondamental de l'analyse reliant calcul différentiel et intégral est visualisée en utilisant le fait qu'une fonction continue en un point $a$ va être représentée par un segment horizontal à l'écran de l'ordinateur dès que l'on considère une fenêtre de la forme $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]\times[b, c]$ avec $\varepsilon$ suffisamment petit.

.[6] Dans l'acronyme APOS, A signifie Action, P signifie Processus, O signifie Objet et S signifie Schéma.

## 1. Visualisation et ordres de grandeur : les apports de deux recherches récentes

La potentialité de visualisation de la linéarité locale offerte par les ordinateurs, exploitée par D. Tall en termes de tangente pratique, est aussi à la base des deux recherches que nous évoquerons dans cette partie : la recherche que nous avons développé dans le cadre d'un projet de recherche sur l'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement initié en 1995 (Artigue et al., 1998) et la recherche menée plus récemment par M. Maschietto pour sa thèse (Maschietto, 2002). Mais ces deux recherches, plus que les travaux de D. Tall, se sont centrées sur le rôle que la technologie pouvait jouer, non seulement pour visualiser les concepts de l'analyse, mais aussi pour soutenir la mise en place et l'articulation des deux facettes dont nous avons pointé l'importance dans ce qui précède : la localisation des points de vue d'une part, l'intégration des ordres de grandeur au calcul d'autre part.

Les possibilités de zooms offertes par les calculatrices et logiciels rendent très facilement visible le fait que, pour beaucoup de représentations graphiques de fonctions, si l'on centre progressivement le regard au voisinage d'un point, on finit par voir un segment de droite. Le processus qui conduit à la tangente à la courbe au point considéré est mathématiquement un processus infini, engageant un passage à la limite, mais les caractéristiques graphiques des écrans rendent le phénomène de linéarisation locale visible, « à distance finie ». C'est cette caractéristique de l'implémentation informatique qui a été, dès le début, exploitée par D. Tall et l'a conduit à la notion de tangente pratique ; ce sont les visualisations associées que l'on retrouve dans de nombreux ouvrages concernant l'utilisation de calculatrices graphiques dans l'enseignement de l'analyse et, maintenant, dans de nombreux manuels de lycée. Elles nous sont devenues familières.

Ce qui est moins souligné, ce sont les limites de cette visualisation. Très souvent, dans les exemples choisis, la tangente au point considéré a une équation simple avec des coefficients, en particulier le coefficient directeur, entiers, et les approximations numériques de la calculatrice ou du logiciel conduisent, pour un agrandissement suffisant ou un pas assez petit, à l'affichage d'une équation, pour la droite tracée, qui est celle de la tangente. Ceci permet de laisser planer l'ambiguïté sur la nature réelle de l'objet qui apparaît à l'écran et de le confondre avec la tangente. C'est sans doute une solution confortable pour l'enseignant et qui ne gêne en rien les élèves, d'autant plus que généralement, cette visualisation fonctionne juste comme une entrée en matière et que l'on s'engage très vite dans un travail plus classique sur les dérivées. Mais, dans une culture où l'image est aussi omniprésente et aussi valorisée, une telle attitude nous semble tout à fait dommageable. Il importe en effet d'apprendre à distinguer ce que l'on voudrait que les images nous montrent de ce qu'elles nous montrent réellement, et les mathématiques, dans ce domaine comme dans bien d'autres, ont un rôle important à jouer.

C'est ce qui nous avait conduit, dans un projet de recherche sur l'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement initié en 1995 à, au contraire, construire un scénario didactique permettant d'interroger ces visualisations et de faire apparaître la notion de meilleure approximation affine et de dérivée, comme une réponse mathématique à ces interrogations. Ce scénario et les résultats de sa réalisation dans les classes expérimentales concernées sont analysés de façon détaillée dans (Artigue et al., 1998) et (Artigue, 2002). Nous en présenterons ici seulement les grandes lignes.

Dans ce scénario, on procède d'abord classiquement en étudiant comment évoluent les pentes des sécantes (AM) à la parabole d'équation y = x2 – 2, A étant le point d'abscisse 1 lorsque le point M se rapproche de A. Une construction effectuée sous le logiciel Cabri-géomètre, implanté dans la calculatrice TI92 utilisée permet de visualiser le phénomène et d'afficher les pentes des sécantes. Les élèves remarquent bien l'évolution des sécantes et de leur pente et, même si lorsque les deux points sont confondus rien n'est tracé comme ici et l'affichage du coefficient est : « undef », ils conjecturent sans difficulté particulière, dans ce processus visuel dynamique, l'existence d'une limite qui serait la droite passant par A de pente 2. Le fait que la limite soit entière favorise bien sûr la formulation de cette conjecture. Mais pourquoi cette droite là et non une autre ? C'est cette interrogation que le scénario essaie de faire vivre et de résoudre ensuite, en mathématisant le phénomène observé.

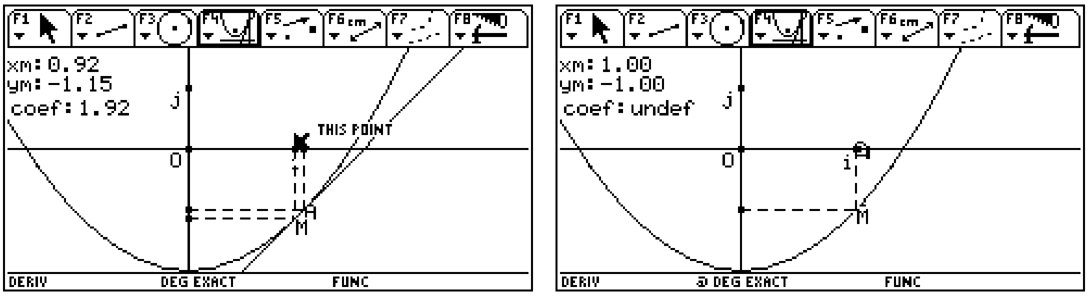



Figure 1 : Évolution des sécantes et situation limite

Pour cela, on a préalablement entré, dans l'application Y= de la calculatrice rétro-projetable, l'équation de la parabole, l'équation de la droite limite conjecturée et les équations de deux droites voisines passant aussi par le point A, les équations étant écrites sous une forme qui mette ces caractéristiques en évidence. Le scénario prévoit que l'enseignant ouvre l'application Y= et fasse interpréter les quatre équations présentes puis fasse tracer les représentations graphiques correspondantes dans la fenêtre standard. Les trois droites s'y confondent, contrairement aux attentes des élèves. On peut bien sûr envisager des zooms, et c'est ce que les élèves proposent immédiatement de faire, pour singulariser la droite de pente 2, mais force est de constater que cela ne change pas grand chose et que, de toutes façons, le problème reste posé pour des droites avec des coefficients directeurs beaucoup plus proche de 2. Ce à quoi le scénario veut confronter les élèves, dans cette phase collective, c'est que ce type de représentation permet de visualiser la proximité, mais qu'il ne permet pas d'en apprécier précisément la qualité, c'est à dire, en des termes mathématiques qui, bien sûr, ne sont pas ici employés, d'apprécier l'ordre de l'approximation.

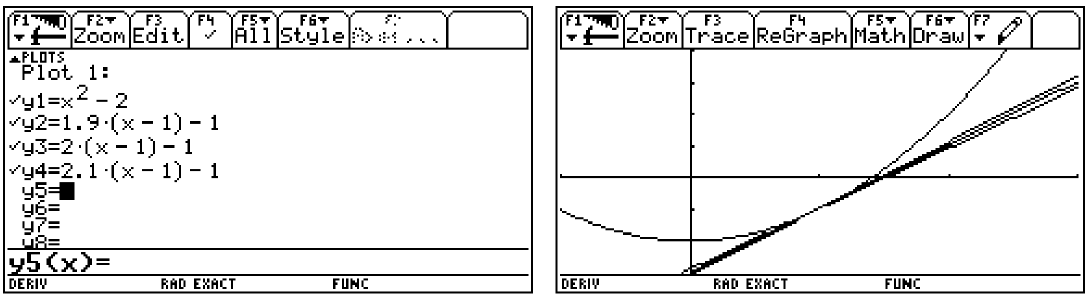



Figure 2 : Les tracés après agrandissement

Le problème étant posé, le scénario prévoit que la mathématisation s'engage sous la direction du professeur qui va aider les élèves à trouver un moyen de comparer les différentes droites du faisceau passant par A, du point de vue de leur proximité à la parabole au voisinage du point A. Ceci se fait, classiquement, en introduisant les distances, entre le point de la parabole et le point de chaque droite, de même abscisse 1+h, et en comparant ces distances. On fait l'hypothèse , dans ce scénario, que les élèves qui ont été déjà sensibilisés à la notion de négligeabilité relative par un travail antérieur sur les limites, vont réinvestir cette notion dans la comparaison, en s'apercevant que les trois distances tendent vers 0 quand h tend vers 0. C'est ce qui s'est passé effectivement dans les expérimentations menées. Les élèves ont montré que seule la distance associée à la droite de coefficient directeur 2 tendait vers 0 plus vite que h. On a, à ce point du scénario, singularisé la droite parmi un ensemble de trois. Le même calcul va être ensuite repris avec une droite quelconque du faisceau de pente m et aboutir à la conclusion que seule la droite de coefficient directeur 2 possède cette propriété qui la caractérise donc mathématiquement.

Ceci n'est bien sûr qu'un premier pas. La technique utilisée va être testée avec d'autres points et d'autres fonctions et l'on montrera, avec l'aide du calcul symbolique de la calculatrice, qu'elle permet, dans chaque cas, de vérifier les conjectures faites. On montrera aussi qu'au prix d'un léger aménagement, elle permet de calculer la valeur de m sans que l'on soit obligé de l'avoir conjecturée, et l'on arrivera ainsi au calcul de la dérivée en un point. Une fois ce calcul installé sur les exemples les plus simples, le scénario prévoit d'introduire la commande de dérivation formelle de la calculatrice et d'utiliser les résultats qu'elle produit, pour conjecturer les règles de calcul algébrique des dérivées. La calculatrice fonctionne ici comme une boîte noire productrice de calculs formels dont il s'agit de comprendre la logique, en s'appuyant sur le sens donné par les expériences précédentes à la notion de dérivée et sur les formulations qui en ont résulté.

Nous n'entrerons pas plus dans le détail de cette ingénierie didactique mais nous voudrions souligner que si, au départ, la localisation des points de vue, s'effectue dans le registre perceptif et graphique, c'est l'articulation de cette perception avec un calcul mobilisant les ordres de grandeur, via la notion de négligeabilité relative qui permet de faire sens de la visualisation et des invariants perceptifs sur lesquels cette dernière attire notre attention.

La recherche de M. Maschietto se situe dans une problématique proche puisque, ce qui y est étudié, ce sont les possibilités offertes par le mouvement de zoom que simulent les calculatrices graphiques pour problématiser, dès le début de l'enseignement de l'analyse, la localisation des points de vue, et soutenir le passage d'une vision globale de la linéarité à une vision locale de cette dernière. Elle se situe cependant, sur le plan théorique, dans une perspective sensiblement différente, de part ses références au champ de l' "embodied cognition" dont relèvent aussi les recherches mentionnées plus haut sur la continuité naturelle. Le scénario didactique qui en résulte et a été expérimenté à plusieurs reprises en Italie, est proche de celui précédemment décrit, dans son esprit, mais présente avec ce dernier des différences sensibles. Il n'utilise d'abord pas le même point de départ. M. Maschietto en effet n'utilise pas la visualisation du mouvement de la sécante comme nous l'avions fait mais se propose d'accéder à l'idée de linéarité locale à travers un processus de zooms successifs. Et c'est à travers la recherche puis la confrontation des équations proposées par les différents groupes d'élèves pour la droite affichée sur l'écran de leur calculatrice qu'est organisée, dans le scénario, le questionnement de la perception et lancé le travail de mathématisation. Il n'organise pas non plus, de la même façon, le travail au sein de la classe puisque chaque séance est conçue en deux temps : une longue phase de travail en groupes suivie d'une substantielle phase collective de bilan. L'enseignement s'adresse enfin, il faut le souligner, à des élèves du même niveau mais ayant une culture mathématique et technologique sensiblement différente. Les élèves ont déjà rencontré la notion de tangente dans le cadre de l'étude des coniques et la technique algébrique de détermination de la tangente a été institutionnalisée à cette occasion. En revanche, excepté pour une classe, ils sont peu familiers avec les calculatrices symboliques qui ne sont mises à leur disposition que quelques séances avant l'expérimentation. Ils n'ont pas non plus rencontré préalablement la notion de négligeabilité. Tout ceci va créer pour l'entrée dans le point de vue local des conditions particulières.

L'expérimentation, pour laquelle nous renvoyons le lecteur à l'article de M. Maschietto dans ces mêmes actes et à (Maschietto, 2002), montre que le phénomène de linéarité locale est rapidement découvert par les élèves, au cours des explorations qu'ils ont à mener, dans un travail de groupes, sur un certain nombre de fonctions. On voit aussi, à travers le langage dynamique qu'ils utilisent, que, même si au bout de quelques zooms seulement le tracé devient droit, les élèves cherchent à maintenir la distance entre les deux types d'objets, l'objet courbe et l'objet droit. Une différence essentielle avec les expérimentations menées en France est l'identification spontanée qu'opère un nombre non négligeable d'élèves, entre le tracé droit qui apparaît à l'écran de la calculatrice, et la tangente, via un mécanisme cognitif que les données recueillies ne permettent pas d'élucider complètement. Cette identification résiste même quand on propose aux élèves de mener le travail de mathématisation sur une fonction du troisième degré et non, comme cela a été le cas, dans la première expérimentation, sur une fonction du second degré. Cette identification de la tangente va, dans certains cas, bloquer l'avancée des élèves, qui veulent disposer d'une procédure algébrique exacte pour la déterminer, et semblent percevoir le recours à la démarche d'approximation proposée comme une régression. Enfin, la non disponibilité de la négligeabilité oblige l'enseignant à assumer plus de responsabilités dans l'introduction du nouveau calcul. Mais cette recherche, comme celle que nous avons menée, en dépit des différences, confirme bien l'accessibilité du point de vue local à des élèves débutant en analyse dans l'environnement technologique choisi et du calcul algébrique enrichi qui permet d'opérationnaliser ce point de vue.

### 2. En conclusion

Après avoir évoqué les deux grandes orientations sur lesquelles s'est élaborée au départ la réflexion sur les TICE en analyse, nous avons, dans la partie précédente, mis l'accent sur les potentialités des TICE, en privilégiant des recherches qui, répondant aux préoccupations que nous avions exprimé précédemment, mettaient l'accent sur les potentialités offertes pour la localisation de point de vue en jeu dans l'introduction de la notion de dérivée et pour la mise en place de techniques de calcul associées, mettant en jeu des raisonnements en termes d'ordre de grandeurs et de négligeabilité. C'est bien sûr là une vision très partielle des potentialités des TICE pour l'enseignement de l'analyse et nous voudrions le souligner dans cette conclusion. Les recherches et innovations menées sur l'enseignement de l'analyse dans l'environnement de calculatrices et logiciels ont par exemple bien mis en évidence les potentialités de ces technologies pour développer et exploiter des dispositifs permettant de faire vivre très tôt dans l'enseignement une approche cinématique à l'analyse, en mettant en jeu les mouvements mêmes du sujet et leur représentation (Kaput, 1992). Elles ont aussi montré comment les possibilités graphiques et symboliques de ces technologies permettent, non seulement de travailler sur des objets plus complexes et moins scolairement apprêtés, mais aussi d'approcher des familles d'objets, de faire vivre des problématiques de généralisation, à un moment où l'enseignement est encore centré sur l'étude d'objets spécifiques et où les compétences techniques des élèves leur donnent difficilement accès, sans aide instrumentale, à ce travail de généralisation. Et même si l'on envisage le seul passage d'un point de vue global à un point de vue local, nous n'avons abordé la question que très partiellement, à travers le filtre de la dérivation, alors que nous aurions pu l'aborder par exemple à travers l'étude des branches infinies, ce qui en aurait donné une image un peu différente.

Nous avons, aussi, dans ce qui précède, souligné l'importance qu'a en analyse le travail sur les ordres de grandeur. L'importance des ordres de grandeur va cependant bien au-delà de l'analyse et le rapport sur le calcul élaboré par la CREM (Kahane, 2002) dont nous avons piloté l'élaboration, comme l'annexe associée à ce rapport[7], le mettent clairement en évidence. En fait, c'est dès l'école élémentaire que la notion d'ordre de grandeur intervient et doit intervenir pour raisonner le calcul, anticiper ses résultats ou les contrôler, en particulier quand ils sont produits avec une calculatrice. Au fur et à mesure de la scolarité, des notions et techniques mathématiques vont permettre d'enrichir un rapport aux ordres de grandeur qui joue un rôle crucial dans la vie quotidienne, dans les rapports entre mathématiques et autres disciplines. Ainsi en est-il, au collège des puissances (puissances de 10 notamment) et des techniques de calcul associé. Ce travail doit déjà permettre aux élèves de dépasser, dans leur rapport au nombre, l'image d'homogénéité associée en mathématiques à la droite réelle. Nous voudrions illustrer ceci par un exemple extrait de l'annexe au rapport sur le calcul déjà citée. Il illustre bien, nous semble-t-il à la fois cette non homogénéité via l'existence du très grand et du très petit, mais aussi le fait que ces notions de très grand et de très petit dépendent des grandeurs engagées dans la comparaison. La négligeabilité y apparaît non comme quelque chose d'absolu mais comme quelque chose de relatif.

| |
|---|
| Combien y-a-t-il de molécules d'eau dans une goutte d'eau ? Y en a-t-il beaucoup plus, beaucoup moins que de gouttes d'eau dans la mer Méditerranée ? |

Mais si l'enseignement qui précède l'analyse, en mathématiques, comme dans les autres disciplines, crée une familiarité avec la notion d'ordre de grandeur et fait comprendre son importance, l'analyse va lui conférer un autre statut. En analyse, l'approximation devient constitutive des concepts eux-mêmes et la notion d'ordre de grandeur, la comparaison des ordres de grandeur deviennent de ce fait fondamentales.

[7] Cette annexe est disponible sur différents sites avec les autres rapports et annexes aux rapports de la CREM, par exemple le site de l'APMEP, le site de la SMF.

Une fonction dérivable en un point est ainsi une fonction approximable au premier ordre par une fonction affine au voisinage de ce point. Il y a, sous-jacente, une reconstruction profonde du rapport aux ordres de grandeur que l'on ne saurait sous-estimer.

## 5. Conclusion

Nous avons, dans la première partie de ce texte, souligné les problèmes que pose l'enseignement de l'analyse aujourd'hui, en situant cet enseignement dans son histoire pour essayer de mieux comprendre ce qui faisait la spécificité de la situation actuelle. Dans une seconde partie, nous avons pointé un certain nombre de difficultés inhérentes à l'apprentissage de l'analyse, en mettant en particulier l'accent sur les nombreuses reconstructions que cet apprentissage nécessite, au fil de l'évolution des niveaux de conceptualisation dans ce domaine. Nous en sommes ensuite venue à deux évolutions qui nous semblaient emblématiques de l'entrée dans le champ de l'analyse : la localisation des points de vue et, au-delà de cette localisation, l'articulation dialectique des rapports entre point de vue local et point de vue global d'une part, l'intégration au calcul algébrique des notions d'ordre de grandeur et de négligeabilité d'autre part. Ces évolutions vont permettre d'opérationnaliser les notions introduites, dès les premiers niveaux de conceptualisation, avant même que ne se mette en place un rapport formalisé aux objets de l'analyse et elles continueront ensuite à jouer un rôle essentiel. Ces évolutions sont, on le sait délicates, d'autant plus délicates aujourd'hui que le contexte de l'enseignement est plus difficile (enseignement de masse, réductions substantielle des horaires…). Elles doivent être engagées et travaillées tôt, sont exigeantes tant du point de vue conceptuel que technique et l'on peut se demander s'il ne s'agit pas là d'ambitions irréalistes dans les conditions actuelles. Ce n'est pas notre position et, prenant en compte l'évolution des outils de l'activité mathématique et des outils de l'enseignement de cette discipline, nous nous sommes alors interrogée sur l'aide que pouvaient apporter les TICE à leur réalisation. Ces aides sont certaines même si, comme le montrent les recherches, la construction de scénarios didactiques permettant d'en tirer efficacement profit ne va pas tout à fait de soi. Et il nous semble qu'elles devraient pouvoir contribuer à rendre viables, si des efforts suffisants sont faits au niveau de la formation des enseignants et de la production de ressources didactiques adaptées, des choix curriculaires raisonnablement ambitieux.

Nous voudrions enfin, à travers ce texte, avoir contribué à convaincre ses lecteurs que l'enseignement de l'analyse a d'importants défis à relever, qu'il doit justifier la place qui lui est ou lui sera accordée à l'avenir dans l'enseignement secondaire et que ceci ne va pas de soi. Ces défis ne seront certainement pas faciles à relever car, si l'on ne vide pas l'enseignement de l'analyse de toute ambition, c'est un enseignement nécessairement difficile. Mais, si les conditions qui sont celles de l'enseignement actuel, par de nombreux aspects, ne facilitent pas la tâche des enseignants, ces derniers disposent par ailleurs aujourd'hui de ressources qui, si elles sont convenablement exploitées, ce qui est loin d'être le cas, devraient permettre d'atteindre des fonctionnements plus satisfaisants. Ceci suppose une cohérence entre les valeurs attribuées à cet enseignement, son contenu et les moyens qui lui sont attribués, une attention particulière aux conditions de viabilité des choix préconisés, mais nous avons peut-être la chance d'être à un moment où le statut quo ne peut perdurer.

## 6. Références


ARTIGUE M. (1993) : Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM* nº 11, 115-139.

ARTIGUE M. (1996) : Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée, in B. BELHOSTE & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, 197-217. Éd. Vuibert, Paris.

ARTIGUE M. (1998) : L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 18.2, 231-262.

ARTIGUE M. et al. (1998) : L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement des mathématiques au lycée. *Cahier DIDIREM*, nº spécial 3. IREM Paris 7.

ARTIGUE M. (2001) : L'entrée dans le champ conceptuel de l'analyse : réformes curriculaires, recherches didactiques, où en est-on ?, in T. ASSUDE & B. GRUGEON (eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2000*, 277-301. IREM Paris 7.

ARTIGUE M. (2002) : L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques In D. GUIN & L. TROUCHE (eds). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BELHOSTE B. (1996) : Réformer ou conserver ? La place des sciences dans les transformations de l'enseignement secondaire en France (1900-1970), in B. BELHOSTE & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger,* 197-217. Éd.. Vuibert, Paris.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999) : La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.

CASTELA C. (1995) : Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15/1, 7-47.

CHEVALLARD Y. (1992) : Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 77-111.

DUBINSKY E. (1991): Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

DUBINSKY E., MC DONALD M. (2001): APOS : a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers (to appear).

GUIN D. & TROUCHE L. (eds). (2002) : *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

KAHANE J.P. (ed.) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques.* Paris, Odile Jacob.

KAPUT, J. (1992). Technology and Mathematics Education, in D. Grouws (Ed.) *Handbook of research in mathematics teaching and learning,* 515-556. New York, Macmillan.

LAKOFF G., NUÑEZ R. (2000): *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being.* New York, Basic Books.

MASCHIETTO M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu local – global dans l'environnement de calculatrices.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

NUÑEZ R., EDWARDS L.D., MATOS J.P. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 39, 45-65.

POINCARÉ H. (1904). Les définitions en mathématiques. *L'Enseignement Mathématique, 6*, 255-283.

ROBERT A., SPEER N. (2001). Research on the teaching and learning of calculus / elementary analysis, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study.* Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (to appear).

TALL D. (1996). Functions and Calculus, in A.J. Bishop  al.  (eds), *International Handbook of Research in Mathematics Education,* 289-325. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

# RÉFLEXION SUR L'APPROCHE DE L'ANALYSE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR

Robert LUTZ
Université de Haute Alsace

Depuis 1993, nous avons mené à Mulhouse une réflexion approfondie sur l'enseignement de l'Analyse au niveau élémentaire, suivie à partir de 1996-97 par une campagne d'expérimentation au lycée et dans le premier cycle universitaire dans le cadre des IREM d'Alsace et de Picardie. Le concept fondamental sur lequel repose la démarche que nous avons mise au point est celui *d'ordre de grandeur absolu*. L'objet de cette conférence est de réfléchir avec vous sur les lignes de force et les résultats principaux de ces travaux, présentés dans les publications [1] et [2], en insistant sur leur signification intrinsèque et sur le sens de leur application pratique.

L'enseignement de l'analyse est centré sur la compréhension et l'assimilation progressive par les élèves des notions de *nombre réel, limite de suites et de fonctions, dérivées, intégrales*. ainsi que des notions géométriques associées: *tangentes, asymptotes, aires*… On aimerait évidemment, dans la mesure du possible, marier l'intuition et la rigueur, ou au moins distinguer nettement ce qui est admis à la suite d'une justification heuristique de ce qui est déduit.

Une pédagogie bien pensée s'appuie nécessairement sur un choix didactique qui relève d'une philosophie de l'acte éducatif. Celui que nous privilégions est sous-tendu par l'antique idée « d' accouchement des esprits », la *maïeutique* chère à Socrate. C'est dire que nous voulons essayer de faire émerger les notions fondamentales de l'analyse des profondeurs inconscientes où elles font partie du patrimoine archétypal de la personne humaine. Notre démarche est donc la conséquence d'un choix anthropologique qui nous conduit à connecter les lignes directrices de l'apprentissage des mathématiques aux racines profondes des concepts concernés. Quelle est l'origine de la notion de nombre réel ? De celle de limite ? La réponse ne peut venir des mathématiques, lesquelles sont auto-référentes pour la forme, mais pas pour le sens. *La réponse ne peut venir que d'une vision anthropologique de la notion de nombre.*

La notion empirique, ou plutôt anthropologique, de nombre entier est caractérisée par l'opération de succession qu'une personne humaine peut répéter autant de fois qu'elle veut, pourvu qu'elle en ait la capacité mentale. Cette opération est inusable; elle ne porte aucune trace de ses utilisations antérieures. Elle détermine l'ordre entre les entiers et les opérations d'addition, de multiplication, d'exponentiation que l'on peut réaliser sur eux. Les procédés de numération nous permettent de nommer de manière condensée les nombres constructibles à partir de zéro par application répétée de la succession. Nous augmentons ainsi le rayon d'action de notre capacité à « écrire » des nombres. Mais nous avons bien conscience qu'il est impossible à quiconque d'épuiser, ou même simplement de concevoir, la liste de tout ce que l'algorithme de succession peut produire. Une part de la production reste fondamentalement inaccessible à l'homme. C'est seulement par analogie (entretenue par la confusion entre la notion anthropologique d'entier et la notion abstraite d'entier « naturel », qui nous a été inculquée sous ce nom par nos professeurs de mathématiques) que nous donnons encore le statut de nombre entiers aux constituants de cette production inaccessible. Cette analogie nous conduit à prétendre que :

(i) *tous les entiers plus grands qu'un entier inaccessible sont inaccessibles ;*

(ii) *si la somme ou le produit de deux entiers est inaccessible, au moins l'un des deux est inaccessible ;*

(iii) *si la puissance n-ième d'un entier est inaccessible, c'est que cet entier ou l'exposant n l'est aussi.*

Bien entendu, nous pressentons qu'il y a des entiers qui n'ont pas encore été utilisés ou même nommés, mais qui sont susceptibles de l'être un de ces jours. Appelons les *potentiels* . Dès que, pour des raisons fortuites, ils auront été nommés par quelqu'un, ils seront devenus *contingents.* Mais tous les entiers déjà nommés ne sont pas contingents: certains d'entre eux sont *nécessaires* à la pratique des nombres, comme 0, 1, 2,…, 9, 10, 11, 12 et bien d'autres sans lesquels la vie quotidienne ne serait pas possible. La frontière entre la catégorie des entiers potentiels et celle des entiers inaccessibles est *floue.* Il en est de même de la frontière entre la catégorie des entiers nécessaires et celle des entiers contingents. Ceci n'est pas surprenant pour des catégories liées à la perception humaine et à l'impossibilité d'obtenir des informations précises sur l'utilisation effective des nombres dans une communauté donnée. Notons que les quatre catégories sont reliées par deux relations d'analogie (« ne pas avoir été nommé » d'un côté, « avoir été nommé » de l'autre) et par une transformation entre entiers potentiels et entiers contingents qui est encadrée par les points fixes que sont les entiers inaccessibles et les entiers nécessaires. Par contre il n'y a aucune relation d'analogie entre entiers nécessaires et entiers non nommés, ou entre entiers inaccessibles et entiers nommés. La structure épistémologique des quatre catégories peut donc être représentée par un tétraèdre, de la manière suivante :

On peut montrer qu'une telle structure quaternaire différenciant une totalité – ici celle des nombres – se retrouve de manière universelle partout où la perception du monde par l'homme est concernée (voir [3], qui concerne en particulier un point de vue anthropologique sur les mathématiques). Nous allons voir qu'elle mène naturellement aux concepts de l'analyse pourvu qu'on les exprime dans un langage mathématique afférent à une modélisation qui préserve le caractère flou des transitions. En d'autres termes, il s'agit de faire correspondre au modèle anthropologique des entiers un modèle mathématique où se trouvent traduites en termes formels les propriétés (i), (ii), (iii) constatées ci-dessus et leurs conséquences logiques. Notons que la catégorie des entiers inaccessibles est une sorte de *néant numérique* pour l'homme, dont l'existence est indispensable à la différenciation entre entiers nommés et non nommés. C'est pourquoi le modèle mathématique que nous voulons constituer doit comporter un concept correspondant à celui d'entier inaccessible, vérifiant l'analogue des trois propriétés ci-dessus. Or il n'y a rien de tel dans les mathématiques classiques ! Il nous faut le construire. C'est pourquoi nous devons d'abord explorer un peu plus avant cette mathématique anthropologique qui préexiste aux mathématiques abstraites et formalisées. Voyons comment la notion de limite y trouve sa racine. Considérons par exemple le rapport d'accroissements $R(h) = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2 + h$ . Newton nous invitait à évaluer la valeur de ce rapport « juste avant que $h$ ne s'évanouisse », provoquant l'ironie de Berkeley qui y voyait poétiquement « le fantôme des quantités disparues ». Mais il n'y a pas de « juste avant… » newtonien, car les nombres réels ne sont pas bien ordonnés comme les entiers: entre deux réels il y en a une infinité d'autres. Dans un esprit différent, Leibniz nous invitait à calculer la « vraie valeur » de

$R(h)$ lorsque $h$ est *infiniment petit,* en précisant qu'il ne fallait pas prendre ceci pour une propriété de « quantités » mais *comme une manière de parler qui facilite l'invention.* En d'autres termes, nous dirions aujourd'hui *comme un formalisme qui facilite la découverte et le maniement du concept de limite,* c'est à dire exactement ce qui nous préoccupe dans ce colloque.

Les continuateurs de Leibniz, en particulier le baron de l'Hospital, ont voulu par force définir la notion de nombre infiniment petit en termes des mathématiques héritées des grecs, c'est à dire « dans le style d'Archimède » comme l'a écrit Leibniz. Ils s'y sont cassé les dents, faute de pouvoir se placer dans un contexte mathématique plus large. Mais l'intuition qui sous-tendait le formalisme leibnizien était fondée, sans qu'il en ait clairement conscience, sur le modèle anthropologique. N'oublions pas que pour Leibniz, aussi bien en mathématique qu'en physique, la notion de relation entre choses était première par rapport à la nature des choses.

Revenons à notre rapport $R(h)$ de « quantités évanouissantes ». Dans le modèle anthropologique, si nous pensons aux accroissements $h$ tels que la partie entière de $\left|\frac{1}{h}\right|$ soit inaccessible – appelons les *accroissements imperceptibles – ,* nous constatons qu'aucune majoration explicite ou potentielle de $R(h)$ ne permet de le distinguer de la valeur 2. Nous dirons donc que la « vraie valeur » du rapport « à la limite » est 2. Ce constat purement statique permet de donner un sens à la notion de vitesse instantanée: il s'agit de la vitesse moyenne, connue à des fluctuations imperceptibles près, entre deux instants distincts de différence imperceptible. Comment allons nous calculer cette vitesse pour des points qui se meuvent de manière compliquée sur un axe ? Eh! Bien, nous allons utiliser des propriétés qui se déduisent logiquement des constats (i), (ii), (iii) sur les entiers inaccessibles. En voici quelques-unes :

– *la somme et le produit de deux nombres imperceptibles sont imperceptibles ;*

– *le rapport d'un nombre imperceptible et d'un nombre qui ne l'est pas est imperceptible ;*

– *la somme et le produit de deux nombres qui ne sont pas de partie entière inaccessible ont la même propriété.*

À quels types de « nombres » s'appliquent ces propriétés ? Parler de « nombres réels » n'a pas de sens dans le contexte anthropologique de notre discussion. Nous avons des entiers potentiels ou nommés et un « fond du paysage » constitué de ce que nous appelons entiers inaccessibles. Sur le « seuil » entre les potentiels et les contingents nous trouvons les entiers nécessaires à l'avènement des entiers potentiels dans le champ du contingent : par exemple les nombres de 0 à 9 qui nous servent à écrire des nombres dans le système indo-arabe. À partir de là nous pouvons construire des fractions, étendre l'ordre et les deux opérations et vérifier que deux fractions sont équivalentes ou non. Ce sont là les « nombres » auxquels s'appliquent les propriétés ci-dessus, deux fractions équivalentes déterminant le même nombre. Ces nombres se répartissent en « paquets » au sein desquels les différences sont imperceptibles. Certains de ces paquets contiennent des éléments qui se représentent par une fraction de numérateur et de dénominateur accessibles: ce sont les « rationnels accessibles ». D'autres paquets ne peuvent pas contenir de tels rationnels accessibles, par exemple le paquet des rationnels positifs dont le carré ne diffère que imperceptiblement de 2 . En effet, dans le cas contraire, on aurait des entiers tels que $\frac{p^2}{q^2} - 2$ soit imperceptible, avec $q$ accessible, donc aussi $q^2$. On en déduirait que $p^2 - 2q^2$ est un entier imperceptible, donc nul (sinon son inverse serait inaccessible, alors que $p^2$ ne l'est pas). Si nous appelons $\sqrt{2}$ le paquet correspondant, dans tout calcul effectif ou potentiel, nous ne ferons qu'une erreur imperceptible en écrivant que le carré d'un élément de ce paquet est égal à 2.

Ces considérations laissent entrevoir que le modèle anthropologique des nombres entiers porte en lui l'essentiel du contenu scientifique de la théorie des nombres réels, et par là de l'analyse mathématique. Il justifie de ce fait toutes les approches didactiques où l'on évoque de manière heuristique des nombres « très grands » ou « très petits » en faisant confiance à l'intuition des élèves pour y mettre du contenu.

À partir de ces racines anthropologiques de l'analyse, revenons maintenant à la recherche d'une modélisation mathématiques susceptible de placer le contenu scientifique correspondant dans un cadre déductif abstrait ou formel.

Le modèle ensembliste classique fondé sur un ensemble **N** dont tous les éléments (à part 0) ont le même statut ne suffit évidemment pas. Il revient à évacuer des mathématiques tout ce qui pourrait rappeler les limitations naturelles des capacités efficientes de l'homme. L'adopter sans nuance créé automatiquement une difficulté d'assimilation pour les élèves qui doivent se familiariser avec les mathématiques, *car on triche avec la réalité*. Depuis que les Grecs en ont édifié les canons, les mathématiques trichent d'ailleurs beaucoup avec la réalité, par souci de préserver la pureté d'un monde idéal sans erreurs où les entités mathématiques sont supposées vivre. Là où des droites idéales peuvent ne rencontrer un cercle idéal qu'en un seul point, alors que dans la réalité, on ne trouve que des pointillés plus ou moins alignés qui frôlent des pointillés plus ou moins circulaires dans une petite zone de taille imperceptible à l'œil nu. Il s'agit certes d'une démarche efficace *pour construire l'édifice mathématique*, mais à trop éluder le sens des choses on créé des difficultés didactiques dont l'Analyse offre des exemples flagrants. Car ce n'est pas tant l'abstraction ou le formalisme en eux-mêmes qui effraient nos élèves ou nos étudiants que le manque de sens des concepts proposés par leurs maîtres (au sens propre et au figuré: on ne « sent » rien). Le sens fait tragiquement peur aux familiers des mathématiques, car il est riche de connotations humaines qui sont réputées pouvoir troubler l'entendement. On apprécie la froide rigueur des formules sorties de tout contexte sensible. Au risque de rendre ces mathématiques stériles, sans saveur et pour tout dire inutiles puisqu'elles sont déconnectées de la fécondité du monde réel *où tout n'est qu'approximation, essai, arrangement d'ordre et de non-ordre qui en constituent la vérité et la beauté et le rendent vivable.*

Adjoignons donc hardiment au langage mathématique classique les mots qu'il faut, disons *entier très grand,* comme contre-partie mathématique de la notion anthropologique d'entier inaccessible. Adjoignons les axiomes suivants, dits « externes » ( par rapport aux mathématiques classiques) aux axiomes usuels (lesquels sont réservés aux objets des mathématiques classiques) :

*(i) L'entier 1 n'est pas très grand ;*

*(ii) Tout entier supérieur à un entier très grand est très grand ;*

*(iii) Si la somme de deux entiers est très grande, l'un des termes est très grand ;*

*(iv) Si le produit de deux entiers est très grand, l'un des facteurs est très grand ;*

*(v) Si $x^y$ est très grand, alors x ou y est très grand ;*

*(vi) Il existe un entier très grand.*

Bien entendu, il ne faut pas donner à ce « il existe » la signification concrète « voilà un exemple de nombre empirique très grand »; cela reviendrait à confondre le concret et l'abstrait. Autre confusion, plus subtile, réservée aux mathématiciens (faussement ?) naïfs: « il existe » signifierait « voilà une construction ensembliste qui définit de manière unique un exemple d'entier très grand » ; j'y croirai lorsqu'on m'en aura montré un . En fait, l'axiome externe (vi) ne dit rien sur le contexte ensembliste classique: nous sommes dans un contexte plus riche, avec un langage et des axiomes qui complètent ceux du contexte classique. Cela permet une puissance modélisatrice des mathématiques plus grande, que nous pouvons mettre à profit pour introduire les concepts de l'analyse d'une manière qui soit en symbiose avec leurs racines anthropologiques.

Notons que le caractère flou des transitions anthropologiques se retrouve bien dans notre modélisation axiomatique, comme nous le souhaitions plus haut. En effet, il ne peut exister de plus petit entier très grand, sinon l'entier précédent serait aussi très grand, ce qui est contradictoire. Sous réserve que la contradiction soit exclue de notre théorie, la conclusion en résulte. J'évoquerai ce point tout à l'heure.

Bien entendu il y a là un paradoxe apparent, puisque les propriétés de Péano assurent que toute partie de l'ensemble des entiers naturels admet un plus petit élément. Mais il se dissout si l'on se rappelle que seules les propriétés exprimables dans le langage ensembliste classique définissent automatiquement des sous ensembles. Or « très grand » n'est pas de ce type, pas plus que « sympathique » ou « jaune ».

Si l'on accepte, comme on en a l'habitude, de faire l'impasse sur une introduction classique sérieuse des nombres réels, on peut introduire les concepts fondamentaux de l'Analyse en considérant que la notion d'entiers naturel très grand structure les ordres de grandeur de nombres réels de la manière suivante :

– *un réel positif (resp. négatif) dont la partie entière est très grande est dit très grand positif (resp. négatif) ;*
– *un réel est dit modéré si sa valeur absolue n'est pas très grande ;*
– *un réel est dit très petit s'il est nul ou si la valeur absolue de son inverse est très grande ;*
– *deux réels dont la différence est très petite sont dits très proches.*

Les axiomes (i) à (vi) ont pour conséquences les « règles de Leibniz » :

*modéré + modéré = modéré ; très petit + très petit = très petit*
*modéré . modéré = modéré ; très petit . modéré = très petit*

Ces règles permettent de lever n'importe quelle indétermination algébrique, bardée de polynômes, de racines, de fractions rationnelles etc.

Pour les autres indéterminations, impliquant des fonctions non algébriques comme le sinus, le logarithme ou l'exponentielle, il faut choisir des propriétés de base qui aboutissent à des constats en termes d'ordres de grandeur. Par exemple de l'encadrement empiriquement évident $\sin x \leq x \leq \tan x$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et de l'imparité du sinus on déduit aisément que pour tout $h \approx 0$, $h \neq 0$, on a $\frac{\sin h}{h} \approx 1$ et $\frac{\cos h - 1}{h^2} \approx -\frac{1}{2}$.

On peut bien entendu construire un cours sur la dérivation et l'intégration en utilisant ces concepts d'ordres de grandeur. Si l'on désire introduire la notion de fonction dérivée, il faut élargir un peu plus le contexte externe en introduisant les notions de nombre réel et de fonction explicités qui sont les pendants abstraits des notions anthropologiques *de nombres et de fonctions accessibles à la connaissance de l'homme*. Je renvoie aux références [1] et [2] pour une abondante illustration de ce type d'enseignement, qui a fait l'objet des expérimentations citées au début de cette conférence. Les ateliers qui suivent vous en feront partager le charme et la saveur.

Pour terminer, je voudrais insister sur un point qui nous a constamment guidé au cours de ces années de réflexion et d'expérimentation. Tous les collègues, dont certains sont parmi nous, qui y ont participé ont voulu faire vivre leurs classes ou leurs amphis en donnant accès de manière intuitivement acceptable aux concepts de base, *tout en permettant à la fois une discussion riche sur les nombres réels et une pratique naturelle du raisonnement formel sur les nombres et les fonctions.* Du point de vue épistémologique, ce qui rend la réalisation de cette double ambition possible est le fait que les définitions de limites, dérivées etc. en termes d'ordres de grandeur rendent les démonstrations directes, car dans leurs expressions les quantificateurs « vont dans le bon sens ». Par exemple, dire que la suite explicitée $u_n$ tend vers 1 en écrivant que « pour tout $n$ très grand, $u_n$ est très proche de 1 » permet d'enchaîner des conséquences nécessaires qui vont de l'hypothèse à la conclusion par simple contemplation des valeurs obtenues à chaque étape du raisonnement. L'expression classique de la limite « pour tout $\varepsilon > 0$ il existe… » nécessite, dans la phase de construction du raisonnement, de remonter de la conclusion à l'hypothèse en enchaînant une suite de conditions suffisantes, ce qui est rarement naturel. La difficulté de l'analyse mathématique est concentrée dans ce constat…

Je n'ai rien dit à propos de la légitimité logique de l'approche en termes d'ordres de grandeur. Elle est abondamment discutée dans les brochures [1] et [2]. Il suffit de savoir que l'introduction des ordres de grandeur ne trahit ni par excès ni par défaut les mathématiques classiques. En termes spécialisés, nous travaillons dans une *extension conservative* de la théorie des ensembles classique, et par conséquent ni plus ni moins contradictoire que celle-ci. *Cela signifie qu'un énoncé du langage classique est un théorème dans la théorie étendue si et seulement si il est un théorème dans la théorie classique.* Il ne s'agit donc pas, *pour ce qui concerne les propriétés exprimables dans le langage classique,* d'un contexte mathématique alternatif, mais d'une autre formulation du même contenu conceptuel, plus directe et plus conforme à l'art d'inventer, comme le disait si bien Gottfried Wilhelm Leibniz de son calcul infinitésimal il y a trois siècles.

**Références**

[1] R. LUTZ, A. MAKHLOUF, E. MEYER, *Fondement pour un enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur: les réels dévoilés,* Paris, APMEP, n°103, 1996.

[2] Groupe « ORDRES DE GRANDEUR » de l'IREM de Picardie, *Analyse en termes d'ordres de grandeur: de l'intuition aux concepts,* IREM de Strasbourg, n°182, 2001.

[3] J.F. FROGER, R. LUTZ, *Structure de la connaissance, sens des nombres et beauté des mathématiques,* Éd. DesIris, Méolans-Revel, 2003.

# NÉGLIGER DES TERMES ? OPPORTUNITÉS ET DIFFICULTÉS

Marysa KRYSINSKA AHA et GEM Louvain-la-neuve
Maggy SCHNEIDER AHA et université de Namur

**Résumé :** L'apprentissage de l'analyse mathématique donne l'occasion aux élèves d'identifier une nouvelle technique, la négligence de termes, qui peut être ultérieurement institutionnalisée par le biais, soit du concept de limite, soit de celui de réels très proches . L'exposé montre comment une approche heuristique de l'analyse, qui fait la part belle à la modélisation des grandeurs, est susceptible de préparer les élèves à entrer dans une présentation axiomatique en termes d'ordres de grandeurs tout en faisant apparaître en amont de cette dernière quelques difficultés d'apprentissage potentielles liées à la définition de grandeurs telles que les aires ou les vitesses.

Un des objectifs du colloque organisé à Mulhouse sur le thème « Regards et perspectives sur l'enseignement de l'Analyse au lycée et dans les formations universitaires de base » était de confronter plusieurs enseignement de l'analyse avec une approche en termes d'ordres de grandeurs telle que développée par le groupe ORDRE DE GRANDEUR de l'IREM de Picardie. À cette occasion, nous avons présenté une approche heuristique de l'analyse, le projet AHA, qui fait la part belle à la modélisation des grandeurs, ainsi qu'à la phase d'expérimentation mobilisant divers registres. Il nous est apparu que cette approche était susceptible de préparer les élèves à entrer dans le jeu axiomatique que constituait une présentation de l'analyse avec une approche en termes d'ordres de grandeurs tout en faisant apparaître quelques difficultés d'apprentissage potentielles en amont de cette dernière. C'est cela que nous voulons illustrer dans ces quelques lignes, en nous inspirant d'écrits antérieurs qui présentent et analysent les enjeux du projet AHA (e.a. Groupe AHA, 1999a et 1999b ; M. Grang'Henry-Krysinska et al.., 1993 ; C. Hauchart et al., 1996 ; M. Schneider, 2001a et 2001b). À cette fin, nous avons polarisé notre propos, d'une part, sur l'approche des asymptotes et, d'autre part, d=sur l'introduction des dérivées. Nous renvoyons aux références précédentes tout lecteur qui souhaiterait appréhender de manière plus globale les visées et les ressorts de ce projet.

## 1. Les asymptotes dans le projet AHA

### 1. Comportements asymptotiques de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

Dans le projet AHA, l'étude du comportement asymptotique de fonction prolonge celle du comportement asymptotique de plusieurs suites. Dans un premier temps, le tracé précis des graphiques de fonctions du type $y = x^n$ et $y = 1/ x^n$ fournit aux élèves l'occasion de comparer des ordres de grandeurs au voisinage de certaines valeurs de la variable : si x est suffisamment grand, $1/x$ peut être considéré comme négligeable et *a fortiori* $1/x^2$, $1/x^3$, etc.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ fait l'objet d'un examen plus approfondi, s'appuyant sur des registres numérique et graphique et favorisant les passages de l'un à l'autre. La construction du graphique et l'observation de tableaux numériques suscitent, chez les élèves, des propos tels que :

« Pour les x positifs petits, $\frac{1}{x}$ est positif grand, d'autant plus grand que x est plus petit »

« D’autre part, dès que x croît, $\frac{1}{x}$ décroît et s’approche de plus en plus de 0 au fur et à mesure que x devient grand »

« Quand x s’approche de 0 en venant de droite, le graphique de $\frac{1}{x}$ monte de plus en plus haut en s’approchant de l’axe Oy »

« Une partie du graphique semble se confondre avec l’axe Oy quand on le regarde de loin »

« Une partie du graphique semble se confondre avec l’axe Ox quand on le regarde de loin »

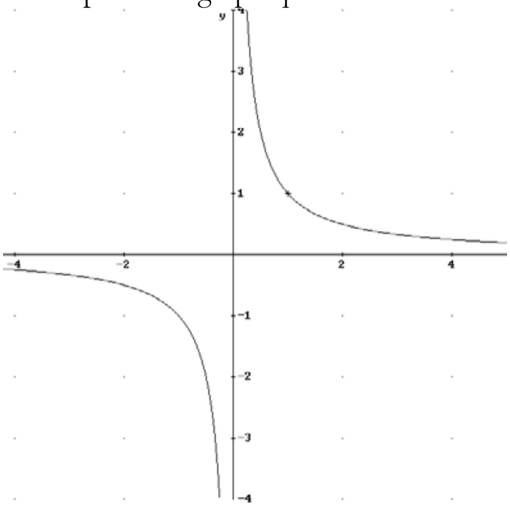


Figure 1

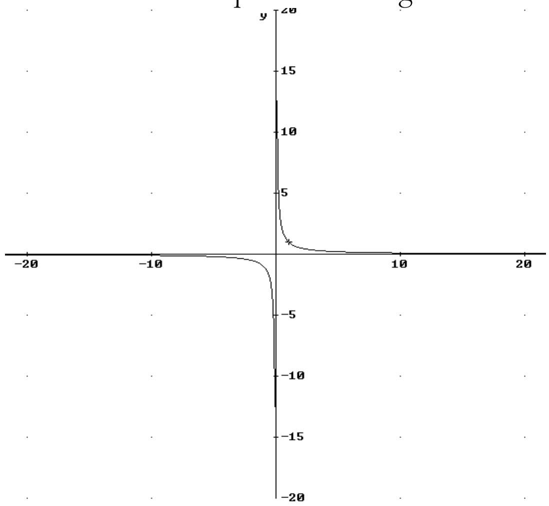


Figure 2

Cette expérimentation permet de donner une première signification au concept d’asymptote, mise en évidence par des choix judicieux de fenêtres sur une calculatrice graphique : “ On dira dans ce cas que la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale au graphique de la fonction f(x) = $\frac{1}{x}$ et que la droite y = 0 en est une asymptote horizontale parce que la courbe devient de plus en plus proche de ces droites au fur et à mesure qu’on la regarde de loin ”. Les écritures canoniques en termes de limite sont introduites pour décrire le phénomène.

Les asymptotes des fonctions $y = 1/x^n$ se déduisent alors de la position de leurs graphiques respectifs par rapport à celui de la fonction (Figure 3)

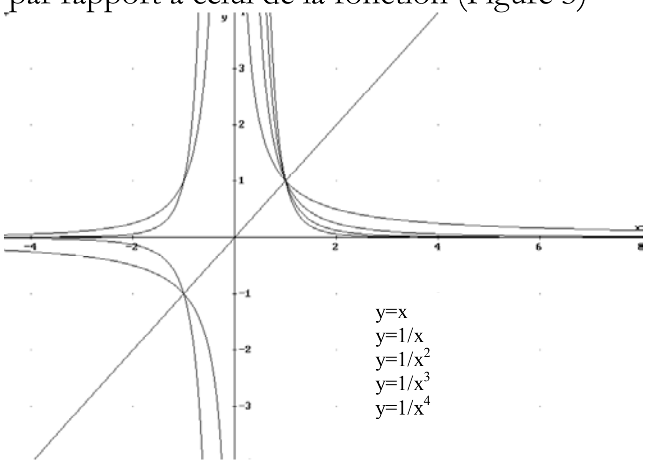



Figure 3

## 2. Comportements asymptotiques des fonctions de la classe $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

Un premier exemple de fonction homographique apparaît dans un contexte de grandeurs: “ Un toit en pente s'appuie sur les murs d’une maison. Ceux-ci sont hauts de 3 m et écartés l'un de l'autre de 4 m. Le toit peut être plus en moins incliné.” (Figure 4). Les comportements asymptotiques de cette fonction sont mis sur le tapis par des questions telles que : “ Comment varie la hauteur h du faîte lorsque la distance x s’approche de 2 m ? Comment varie h lorsque x devient de plus en plus grand ? ”

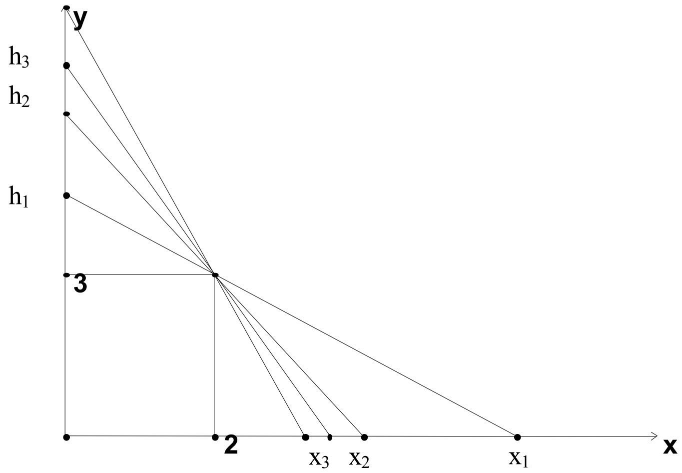



Figure 4

Ces comportements asymptotiques sont ainsi étudiés conjointement selon dans plusieurs registres : géométrique, numérique, analytique et graphique. D'abord, ce comportement peut être observé sur la Figure 4 : quand x s'éloigne de l'origine, h diminue en s'approchant de 3 ; quand x s'approche de 2, h devient de plus en plus grand. Ce comportement est ensuite traduit en deux expressions fonctionnelles : $h = \frac{3x}{x-2}$ et $h = \frac{6}{x-2} + 3$.

Quand on exploite des valeurs numériques de l'expression $h = \frac{3x}{x-2}$, on observe que plus x est proche de 2, plus le dénominateur de la fraction est proche de 0 et plus la fraction est grande ; plus x est grand, plus la fraction est proche de 3. Quand on transforme la formule $h = \frac{3x}{x-2}$ en $\frac{3}{1-\frac{2}{x}}$, on raisonne ainsi : “ lorsque x devient très grand, $\frac{2}{x}$ s'approche de 0 d'aussi près que l'on veut et la fraction s'approche de 3 d'aussi près que l'on veut pour autant que x soit suffisamment grand”. Quant à la formule $h = \frac{6}{x-2} + 3$ , elle suggère une façon de construire le graphique de h en fonction de x par une suite de transformations de graphiques au départ du graphique de $\frac{1}{x}$ (une translation de 2 unités parallèlement à l'axe des y, une compression de rapport 6 parallèlement à l'axe des y, une translation de 3 unités parallèlement à l'axe des x).

Toutes ces approches se complètent et convergent vers une officialisation du phénomène en termes techniques mobilisant le concept de limite : la droite y = 3 est une asymptote horizontale au graphique de la fonction et la droite x = 2 en est une asymptote verticale.

Ces résultats se généralisent pour n'importe quelle fonction homographique $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$. La validation des résultats s'appuie sur la "bonne forme" de l'expression analytique de ces fonctions : $f(x) = a + \frac{k}{x + d}$, sur des propriétés établies pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et sur l'hypothèse que les asymptotes sont conservées d'une certaine manière par les translations et les dilatations. On établit aussi deux idéogrammes possibles du graphique de n'importe quelle fonction homographique (Figure 5).

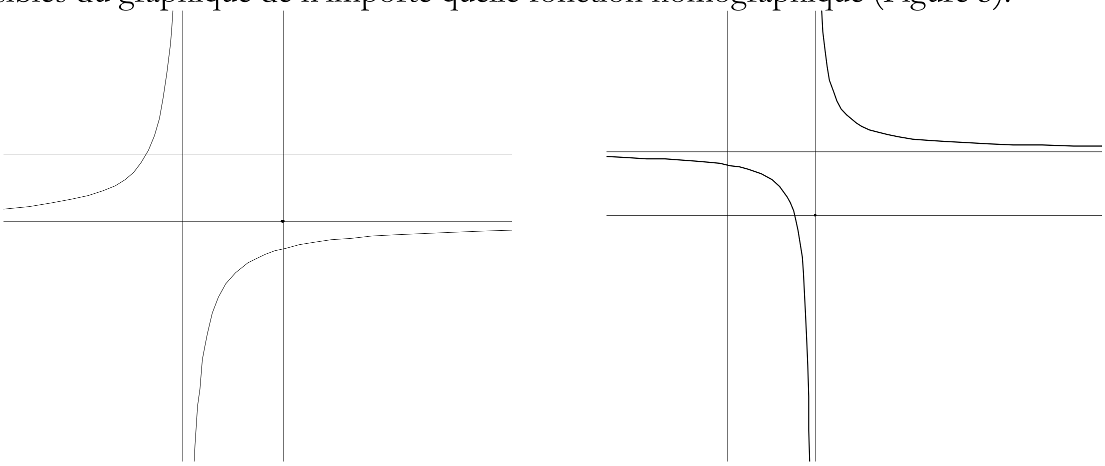


Figure 5

### 3. Comportements asymptotiques des fonctions de la classe $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$

La première asymptote oblique est rencontrée à propos de la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$; elle est traitée dans les registres numérique, graphique et analytique. Dans cette rencontre, on s'appuie sur le fait que la fonction se présente sous forme d'une somme de deux fonctions x et $\frac{1}{x}$ et sur le comportement asymptotique de $\frac{1}{x}$. On utilise les arguments suivants : " D'abord, on rend $\frac{1}{x}$ aussi petit que l'on veut en prenant x assez grand, auquel cas $x + \frac{1}{x}$ est aussi proche que l'on veut de x ou la différence $f(x) - x$ aussi petite que l'on veut [...]. La fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$ se comporte pratiquement (c'est-à-dire à peu de choses près) comme la droite y = x pour x très grand. La droite y = x est un exemple de ce qu'on appelle une asymptote oblique de f(x) » (Figure 6).

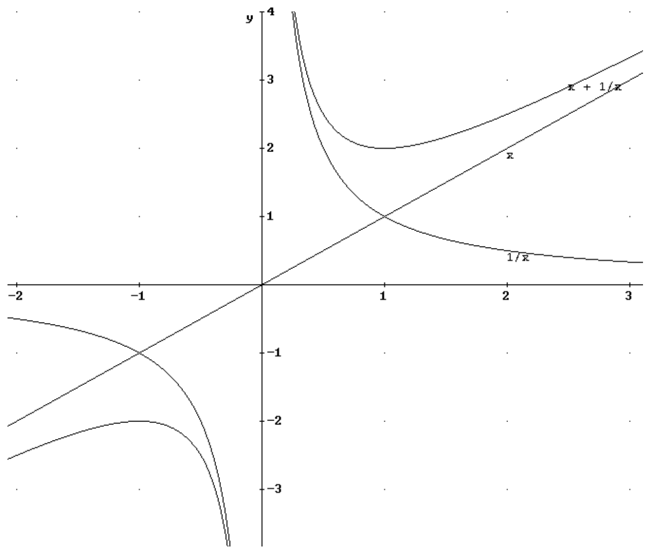


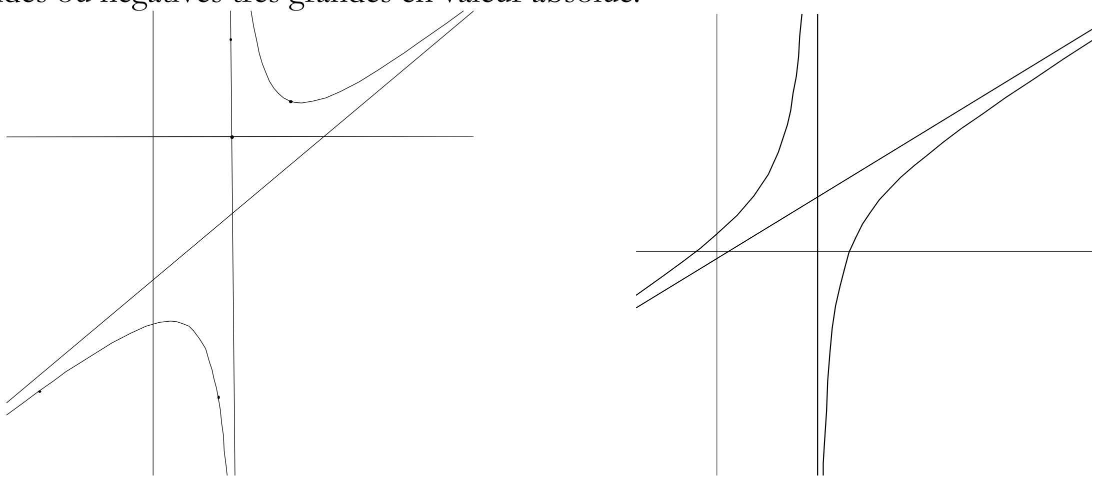

Figure 6

Quant à l'asymptote verticale de cette fonction, elle est *mutatis mutandis* étudiée dans les mêmes termes.

Le raisonnement mis en place pour étudier les comportements asymptotiques de cette fonction se généralise à d'autres fonctions de cette classe (Figure 7). Il se base sur la "bonne forme" de l'expression analytique de ces fonctions : $f(x) = mx + p + \frac{k}{x + d}$

Chacune de ces fonctions peut être considérée comme somme de deux fonctions données par $mx + p$ et $\frac{k}{x + d}$. Le comportement asymptotique de la seconde est connu puisqu'il s'agit d'une fonction homographique. Ainsi, on considère la droite $y = mx + p$ comme asymptote oblique car le terme $\frac{k}{x + d}$ devient négligeable pour des valeurs de x positives très grandes ou négatives très grandes en valeur absolue.

À ce stade, on est amené à considérer la droite $y = mx + p$ comme asymptote oblique du graphique d'une fonction dont l'expression analytique est de la forme $mx + p + g(x)$ lorsque $g(x)$ devient négligeable pour des valeurs de x positives très grandes ou négatives très grandes en valeur absolue.



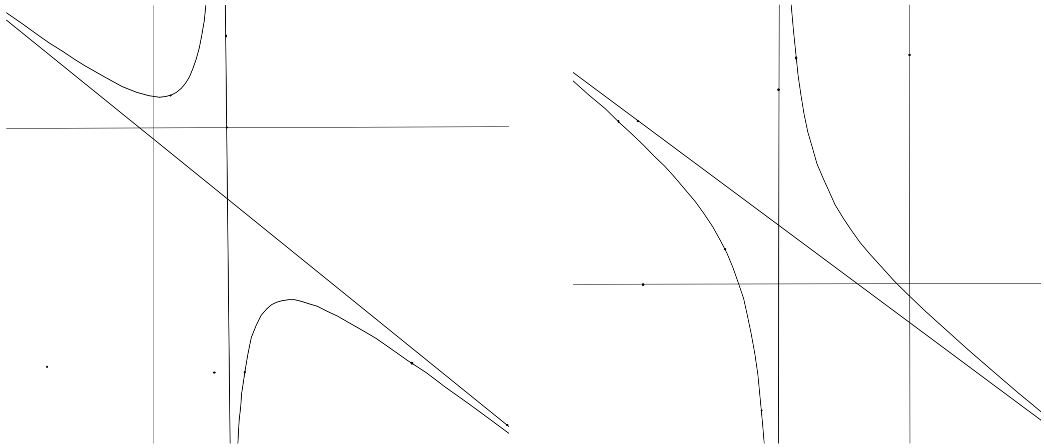


Figure 7

### 4. Comportements asymptotiques des fonctions de la classe $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

Quelques fonctions irrationnelles sont étudiées. Il s'agit principalement de racines carrées de fonctions du second degré et de sommes d'une telle fonction et d'une fonction affine. Ces fonctions sont mises sur le tapis à propos de problèmes d'optimisation. Ici aussi, c'est la recherche d'une “ bonne forme ” qui est la technique mise en évidence pour déterminer les asymptotes obliques, technique consistant ici à compléter le radicante en carré parfait. Cependant, dans le cadre de ces fonctions, le discours sur les parties négligeables qui pourrait s'ensuivre devient scabreux : ainsi, lorsqu'on considère la fonction $\sqrt{25t^2 - 8t + 1}$, on peut être tenté de négliger les termes - 8 t et 1 par rapport à 25 $t^2$ lorsque t devient grand et en conclure que les asymptotes obliques sont les droites d'équation $y = 5\,t$ et $y = -5\,t$ mais un raisonnement analogue à partir d'une autre écriture de la même fonction, soit $\sqrt{(5t - \frac{4}{5})^2 + \frac{9}{25}}$ ,conduira aux asymptotes $y = \pm\,(5t - \frac{4}{5})$. En épinglant cet exemple, les auteurs du projet mettent en évidence la nécessité d'un calcul de limite pour déterminer des asymptotes. De là, une nouvelle définition de l'asymptote qui sera institutionnalisée dans la synthèse par une phrase dans laquelle la connotation temporelle n'est pas absente : “ la droite $y = ax + b$ est asymptote au graphique de la fonction $f(x)$ lorsque la différence $f(x) - (ax+b)$, prise en valeur absolue, possède une limite nulle aux infinis, c'est-à-dire devient et reste aussi petite que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand en valeur absolue ”. L'asymptote horizontale apparaît dès lors comme cas particulier et l'asymptote verticale y est définie de manière analogue.

Dans la synthèse, ce changement d'écriture des racines carrées de fonctions du second degré par complétion du carré est réalisé de manière littérale : les asymptotes en sont déduites de manière générale. La Figure 8 montre les deux dessins auxquels conduit le cas où a est positif.

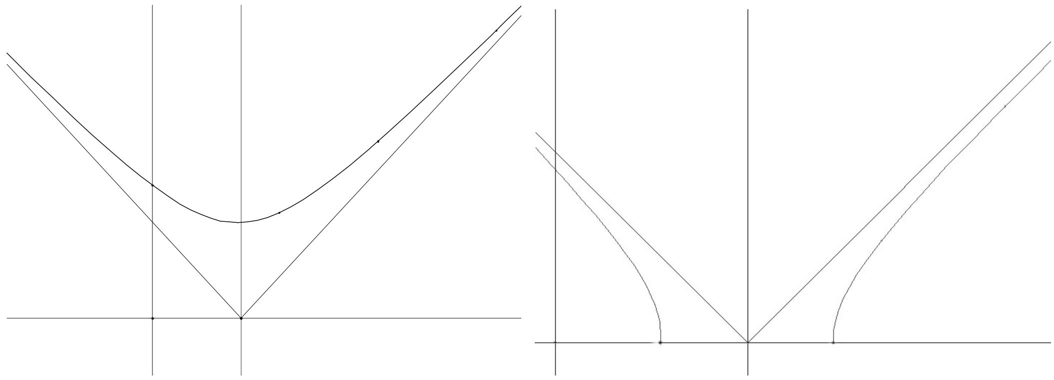


Figure 8

Un exemple montre comment obtenir, par sommation graphique, la somme d'une fonction affine et de la racine d'un second degré.

A propos d'un autre exemple, les auteurs du projet insistent sur le fait que l'expression “ Plus x est grand, plus f(x) se rapproche de b ” ne suffit pas à assurer que y = b est une asymptote horizontale.

Dans le projet AHA, la notion d'asymptote progresse ainsi, pas à pas, d'une famille de fonctions à l'autre. Elle s'approfondira avec l'étude des fonctions exponentielles et logarithmes et avec des exemples dont la fonction est de corriger des idées fausses sur les asymptotes. Par exemple, l'idée selon laquelle l'asymptote d'une courbe ne peut pas la traverser est contredit par la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$.

Le vocabulaire employé au début est intentionnellement naïf, quotidien et donc imprécis. Il évolue en fonction des cas rencontrés. C'est volontairement que les formules générales qui déterminent les paramètres d'une asymptote oblique ne sont pas utilisées pour privilégier un mode d'obtention des asymptotes lié à la bonne forme de chacune des classes de fonctions considérées, forme qui permet de mettre en évidence les termes que l'on jugera négligeables.

## 2. Un contexte cinématique pour introduire les dérivées

Des problèmes de vitesses liées constituent, dans le projet AHA, une autre première rencontre avec le concept de limite dans le cas des indéterminations du type 0/0. Voici le premier énoncé proposé aux élèves et illustré par la Figure 9 : Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm par minute. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 $cm^3$/min ?

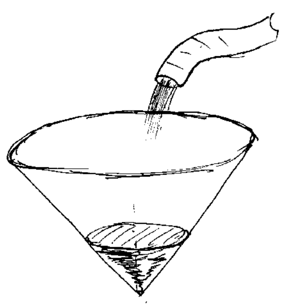


Figure 9

Ce problème constitue une expérience de pensée, paradigmatique d'une classe particulière de problèmes de vitesses liées, qui se caractérise comme suit : deux grandeurs y sont mobilisées (ici le volume d'eau et sa hauteur dans le vase). Elles varient toutes deux en fonction du temps, la vitesse de variation de l'une est constante et la vitesse de l'autre, sur laquelle porte la question, est variable. Ces deux grandeurs dépendent l'une de l'autre, ce qui fait que leurs vitesses sont liées. Là sont les caractéristiques a priori dépendant de la structure mathématique du problème. Il en est une autre relative au mental des élèves et qui a été testée dans les classes : le contexte du problème induit l'intuition que, si la vitesse d'une des deux grandeurs est constante, la vitesse de l'autre ne peut être que variable (c'est le cas de l'énoncé ci-dessus, mais ce n'est pas le cas de tous les problèmes de vitesses liées). L'énoncé ci-dessus se prête en outre à une validation particulière sur laquelle nous reviendrons.

Les enjeux didactiques de ce problème sont analysés autre part (M. Schneider, 1992 et 2001a). Nous nous contenterons donc ici de résumer cette analyse. Ce problème suscite plusieurs stratégies de base dont la plus “ primitive ”, sans être la plus fréquente, consiste à diviser l'expression du volume versé au temps t, soit $V(t) = \frac{1}{3}\pi t^3$, par cette même valeur de t avant d'égaler à 100. L'intuition effective que le débit croît constamment et les vérifications numériques contredisent le résultat trouvé par cette première stratégie. Elles poussent tous les élèves, y compris ceux qui avaient d'emblée évalué des débits sur de plus petits laps de temps, à procéder à un découpage du temps de plus en plus fin.

L'investigation qui vient d'être décrite ainsi que l'algébrisation du temps t et de l'incrément de temps $\Delta t$ (qu'elle soit spontanément proposée par les élèves ou obtenue à l'invite du professeur pour alléger la recherche) conduisent à l'expression suivante qui donne le débit moyen de l'eau sur $[t\ ,\ t + \Delta\ t]$ $\frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}$ ou, dans le cas présent $\pi t^2 + \pi t \Delta t + \frac{1}{3}\pi (\Delta t)^2$ (1)

Un retour au numérique, ou tout simplement la considération de l'expression (1) débouchent sur l'identification d'un passage à la limite : rendre nul $\Delta t$ avant d'égaler à 100 l'expression du débit . C'est l'occasion d'un débat sur la validité de ce calcul, sur le sens de l'indétermination 0/0, au cours duquel s'expriment des réserves analogues à celles observées par M. Schneider (1988 et 1992) à propos des concepts de vitesse et de débit instantané : “ Un débit instantané, cela n'existe pas, car on ne peut avoir un débit avec un volume nul ” ou “ On ne peut obtenir une vitesse instantanée, car le temps de regarder sa montre, c'est du temps qui s'écoule ”. Ces réactions sont interprétées par cet auteur comme obstacle épistémologique, à savoir une vision positiviste des concepts mathématiques, supposés être un reflet exact du monde tel qu'on peut l'appréhender par les sens et les mesures plutôt que des modèles inventés par les humains pour le comprendre.

Le problème décrit plus haut se prête à une autre expérience de pensée qui vise à les convaincre que la réponse obtenue ainsi est bien exacte. Il s'agit de poser un vase cylindrique de base 100 cm² à côté du vase conique et de les alimenter tous deux au moyen de pompes respectives de sorte que les niveaux d'eau montent régulièrement et simultanément de 1 cm / min (Figure 10). La pompe qui alimente le cylindre a évidemment un débit constant de 100 $cm^3$ /mn. L'autre pompe devra verser moins vite que la première tant que le cône est plus étroit que le cylindre, et plus vite après. Les deux pompes auront donc un débit de 100 $cm^3$ / min. à l'instant précis où la superficie de l'eau dans le cône vaut 100 $cm^2$, ce qui revient à égaler à 100 l'expression du débit dans laquelle on a annulé $\Delta t$.

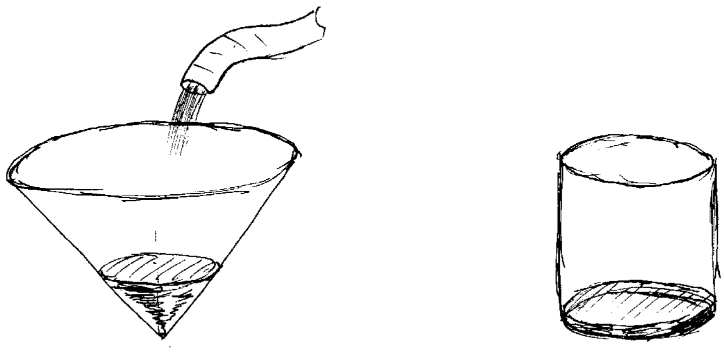


Figure 10

Cette expérience transcende une intuition exprimée par plusieurs élèves : à force de considérer des tranches de volumes de plus en plus petites, on prend des surfaces. Cette intuition conduit à la réponse exacte uniquement dans le cas où la vitesse de la montée de l'eau est unitaire (donnée délibérée ici pour cette raison). L'expérience de pensée, elle, est adaptable dans le cas contraire.

Les élèves sont ensuite invités à lire des propos de Berkeley exprimant à l'encontre du concept *d'ultima ratio* des réserves comparables à celles des élèves sur l'annulation de $\Delta t$ et son interprétation en termes d'“ instantané ”. S'ensuit un débat sur le statut des concepts mathématiques, produit de l'esprit humain plus que prolongement de l'expérience sensible.

À la suite de la résolution de ce problème, le concept de débit instantané est défini comme l'expression obtenue en annulant $\Delta t$ dans l'expression du débit moyen sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, une fois faites toutes les simplifications algébriques. L'expression “ limite du débit moyen pour $\Delta t$ tendant vers 0 ” est utilisé pour décrire ce calcul.

## 3. Négligence de termes, ordres de grandeur et concept de limite

L'approche de l'analyse en termes d'ordres de grandeur proposée dans le cadre de l'IREM de Picardie s'inspire de l'analyse non-standard en ce sens qu'elle évite le concept de limite et qu'elle suppose, en échange, l'adjonction de nouveaux nombres. D'un côté, les entiers très grands, supérieurs à tout entier “ classique ” et les réels très grands positifs ou très grands négatifs supérieurs, en valeur absolue, aux entiers très grands et, de l'autre, des réels très petits, positifs ou négatifs, qui sont les inverses des réels très grands. Sur base d'une axiomatique régissant les nombres très grands ou très petits, le concept de réels très proches, c'est-à-dire de réels qui diffèrent d'un réel très petit, permet de contourner le concept de limite et de définir tant le concept d'asymptote que celui de nombre dérivé. Ainsi, la droite d'équation $y = 1$ sera appelée asymptote à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$ en raison du fait que " pour tout x très grand positif, f(x) est très proche de 1 ". De même, le nombre dérivé de la fonction f en a est défini, dans ce cadre, comme un réel très proche du quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour tout réel h très petit non nul tel que a + h appartienne au domaine de f. De la sorte, cette définition permet d'identifier le réel $3a^2$ comme nombre dérivé en a de la fonction $f(x) = x^3$, celui-ci étant très proche pour tout h très petit non nul du taux d'accroissement de cette fonction dont la forme simplifiée est $3a^2 + 3ah + h^2$.

Comme le montrent les exemples précédents, ces nombres très proches, que l'on présente traditionnellement comme le résultat d'un calcul de limite, sont obtenus par la suppression de termes contenant une puissance positive d'un réel très petit : $\frac{1}{x-2}$ en ce qui concerne le cas de l'asymptote et les termes 3 ah et $h^2$ pour ce qui est de l'exemple de dérivée. Comme l'a argumenté R. Lutz lors du colloque de Mulhouse, cette façon de présenter les choses donne du sens à l'ultima ratio de Newton tout en lui évitant des significations sujettes à caution, telle que : " la valeur de ce rapport juste avant que h ne s'évanouisse ", ou encore " la vraie valeur du rapport lorsque h est infiniment petit " comme le dit Leibniz.

De ce point de vue, le projet AHA procurerait, nous semble-t-il, une expérience antérieure riche d'enseignement à tout élève qui devrait appréhender la notion de réels très proches. En effet, comme le montre la section 1, la transformation algébrique d'expressions analytiques de fonctions, classe par classe, fait apparaître de " bonnes formes " dans lesquelles l'élève identifie aisément les parties qu'il pourrait considérer localement comme négligeables. Or, c'est justement la négligence de ces termes qui le conduit au réel très proche considéré dans la présentation en termes de grandeurs. En outre, ce travail sur les asymptotes à propos des racines de fonctions du second degré fait apparaître le risque de conclusion indue que peut induire la négligence de termes et l'intérêt de travailler des différences " très petites ". De même, la section 2 illustre des conditions didactiques dans lesquelles les élèves sont amenés d'eux-mêmes à identifier l'acte de suppression de termes en $\Delta t$ qui leur fournira le nombre très proche que cette présentation définit comme le nombre dérivé.

Faut-il pour autant se priver du langage des limites que le projet AHA lie d'emblée à cette négligence de termes ? Pour quelles raisons ? Les changements induits par la présence des nombres très petits ou très grands dans la façon de s'exprimer sont-ils déterminants pour l'apprentissage des notions d'asymptote ou de dérivée ? Il nous semble que cette question devrait être étudiée de plus près.

La section 2 met en évidence une difficulté particulière soulevée par la négligence de termes dans les cas où elle définit des grandeurs géométriques ou physiques. Pour comprendre cette difficulté, nous contrasterons le cas d'une asymptote et celui du débit instantané. Soit la fonction $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ dont la courbe ne traverse pas son asymptote horizontale y = 3. Cette valeur 3 est obtenue comme limite aux infinis de la fonction, c'est-à-dire par négligence de termes de la forme $\frac{a}{x}$ qui apparaissent lorsqu'on met x en évidence au numérateur et au dénominateur. Cette négligence s'accompagne du sentiment d'avoir commis quelques erreurs, sentiment bien légitimé dans la mesure où le calcul opéré sur la fonction produit un objet proche de la courbe, mais qui lui reste cependant extérieur, donc distinct. Par contre, le même sentiment d'erreur suscite des réactions plus vives lorsque, en dépit de la négligence de termes, le calcul d'une limite donne la valeur exacte d'une grandeur cherchée telle un débit instantané, avec des arguments avancés du type de ceux repris à la section 2. M. Schneider (1988) a observé et analysé de semblables réserves chez les élèves à propos des aires curvilignes : celles-ci sont définies par la suppression de termes contenant des puissances de $\frac{1}{n}$ dans une somme de n rectangles qui les approxime par défaut ou par excès. Mais cette suppression même induit l'idée qu'elle ne peut conduire qu'à un résultat approximatif. S'ajoute à cela un effet mental de l'obstacle géométrique de la limite qui consiste à opposer le fait qu'une aire curviligne n'est pas " réductible " à un polygone formé de rectangles à celui qu'elle ne peut être obtenue en sommant des segments.

La négligence de termes soulève donc des problèmes particuliers dès qu'elle conduit à la définition de grandeurs. Mais là aussi, on doit se demander quelle est la part du langage utilisé, que ce soit celui des limites, ou celui des réels très proches.

Au delà du vocabulaire, nous nous sommes interrogées sur le prix que suppose chacune de ces approches de l'analyse. Nous l'exprimerons par référence à l'histoire du calcul infinitésimal au cours de laquelle une grande tension se manifeste entre trois aspects : primo, l'opérationnalité des calculs de dérivées et de primitives qui, même s'ils apparaissent sujets à caution parce que se soldant précisément par la négligence de termes, n'en permettent pas moins la détermination de multiples grandeurs tant physiques que géométriques, secondo, une forme de validation du calcul infinitésimal qui, faute de mieux, fait de larges emprunts à la métaphysique et tertio, la volonté de fonder ce calcul infinitésimal sur des bases cohérentes afin de conférer à cette discipline une légitimité interne qui la rende autonome vis-à-vis de la géométrie et à la physique. Cette tension se manifeste encore à l'heure actuelle dans l'enseignement de l'analyse par des choix didactiques très diversifiés, voire opposés, qui s'expriment par un déplacement d'accent entre, d'une part, la modélisation de grandeurs géométriques ou physiques et ce qu'elle suppose de travail sur l'intuition et, d'autre part, la cohérence et la légitimité mathématiques. Toute articulation entre ces deux pôles se paie d'un prix. Ainsi, l'approche en termes d'ordres de grandeur marie d'emblée une légitimité mathématique et une légitimité " métaphysique ", ainsi que le développe R. Lutz. Mais le prix à payer est un acte de foi dans l'existence et le fonctionnement de réels non-standard ou l'acceptation d'un autre mode de rationnalité. L'approche heuristique privilégie le processus de modélisation en travaillant les intuitions graphiques, géométriques et physiques pour construire progressivement une unité et une cohérence mathématiques. L'intention est de gérer la variété épistémologique a priori à laquelle donne lieu les différents calculs de limites selon qu'ils procurent des asymptotes, des tangentes ou des grandeurs. Mais, comme le développe M. Schneider (2001b), cette approche se solde par une organisation mathématique complexe où s'entrecroisent plusieurs types de validation qui n'ont pas le même statut et des techniques diverses dont certaines ont un caractère éphémère, voire anecdotique dans l'ensemble du projet.

Sans doute faudrait-il aller plus loin dans la confrontation de ces approches, en essayant de problématiser plus avant les hypothèses didactiques dont elles sont porteuses l'une et l'autre. Sans quoi, on risque fort de se cantonner à la conclusion que tout a un prix et que, décidément, on ne peut avoir à la fois le beurre et l'argent du beurre.

## BIBLIOGRAPHIE


Grand'Henry-Krysinska M et Hauchart C. (1993), Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente à une courbe, *Actes de la 1re Université d'Eté Européenne Histoire et Epistémologie dans L'Education Mathématique*, Montpellier, 431-442

Groupe AHA, (Bolly, P., Chevalier, A., Citta, M., Hauchart, C., Krysinska, M., Legrand, D., Rouche, N., Schneider, M.) (1999a). *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, manuel pour l'élève*, Bruxelles, De Boeck

Groupe AHA, (1999b). *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, guide méthodologique* Bruxelles, De Boeck

Hauchart C. et Schneider M. (1996), Une approche heuristique de l'analyse, *Repères IREM, n° 25*, 35-62

Schneider M. (1988), *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve

Schneider M. (1992), A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics 23*, 317-350

Schneider M. (2001a), Une ingénierie didactique passée au crible de concepts de didactique, In Mercier A., Rouchier A., Lemoyne G. (eds), *Sur le génie didactique : usages et mésusages des théories de l'enseignement*, De Boeck, Louvain-la-Neuve

Schneider M. (2001b), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en didactique des mathématiques, 21* (1.2), 7-50.

Compléments à l'article
**Imagerie médicale : le Scanner.**

[1]

Les compléments portent sur le paragraphe 5 de l'article précité paru dans le numéro 106 de l'Ouvert. Ils concernent la transformation de Radon.

## La transformation de Radon

Essayons de voir quel serait l'analogue continu de la méthode discrète (Cf**3. Exemples miniatures**).

On considère une fonction $f$ à support compact dans l'espace numérique, à deux dimensions ici, et on lui associe la fonction $F$ (la tranformée de Radon de $f$) qui à toute droite $\ell$ associe

$$F(\ell) = \int_{x\in\ell} f(x)\, dx \ . \tag{1}$$

Il s'agit de définir ce que cela signifie et de voir ensuite si l'on peut récupérer $f$ à à partir de la connaissance de $F$. Ce problème est un type de *problème inverse* en ce sens qu'il s'agit de récupérer une donnée inconnue $f$ à partir de sa transformée $F$ par une certaine opération effectivement calculable.

*Exercice 1.* Montrer qu'on peut écrire l'équation d'une droite quelconque $\ell$ sous la forme

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p \text{ où } p \geq 0, \varphi \text{ défini modulo } 2\pi \ ,$$

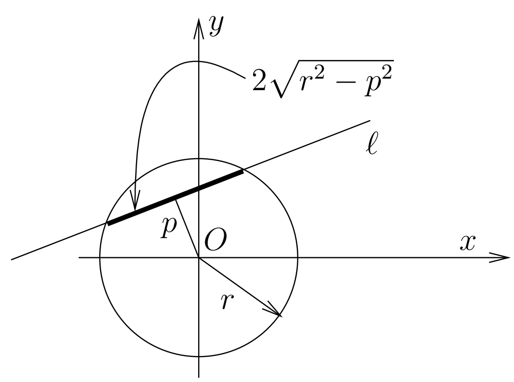
et que dans ce cas (1) peut s'écrire

$$F(p,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p\cos\varphi - s\sin\varphi, p\sin\varphi + s\cos\varphi)\, ds \ . \tag{2}$$

Et donc il s'agit de déterminer $f$ connaissant $F$.

*Exercice 2.* On considère $f$ constante égale à $m$ dans une petite boule de rayon $r$ centrée à l'origine et nulle en dehors. Montrer qu'on a

$$f(O) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(p,\varphi)}{2\sqrt{r^2-p^2}}\, d\varphi \ , p \leq r \ .$$




Soit $F$ la fonction définie par (2). On considère des fonctions $f$ à décroissance suffisamment rapide à l'infini pour que les intégrales définies par (2) convergent. Soit $F_P(q)$ la fonction définie pour $q$ strictement positif comme la moyenne de $F$ sur toutes les droites situées à la distance $q$ de $P$. Par exemple si $P$ est à l'origine on a

$$F_O(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(q,\varphi)\, d\varphi \ .$$

1. © L'OUVERT 107 (2003)

Considérons pour éviter le pôle en zéro

$$I_P(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'_P(q)}{q}\,dq = \frac{1}{\pi}\left[\frac{F_P(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F_P(q)}{q^2}\,dq\right] \quad (\varepsilon > 0)\ ,$$

(formule qui résulte d'une intégration par parties).

Théorème (Radon, 1917)

*Sous certaines conditions de régularité de $f$, l'expression précédente converge pour $\varepsilon$ tendant vers 0 et on a*

$$f(P) = \lim_{\varepsilon\to 0} I_P(\varepsilon)\ .$$

Autrement dit, en dimension deux et sous certaines conditions, on récupère la valeur de $f$ en un point (quelconque) si on connait TOUTES les intégrales sur toutes les droites du plan.

On peut lire la démonstration originale de Radon dans son article de 1917 (*Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*) qui est reproduit dans l'ouvrage *75 Years of Radon transform* publié en 1994 sous la direction de S. Gindikin et P. Michor (Internat. Press, Cambridge, MA).

En dimension quelconque il est aussi possible d'inverser la transformation de Radon. On pourra trouver des formules d'inversion dans l'ouvrage de S. Helgason *The Radon transform* publié en 1999 (Birkhaüser, Boston).

## Correctifs

D'autre part voici aussi quelques correctifs portant sur des détails de l'article.

**Pour les commentaires de la Figure 9** il fallait écrire :

Etant données les trois droites $L_i$ dont les équations sont données par le système et dont on ne connaît pas les intersections deux à deux, on part d'un point $P_0$ quelconque et on définit :

$$\begin{aligned} &P_1, P_4, P_7, \dots \text{ sur la droite } L_1\ ,\\ &P_2, P_5, P_8, \dots \text{ sur la droite } L_2\ ,\\ &P_3, P_6, P_9, \dots \text{ sur la droite } L_3\ ,\end{aligned}$$

où $P_1$ est la projection orthogonale de $P_0$ sur $L_1$, $P_2$ celle de $P_1$ sur $L_2$ etc.

**Dans l'exercice qui suivait** il fallait écrire :

Partez de $P_0 = (2, 3)$.

**Au début de la page 8** il fallait écrire :

Les droites sont remplacées par 6 hyperplans; l'analogue de la formule de projection orthogonale permet de construire un algorithme donnant 6 suites de points (les points d'une suite appartenant à l'un des hyperplans). En partant de $(0, 0, 0, 0)$ on obtient les points dont les coordonnées sont indiquées page 8 : les points notés $P_1$ (resp. $P_2$ etc...) appartiennent tous à l'un des hyperplans. L'algorithme détermine six suites qui convergent séparément vers un point de chacun des hyperplans.

# Autour du septième problème de Hilbert : Une excursion en transcendance

Julien Haristoy et Édouard Oudet

**Résumé**

On souhaite donner un aperçu de quelques problèmes en théorie des nombres transcendants, autour du pivot que constitue le septième problème de Hilbert. On esquisse un historique du développement de la discipline antérieurement à l'énoncé des problèmes de Hilbert, puis on propose une preuve aussi élémentaire que possible et (presque) complète du théorème de Gel'fond-Schneider, qui répond à la question de Hilbert. Enfin on décrit l'importante postérité du septième problème dans les travaux mathématiques au vingtième siècle.

Lorsque David Hilbert est invité à donner une des conférences majeures du deuxième congrès international des mathématiciens, qui doit se tenir à Paris à l'été 1900, il lui apparaît rapidement que le moment est symboliquement idéal pour donner à la communauté mathématique sa vision du développement futur de la discipline. Il souligne l'importance de dégager des problèmes[1] :

> « Et de même que dans toute entreprise humaine il faut poursuivre un but, de même dans la recherche mathématique il faut des problèmes. La puissance du chercheur se retrempe dans leur résolution, il y trouve de nouvelles méthodes et de nouveaux points de vue, d'où il découvre un horizon plus vaste et plus libre. »

C'est donc à cette occasion que Hilbert rend publique sa liste de vingt-trois problèmes destinés à occuper les mathématiciens du siècle à venir (en fait, suivant les conseils de Minkowski et Hurwitz, qui craignaient un exposé trop long, il n'énonça oralement que dix de ces problèmes, l'intégralité de son texte paraissant aux *Göttinger Nachrichten*).

Parmi les qualités que doit posséder un bon problème mathématique selon Hilbert, figurent en premier lieu clarté et limpidité :

> « Cette clarté, cette limpidité si énergiquement exigée [...] d'une théorie mathématique, je l'exigerais encore davantage d'un problème mathématique parfait ; ce qui est clair et limpide nous attire en effet, ce qui est embrouillé nous rebute. »

1. Nous citons ici la traduction de L. Laugel dans le *Compte-rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Gauthier-Villars, Paris, 1902.

À cet égard le septième problème, sous le titre général *Irrationalité et transcendance de certains nombres*, est certainement exemplaire. Rappelons d'abord qu'un nombre complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers (ou rationnels, cela revient au même), par exemple $i$, $\sqrt{2}$, les racines de l'unité ; sinon on dit qu'il est *transcendant.* Il est utile de rappeler pour la suite que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps.

Le septième problème évoque d'abord la question de la transcendance de certaines valeurs de la fonction exponentielle, dans la lignée des travaux de Hermite et Lindemann :

> « [...] nous regardons comme extrêmement probable que la fonction exponentielle $e^{i\pi z}$, par exemple, qui, pour toutes les valeurs rationnelles de l'argument $z$ prend évidemment toujours des valeurs algébriques, prenne d'autre part, pour toutes les valeurs irrationnelles algébriques de l'argument $z$, des valeurs toujours transcendantes. Nous pouvons donner à cet énoncé la forme géométrique suivante : *Lorsque, dans un triangle isoscèle*[2]*, le rapport entre l'angle à la base et l'angle au sommet est algébrique, mais non rationnel, le rapport entre la base et l'autre côté sera toujours transcendant.* »

En effet, si $\alpha$ mesure l'angle à la base, l'angle au sommet vaut $\pi - 2\alpha$ et leur rapport $\pi/\alpha - 2$ ; ce dernier est irrationnel algébrique si et seulement si $z = \alpha/\pi$ l'est. Or le quotient de la base par le côté de l'angle au sommet est $2\cos\alpha = e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}$ qui est transcendant si et seulement si $e^{i\pi z}$ l'est.

Remarquons que comme $e^{i\pi} = -1$, il revient au même de se demander si $(-1)^z$ est transcendant pour toute valeur de $z$, algébrique irrationnelle[3]. On peut alors voir cette question comme un cas particulier de la conjecture suivante, à laquelle nous ferons dorénavant référence, lorsque nous évoquerons le septième problème de Hilbert :

> « *La puissance $\alpha^\beta$, pour une base algébrique $\alpha$ et un exposant algébrique irrationnel $\beta$, comme par exemple le nombre $2^{\sqrt{2}}$ ou $e^\pi = i^{-2i}$, représente toujours un nombre transcendant ou pour le moins irrationnel.* »

Hilbert précise :

> « J'en regarde la démonstration comme extrêmement difficile » ;

il ajoute encore :

> « Il est certain que la résolution de ces problèmes et d'autres analogues doit conduire à des méthodes nouvelles, ainsi qu'à de nouveaux points de vue relativement à la nature de nombres irrationnels et transcendants particuliers. »

Siegel rapporte que Hilbert disait souvent que la preuve de l'irrationalité de $2^{\sqrt{2}}$ lui semblait appartenir à un futur plus lointain que celle du dernier «Théorème» de Fermat ou de l'hypothèse de Riemann[4]. Or le septième problème fut résolu indépendamment et

2. Graphie d'usage à l'époque, la seule correcte selon Littré.

3. Pour fixer les idées, on peut définir la fonction $\alpha^z$ par $\exp(z(\ln|\alpha| + i\theta))$, où $\theta$ est la détermination de l'argument de $\alpha$ appartenant à $]-\pi, \pi]$, communément appelée détermination principale de l'argument ; la seule vertu de ce choix est de prolonger les fonctions puissances usuellement définies sur $\mathbb{R}$. Quoique le choix d'une autre détermination de l'argument définisse une fonction puissance distincte, il n'affecterait pas nos énoncés de transcendance.

4. C'est plus précisément lors d'une conférence donnée en 1919 que Hilbert manifesta l'espoir de voir

presque simultanément par Gel'fond et Schneider en 1934, qui plus précisément montrèrent que

*si $\alpha$ est un nombre algébrique différent de 0 et de 1 et $\beta$ un nombre algébrique irrationnel, alors $\alpha^\beta$ est un nombre transcendant.*

Si Hilbert s'est trompé sur l'évaluation de la difficulté respective des questions mentionnées ci-dessus, nous essaierons de montrer, après avoir rappelé quelques épisodes marquants de la théorie transcendante des nombres avant 1900, que le pronostic quant à la nécessité de trouver de nouvelles méthodes s'est, lui, parfaitement avéré, comme s'est concrétisé l'espoir que celles-ci se révèleraient fécondes.

# 1 Quelques repères historiques

Le premier usage mathématique du mot transcendant, qui relevait jusqu'alors du vocabulaire scholastique, semble remonter à Leibniz (1704) — ce qui n'est guère étonnant si l'on songe que, davantage encore que vers les mathématiques, ses préoccupations le portaient vers les questions théologico-philosophiques — et probablement en un sens proche de celui où nous l'entendons. Les premières conjectures explicites de transcendance sont certainement à mettre au compte d'Euler (mais son nom n'est-il pas attaché peu ou prou à la naissance de quelque branche des mathématiques modernes que ce soit ?) et nous reviendrons au paragraphe suivant sur l'une de ses contributions.

Cependant, et sans rechercher le paradoxe, on peut dire que les premières démonstrations ressortissant, au moins dans l'esprit, à la théorie transcendante des nombres sont des démonstrations d'irrationalité. Nous n'avons pas l'ambition de tenter ici une réflexion sur la notion de nombre[5], depuis l'émergence de la pensée rationnelle grecque jusqu'au dix-neuvième siècle allemand ; rappelons seulement que la première preuve d'irrationalité, plus précisément d'incommensurabilité, qui nous soit parvenue (et qui constitue aussi une des toutes premières démonstrations toujours recevables aujourd'hui) remonte selon Aristote à l'école Pythagoricienne ; elle concerne, comme on sait, le rapport du côté du carré à sa diagonale.

Pour revenir à l'époque moderne, Euler montre dès 1744 l'irrationalité de $e$ ; la démonstration bien connue qui repose sur l'égalité $e = \sum_{n\geq 0} 1/n!$ est due à Fourier en 1815. Citons aussi Lambert qui, en 1766, démontre (presque[6]) l'irrationalité de $\pi$, dont on avait depuis longtemps relié les propriétés arithmétiques à la possibilité de la quadrature du cercle. Plus précisément, prolongeant des idées d'Euler, il considère le développement en fraction continue[7] de $\tan x$ et montre que cette fonction prend des valeurs irrationnelles pour des

l'hypothèse de Riemann démontrée de son vivant (il est mort en 1943), alors qu'à son avis seuls les plus jeunes de ses auditeurs verraient la résolution du problème de Fermat. Quant à l'irrationalité de $2^{\sqrt{2}}$, il n'imaginait pas que ceux-ci pussent vivre assez longtemps pour en connaître une démonstration. Cf. Jeremy J. Gray, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press, 2000.

5. Ni d'ailleurs les compétences pour la mener à bien.

6. La première preuve complète est de Legendre qui montra aussi l'irrationalité de $\pi^2$.

7. Ou faut-il dire plutôt continuée ?

arguments rationnels non nuls. Comme $\tan(\pi/4)$ est rationnel, l'irrationalité de $\pi$ s'en déduit.

Ce sont les échecs répétés de démonstration de l'algébricité de $e$ ou de $\pi$ qui amènent l'opinion mathématique dominante, à la suite d'Euler, Lambert et Legendre, à conjecturer leur transcendance.

Cependant il est remarquable que jusqu'en 1844, la théorie transcendante des nombres n'ait pas véritablement d'objet, en ce sens que personne n'est alors en mesure d'exhiber le moindre nombre transcendant. C'est à cette date en effet que Joseph Liouville publie (au Journal de ... Liouville) *Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, et tout particulièrement le résultat que nous écririons ainsi :

*Soit $\xi$ un réel, racine d'un polynôme irréductible à coefficients entiers $P$, de degré $d$ au moins égal à 2 ; posons $c' = \max_{x\in[\xi-1,\xi+1]} |P'(x)|$ et $c = \min(1, 1/c')$, alors pour tout rationnel non nul $p/q$, avec $q > 0$, on a :*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}.$$

La démonstration en est fort simple.

D'abord, il est clair qu'on peut supposer $|\xi - p/q| < 1$, ou encore $p/q \in ]\xi - 1, \xi + 1[$, sinon il n'y a rien à démontrer.

Ensuite, comme $P$ est irréductible et $d \geq 2$, $P(p/q)$ est non nul. Comme $P \in \mathbb{Z}[X]$, $|q^d(P(\xi) - P(p/q))| = |q^d P(p/q)|$ est entier, au moins égal à 1, ce qui s'écrit encore :

$$\left|P(\xi) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^d}.$$

Or le théorème des accroissements finis donne :

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|P(\xi) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq \max_{x\in[\xi-1,\xi+1]} |P'(x)|. \left|\xi - \frac{p}{q}\right|,$$

ce qui suffit à conclure.

Qualitativement, le théorème de Liouville dit qu'un nombre algébrique réel n'est pas «bien» approchable par des rationnels, d'où l'idée de produire des nombres qui par construction ont de meilleures approximations rationnelles que celles qu'on attend d'un nombre algébrique.

On appelle *nombre de Liouville* un irrationnel réel $\xi$ tel que pour tout entier $n$, il existe un rationnel $p/q$, avec $q \geq 2$ tel que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Au vu du résultat précédent, un nombre de Liouville ne saurait être algébrique (sinon $c < q^{d-n}$ pour tout $n$). Un exemple classique de tel nombre est donné par

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

dont l'écriture décimale contient beaucoup de 0 (on peut bien sûr remplacer 10 par n'importe quel entier).

Son développement décimal n'étant à l'évidence pas périodique, $\zeta$ est irrationnel, et si l'on note $p_n/q_n = \sum_{k=1}^{n} 1/10^{k!}$, de sorte que, pour $n$ strictement positif, $q_n = 10^{n!}$, on a :

$$\left|\zeta - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \frac{10}{10^{(n+1)!}} \leq \frac{1}{q_n^n}$$

ce qui en fait bien un nombre de Liouville.

La rencontre de Dedekind et Cantor en 1872 eut d'importantes conséquences pour le développement des mathématiques en général. Pour ce qui nous concerne, notons simplement que le premier avait montré que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, disons comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, puis que le second, travaillant à une construction rigoureuse des réels, remarqua que les nombres transcendants sont denses dans $\mathbb{R}$. On verrait bientôt que presque tout réel, au sens de la mesure de Lebesgue, est transcendant.

Le problème de montrer la transcendance d'un nombre donné restait cependant entier. Le premier résultat en ce sens est la démonstration de la transcendance de $e$ par Hermite en 1873 ; corollaire immédiat : si $r$ est rationnel, $e^r$ est transcendant (la racine $r$-ième d'un nombre algébrique est algébrique !).

En dépit de l'optimisme et de l'enthousiasme, à commencer par ceux d'Hermite, qui suivirent cette avancée importante, il fallut attendre 1882 pour que Lindemann annonçât enfin la preuve de la transcendance de $\pi$ (et par conséquent l'impossibilité de la quadrature du cercle). Lindemann démontra en fait bien plus, à savoir le résultat aujourd'hui connu sous le nom de théorème d'Hermite-Lindemann :

*Si $\alpha$ est un nombre algébrique non nul, $e^\alpha$ est transcendant.*

Pour $\alpha = 1$, il s'agit du théorème d'Hermite. D'autre part, $e^{i\pi} = -1$ n'est pas transcendant, par suite $i\pi$ n'est pas algébrique, donc $\pi$ non plus. La méthode de Lindemann est une généralisation de celle d'Hermite, découvreur éponyme de l'identité suivante, facile à vérifier par intégrations par parties successives :

*Pour tout polynôme $f \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n$, si l'on pose $F(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)$, on a :*

$$\int_0^x e^{-t} f(t)dt = F(0) - F(x)e^{-x}$$

À la suite de Hurwitz (1883), on peut voir cette relation comme une conséquence de ce que la fonction exponentielle est solution de l'équation différentielle $y' = y$, puis montrer qu'on obtient une identité analogue pour les fonctions solutions de $azy'' = by' + y$, où $a$ et $b$ sont des nombres complexes ; il en déduit enfin de nouveaux résultats de transcendance.

Dans tous les cas, l'efficacité de la méthode réside dans l'algébricité des coefficients du développement en série entière des fonctions considérées, ne laissant pas d'espoir quant au problème posé par Hilbert, où il s'agirait de considérer la fonction $\alpha^z$, solution de

$y' = (\log \alpha)\, y$ (ici et dans la suite, log désigne une détermination du logarithme complexe, disons la détermination principale ; ln désigne le logarithme naturel des nombres réels positifs).

# 2 Le problème d'Euler-Hilbert

Le septième problème de Hilbert est couramment appelé problème d'Euler-Hilbert, tant il paraît naturel d'en faire remonter l'origine au passage suivant de l'*Introduction à l'Analyse Infinitésimale*[8] ($a$ et $b$ sont des nombres rationnels positifs) :

> « D'après ce que nous venons d'exposer, il est clair qu'il n'y a de logarithmes rationnels que ceux des puissances de la base $a$ ; car si un autre nombre $b$ n'est pas une puissance de la base $a$, son logarithme ne peut être exprimé par un nombre rationnel, le logarithme de $b$ ne sera pas non plus un nombre irrationnel[9] ; [...] Puisqu'aucun nombre, soit rationnel, soit irrationnel, ne peut représenter les logarithmes des nombres, qui ne sont pas des puissances de la base, on a donc raison de les rapporter aux quantités transcendantes ; & c'est la cause pour laquelle on a coutume de ranger les logarithmes parmi ces dernières. »

La dernière assertion d'Euler signifie que si $a$ et $b$ sont des rationnels positifs, $a \neq 1$, $\log_a b = \ln b / \ln a$ est rationnel (si $b$ est une puissance rationnelle de la base) ou transcendant. Posons $\beta = \ln b / \ln a$, l'énoncé de Hilbert dit précisément que si $\beta$ n'est pas rationnel, $\beta$ est nécessairement transcendant, sinon $a^\beta = b$ est transcendant.

Euler ne produit aucun élément de preuve à l'appui de ce qu'il avance, et le problème n'a pas connu de progrès au moment où Hilbert l'énonce dans sa généralité et appelle pour sa résolution à l'émergence d'idées nouvelles.

Une contribution majeure en ce sens est fournie par Alexandre Gel'fond en 1929 : il introduit certaines fonctions d'interpolation pour une fonction holomorphe et, reprenant des idées développées par Pólya, en déduit une borne pour la croissance de la fonction ; par des considérations arithmétiques, il arrive alors à une contradiction lorsque cette fonction prend beaucoup de valeurs algébriques. Ce procédé lui permet de donner une solution partielle au septième problème de Hilbert, précisément dans le cas où $\beta$ est un nombre quadratique (i.e. racine d'un polynôme irréductible de degré 2) imaginaire, ce qui donne en particulier la transcendance de $e^\pi = (-1)^{-i}$. Kuzmin remarque en 1930 que la méthode de Gelfond peut être étendue au cas des nombres quadratiques réels ; la question de la transcendance de $2^{\sqrt{2}}$, par exemple, est alors résolue.

Pour la solution complète du septième problème, il fallut encore ajouter une autre idée, introduite par Siegel dans l'étude des fonctions de Bessel : la construction d'une fonction auxiliaire possédant des propriétés d'annulation remarquables. Une preuve générale fut

8. Nous citons : Léonard Euler, *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, traduit du latin par J. B. Labey, Barrois aîné, l'an quatrième de la République Française (1796), réédition ACL-éditions, Paris 1997.

9. Il faut comprendre ici : irrationnel algébrique.

enfin donnée par Gel'fond en mars 1934, puis, indépendamment, quoiqu'utilisant les mêmes arguments décisifs, par Théodore Schneider, un élève de Siegel, deux mois plus tard.

Nous donnons un aperçu de la preuve de Schneider, telle qu'elle est décrite par Michel Waldschmidt dans *Transcendence Methods*.

On part du fait que les fonctions $z$ et $\alpha^z$ sont *algébriquement indépendantes* sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ non nul tel que la fonction $P(z,\alpha^z)$ soit identiquement nulle (c'est une généralisation de la notion de transcendance), et on raisonne par l'absurde.

Si $\alpha^\beta$ est algébrique, les fonctions $z$ et $\alpha^z$ prennent toutes deux des valeurs algébriques aux points $m+n\beta, (m,n) \in \mathbb{Z}^2$, toutes contenues dans le corps de nombres $\mathbb{Q}(\alpha,\beta,\alpha^\beta)$ (le plus petit corps contenant $\mathbb{Q},\alpha,\beta$ et $\alpha^\beta$). On se donne alors un réel positif $H$ : un lemme de Siegel, reposant sur le principe des tiroirs de Dirichlet[10], assure alors l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X,Y]$ s'annulant en tout point $(m+n\beta, \alpha^{m+n\beta})$, pour $0 \leq m,n \leq H$, et dont on contrôle «bien» le degré et la valeur absolue des coefficients en fonction de $H$ (sinon c'est trivial).

Posons $F(z) = P(z,\alpha^z)$ ; un argument analytique (une variante du lemme de Schwarz, voir le paragraphe suivant) permet de borner la croissance de $F$ dans un disque centré en 0, ce qui impose (argument arithmétique) de nouveaux zéros pour $F$, toujours de la forme $m+n\beta$, ce qui donne une nouvelle borne pour $F$, sur un disque plus grand ... etc, jusqu'à prouver que $F$ est identiquement nulle, la contradiction cherchée.

La preuve de Gel'fond est essentiellement analogue et diffère surtout par ce qu'il considère un zéro de multiplicité élevée, plutôt qu'un grand nombre de zéros distincts. L'une et l'autre démonstrations mettent en œuvre une combinaison ingénieuse d'arguments de nature algébrique, arithmétique et analytique.

Au début des années quatre-vingt-dix, une nouvelle méthode, introduite par Michel Laurent, a permis de substituer dans la preuve de nombreux résultats de transcendance l'étude de certains déterminants à la construction de fonctions auxiliaires, telles que la fonction $F$ ci-dessus.

C'est sur ce type d'arguments que repose la démonstration développée au paragraphe suivant. Elle est adaptée du deuxième chapitre du livre *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups* de Waldschmidt, par ailleurs riche de commentaires et de considérations heuristiques. Elle a la vertu d'être élémentaire au sens où elle ne demande aucune connaissance en théorie algébrique des nombres et guère plus que le principe du maximum en analyse complexe.

Soulignons cependant que, si notre démonstration ne traite que le cas où $\alpha$ est un réel positif différent de 1 et $\beta$ un réel irrationnel, elle manque l'exhaustivité d'assez peu : la raison en est expliquée au paragraphe suivant.

Voici d'abord quelques préliminaires au corps de la preuve proprement dite.

10. Ou «principe des trous de pigeons» en anglais ; c'est simplement la remarque qu'une application entre deux ensembles finis tels que l'ensemble d'arrivée est de cardinal strictement plus petit que l'ensemble de départ, n'est pas injective.

Pour un polynôme $f$ à coefficients entiers, on définit sa *hauteur* comme la plus grande des valeurs absolues de ses coefficients, et on la note $\mathrm{H}(f)$. Pour un polynôme de plusieurs variables on note *deg* son degré total. Nous utiliserons de façon essentielle la

**Proposition 1** *Soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des nombres algébriques, il existe une constante $c$ (ne dépendant que des $\gamma_i$) telle que pour tout polynôme $f$ de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ et tout réel $T$ tel que* $\max(\ln \mathrm{H}(f), deg(f)) \leq T$,

$$f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \neq 0 \quad \textit{implique} \quad |f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)| \geq e^{-cT}$$

Nous nous contentons de donner les grandes lignes de la démonstration. Pour $i = 1, ..., n$, soit $P_i \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P_i(\gamma_i) = 0$, on note $d_i$ le degré de $P_i$, $a_i$ le coefficient de son terme de plus haut degré et $\gamma_{i,1} = \gamma_i$, $\gamma_{i,2}, ...,$ $\gamma_{i,d_i}$ les racines de $P_i$ (comptées avec leur multiplicité).

On remarque d'abord que si $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ est racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, tel que $P(0) \neq 0$ et de hauteur majorée par $M$, alors $|\alpha| \geq (1+M)^{-1}$. (En considérant le polynôme $X^d P(1/X)$, on voit qu'il revient au même de montrer $|\alpha| \leq (1+M)$. On peut alors supposer $|\alpha| > 1$, et si $\alpha$ annule $\sum_{i=0}^d b_i X^i$, on a $|\alpha| \leq |b_d \alpha| = |b_{d-1} + b_{d-2}\alpha^{-1} + \cdots + b_0 \alpha^{-d+1}| < M/(1 - |\alpha|^{-1})$.)

L'idée est d'associer à tout polynôme $f$ de degré $N$ tel que $f(\gamma_1, ..., \gamma_n) \neq 0$ un polynôme $F \in \mathbb{Z}[X]$ de hauteur majorée par $e^{CT}$ où $C$ ne dépend que de $\gamma_1, ..., \gamma_n$ (et du choix de $P_1, ..., P_n$) tel que $F(f(\gamma_1, ..., \gamma_n)) = 0$ puis d'appliquer la remarque précédente à $P = F$ et $\alpha = f(\gamma_1, ..., \gamma_n)$.

Explicitement, $F$ est donné par :

$$F(X) = (a_1 ... a_n)^{Nd_1 ... d_n} \prod_{j_1=1}^{d_1} ... \prod_{j_n=1}^{d_n} (X - f(\gamma_{1,j_1}, ... \gamma_{n,j_n})).$$

La majoration de la hauteur de $F$ est, ici, facile à établir (remarquer en premier lieu qu'il existe une constante $c_1$ ne dépendant que de $\gamma_1, ..., \gamma_n$ telle que $|f(\gamma_1, ..., \gamma_n)| \leq e^{c_1(\deg f + \ln H(f))}$). C'est un point plus délicat que de montrer que $F$ est à coefficients entiers.

Supposons d'abord que $n = 1$; on a

$$F(X) = a_1^{Nd_1} \prod_{j_1=1}^{d_1} (X - f(\gamma_{1,j})).$$

Remarquons alors que $F = a_1^{Nd_1} G$ où $G$ est un polynôme symétrique en les $\gamma_{1,j}$, $j = 1, ..., d_1$, de degré au plus $Nd_1$ et à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.

Le théorème fondamental de structure de l'algèbre des polynômes symétriques assure l'existence d'un polynôme $\Gamma$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré au plus $Nd_1$ tel que

$$G = G(\gamma_{1,1}, ..., \gamma_{1,d_1}) = \Gamma(s_1, ..., s_{d_1})$$

où $s_1, ..., s_{d_1}$ sont les $d_1$ polynômes symétriques élémentaires en les $\gamma_{1,j}$. On peut donc écrire

$$G(\gamma_{1,1}, ..., \gamma_{1,d_1}) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_{d_1}) \in \mathbb{N}^{d_1},\ \sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i \leq Nd_1} P_\alpha s_1^{\alpha_1} ... s_{d_1}^{\alpha_{d_1}}$$

où $P_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$. Comme les $s_i a_1$ sont entiers pour $i = 1, \dots, d_1$ (ce sont, au signe près, les coefficients de $P_1$), $F$ est à coefficients entiers.

On généralise cette étude au cas $n$ quelconque par récurrence en remarquant que $F$ s'écrit

$$F(X) = (a_n)^{Nd_1 \dots d_n} \prod_{j_n=1}^{d_n} \left( (a_1 \dots a_{n-1})^{Nd_1 \dots d_n} \prod_{j_1=1}^{d_1} \dots \prod_{j_{n-1}=1}^{d_{n-1}} (X - f(\gamma_{1,j_1}, \dots \gamma_{n,j_n})) \right);$$

l'hypothèse de récurrence indique que le facteur parenthésé est un polynôme de $\mathbb{Z}[X, Y]$, de degré au plus $Nd_1 \dots d_{n-1}$, évalué en $Y = \gamma_{n,j_n}$. Un argument similaire à celui utilisé pour le cas $n = 1$ permet de conclure. $\square$

Même si c'est un peu artificiel, on peut réécrire le théorème de Liouville ainsi :
*pour tout nombre $\xi$ racine d'un polynôme irréductible de degré $d \geq 2$, il existe une constante positive $c$ telle que pour tout polynôme $P = qX + p$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$, $|P(\xi)| \geq e^{c(1-d)\ln q}$,*
et voir dans la proposition précédente une généralisation de celui-ci pour des polynômes de degré plus grand que 1 d'une part, en plusieurs variables d'autre part. Il paraît naturel alors d'un déduire un critère de transcendance.

Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha, \beta$ et $\alpha^\beta$ sont simultanément algébriques (pour $\alpha$ positif, différent de 1 et $\beta$ irrationnel), donc $\alpha^{-1}$ et $(\alpha^\beta)^{-1}$ aussi.

Au paragraphe suivant, nous construisons alors pour tout entier impair $N$ un polynôme $f_N$ de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_5]$ tel que, pour $N$ grand tout au moins, $\max(\ln \mathrm{H}(f_N), deg(f_N)) \leq N^{15}$ et

$$0 < |f_N(\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \alpha^\beta, (\alpha^\beta)^{-1})| < e^{-N^{16}/3}$$

Or, d'après la proposition, il existe une constante $c$ telle que :

$$e^{-N^{16}/3} > e^{-cN^{15}};$$

c'est la contradiction attendue.

# 3 Une preuve du théorème de Gel'fond-Schneider (cas réel)

Posons $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^\beta$ et $l = \log \alpha$. Pour $(\tau, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on introduit la fonction $\Phi_{\tau t}(z) = z^\tau e^{tlz}$ ; puis pour $(s_1, s_2) \in \mathbb{Z}^2$, on considère les nombres $\xi_{s_1 s_2} = s_1 + s_2 \beta$, de sorte que

$$\Phi_{\tau t}(\xi_{s_1 s_2}) = (s_1 + s_2 \beta)^\tau (\alpha_1^{s_1} \alpha_2^{s_2})^t.$$

On veut écrire une matrice carrée dont les $\Phi_{\tau t}(\xi_{s_1 s_2})$ sont les coefficients. Soit $N$ un entier impair, la taille de la matrice est $L = N^8$ ; les lignes seront indicées par $(\tau, t)$ pour $0 \leq \tau \leq N^6 - 1$ et $|t| \leq (N^2 - 1)/2$, les colonnes par $(s_1, s_2)$, pour $|s_1|, |s_2| \leq (N^4 - 1)/2$.

Moyennant le choix d'un ordre sur $\mathbb{Z}^2$, on peut alors définir pour tout entier positif $N$ la matrice

$$M_L = (\varphi_\lambda(\zeta_\mu))_{1\leq\lambda,\mu\leq L},$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} \varphi_\lambda(z) = \Phi_{\tau t}(z) \\ \zeta_\mu = \xi_{s_1 s_2}. \end{cases}$$

On note $\triangle_L$ son déterminant. C'est clairement un polynôme à coefficients entiers en $\beta$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_1^{-1}$, $\alpha_2^{-1}$. Il ne reste qu'à appliquer le programme annoncé au paragraphe précédent en prenant pour polynôme $f_N$ le déterminant $\triangle_L$.

Plus explicitement, il faut d'abord montrer que $\triangle_L$ est non nul pour $L$ assez grand. Curieusement, c'est sans doute la partie la plus délicate de la preuve générale et c'est ici que nous aurons besoin de l'hypothèse que $\alpha$ et $\beta$ sont réels. Dans le cas complexe, il n'y a aucune assurance que $\triangle_L$ est non nul. On considère alors une matrice du même type mais avec (beaucoup) plus de colonnes que de lignes et on montre qu'elle est de rang maximal, i.e. égal au nombre de lignes, ce pour quoi on a besoin soit de résultats analytiques plus fins que ceux utilisés ci-dessous, soit de manipulations techniques qui, quoiqu'élémentaires, ne prennent tout leur sens qu'avec un minimum d'habitude de l'algèbre commutative (ou de la géométrie algébrique). Une fois extraite la matrice adéquate on retrouve les rails de la démonstration qui suit. Il s'agit ensuite de majorer $|\triangle_L|$, sa hauteur et son degré comme annoncé. (On voit bien ici que l'ordre choisi sur $\mathbb{Z}^2$ pour écrire notre matrice n'a pas d'importance : un choix différent n'a d'autre effet que de permuter les lignes et les colonnes de la matrice, c'est à dire de multiplier $\triangle_L$ par $\pm 1$.)

*Première étape :* $\triangle_L$ est non nul

Il s'agit de montrer que $M_L$ est de rang maximal.

Supposons donc qu'il existe des réels $a_{\tau t}$ tels que la combinaison linéaire $\sum_{\tau t} a_{\tau t}\mathcal{L}_{\tau t}$, où $\mathcal{L}_{\tau t}$ désigne la ligne $(\tau, t)$ de $M_L$, soit nulle. Cela se traduit par

$$\sum_{\tau t} a_{\tau t}\Phi_{\tau t}(\xi_{s1s2}) = 0 \text{ pour tout } (s_1, s_2) \text{ tel que } |s_1|, |s_2| \leq (N^4 - 1)/2.$$

Si l'on pose

$$F(x) = \sum_{\tau t} a_{\tau t}\Phi_{\tau t}(x),$$

cela revient à dire que $F$ s'annule aux points $\xi_{s_1 s_2}$. Ainsi $F$ possède $N$ zéros distincts (sinon il existerait $(s_1, s_2) \neq (s_1', s_2')$ tels que $s_1 + s_2\beta \neq s_1' + s_2'\beta$ et $\beta$ appartiendrait à $\mathbb{Q}$). Écrivons

$$F(x) = \sum_t a_t(x)e^{tlx},$$

où $a_t(x) = \sum_\tau a_{\tau t}x^\tau$ et remarquons que $\deg(a_t) \leq N^6 - 1$, donc que

$$\sum_t \deg(a_t) \leq N^2(N^6 - 1).$$

D'autre part, comme $l \neq 0$, $tl$ est différent de $t'l$ si $t$ est différent de $t'$ et on conclut grâce au

**Lemme 1** *Soient $P_1, ..., P_n$ des polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ de degrés respectifs $d_1, ..., d_n$ et soient $\omega_1, ...\omega_n$ des nombres réels distincts ; alors la fonction $f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)e^{\omega_i x}$ a au plus $d_1 + ... + d_n + n - 1$ zéros distincts.*

Démonstration.

Le point clé est que si une fonction réelle différentiable $f$ a au moins $m$ zéros distincts, sa dérivée en a au moins $m-1$ ; c'est en effet une conséquence immédiate du théorème de Rolle : soient $x_1, ..., x_m$ les zéros distincts de $f$, comme $f(x_i) = f(x_{i+1})$ pour $i = 1, ..., m-1$, il existe $x_i' \in ]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(x_i') = 0$ pour $i = 1, ..., m-1$.

On démontre alors le lemme par récurrence sur $k = d_1 + ... + d_n + n - 1$. Si $k = 0$, alors $n = 1$, $d_1 = 0$ et il est clair que $P_1 e^{\omega_1 x}$ ne s'annule pas.

À présent soit $k \geq 1$ ; sans perte de généralité, c'est à dire moyennant la multiplication de $f$ par $e^{-\omega_n x}$, on peut supposer $\omega_n = 0$, et donc $\omega_i \neq 0$ pour $i = 1, ..., n$. On a vu que si $f$ a $M$ zéros distincts, sa dérivée

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i P_i + P_i')(x)e^{\omega_i x} + P_n'(x)$$

en a au moins $M - 1$. Mais observons que le degré de $\omega_i P_i + P_i'$ est encore $d_i$, pour $i = 1, ..., n-1$, tandis que celui de $P_n'$ est $d_n - 1$, donc, par hypothèse de récurrence, $M - 1 \leq d_1 + \cdots + d_n + n - 1$, qui est la majoration annoncée de $M$. $\square$

Dans le cas qui nous intéresse, on en déduit que $F$ ne peut avoir plus de $N^2(N^6 - 1) + N^2 - 1 = L - 1$ zéros distincts, sauf si tous les $a_t$ sont nuls. Autrement dit, on a montré

$$\sum_{\tau t} a_{\tau t} \mathcal{L}_{\tau t} = 0 \text{ implique } a_{\tau t} = 0 \text{ pour tout } (\tau, t).$$

Ainsi $\triangle_L$ est non nul.

*Deuxième étape :* Un majorant pour $|\triangle_L|$

On se place dans le plan complexe ; dans ce qui suit nous noterons $\overline{D}_r$ le disque fermé de centre 0 et de rayon $r$ et nous posons $|\varphi|_r = \sup_{z \in \overline{D}_r} |\varphi(z)|$. Un résultat de base en théorie des fonctions analytiques (ou holomorphes) est le principe du maximum, qui assure que le module d'une fonction analytique sur un disque fermé atteint son maximum sur le bord du disque. Une conséquence facile en est le

**Lemme 2 (une variante du lemme de Schwarz)** *Soit $n \in \mathbb{N}$, $r_1$ et $r_2$ deux réels tels que $0 < r_1 \leq r_2$ et soit $\Psi$ une fonction analytique sur le disque $\overline{D}_{r_2}$. Si $\Psi$ a un zéro d'ordre au moins $n$ en 0, alors*

$$|\Psi|_{r_1} \leq \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n |\Psi|_{r_2}.$$

Démonstration.

Posons $\Phi(z) = z^{-n}\Psi(z)$; c'est une fonction analytique sur $\overline{D}_{r_2}$ et le principe du maximum donne d'une part sur $\overline{D}_{r_2}$ : $|\Phi|_{r_2} = r_2^{-n}\, |\Psi|_{r_2}$ , d'autre part sur $\overline{D}_{r_1}$ : $|\Phi|_{r_1} = r_1^{-n}\, |\Psi|_{r_1}$. Mais comme $r_1 \leq r_2$ : $|\Phi|_{r_1} \leq |\Phi|_{r_2}$ d'où le résultat annoncé. □

Introduisons

$$\Psi(z) = \det(\varphi_\lambda(\zeta_\mu z))_{1\leq\lambda,\mu\leq L} \text{ (remarquer que } \triangle_L = \Psi(1)).$$

Bien sûr la fonction $\Psi$ est entière (i.e analytique sur $\mathbb{C}$) puisque $\varphi_\lambda$ est entière pour tout $\lambda$. Nous allons voir que $\Psi$ admet en 0 un zéro d'ordre au moins $L(L-1)/2$. Pour cela écrivons le développement de Taylor de $\varphi_\lambda$ à l'ordre $L(L-1)/2$ en 0, soit

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{L(L-1)/2} a_{k\lambda} z^k + o(z^{L(L-1)/2}),$$

d'où

$$\Psi(z) = \det\Big(\sum_{k=0}^{L(L-1)/2} a_{k\lambda}(\zeta_\mu z)^k\Big)_{\lambda,\mu} + o(z^{L(L-1)/2}),$$

si bien qu'il suffit[11] de montrer que pour tout choix d'entiers naturels $k_1, \ldots, k_L$ au plus égaux à $L(L-1)/2$,

$$\det((\zeta_\mu z)^{k_\lambda})_{1\leq\lambda,\mu\leq L}$$

admet en 0 un zéro d'ordre au moins $L(L-1)/2$. Pour cela, on peut supposer les $k_\lambda$ distincts, sinon le déterminant est identiquement nul (2 lignes sont identiques). Alors

$$\det((\zeta_\mu z)^{k_\lambda})_{1\leq\lambda,\mu\leq L} = (\prod_{\lambda=1}^{L} z^{k_\lambda}) \det((\zeta_\mu)^{k_\lambda})_{1\leq\lambda,\mu\leq L}$$

et il est immédiat que $\sum_{\lambda=1}^{L} k_\lambda \geq 0 + 1 + 2 + ... + L - 1 = L(L-1)/2$.

À présent nous appliquons le lemme précédent avec $r_1 = 1$, $r_2 = e$, $n = L(L-1)/2$, d'où

$$|\triangle_L| \leq |\Psi|_1 \leq e^{-L(L-1)/2}\, |\Psi|_e\,.$$

Or, par définition du déterminant, on a

$$|\Psi(z)| \leq L! \prod_{\lambda=1}^{L} \max_\mu |\varphi_\lambda(\zeta_\mu z)|\,.$$

Mais si $|z| \leq e$, $|\zeta_\mu z| \leq e(N^4-1)(1+|\beta|)/2$ et il vient

$$|\Psi|_e \leq L! \prod_{\lambda=1}^{L} |\varphi_\lambda|_R\ ,$$

11. Il faut s'en convaincre : utiliser la multilinéarité du déterminant comme fonction de ses lignes.

où $R = e(1+|\beta|)N^4$. Tenant compte de

$$|\varphi_\lambda|_R \leq R^\tau e^{|tl|R} \leq R^{N^6} e^{N^2|l|R},$$

on obtient

$$|\triangle_L| \leq e^{-L(L-1)/2} L! R^{N^{14}} e^{N^{10}|l|R}.$$

En majorant $L!$ par $L^L$, on a donc

$$|\triangle_L| \leq e^{CN^{14}\log N - N^{16}/2}$$

où $C$ (constante positive) ne dépend que de $l$ et de $\beta$. Pour $N$ assez grand on a la majoration annoncée, soit

$$|\triangle_L| \leq e^{-N^{16}/3}.$$

*Troisième étape :* Des majorants pour le degré et la hauteur de $\triangle_L$.

Rappelons que $\Phi_{\tau t}(\xi_{s1s2}) = (s_1 + s_2\beta)^\tau(\alpha_1^{s_1}\alpha_2^{s_2})^t$, si bien que, comme polynôme en $\beta$, $\alpha_1^{\pm 1}$, $\alpha_2^{\pm 1}$, son degré total est majoré par $|\tau| + |t(s_1+s_2)| \leq 2N^6$. Par suite le degré de $\triangle_L$, qui est somme de produits de $N^8$ tels facteurs, est majoré par $2N^{14}$.

Quant à la hauteur d'un polynôme $F$ elle est évidement majorée par la longueur de $F$ notée $\ell(F)$ et définie comme la somme des modules des coefficients de $F$. La longueur a cet avantage qu'en plus de vérifier

$$\ell(F+G) \leq \ell(F) + \ell(G),$$

elle satisfait

$$\ell(FG) \leq \ell(F)\ell(G).$$

On en déduit :

$$\ell(\triangle_L) \leq L!(\max_{\lambda,\mu} \ell(\phi_\lambda(\zeta_\mu)))^L, \quad \text{(sous-additivité de } \ell)$$

où $\phi_\lambda(\zeta_\mu)$ et $\triangle_L$ sont vus comme polynômes en $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}$.

Mais remarquons que

$$\begin{aligned} \ell(\Phi_{\tau t}(\xi_{s1s2})) &\leq \ell(s_1 + s_2\beta)^\tau \ell((\alpha_1^{s_1}\alpha_2^{s_2})^t) \\ &\leq (|s_1| + |s_2|)^\tau, \end{aligned}$$

d'où, pour $N$ assez grand et en majorant encore $L!$ par $L^L$

$$\log \mathrm{H}(f_N) \leq 8N^8 \log N + 4N^{14}\log N \leq 5N^{14}\log N.$$

$\square$

# 4 La postérité du septième problème de Hilbert

La valeur d'un problème mathématique est difficile à définir dans l'absolu, mais la communauté des mathématiciens s'accorde probablement sur ce point : un bon problème doit survivre à sa résolution, soit que les méthodes mises au point pour le «tuer » aient un champ d'application vaste ou qu'elles donnent même naissance à une nouvelle branche des mathématiques (on peut songer au dernier théorème de Fermat), soit que l'énoncé prouvé suggère des conjectures nouvelles et stimulantes.

Nous espérons, dans la dernière partie de cet exposé, convaincre le lecteur que le septième problème de Hilbert répond à ces deux critères (soulignons que nous sommes fort loin de l'exhaustivité dans l'échantillon d'applications que nous présentons).

L'idée la plus naturelle est d'exploiter les méthodes de Gel'fond et Schneider afin de démontrer la transcendance d'autres classes de nombres que ceux de la forme $\alpha^\beta$. Nous l'illustrons maintenant par un exemple dû à Schneider lui-même.

À un réseau $\Omega$ de $\mathbb{C}$ (c'est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$ qui engendre $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$), on associe une fonction méromorphe $\wp(z)$, dont les pôles sont précisément les points de $\Omega$ et qui est périodique relativement à ce réseau. Elle est solution de l'équation différentielle $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$, où $g_2$ et $g_3$ sont des quantités associées à $\Omega$, d'où l'on peut déduire que $(\wp, \wp')$ fournit une paramétrisation de la courbe algébrique donnée par $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$. Une telle courbe est dite *elliptique* et possède la très remarquable propriété qu'on sait munir l'ensemble de ses points (sur un corps donné) d'une loi de groupe abélien. Ceci se traduit en retour par une relation algébrique entre les valeurs de $\wp$ et $\wp'$ aux points $u, v$ et $u + v$ ; cette propriété est à rapprocher de la relation $e^{u+v} = e^u.e^v$, elle-même liée au fait que les nombres complexes de module 1 forment un groupe.

Ces similitudes entre la fonction exponentielle et la fonction $\wp$ (dite de Weierstraß) permirent à Schneider d'adapter sa méthode à cette dernière, le principal obstacle à surmonter provenant de ce que $\wp$ n'est pas une fonction entière. Il obtint par exemple :

*si $g_2$ et $g_3$ sont algébriques et si $\alpha$ est un nombre algébrique n'appartenant pas à $\Omega$, alors $\wp(\alpha)$ est transcendant.*

On peut mentionner le corollaire suivant :

*pour une ellipse dont les axes sont pris comme axes de coordonnée et dont les longueurs d'axes sont algébriques, la longueur de tout arc compris entre des points de coordonnées algébriques distincts (en particulier la longueur de l'ellipse) est un nombre transcendant.*[12]

D'un autre point de vue, Gel'fond eut l'idée d'utiliser sa méthode afin d'obtenir des résultats quantitatifs fins (l'aspect qualitatif étant de dire d'un nombre s'il est irrationnel, algébrique ou transcendant par exemple). Pour des nombres algébriques $\alpha$ et $\beta$, avec les restrictions d'usage, il produit ainsi de nouvelles minorations des quantités $|\alpha^\beta - \zeta|$, où $\zeta$ est un nombre algébrique arbitraire. Soulignons aussi que ces estimations sont *effectives*, ce qui signifie qu'on sait, comme dans le théorème de Liouville, «effectivement» calculer les quantités intervenant dans les minorations, celles-ci dépendant évidemment de $\alpha$ et $\beta$, mais aussi de la «complexité» du nombre $\zeta$, mesurée au moyen du degré et de la hauteur de

12. Bien sûr un lien étroit, mais non immédiat, existe entre ellipses et courbes elliptiques.

son polynôme minimal (disons que c'est le polynôme à coefficients entiers premiers entre eux, à coefficient dominant positif, de plus bas degré, dont $\zeta$ est racine).

Rappelons la formulation eulérienne du problème de Hilbert : si $b$ n'est pas une puissance rationnelle de $a$, alors $\ln b / \ln a$ est transcendant. On peut réécrire le théorème de Gel'fond-Schneider dans cet esprit : si $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont des nombres algébriques et que $\alpha_1$ n'est pas une puissance rationnelle de $\alpha_2$, alors $\log \alpha_2 / \log \alpha_1$ est transcendant (pour toute détermination des logarithmes en question). Ou encore :

*pour tous nombres algébriques $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, tels que $\log \alpha_1$ et $\log \alpha_2$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, le nombre $\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2$ est non nul.*

Gel'fond donne de nouvelles minorations effectives de ces quantités[13], ce qui a des conséquences remarquables, aussi bien pour la résolution des équations diophantiennes que pour certaines questions de théorie algébrique des nombres.

Il s'est par exemple intéressé au vieux «problème du nombre de classes 1» de Gauß, qui conjecture dans ses *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) qu'il n'y a que neuf corps quadratiques imaginaires, c'est à dire de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, où $D$ est un entier positif sans facteur carré, dont le nombre de classes est égal à 1, cette propriété signifiant que, du point de vue de l'arithmétique, les éléments de tels corps ont un comportement parfaitement similaire à celui des rationnels. Il montre avec Linnik comment relier cette question à la majoration de la valeur absolue d'une combinaison linéaire à coefficients entiers de trois logarithmes de nombres algébriques.

Sa méthode ne lui permet pas dans ce cas précis de conclure (elle traite essentiellement, on l'a vu, le cas où n'interviennent que deux logarithmes) et il souligne l'importance, pour le progrès de la théorie des nombres, de fournir des minorations effectives de quantités du type $|\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n|$, où les $\beta_i$ sont des entiers et les $\alpha_i$ des nombres algébriques.

Ce programme, qui suppose une généralisation des méthodes de Gel'fond et Schneider aux fonctions de plusieurs variables, est réalisé, au-delà des espérances de Gel'fond, par Alan Baker en 1966, dans une série de travaux qui lui vaudront d'ailleurs la médaille Fields. Il obtient par exemple la généralisation suivante du théorème de Gel'fond et Schneider :

$\alpha_1^{\beta_1} \ldots \alpha_n^{\beta_n}$ *est transcendant pour tous nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ différents de* $0$ *et* $1$ *et tous nombres algébriques $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tels que $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$ (généralisation de la condition $\beta \notin \mathbb{Q}$).

La version quantitative des résultats de Baker a eu, et continue d'avoir, avec ses raffinements et ses généralisations, des répercussions remarquables dans de nombreuses branches de la théorie des nombres. Baker en déduisit en particulier qu'il n'y a pas de dixième corps quadratique imaginaire de nombre de classes égal à 1.

Ironie de l'histoire, Stark remarque en 1969 que Gel'fond et Linnik étaient en mesure de résoudre la question dès 1949, un argument utilisant des formes linéaires en deux logarithmes seulement permettant de conclure.

13. On parle de formes linéaires en deux logarithmes.

Pour terminer, nous donnons ci-dessous la liste des ouvrages qui ont guidé la rédaction de cet exposé et où le lecteur (motivé !) pourra trouver de quoi satisfaire la curiosité que nous espérons avoir éveillée.

Alan Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

N. I. Fel'dman et Yu. V. Nesterenko, *Number theory IV, Transcendental numbers*, Encyclopaedia of mathematical sciences, **44**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

Theodor Schneider, *Introduction aux nombres transcendants*, traduit de l'allemand par P. Eymard, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

Michel Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups, Transcendence properties of the exponential function in several variables*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

Michel Waldschmidt, *Transcendence methods*, Queen's papers in pure and applied mathematics, **52**, Queen's University, Kingston, Ontario, 1979.

Julien Haristoy
U.F.R. de mathématique et d'informatique & IRMA
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
e-mail : `haristoy@math.u-strasbg.fr`

Édouard Oudet
U.F.R. de mathématique et d'informatique & IRMA
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg
e-mail : `oudet@math.u-strasbg.fr`

## Rallye mathématique d'Alsace 2003 (5 mars 2003)
## Classe de terminale 30$^e$ édition

**Exercice 1**

On supprime une case d'un échiquier carré qui en comporte 64.

Est-il possible de recouvrir les cases restantes à l'aide de triminos  ?

**Exercice 2**

On considère la somme $S = 1 + 2 + \cdots + 30$.
Dans cette somme, on supprime un certain nombre de signes « + ». Par exemple, $2 + 3$ est remplacé par 23 ou $2 + 3 + 4$ par 234, pour obtenir une nouvelle somme S'.
Quel est le nombre minimal de signes « + » à supprimer pour obtenir une somme S' valant 3030 ?

**Exercice 3**

Les cent membres d'une association reviennent du casino et s'asseyent autour d'une table ronde pour faire le point. Au cours de la soirée, l'association a gagné mille euro. Le président en a gagné soixante. Il désire connaître les gains et les pertes de chacun des membres et constate que six personnes assises l'une à côté de l'autre autour de la table n'ont, à elles six, jamais gagné davantage que lui.
Pouvez-vous aider le président dans sa tâche ?

## Rallye mathématique d'Alsace 2003 (12 mars 2003)
## Classe de première 30$^e$ édition

**Exercice 1**

Quelle est l'aire maximale d'un triangle dont les trois sommets appartiennent aux côtés d'un carré de côté 1 ?

**Exercice 2**

Claudine possède un chandelier contenant $n$ bougies de même taille. Elle allume ce chandelier pendant $n$ dimanches de la manière suivante : le premier dimanche, elle fait brûler une bougie pendant une heure ; le deuxième dimanche, elle fait brûler deux bougies convenablement choisies pendant une heure, et ainsi de suite jusqu'au $n$-ième dimanche où elle fait brûler les $n$ bougies pendant une heure.
Pour quelles valeurs de $n$ est-il possible que toutes les bougies soient entièrement consumées à l'issue du $n$-ième dimanche ?
Dans ce cas, donner une marche à suivre.

**Exercice 3 Grains de riz**

Tout le monde connaît l'anecdote de ce roi qui s'engagea à récompenser l'inventeur du jeu d'échecs selon ses souhaits, alors que celui-ci demandait à ce qu'on lui donne un grain de riz pour la première case de l'échiquier, deux grains de riz pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de riz à chaque case, jusqu'à la 64$^e$.
On connaît moins la façon dont le roi se tira de cette situation : il exigea de ses sept seigneurs qu'ils fournissent chacun une part égale de la récompense arrondie au grain de riz inférieur. Lui-même se contenterait de fournir les grains de riz nécessaires pour faire le compte exact.
Combien le roi dut-il fournir de grains de riz ?