ÉDITORIAL

REUSSIR UNE REFORME

Les années actuelles marquent l'enseignement des mathématiques par une série de réformes.

La réforme des lycées avec le renouvellement des programmes est arrivée en terminale cette année et nous connaissons le premier cru de bacheliers nouveaux programmes. Une des critiques adressées à ces programmes est leur lourdeur : il serait impossible de traiter correctement ces programmes dans le volume horaire imparti qui est allé diminuant avec la réforme. Ce à quoi certains auraient répliqué qu'il est toujours possible de réduire par la suite des programmes présentement trop volumineux et qu'il vaut mieux maintenir une exigence de volume des contenus pour assurer la qualité de l'enseignement. Ces arguments restent controversés et il s'installe une distance entre le programme officiel et le programme réel pratiqué dans les classes. Pour certains, cette distance explique une partie des difficultés rencontrées aux épreuves de mathématiques du bac S de la session 2003.

Le baccalauréat est une figure emblématique du système éducatif français. Cet examen pèse sur l'enseignement secondaire : la forme et le contenu des sujets proposés conditionnent l'enseignement des dernières années de lycée. On connaît le bachotage où les exercices stéréotypés et les routines prédominent sur la réflexion et la créativité. D'où l'idée de changer cette forme et ce contenu pour changer l'enseignement de lycée. Certains souhaiteraient l'apparition de quelques questions plus ouvertes pour développer dans l'enseignement la pratique des problèmes ouverts. A partir de la session 2004, en mathématiques, en terminale S ou ES, le traditionnel problème accompagné de deux exercices sera remplacé par trois à cinq exercices, parmi lesquels des questions à choix multiples seront possibles. Pour cette nouvelle épreuve, « l'étude d'une situation conduisant à choisir un modèle simple, à émettre une conjecture, à expérimenter, la formulation d'un raisonnement sont des trames possibles »[1]. Certains souhaitent qu'aucune annale zéro ne paraisse pour ne pas retomber dans le défaut du bachotage des années précédentes. On remarquera que dès l'année suivante des annales pourront à nouveau circuler.

D'autres réformes sont annoncées par la communication du ministre de l'éducation au conseil des ministres du 9 avril 2003. Elle prévoie plusieurs chantiers pour la formation initiale et continue des maîtres, au plus tôt pour la rentrée 2004, c'est-à-dire la session de concours de recrutements de 2005. Il s'agit de « recentrer la formation des maîtres sur les connaissances qu'ils auront à enseigner » et de « rénover les concours de recrutement de professeurs » avec un nouveau concours

[1] Bulletin officiel de l'éducation n°19 du 8 mai 2003.

externe de recrutement des professeurs d'école et une nouvelle organisation des concours de recrutement des professeurs du second degré. « La première année d'IUFM doit se rapprocher des universités ». Autant de chantiers qui vont engager la formation des enseignants de mathématiques et donc l'enseignement des mathématiques.

La réussite d'une réforme est le résultat de nombreux facteurs : la préparation de la réforme suffisamment à l'avance[2], la formation continue des enseignants, l'expérimentation et l'évaluation des réformes, la stabilité de la réforme pour permettre une observation et une évaluation sur un terme plus long… On peut s'interroger sur le respect de ces critères pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques. Dans la réforme des lycées, l'expérimentation a-t-elle eu lieu et quelles conséquences en a-t-on tiré sur la faisabilité des programmes ? Les concepteurs des programmes ont-ils connaissance de la structure horaire des programmes au moment où on leur passe commande de ces programmes ? L'exemple de la série L[3] montre qu'en l'espace de cinq ans on peut passer de la suppression de l'enseignement mathématique en terminale, à son rétablissement comme option facultative puis comme option obligatoire. On a connu quatre programmes différents en cinq ans : l'ancien programme supprimé, un programme transitoire dont la durée de vie aura été d'un an, un programme définitif qui, un an après sa mise en place, devait être remplacé par un nouveau programme refusé au conseil de l'éducation de juin 2003, qui a maintenu de manière transitoire le programme actuel. Après, on s'étonnera qu'aucun éditeur ne veuille publier de manuels scolaires pour cette série et que les élèves choisissent de moins en moins l'enseignement des mathématiques comme option de cette série.

Pour réussir, une réforme doit être préparée et accompagnée. Sous-estimer ces points pourrait conduire à des écarts entre le discours officiel et la pratique du terrain. On pourrait imaginer des programmes infaisables qu'on continuerait à afficher pour faire croire qu'ils sont maîtrisables, des sujets d'examens qui n'évaluent pas correctement les élèves et pour lesquels des barèmes d'examens « charcutés » permettraient des résultats socialement acceptables. On voit bien que le danger à long terme serait de détourner des élèves de l'enseignement des mathématiques et de la voie scientifique alors même que les besoins de la nation en scientifiques restent importants. Souhaitons donc que les réformes actuelles et à venir concernant l'enseignement des mathématiques soient bien préparées et bien accompagnées, et que les difficultés et les erreurs, inévitables dans un système complexe, soient correctement évaluées pour améliorer le système.

Richard CABASSUT

---

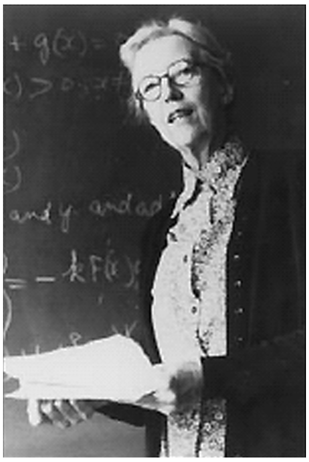
[2] rappelons qu'il est possible, en France, d'informer les professeurs sur de nouvelles épreuves de baccalauréat qui auront lieu au mois de juin en ne divulguant les informations qu'au vacances de la Toussaint, ou encore qu'il est possible de modifier en cours d'année la nature de ces épreuves.

[3] Voir la brochure de l' IREM de Strasbourg *Ressources pour l'enseignement des mathématiques en série littéraire* parue en mars 2003 prix : 7 €).

Mary Cartwright

Raphaële Supper

MARY CARTWRIGHT (1900–1998)



Biographie. La mathématicienne britannique Mary Lucy Cartwright naquit le 17 décembre 1900 à Aynho (dans le Northamptonshire) où son père était vicaire. Elle était la troisième dans une famille de cinq enfants. Ses deux frères aînés seront tués pendant la première guerre mondiale.

Dans un premier temps, Mary Lucy reçut son instruction à la maison, par des gouvernantes. Elle ne fut scolarisée qu'à l'âge de onze ans, d'abord à Leamington, puis à Salisbury. Longtemps, sa matière préférée fut l'histoire. Son goût pour les mathématiques s'affirma en dernière année, grâce aux encouragements d'une enseignante autodidacte, Miss Hancock. Ce tournant s'avéra décisif pour le choix de ses études supérieures : désormais, Mary Lucy Cartwright optait pour les mathématiques.

En octobre 1919, elle entra au *St Hugh's College* à Oxford. Il n'y avait alors que cinq femmes qui étudiaient les mathématiques dans cette université. Les conditions de travail étaient difficiles pour tous les étudiants au lendemain de l'armistice : avec le retour des étudiants qui avaient interrompu ou différé leurs études pour partir au front, les amphis étaient bondés. Les étudiants en étaient souvent réduits à recopier des notes de cours où ils n'avaient même pas pu entrer. Les résultats aux examens s'en ressentaient. Mary Lucy Cartwright fut même tentée un moment d'abandonner et de retourner en histoire.

À la fin de sa troisième année à Oxford, autre tournant déterminant pour elle : Morton (alors étudiant, il devait plus tard devenir professeur à Aberystwyth) lui recommanda la lecture de *Modern analysis* de Whittaker et Watson. Elle reçut également la permission d'assister au séminaire de Hardy.

En 1923, ses quatre années d'études furent couronnées par l'obtention du *first class degree*. C'était seulement la deuxième année que les femmes étaient autorisées à passer un *final degree* à Oxford. Mary Cartwright fut la première femme à suivre les cours jusqu'au niveau du *final degree* et la première à réussir cet examen avec la mention *first class*.

Ne souhaitant pas rester plus longtemps à la charge de sa famille financièrement, elle enseigna ensuite les mathématiques dans une école à Worcester puis à Buckinghamshire. Mais quatre ans plus tard elle revint à Oxford pour commencer une thèse sous la direction de Hardy et Titschmarsh. Cette thèse intitulée *The zeros of integral functions of special types* fut soutenue en 1930. Littlewood était examinateur externe.

Après sa thèse, elle continua ses recherches au *Girton College* à Cambridge. En 1935, elle obtint un poste de *University Lecturer* dans cet établissement, puis un poste de *Reader in Theory of Functions* en 1959, poste qu'elle occupa jusqu'à son départ à la retraite en 1968. *Girton College* avait été fondé en 1869 pour l'enseignement supérieur féminin par Emily Davies. En 1948, cet établissement devint membre à part entière de l'université de Cambridge. Il devint mixte en 1977 pour les enseignants–chercheurs et en 1979 pour les étudiants.

Parallèlement à une volumineuse production scientifique (décrite ci–dessous), Mary Lucy Cartwright assuma également des responsabilités administratives importantes :
– elle assura la direction de *Girton College* de 1949 à 1968,
– elle présida la *Mathematical Association* en 1951 et 1952,
– de 1957 à 1960, elle fut présidente de la *Cambridge Association of University Women*,
– au sein de la *London Mathematical Society*, elle fut à plusieurs reprises membre du conseil, vice–présidente et elle fut la première (et jusqu'à présent la seule) femme élue présidente (de 1961 à 1963).

En 1956, elle était membre de la délégation de la *Royal Society* qui visita l'Union Soviétique à l'invitation de l'Académie des Sciences. En 1964, ses travaux furent récompensés par la Médaille Sylvester décernée par la *Royal Society* puis en 1968 par la Médaille DeMorgan de la *London Mathematical Society*. En 1969, elle reçut le titre de *Dame of the British Empire*.

Après son départ à la retraite, elle participa à l'édition des oeuvres complètes de Hardy. Elle voyagea dans de nombreuses universités d'Europe et des États–Unis, continuant longtemps à publier des articles de recherche. Elle s'éteignit le 3 avril 1998.

Travaux mathématiques. Les contributions de Mary Lucy Cartwright (plus de quatre–vingt dix articles publiés dans des journaux mathématiques) recouvrent différents domaines en analyse : fonctions à variable réelle ou complexe et en particulier fonctions entières (holomorphes dans $\mathbb{C}$ tout entier), topologie, équations différentielles, oscillations non–linéaires, systèmes dynamiques, chaos.

Le premier problème résolu par Mary Cartwright avait trait aux séries de Dirichlet et à la méthode de sommation d'Abel. C'était un problème posé par Hardy à son séminaire d'Oxford. Mary Cartwright apporta une solution complète, basée sur des intégrations le long de contours. Après son arrivée à Cambridge, elle s'intégra au séminaire de Littlewood et résolut aussi un problème qu'il y avait soulevé, concernant l'ordre de grandeur du module des fonctions multivalentes :

THÉORÈME DE CARTWRIGHT. Soit D le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série convergente pour $z \in D$, de somme $f(z)$. On suppose que f ne prend aucune valeur plus de p fois dans D.

Soit $M = \max_{0 \leq n \leq p} |a_n|$. Alors il existe $A > 0$ ne dépendant que de p tel que :

$$|f(z)| \leq \frac{AM}{(1-|z|)^{2p}} \forall z \in D.$$

Ce travail de Cartwright était le premier résultat significatif sur les fonctions multivalentes. De plus, elle avait mis en oeuvre des techniques originales, en important dans un contexte différent des méthodes de transformations conformes dûes à Ahlfors. Ce théorème pionnier de Cartwright est toujours utilisé en traitement du signal.

Pendant une dizaine d'années, elle continua d'explorer le monde des fonctions entières, fonctions méromorphes, fonctions analytiques à singularités essentielles, étudiant en particulier leur comportement asymptotique et les phénomènes qui peuvent survenir près des frontières fractales. Ses résultats et ceux de Valiron sont les premiers sur les fonctions méromorphes partageant une courbe de niveau. En collaboration avec Bosanquet, elle étudia aussi les moyennes de Cesaro et les moyennes de Hölder de fonctions analytiques.

En janvier 1938, ses recherches prirent une nouvelle orientation, suite à un appel relayé par la *London Mathematical Society* : un comité du *Department of Scientific and Industrial Research* demandait l'expertise de mathématiciens sur des questions surgissant de problèmes de radio et de radar. Les oscillations des ondes radio sont décrites à l'aide d'une équation introduite en 1920 par le physicien Van der Pol. Cette équation différentielle du second ordre non–linéaire décrit un circuit électrique comportant une triode dont la résistance varie avec le courant (des équations similaires modélisent d'autres phénomènes physiques comme par exemple les oscillations d'un bâtiment sous l'effet du vent). Les ingénieurs radio voulaient savoir s'il y avait une solution périodique, si elle était stable, quelles étaient sa période et son amplitude, comment elles variaient avec les paramètres de l'équation...

Ce défi suscita l'intérêt de Mary Cartwright. Intuitivement, elle avait l'impression de reconnaître le cadre topologique du problème. Ce fut le point de départ d'une collaboration d'une dizaine d'années avec Littlewood. Les travaux de Poincaré, Birkhoff, Bendixon et Levinson sur les équations différentielles les inspirèrent sur le plan théorique. Mais concernant le problème concret posé par les ingénieurs, mis à part quelques résultats élémentaires datant des années vingt et quelques données expérimentales, Cartwright et Littlewood partaient dans l'inconnu et découvrirent une grande variété de phénomènes inattendus, obtenant aussi bien des solutions périodiques instables que non périodiques mais stables, selon les valeurs des paramètres.

Pendant la seconde guerre mondiale, la *Royal Air Force* se trouvait confrontée à des dysfonctionnements de radar : poussés à des puissances élevées, les amplificateurs se mettaient à répondre de façon de plus en plus erratique. L'armée incriminait un défaut de fabrication pour ce manque de fiabilité et retournait le matériel pour réparation. Mary Cartwright démontra que ce comportement pathologique des amplificateurs n'était pas dû à une imperfection technique mais était intrinsèque à l'équation de Van der Pol régissant un amplificateur non–linéaire : pour un signal d'entrée périodique, la solution conserve la même période à faible puissance ; mais quand la puissance augmente, la période devient de plus en plus grande, pour finalement aboutir à une solution qui n'est plus périodique du tout.

C'était la première étude d'un phénomène appelé aujourd'hui chaos. Elle fut publiée après guerre mais c'est seulement une quinzaine d'années plus tard qu'elle trouva un écho lorsque Levinson signala cet article à Smale qui travaillait sur les systèmes dynamiques. Les exemples étudiés par Cartwright et Littlewood contredisaient une conjecture de Smale. Leurs travaux précurseurs influencèrent ainsi le développement de la théorie moderne du chaos. Par ailleurs, le travail de Cartwright et Littlewood fut l'un des premiers à combiner méthodes topologiques et analytiques pour l'étude des équations différentielles.

Les recherches de Mary Cartwright à partir des années cinquante renouent avec les fonctions analytiques sans pour autant abandonner le domaine des équations différentielles. En 1956 parut son ouvrage *Integral Functions*. Elle dirigea la thèse de nombreux étudiants. Elle publia également des articles historiques et biographiques.

Notre couverture. Les fonctions de la classe de Cartwright sont les fonctions entières f de type exponentiel telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2}\, dx < +\infty.$$

Par exemple, la transformée de Fourier d'une distribution à support compact appartient à cette classe. Krein a obtenu une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction entière f appartienne à la classe de Cartwright : que $\log|f(z)|$ puisse être majoré par une fonction harmonique positive dans le demi–plan supérieur, ainsi que dans le demi–plan inférieur.

Un autre théorème dû à Krein :

Si une fonction entière f possède une représentation de la forme suivante : $\dfrac{1}{f(z)} = \sum_n \dfrac{c_n}{z-\lambda_n}$, où les suites $(c_n)_n$ et $(\lambda_n)_n$ satisfont la condition $\sum_n \dfrac{|c_n|}{1+|\lambda_n|} < +\infty$, alors f appartient à la classe de Cartwright.

Matsaev a démontré le résultat suivant :

Si une fonction entière f vérifie une estimation de la forme suivante : $|f(z)| \geq exp\left\{-M\dfrac{1+|z|^\rho}{|\Im m\, z|^k}\right\}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, où $M > 0$, $0 \leq \rho < 1$ et $k > 0$ sont des constantes indépendantes de z, alors f appartient à la classe de Cartwright.

Étant donnée f une fonction de la classe de Cartwright telle que $f(0) \neq 0$, soit $\{a_k\}_k$ l'ensemble de ses zéros (répétés selon leur multiplicité). On note $n_+(r,\alpha)$ et $n_-(r,\alpha)$ le nombre de zéros de f situés respectivement dans les secteurs :

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq r, |\arg\, z| \leq \alpha\}$$

et

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq r, |\pi - \arg\, z| \leq \alpha\}.$$

Le théorème de Cartwright–Levinson établit que :

$$\sum_k \left|\Im m\, \frac{1}{a_k}\right| < +\infty,$$

$\displaystyle\sum_{|a_k|<R} \Re e\, \frac{1}{a_k}$ *admet une limite finie quand* $R \to +\infty$,

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n_+(r,\alpha)}{r} = \lim_{r\to+\infty} \frac{n_-(r,\alpha)}{r} = \frac{1}{2\pi}\left(\limsup_{y\to+\infty} \frac{\log|f(iy)|}{y} + \limsup_{y\to+\infty} \frac{\log|f(-iy)|}{y}\right)$$

pour tout $\alpha \in]0,\pi[$.

Références bibliographiques.

Mary Lucy Cartwright : *Some exciting mathematical episodes involving John Edenson Littlewood*, Bull. Inst. Math. Appl. 12 (1976) no.7, pp.201–202.

M.L. Cartwright : *Moments in a girl's life*, Bull. Inst. Math. Appl. 25 (1989) no.3–4, pp.63–67.

Freeman Dyson : *Review of "Nature's Numbers" by Ian Stewart*, Mathematical Intelligencer, 19(2), 1997, 65-67.

N.P. Erugin : *Mary Lucy Cartwright*, Differentsialnye Uravneniya 25 (1989) no.9, pp. 1642–1646.

Paul KOOSIS : *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Université de Montréal, Les Publications CRM, Montréal, PQ, 1996.

B.Y. LEVIN : *Lectures on entire functions*, (Eds : Y. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko), Translations of mathematical monographs, Providence RI, American Mathematical Society, 1996.

S.L. MC MURRAN and J.J. TATTERSALL : *The Mathematical Collaboration of M.L. Cartwright and J.E. Littlewood*, American Mathematical Monthly, Vol.103, No.10 (December 1996) 833-845.

Shawnee L. MC MURRAN and James J. TATTERSALL : *Cartwright and Littlewood on van der Pol's equation*, Harmonic analysis and nonlinear differential equations (Riverside, CA, 1995), 265–276, Contemp. Math., 208, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

S.L. MC MURRAN and J.J. TATTERSALL : *Mary Cartwright (1900–1998)*, Notices of the AMS, volume 46, Number 2, February 1999, pp.214–220.

Caroline Series : *Obituary : Dame Mary Lucy Cartwright DBE (1900–1998)*, European Mathematical Society Newsletter, December 1998, Issue 30, pp.21–23.

Caroline Series : *Dame Mary Cartwright*, to appear in the Oxford Dictionary of National Biography.

Girton College Register, Volume 2, 1944-1969.

Personalities and Presidents, The Mathematical Gazette, Vol. 80 (March 1996), 22-23.

Obituary, Daily Telegraph, London (April 11, 1998).

Obituary, The Times, London (April 7, 1998).

Quelques sites sur la toile.

http ://www.agnesscott.edu/lriddle/women/cartwght.htm
http ://www.amsta.leeds.ac.uk/Applied/news.dir/issue9.dir/news/news.html #topology
http ://www.cis.ksu.edu/~ab/Miscellany/smale.ps
http ://www.geometry.net/detail/scientists/cartwright_dame_mary.html
http ://www.girton.cam.ac.uk/
http ://www.physics.ucla.edu/~cwp/Phase2/Cartwright,Mary_Lucy@951234567.html
http ://www.siam.org/siamnews/07-98/mlcart.htm
http ://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Cartwright.html

Raphaële SUPPER
Maître de conférences
U.F.R. de Mathématique et d'Informatique
Université Louis Pasteur, Strasbourg I

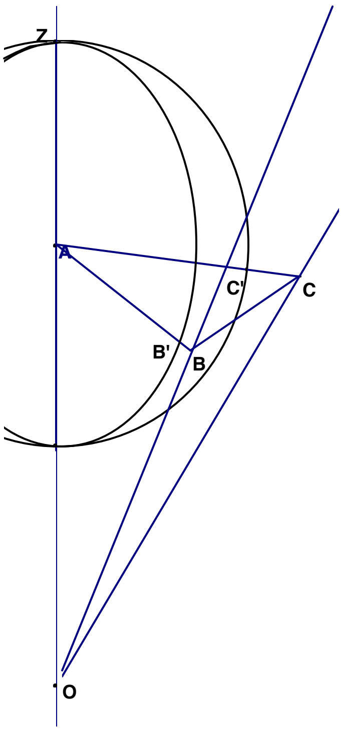
UNE PAGE DE CALCUL DE LA CONDAMINE

Jean LEFORT

Professeur proche de la retraite, ayant fait de nombreuses pages de calcul numérique à la règle ou avec des tables de logarithme lors de mes études, je dédie cet article aux jeunes collègues qui n'ont connu que l'ère de la calculatrice électronique, voire de l'ordinateur. Ils pourront se rendre compte que le calcul numérique n'était pas une sinécure et que d'habiles mathématiciens faisaient aussi des erreurs. D'un autre côté on admirera la propreté et la présentation, malgré les ratures, des notes prises directement.

1. Le principe d'une triangulation au XVIIIe siècle

Pour réaliser une triangulation, on commence par mesurer une base la plus horizontale possible à l'aide de perches de longueur donnée que l'on place bout à bout. Cette opération est très délicate, d'abord parce qu'il faut s'assurer de l'exact alignement des perches, ensuite parce qu'il faut s'assurer de l'exacte jointure des perches les unes à la suite des autres, sans que le placement de la suivante ne modifie la position de la précédente, enfin parce que les perches sont sensibles à la chaleur et qu'il faut donc tenir compte du coefficient de dilatation. Les perches utilisées sont en bois et font environ 4 mètres de long. On les compare régulièrement à des étalons de fer dont on connaît parfaitement le coefficient de dilatation donc la longueur en fonction de la température du moment. L'alignement se fait au cordeau après s'être assuré que la surface est plane. On effectue au moins deux mesures, dans un sens et dans l'autre. Ces mesures sont finalement réduites à l'horizontale en tenant compte de la pente du terrain. Par ailleurs, on détermine la position exacte en latitude de l'origine de la base ainsi que son orientation par rapport au méridien.



On construit ensuite des triangles successifs dont on mesure les angles. Ces triangles sont mesurés dans leur plan et on calcule ensuite les angles sphériques correspondants. La méthode utilisée est la suivante : Considérons le triangle plan ABC. Les points A, B, C sont à des distances inégales de O (centre de la Terre) puisqu'à des altitudes différentes. Les verticales en A, B, et C sont respectivement OA, OB, OC. L'angle sphérique en A est l'angle des plans OAB et OAC. Considérons alors la sphère de centre A et de rayon AZ (Z pour zénith). Cette sphère est coupée par les plans OAB et OAC suivant deux méridiens dont l'angle en Z est aussi l'angle sphérique en A puisque le plan tangent à la sphère en Z est perpendiculaire à OA. Cette sphère coupe AB en B' et AC en C' et l'arc de grand cercle $B'C'$ a pour mesure l'angle $B'AC' = BAC$, c'est-à-dire l'angle en A du triangle plan ABC.

Le problème posé revient donc à déterminer l'angle en Z du triangle sphérique $ZB'C'$. Pour cela on détermine les 3 côtés. On connaît déjà le côté $B'C'$ qui est simplement l'angle en A du triangle plan ABC. Il suffit donc de déterminer les angles ZAB' et ZAC' qui ne sont autres que les angles de AB et AC avec la verticale en A.

La mesure des angles se fait à l'aide de deux types d'instruments : les secteurs qui servent à la mesure des hauteurs des étoiles et les quarts de cercle pour la détermination des angles des triangles plan. Dans les deux cas le principe est celui du rapporteur, les alignements étant assurés à l'aide d'une alidade munie d'une lunette, la lecture se faisant sur le limbe à l'aide d'un micromètre. Ces instruments sont grands de façon à assurer une bonne précision de lecture des mesures. Les secteurs ont plus de trois mètres de rayon. Le quart de cercle est un instrument plus petit (environ un mètre de rayon) car il doit pouvoir être transporté en tout lieu, en particulier les clochers des églises souvent les points les plus hauts dans les régions de plaine. On comprend alors que les mesures de distances zénithales soient moins précises que les mesures des angles du triangle.

Les triangles sont choisis en fonction de la nature du terrain, avec des côtés dont la longueur est de l'ordre de 30 km. Bien sûr dans les zones montagneuses les distances peuvent être beaucoup plus grandes que dans les zones de plaine puisque en raison de l'altitude des sommets la vue porte plus loin. La seule exception notable étant les triangles s'appuyant sur la base puisque celle-ci ne fait qu'une dizaine de kilomètres. Certaines zones sont de véritables cauchemars pour les ingénieurs, par exemple les zones marécageuses ou les grandes forêts de plaine qu'ils sont obligés de contourner. Ce fut longtemps le cas de la Sologne en France. On termine la chaîne des triangles par la mesure d'une seconde base ainsi que la mesure de la latitude d'une extrémité de cette deuxième base. Cela permet à la fois de vérifier les calculs et les mesures, ces dernières étant obligatoirement entachées d'erreurs, on obtient ainsi une évaluation de l'erreur totale commise.

2. La bonne formule de trigonométrie sphérique

Dans toute la suite on considère un triangle sphérique dont les angles sont A, B, C et les côtés opposés a, b, c étant entendu que ces trois derniers nombres sont aussi des angles puisque les côtés sont des arcs de grand cercle. Un triangle sphérique est parfaitement déterminé par la donnée de 3 éléments, par exemple les trois côtés (comme en géométrie plane) mais aussi par les trois angles (ce qui n'est pas le cas en géométrie plane). On retrouve bien évidemment des formules qui ressemblent à celles du plan mais avec quelques modifications. Les deux formules essentielles de la trigonométrie sphérique sont d'une part l'analogie des sinus

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

et d'autre part la formule qui permet d'obtenir un côté en fonction de l'angle opposé et des deux autres côtés : $\cos a = \cos b \times \cos c + \sin b \times \sin c \times \cos A$.

Dans la pratique du calcul des siècles passés, on cherchait des formules multiplicatives qui se prêtent aisément au calcul logarithmique. Par exemple de cette dernière formule on peut tirer :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

et par suite :

$$1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos (b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = 2\,\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}.$$

En posant $2p = a + b + c$, on en déduit

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin[p-b] \sin[p-c]}{\sin b \sin c}}.$$

C'est cette formule qui va être utilisée pour déterminer l'angle A du triangle sphérique en fonction des côtés a, *b, c.*

3. L'astuce du logarithme décimal

Depuis l'invention des logarithmes par Neper et surtout leur perfectionnement par Briggs au début du XVII^e siècle, tous les calculs se font à l'aide de tables de logarithmes. On peut alors remplacer les multiplications par des additions, les divisions par des soustractions et les racines carrées par des divisions par 2. En effet, on a :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)\ ;\ \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)\ ;$$

$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \log(a)\ ;\ \log(1) = 0.$$

Ainsi, pour calculer le produit $a \times b$, on cherche dans la table le logarithme de a puis celui de b, on les additionne et, par une lecture inverse de la table, on cherche le nombre (qui n'est autre que $a \times b$) dont on connaît le logarithme.

Tous les logarithmes sont définis à un facteur multiplicatif près. Le logarithme décimal est caractérisé par le fait que log(10) = 1. Les tables de logarithmes décimaux sont alors très simples puisqu'il suffit de donner les logarithmes des nombres entre 1 et 10 (qui sont des nombres compris entre 0 et 1) pour les avoir tous. Les exemples suivants en montre le principe

$$\log(15{,}3) = \log(10 \times 1{,}53) = \log(10) + \log(1{,}53) = 1 + \log(1{,}53) = 1{,}18469\ldots$$

$$\log(0{,}0153) = \log(\frac{1}{100} \times 1{,}53) = \log(\frac{1}{100}) + \log(1{,}53) = -2 + 0{,}18469 = -1{,}81531\ldots$$

Plutôt que d'utiliser une table de logarithmes et une table de trigonométrie, on utilise des tables qui donnent directement les logarithmes des fonctions trigonométriques. Ainsi, la formule de trigonométrie sphérique mise en évidence à l'alinéa précédent, s'écrit

$$\log(\sin \frac{A}{2}) = \frac{1}{2} [\log(\sin(p-b)) + \log(\sin(p-c)) - \log(\sin(b)) - \log(\sin(c))].$$

Il y a un petit problème d'exactitude des calculs. Aussi précises soient les tables, elles ne peuvent donner toutes les décimales des logarithmes de tous les nombres. Selon les exigences de précision on utilise des tables à 5, 6 ou 7 décimales. Les tables à 7 décimales sont indispensables pour les calculs de triangulation et c'est une telle table qui est utilisée par les savants du XVIIIe siècle. On imagine le temps nécessaire qu'il a fallu passer pour calculer de telles tables et les éditer sans erreurs.

Si les tables modernes à 6 ou 7 décimales permettent de donner les logarithmes des sinus des angles de 15 secondes en 15 secondes, au XVIIIe siècle toutes les tables donnaient les angles de minute en minute. Pour obtenir le logarithme du sinus d'un angle défini à la seconde près, on effectue une interpolation linéaire ce qui est largement suffisant. Par exemple si on veut calculer : log(sin(36°34´18?)) on cherche dans la table log(sin(36°34´), on trouve –1 + 0,7750697.
Puis log(sin(36°35´), on trouve –l + 0,7752399

La différence entre ces deux nombres, à savoir 0,0001702 correspond à 60?. Par conséquent pour 15? on en a le quart soit 0,0000426 et pour 3? le cinquième de ce qui précède (ou le 20e du premier) soit 0,0000085. Pour 18? on doit donc ajouter les nombres correspondant soit 0,0000426 + 0,0000085 = 0,0000511. Finalement log(sin(36°34´18?) = –1 + 0,7750697 + 0,0000511 = –1 + 0,7751208.
On notera que pour calculer avec des nombres positifs, il est préférable de garder le –1 devant les logarithmes. Les tables se présentent d'ailleurs sous une forme très voisine, c'est-à-dire qu'au lieu d'écrire –1 + 0,7750697, elles écrivent aujourd'hui $\bar{1}$,7750697 où le signe moins est placé au dessus du 1 pour signifier qu'il ne porte que sur la partie avant la virgule.

4. Exemple du premier triangle de la mission du Pérou

En 1732 fait rage une controverse sur la forme de la Terre. Newton, à partir de ses travaux théoriques sur l'attraction universelle a montré (plutôt qu'il n'a démontré) que la Terre devrait être un sphéroïde aplati (on dit aujourd'hui un ellipsoïde aplati). Cependant en France, les mesures de Cassini sur le méridien de Paris de Dunkerque à Perpignan tendraient à montrer l'opinion inverse, à savoir que la Terre est un ellipsoïde allongé vers les pôles. Cette controverse ne va pas sans relents de chauvinisme. Cependant petit à petit les savants se rangent à l'opinion de Newton. Afin de trancher définitivement par une expérience, l'académie des Sciences proposa d'aller mesurer le degré de méridien sur l'équateur puis le plus au nord possible. C'est ainsi que furent décidés en 1735 les missions en Laponie et au Pérou.

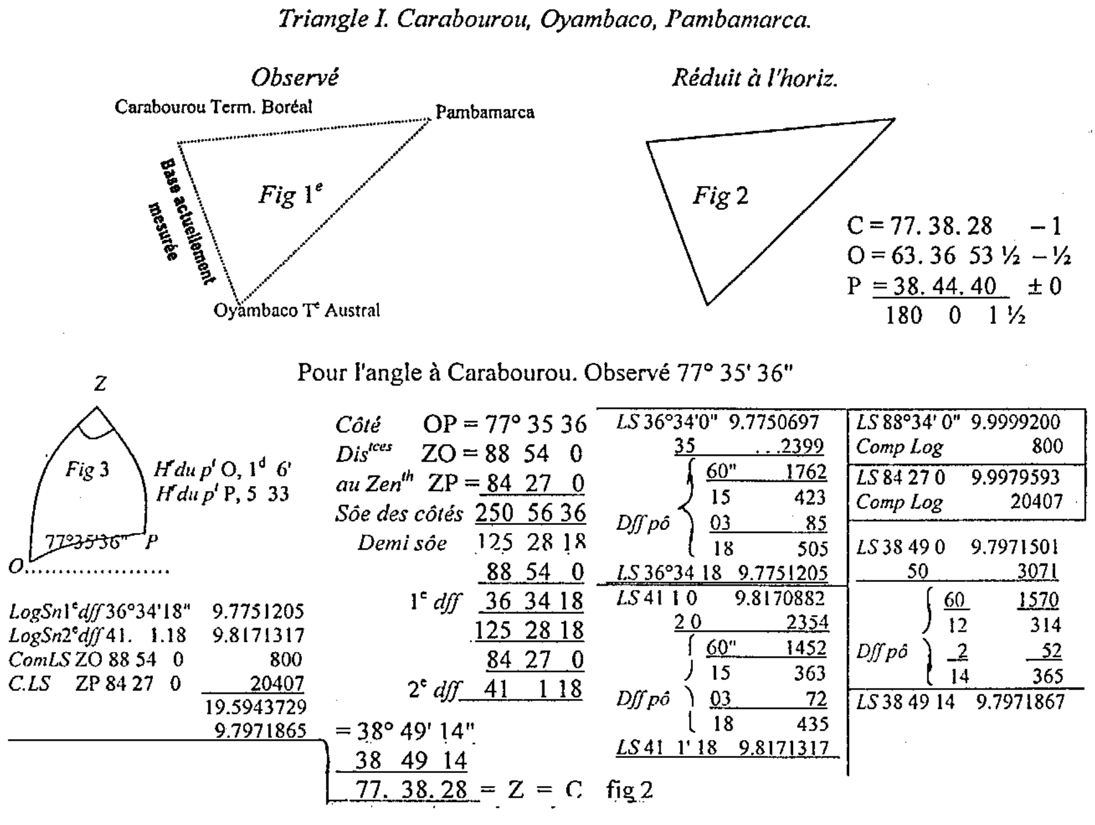
La mission en Laponie fut rondement menée par Maupertuis, Clairaut, Camus et Lemmonier auxquels s'adjoignirent l'abbé Outhier et Celsius. Partie le 2 mai 1736 de Dunkerque, elle fut de retour à Paris le 21 août 1737.

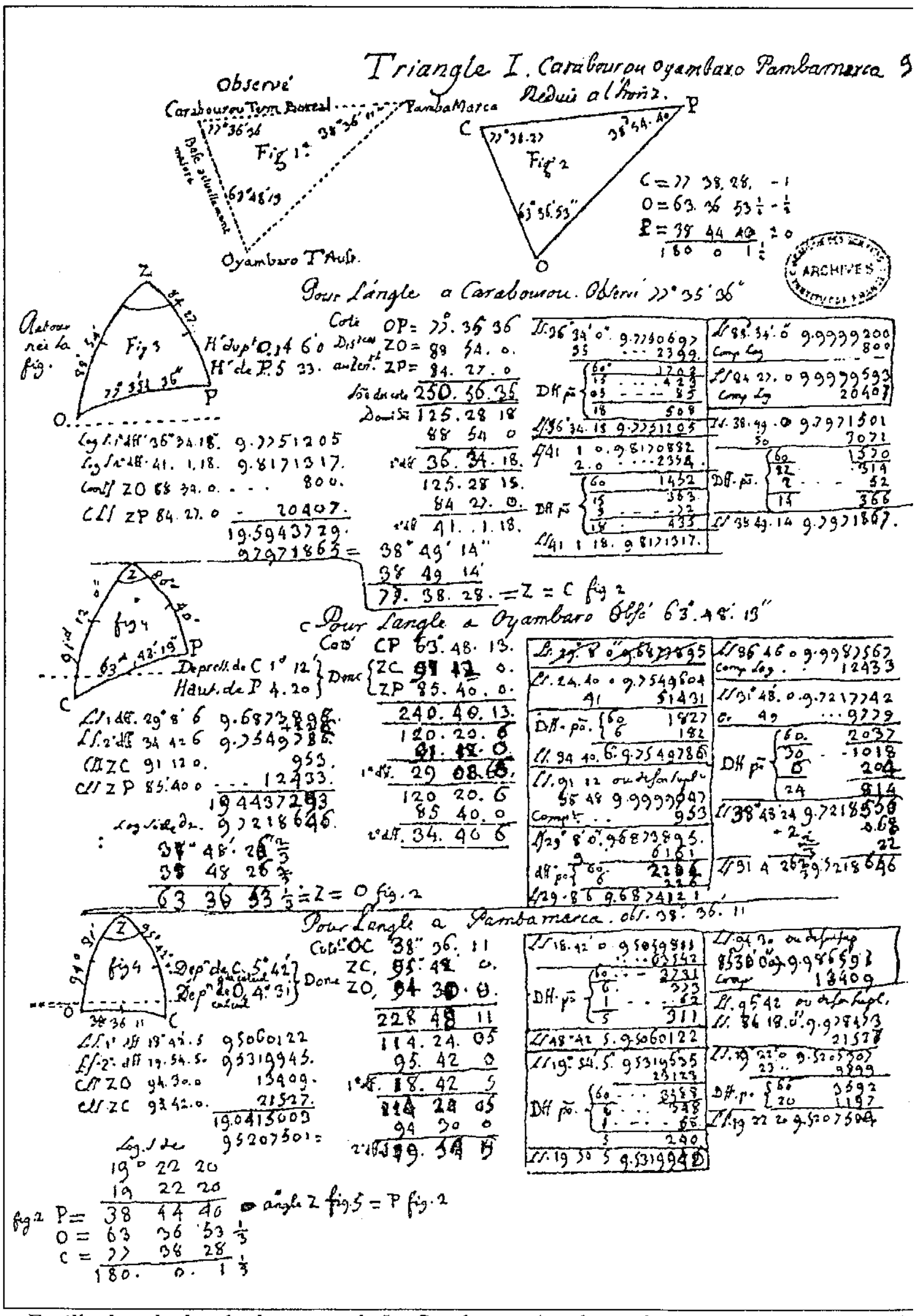
La mission en équateur se heurta, quant à elle, à de nombreuses difficultés dues à la nature du terrain, aux tremblements de terre et à la zizanie qui s'installa dans l'équipe composée des académiciens Godin (qui finalement fit bande à part), Bouguer et La Condamine auxquels étaient adjoints des ingénieurs, un horloger, un chirurgien…

Partie le 16 mai 1735 de La Rochelle elle ne revint qu'en 1744, La Condamine, fin novembre à Amsterdam après avoir descendu l'Amazone et rejoint Cayenne, Bouguer fin juin à Paris en étant passé par Panama. Godin ne rentrera pas en France et finira par s'installer en Espagne. Bien d'autres membres de l'équipe initiale sont morts (accidents, fièvres, assassinats).

La reproduction ci-après correspond à une feuille de calculs tirée du carnet de La Condamine. Il s'agit des calculs correspondant au premier triangle de la chaîne qui doit s'étendre sur 3°. Ce premier triangle a un des côté (Carabourou - Oyambaco) qui est la base dite de Yarouqui, base mesurée non loin de Quito (qui faisait alors partie du Pérou, possession de la couronne d'Espagne et gouverné par un Vice-Roi en poste à Lima) et d'une longueur de 6272 toises 4 pieds et 2 à 5 pouces suivant les mesures (soit environ 12 Km).

La lecture du document original étant un peu délicate, nous avons transcris dans la figure ci-dessous une partie du texte original qui est reproduit page suivante et nous allons la commenter.





Feuille de calcul tirée du carnet de La Condamine (Archives de l'Académie des Sciences).

4.1. Interprétons ces calculs

La figure 1 donne, comme il est précisé, les angles du triangle plan COP (C pour Carabourou, O pour Oyambaco et P pour Pambamarca). La figure 2 donne les angles du triangle sphérique COP réduit à l'horizontal, c'est-à-dire qu'elle donne le résultat des calculs de la feuille. À droite il a été reporté les valeurs des angles et on a vérifié que leur somme est, comme il se doit, supérieure à 180°. L'excès sphérique a été porté à 1" $\frac{1}{2}$.

La figure 3 a été faite à l'envers et l'auteur demande de la retourner. Il s'agit de la figure permettant de calculer l'angle horizontal en C comme il a été vu au premier alinéa ci-dessus. On fait intervenir le point Z correspondant au zénith en C. La ligne pointillée traduit la position de l'horizontale en C par rapport aux points O et P. On a reporté sur cette figure les valeurs des côtés. Et à côté de la figure 3 on trouve marqués *H^r du p^t* O (Hauteur du point O) et *H^r de P* (Hauteur de P). Pour OP on a l'angle en C du triangle plan COP. Pour ZO et ZP on a retranché de 90° les « hauteurs » de O et de P (respectivement les angles mesurés ZCO et ZCP) qui traduisent l'inclinaison des droites CO et CP sur le plan horizontal en C ; pour avoir les angles ZCO et ZCP il suffit de retrancher ces valeurs à 90°. Toutes ces valeurs se retrouvent dans la deuxième colonne avec l'indication côté pour OP et distances au zénith pour ZO et ZP.

Cette deuxième colonne se poursuit par le calcul de la somme des côtés, puis de la demi somme. Cela revient à calculer la quantité p dans la formule de trigonométrie donnée ci-dessus. Puis il calcule la première différence, soit la quantité p – b de la formule et qui vaut ici 36° 34´ 18?et enfin la deuxième différence, c'est-à-dire la quantité p – c qui vaut ici 41° 1´18?.

La troisième colonne contient le calcul du logarithme du sinus de ces deux angles par interpolation linéaire. Nous avons donné le détail de la méthode dans l'alinéa précédent en ce qui concerne le premier angle. Toutefois au lieu d'écrire $\overline{1}$,7750697 il écrit 9,7750697 ce qui revient à ajouter 10 donc à multiplier les valeurs par 10^{10} ce qui se traduit par un simple déplacement de la virgule. On évite alors le recours à des nombres négatifs. Cette astuce a fait fortune puisqu'elle est utilisée sous une forme voisine dans les calculatrices électroniques. On notera au passage une erreur dans la division par 4. La Condamine a écrit 423 au lieu de 426. Cette erreur n'a cependant pas de conséquence sur le résultat final. Dans cette colonne ainsi que dans la suivante, le logarithme du sinus est abrégé en LS.

La quatrième et dernière colonne contient le calcul du complément dit logarithme des sinus des angles ZO et ZP ce qui est une autre façon de calculer l'opposé de ces logarithmes. En effet la formule utilisée impose de diviser par sin(ZO) × sin(ZP) donc de retrancher log(sin(ZO)) et log(sin(ZP)). Par exemple le deuxième calcul de la colonne indique

log(sin(84° 27´ 0?) = 9,9979593 ce qu'il faut lire –1 + 0,9979593 dont l'opposé est 1 – 0,9979593. La soustraction est alors aisée à faire; il suffit de compléter les chiffres à 9 sauf le dernier qui est complété à 10. On trouve alors 0,0020407. Seuls les chiffres significatifs ont été écrits, leur position indiquant clairement de quelles décimales il s'agit.

Pour comprendre la fin de la quatrième colonne, il nous faut revenir à la première, dans la partie au dessous de la figure 3. Il y est utilisé la formule :

$$\log(\sin \frac{A}{2}) = \frac{1}{2}[\log(\sin(p - b)) + \log(\sin(p - c)) - \log(\sin(b)) - \log(\sin(c))]$$

sous la forme

$$\log(\sin \frac{A}{2}) = \frac{1}{2}[\log(\sin(1^{re}\, dff)) + \log(\sin(2^{e}\, dff)) - \log(\sin(ZO)) - \log(\sin(ZP))]$$

ce qui aboutit au nombre 9,7971865 qui est bien la moitié de 19,5943729. Il faut donc trouver l'angle dont le logarithme du sinus est 9,7971865. Le résultat est donné à côté (dans la deuxième colonne) avec un signe égal très osé d'un point de vue mathématique mais que tout le monde comprend. Comme on n'obtient que la moitié de l'angle Z il faut doubler ce résultat, ce qui est fait en dessous (on notera que La Condamine n'effectue pas une multiplication par 2 mais additionne ce nombre à lui-même).

Seulement ce n'est pas une lecture directe dans la table qui permet de trouver l'angle cherché. C'est là qu'intervient le bas de la quatrième colonne :

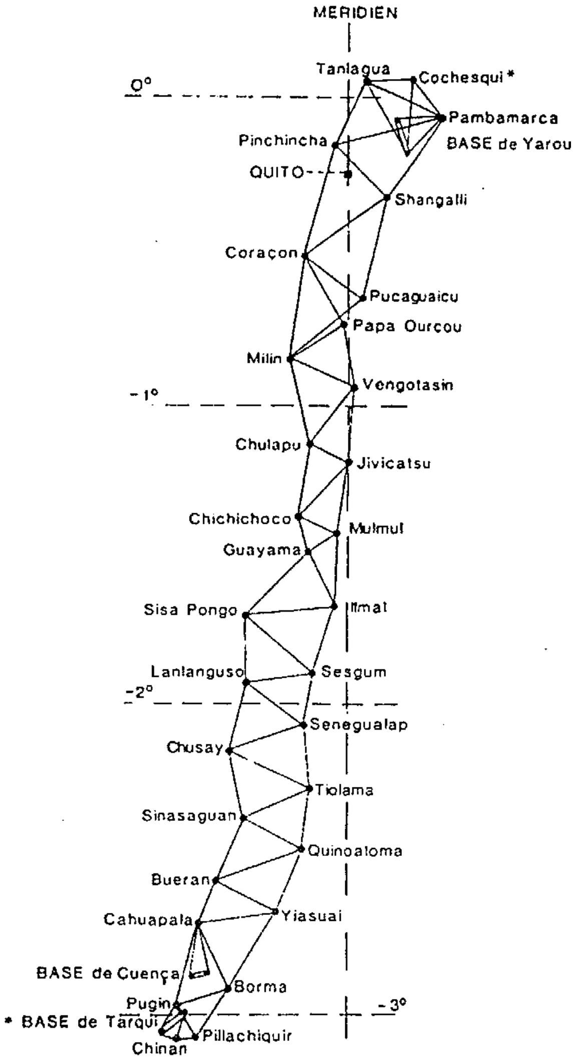
- on cherche dans la table les deux entrées qui correspondent à des logarithmes qui encadrent 9,7971865 ,
- on trouve 9,7971501 pour l'angle 38°49´0? et 9,7973071 pour l'angle 38°50´ 0?. Il y a une différence de 0,0001570 pour 1´soit 60?,
- or, on ne veut qu'une différence de 0,0000364, ce qui est légèrement plus que le cinquième. Prenons alors le cinquième de 60? qui est 12? pour lequel on aura le cinquième de la différence initiale soit 0,0000314,
- il manque encore 0,0000050. En divisant 0,0000314 par 6 on trouve 0,0000052 ce qui correspond à l'interpolation pour 2?(12?/6),
- finalement pour 14? on a 0,0000356 ce qui donne le meilleur résultat possible à la seconde près.

Le calcul des deux autres angles se fait suivant le même principe même si la disposition n'est pas rigoureusement la même. On notera les ratures et les erreurs corrigées. On remarquera d'autre part que, premièrement, les points qui sont sous l'horizon sont mesurés non pas avec un signe moins mais avec le terme «dépression » (abrégé en *Depress* ou en *Dep*^{n}) ; cela correspond aux figures 4 et 5; d'autre part que lorsque l'angle est supérieur à 90°, par exemple dans la 4^{e} colonne du dernier calcul, l'auteur précise : LS 95°42 ou de son supl. LS 84 18 0? il y a bien égalité des sinus d'un angle et de son supplémentaire ; enfin le terme «degré » est abrégé parfois par un ° comme il est d'usage aujourd'hui, mais aussi par un ? ce qui est assez logique et explique sans doute l'origine du petit zéro actuel.

4.2. La chaîne des triangles

La base étant mesurée très soigneusement en position (azimut par rapport au nord géographique, latitude et longitude des extrémités) et en longueur, il est ainsi possible de calculer la position de chaque sommet de proche en proche et finalement de connaître la distance des deux points extrêmes de la chaîne de triangles. Pour pouvoir évaluer l'erreur sur l'ensemble des mesures, on mesure à nouveau une base à l'autre extrémité et on répartit les erreurs sur l'ensemble des triangles. Il est alors possible de donner une évaluation de la longueur de l'arc de méridien entre les latitudes des deux bouts de la chaîne de triangles.

Si, sur la figure ci-contre donnant la triangulation de l'arc du Pérou, il y a deux bases à l'extrémité sud, c'est en raison des dissensions qui ont fait que rapidement deux équipes ont travaillé indépendamment. La Condamine a utilisé la base de Tarqui.



Pour calculer les longueurs des arcs des côtés, les géomètres utilisent un théorème de Legendre qui dit qu'on peut calculer un petit triangle sphérique de la même façon qu'un triangle plan.

Soit un triangle sphérique d'angles A, B, C, de longueur des côtés a, b, c et d'excès sphérique $e = A+B+C - p$. Alors le triangle plan d'angles $A' = A - \frac{e}{3}$, $B' = B - \frac{e}{3}$, $C' = C - \frac{e}{3}$, dont un des côtés vaut a, aura ses deux autres côtés égaux à b et c au cinquième ordre près en a.

La démonstration de ce théorème est un exercice fastidieux de composition de développements limités.

Or ici l'excès sphérique est très petit, environ une seconde et demi, car les côtés sont eux-mêmes petits. En effet 30 km représentent à peu près un quart de degré soit moins de 5 millièmes de radian. Les erreurs sur les mesures étant bien supérieures, il vaut mieux utiliser les formules de trigonométrie plane qui sont bien plus faciles à mettre en œuvre.

5. Conclusion

Voilà un retour nostalgique à l'ère du calcul manuel. Aujourd'hui d'autres problèmes se posent tant pour le chercheur que pour l'élève de collège ou de lycée. De tout temps le mathématicien a cherché à se faciliter les calculs. La création des logarithmes fut saluée comme un immense progrès. L'avènement des machines à calculer permit à Briggs de mettre en évidence la non continuité uniforme de certaines séries de Fourier. L'ordinateur aujourd'hui nous évite le recours aux fastidieuses tables de logarithme ou au calcul à la main de primitives ou d'intégrales. Mais chaque progrès entraîne des besoins nouveaux et le mathématicien continue à calculer car aucune technique ne peut encore rivaliser avec la puissance imaginative du cerveau.

LE DIX-SEPTIÈME PROBLÈME DE HILBERT ET... LE GROUPE MATHÉMATIQUE DE SAUMUR

Marc GUINOT

Le groupe mathématique de Saumur a été, à plusieurs reprises déjà, à l'origine d'articles parus dans *L'Ouvert* (parmi lesquels on citera de mémoire une petite étude sur certaines valeurs de la fonction zêta et un pavé de plus de quarante pages sur la géométrie arguésienne, les quaternions et les octonions). A l'occasion d'une nouvelle proposition d'article mentionnant l'existence de ce groupe mystérieux, le comité de rédaction de *L'Ouvert* a souhaité en savoir plus sur cette composante active du monde mathématique qui n'est répertoriée nulle part.

Il est peut-être temps, en effet, de lever le voile sur cette irritante question. Sous le nom pompeux que je lui ai donné, le groupe mathématique de Saumur représente simplement une association informelle de professeurs de mathématiques de Saumur qui avaient pris l'initiative, à la fin des années 1980, de se réunir régulièrement au lycée technique, pour faire des mathématiques pour le plaisir, sous la forme d'exposés traitant chaque année d'un sujet donné. C'est ainsi qu'il a pu être question, au fil du temps, des constructions à la règle et au compas, de géométrie projective ou d'arithmétique. Par suite de changement de poste, le groupe s'est quelque peu délité après 1991, ne subsistant plus que par une réunion annuelle, animée par l'auteur de ces lignes (et se terminant ensuite au restaurant). Abonné à *L'Ouvert*, j'ai pris l'initiative de soumettre à la revue les comptes rendus de certaines de ces réunions, qui ont ainsi été publiés après d'inévitables changements de forme.

Le présent article ne déroge pas à la règle et constitue la substance de l'exposé que j'ai fait, à quelques encablures du Thouet, le 14 mai 2002. Le sujet en était le dix-septième problème de Hilbert et m'avait été inspiré par un article de l'*American Mathematical Monthly* qui traitait d'un des aspects de ce problème (voir [**16**]). On peut faire remonter celui-ci à la seconde moitié du XVIII^e siècle, au moment où Lagrange développa une première théorie générale des formes quadratiques binaires, c'est-à-dire des expressions de la forme $ax^2+bxy+cy^2$. Des considérations algébriques élémentaires permettent de classer ces formes en trois catégories : les formes *définies positives* (dont les valeurs sont toujours des nombres positifs) qui se décomposent en une somme de deux carrés, les formes *définies négatives* (dont les valeurs sont toujours des nombres négatifs) opposées des précédentes et les formes *indéfinies* qui sont différences de deux carrés.

Quelques années après, Gauss (ou Gauß comme préfèrent écrire les Allemands) généralisa une partie de ces résultats en établissant que toute forme quadratique n-aire q (i.e. toute expression de la forme $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_i$) peut se ramener à une combinaison linéaire de n carrés. Dans le cas particulier d'une forme (définie) positive, le résultat de Gauss permet d'écrire $q(x_1,\dots,x_n)$ sous la forme d'une somme de plusieurs carrés $\big(\ell_1(x_1,\dots,x_n)\big)^2+\cdots+\big(\ell_n(x_1,\dots,x_n)\big)^2$ où $\ell_i(x_1,\dots,x_n)$ est une forme linéaire en $x_1,\dots,x_n$.

On peut démontrer ce résultat avec un peu d'algèbre en associant à toute forme quadratique n-aire q, considérée comme une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, une forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\varphi(x,x) = q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et en s'appuyant sur le fait que, pour cette forme, il existe dans $\mathbf{R}^n$ une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$. Si un élément x de $\mathbf{R}^n$ s'écrit en effet $\sum x_i e_i$, on a alors

$$q(x) = \varphi(x,x) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\Big) = \sum_{i,j} x_i x_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i, e_i) x_i^2$$

puisque $\varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Comme x_i est une fonction linéaire du vecteur x initial, on en déduit le résultat général de Gauss et, lorsque $q(x)$ est $\geqslant 0$ pour tout x, que $q(x)$ est une somme de n carrés (portant sur des formes linéaires).

En 1885, Minkowski souleva, dans sa thèse [**8**], le problème de savoir si ce résultat pouvait se généraliser aux formes de degré supérieur, tout en doutant[2] que cela soit possible. Hilbert, d'abord peu convaincu, se lança dans l'étude du problème et finit par prouver en 1888 [**7**] que les doutes de Minkowski étaient fondés en démontrant que, sauf exceptions, il existe, pour tout entier n et tout nombre pair d, au moins une forme homogène en n variables, de degré d, dont les valeurs sont toujours positives, mais qui n'est pas pour autant une somme de carrés, les exceptions étant $n = 0, 1, 2$, $d = 0, 2$ et surtout $n = 3, d = 4$. Mais la démonstration de Hilbert est indirecte et repose sur de difficiles considérations de géométrie algébrique.

En particulier, il ne donne aucun exemple et c'est seulement en 1965 qu'un certain Motzkin[3] fournit au monde ébahi le premier exemple de forme positive ne pouvant se décomposer en une somme de carrés [**12**]. Celui-ci (avec $n = 3$ et $d = 6$) est

$$f(x, y, z) = x^4y^2 + x^2y^4 + z^6 - 3x^2y^2z^2.$$

Le fait que toutes les valeurs de f soient positives est une conséquence de l'inégalité de la moyenne géométrique [4] selon laquelle on a toujours

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels positifs. Il suffit en effet d'appliquer ce résultat aux trois nombres x^4y^2, x^2y^4 et z^6 pour avoir le résultat voulu.

Il est plus malaisé de démontrer que ce n'est pas une somme de carrés. En fait, en prenant $z = 1$, il suffit de prouver qu'il est impossible d'avoir

$$x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2 = g_1^2 + \cdots + g_m^2$$

avec des polynômes $g_1, \ldots, g_m$ quelconques. Il n'est pas trop difficile de voir qu'on

[2] „*Es ist nicht wahrscheinlich daß eine jede positive Form sich als eine Summe von Formenquadraten darstellen läßt*".

[3] Pas si inconnu que cela en fait car une partie de son œuvre a été jugée suffisamment importante pour être réunie en un volume publié en 1983 ; il y est qualifié de mathématicien particulièrement érudit, ingénieux et talentueux ("versatile" in the english text !).

[4] Outre une démonstration classique s'appuyant sur la "concavité" de la fonction log, il existe de nombreuses démonstrations élémentaires de cette inégalité. L'une, très simple et très convaincante, est due à Cauchy et se trouve reproduite en note (et *in extenso*) dans le célèbre livre de Pólya et Szegő, *Problems and theorems in Analysis*, Vol. 1, Springer-Verlag, 1972, p. 64.

peut supposer que g_i est, pour tout i, un polynôme non nul de degré $\leqslant 3$. Cela permet d'écrire

$$g_i(x,y) = a_i x^3 + b_i y^3 + c_i x^2 y + d_i x y^2 + \\ p_i x^2 + q_i y^2 + r_i xy + s_i x + t_i y + u_i$$

avec des coefficients a_i, b_i, etc. tous réels. Comme

$$\big(g_1(x,0)\big)^2 + \cdots + \big(g_m(x,0)\big)^2 = \big(g_1(0,y)\big)^2 + \cdots + \big(g_m(0,y)\big)^2 = 1$$

on a $|g_i(x,0)| \leqslant 1$ et $|g_i(0,y)| \leqslant 1$, ce qui entraîne que $a_i = p_i = s_i = 0$ et $b_i = q_i = t_i = 0$ (car des polynômes bornés sur $\mathbf{R}$ sont nécessairement constants). Cela montre que

$$g_i(x,y) = c_i x^2 y + d_i x y^2 + r_i xy + u_i.$$

Si on élève ce résultat au carré et si on développe, on obtient 10 termes, parmi lesquels il n'y a qu'un terme en x^2y^2 qui est $r_i^2 x^2 y^2$. Par suite, dans la somme $g_1^2 + \cdots + g_m^2$, le terme en x^2y^2 a pour coefficient $r_1^2 + \cdots + r_m^2$. Comme c'est le terme en x^2y^2 du polynôme initial, on a $r_1^2 + \cdots + r_m^2 = -3$, ce qui est absurde.

D'autres exemples ont été donnés par la suite, dont

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + t^4 - 4xyzt$$

par Man-Duen Choi et Tsit-Yuen Lam [**5**].

Comme on l'a dit, dans son article de 1888, Hilbert s'est aussi penché sur les exceptions à la règle générale, parvenant en particulier à démontrer que toute forme biquadratique ternaire positive (donc de degré 4) est une somme de trois carrés portant sur des formes quadratiques. Malheureusement, sa démonstration semble peu accessible au commun des mortels : la géométrie algébrique, même du temps de Hilbert, est une science quelque peu absconse. Il en est de même, hélas, de la démonstration plus récente, proposée par Walter Rudin (voir [**16**]) : il y est question du théorème de Federer-Sard et de la dimension de Hausdorff...

En fait la démonstration peut-être la plus assimilable est celle que l'on trouve dans la *Géométrie algébrique réelle* de Bochnak, Coste et Roy [**3**], apparemment tirée de l'article de Choi et Lam déjà cité (cf. [**5**]) : elle part du fait élémentaire que dans l'espace vectoriel des formes en n variables et de degré d, les formes positives constituent un cône convexe saillant fermé, qui est donc l'enveloppe convexe de ses génératrices maximales...

Mais dans le domaine qui nous occupe, Hilbert ne s'est pas arrêté là : en 1893 [**9**], il est parvenu à démontrer que malgré ses résultats antérieurs, on pouvait exprimer n'importe quelle forme *ternaire* positive f à l'aide de plusieurs carrés en écrivant

$$f = \frac{\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_r^2}{\psi_1^2 + \ldots + \psi_s^2}$$

donc comme un quotient de deux sommes de carrés (où φ_i et ψ_j sont des formes). Cela veut dire aussi que

$$f = \sum_{i,j} \left(\frac{\varphi_i \psi_j}{\psi_1^2 + \cdots + \psi_s^2} \right)^2$$

donc que f est une somme de carrés de *fractions rationnelles.*

Mais, comme il le reconnaît lui-même[5], la démonstration présente de sérieuses difficultés. De fait, à l'issue de neuf paragraphes dûment numérotés, il démontre que toute forme ternaire positive F de degré pair d peut s'écrire $\dfrac{\varphi^2+\psi^2+\chi^2}{H}$ où φ, ψ et χ sont des formes ternaires de degré $d-2$ et H une forme (ternaire) de degré $d-4$. Comme H est à son tour une forme positive, on peut recommencer l'opération et écrire H sous la forme $\dfrac{\theta^2+\omega^2+\xi^2}{K}$ où K est cette fois de degré $d-8$. On a alors

$$F=\frac{(\varphi^2+\psi^2+\chi^2)K}{\theta^2+\omega^2+\xi^2}\ .$$

On recommence ainsi jusqu'à ce que la forme résiduelle M soit une constante ou une forme quadratique.

Le résultat final pour F est alors une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des sommes de carrés. En outre, grâce à l'identité d'Euler

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)=(aa'-bb'-cc'-dd')^2+$$
$$(ab'+ba'+cd'-dc')^2+(ac'+ca'+db'-bd')^2+(ad'+da'+bc'-cb')^2$$

le nombre de carrés peut être réduit à quatre, en haut et en bas.

Il n'est évidemment pas très facile de trouver des expressions de ce genre pour un cas précis, par exemple pour la forme de Motzkin donnée plus haut. Sans l'aide de Cassels, Ellison et Pfister, je n'aurais jamais deviné que

$$x^4y^2+x^2y^4+z^6-3x^2y^2z^2=\frac{(x^2y^2-z^4)^2+(xyz^2-x^3y)^2+(xz^3-xy^2z)^2}{x^2+z^2}.$$

En multipliant les deux termes de cette fraction par x^2+z^2, on en déduit que $x^4y^2+x^2y^4+z^6-3x^2y^2z^2$ peut s'écrire comme une somme de 6 carrés de fractions rationnelles, ce nombre pouvant se réduire à 4 comme on l'a dit, au moyen de l'identité d'Euler.

Ce problème d'avoir à introduire des sommes de carrés de fractions rationnelles est réapparu enfin, curieusement, à propos d'un obcur problème de construction géométrique à la régle et à l'empan[6] rencontré dans les célèbres travaux de Hilbert, encore, sur les fondements de la géométrie. En fait, si j'en crois la traduction française des *Grundlagen der Geometrie* que je viens de relire, il semble que le théorème d'Artin soit à la base d'un critère commode permettant de savoir dans quel cas ce qui est possible à la règle et au compas est encore possible à la règle et à l'empan (cf. [**10**], théorème 65, p. 165 et rectificatif, p. 171).

Tout cela explique l'énoncé général du 17^e^ problème de Hilbert tel que Hilbert lui-même l'a formulé en 1900 à Paris, lors de ce fameux congrès international des mathématiciens où il présenta 23 problèmes susceptibles de faire l'objet de fructueuses

[5] *„Der Beweis dafür bietet erhebliche Schwierigkeiten dar".*

[6] Une sorte de compas rouillé, incapable de faire des cercles, mais qui permet de transporter une longueur fixe sur une droite...

recherches au cours du XX^e siècle : si un polynôme $f(x_1, \dots, x_n)$ en n variables et à coefficients réels, ne prend que des valeurs positives, est-il possible de le décomposer en une somme de carrés de fractions rationnelles ? La réponse, affirmative, fut apportée par Emil Artin en 1927 après qu'il eut développé, avec son confrère Otto Schreier ([**1**] et [**2**]), une théorie générale des corps ordonnés. Donnons-en les premiers éléments.

On dit qu'une relation d'ordre R sur un corps commutatif K est *compatible* avec la structure de corps de K si on a les deux conditions suivantes :

(KO_1) La relation $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ implique $x + z \mathrel{\mathrm{R}} y + z$ quels que soient $x, y, z \in \mathrm{K}$.

(KO_2) La relation $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ implique $xz \mathrel{\mathrm{R}} yz$ quels que soient $x, y, z \in \mathrm{K}$, si on a en outre $0 \mathrel{\mathrm{R}} z$.

Si on note par le signe $\leqslant$ la relation R et par le signe $\geqslant$ la relation opposée, ces conditions reviennent à dire que l'on a $x + z \leqslant y + z$ si $x \leqslant y$ et que l'on a $xz \leqslant yz$ si $x \leqslant y$ et si $z \geqslant 0$.

Dans la suite, on supposera l'ordre total, ce qui veut dire que l'on a aussi $x \leqslant y$ ou $x \geqslant y$ quels que soient $x, y \in \mathrm{K}$. On appellera alors *corps ordonné* un corps commutatif, muni d'une relation d'ordre total satisfaisant aux conditions précédentes, et *corps ordonnable* tout corps commutatif sur lequel il existe au moins une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps de K.

Dans un corps ordonné K, les règles de manipulation habituelles des inégalités sont valables (y compris avec les signes $<$ et $>$). On dit en outre qu'un élément x de ce corps est *positif* (resp. *négatif*) si $x \geqslant 0$ (resp. $x \leqslant 0$) pour la relation d'ordre R fixée dans K. Dans un corps ordonné K, l'ensemble P des éléments positifs satisfait aux conditions suivantes :

(PO_1) $\mathrm{P} + \mathrm{P} \subset \mathrm{P}$.

(PO_2) $\mathrm{PP} \subset \mathrm{P}$.

(PO_3) $\mathrm{P} \cap (-\mathrm{P}) = \{0\}$.

(PO_4) $\mathrm{P} \cup (-\mathrm{P}) = \mathrm{K}$.

Réciproquement, si P est une partie d'un corps K satisfaisant aux conditions précédentes, on peut dire qu'il existe sur K une relation d'ordre total et une seule, compatible avec la structure de corps de K, pour laquelle P est l'ensemble des éléments positifs. Cette relation est en fait donnée par la condition $y - x \in \mathrm{P}$.

Une variante de ce résultat est valable pour un anneau intègre A (sans diviseur de zéro) : si P est une partie de A satisfaisant aux conditions (PO_1) à (PO_4), mais avec A à la place de K, il existe sur le corps des fractions K de A, une relation d'ordre total et une seule, compatible avec la structure de corps de K pour laquelle P est l'ensemble des éléments positifs de K appartenant à A.

Il est facile de voir que l'ensemble des polynômes à une seule indéterminée X et à coefficients réels, dont le coefficient dominant est positif, satisfait aux conditions ci-dessus dans l'anneau $\mathbf{R}[X]$, du moins en convenant d'appeler *coefficient dominant* d'un polynôme $f \in \mathbf{R}[X]$ le coefficient du terme de plus haut degré si $f \neq 0$ et le nombre 0 si $f = 0$. Il existe donc sur le corps des fractions rationnelles $\mathbf{R}(X)$ une relation d'ordre R pour laquelle on a (entre autres) $X > a$ (mod R) pour tout réel

a. Mais les polynômes à *coefficient dominé* positif (i.e. dont le coefficient de plus bas degré est positif) satisfont aussi à ces mêmes conditions (PO_i). D'où une autre relation d'ordre R′ dans $\mathbf{R}(X)$ pour laquelle on a cette fois $0 < X < a$ (mod R′) pour tout réel a strictement positif. Il n'est pas difficile de modifier cette définition pour avoir $a < X < 0$ pour tout réel strictement négatif : il suffit de considérer comme positifs les polynômes f pour lesquels $f(-X)$ a un coefficient dominé positif.

La possibilité de définir sur un même corps plusieurs relations d'ordre différentes explique la définition suivante : dans un corps ordonnable K, on dit qu'un élément x est *totalement positif* s'il est positif pour toute relation d'ordre total sur K compatible avec la structure de corps de K. Dans le corps $\mathbf{R}(X)$, l'élément X n'est pas totalement positif.

Pour mieux étudier toutes ces propriétés, il peut être commode de dire qu'un sous-ensemble C d'un corps K est un *cône* si on a

(CO_1) $\mathrm{C}+\mathrm{C} \subset \mathrm{C}$.
(CO_2) $\mathrm{CC} \subset \mathrm{C}$.
(CO_3) $\mathrm{C} \cap (-\mathrm{C}) = \{0\}$.
(CO_4) $x^2 \in \mathrm{C}$ pour tout $x \in \mathrm{K}$.

Le lecteur vérifiera que la condition (CO_3) peut être remplacée sans dommage par la condition :

(CO'_3) $-1 \notin \mathrm{C}$.

Avec cette définition, l'ensemble des éléments positifs d'un corps ordonné K est un cône ; on dira que c'est le *cône positif* de ce corps ordonné. D'une manière générale, tout cône d'un corps commutatif K qui peut être considéré comme l'ensemble des éléments positifs de K pour une certaine relation d'ordre sur K peut être appelé un *cône d'ordre* dans K.

Il n'y a pas de cône d'ordre dans un corps non ordonnable. Sur un corps quelconque, il n'y a pas nécessairement de cône tout court non plus. En fait, les propriétés suivantes sont équivalentes sur un corps K :

(CR_1) Les sommes de carrés dans K forment un cône de K.
(CR_2) Il existe dans K au moins un cône.
(CR_3) Si $x_1^2+\cdots+x_n^2 = 0$, alors $x_1 = \cdots = x_n = 0$ quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{K}$.
(CR_4) L'élément -1 de K n'est pas une somme de carrés dans K.

Un corps ordonnable satisfait à ces conditions. Un des aboutissements fondamentaux de la théorie des corps ordonnés est que la réciproque est vraie : tout corps commutatif qui satisfait à l'une de ces conditions est nécessairement ordonnable. Cela se fait en deux étapes.

La première consiste à remarquer que les cônes d'ordre d'un corps K (s'ils existent) sont les cônes *maximaux* de K (i.e. les cônes C pour lesquels si $\mathrm{C} \subset \mathrm{C}'$ et si C′ est un cône de K, alors $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$). Comme les cônes d'un corps remplissant l'une des conditions (CR_i) forment un ensemble inductif pour la relation d'inclusion (tout ensemble totalement ordonné de cônes admet un majorant), il résulte du théorème de Zorn (donc de l'axiome de choix dont le théorème de Zorn n'est que l'un des avatars) que tout cône C d'un tel corps est contenu dans un cône maximal, donc dans un cône d'ordre. Appliqué à l'ensemble des sommes de carrés d'un corps K de ce genre, ce raisonnement montre que K est alors ordonnable.

Mais on peut aller plus loin en remarquant que si C est un cône quelconque et si $x \notin \mathrm{C}$, alors l'ensemble $\mathrm{C} - x\mathrm{C}$ des éléments de K de la forme $a - xb$ où $a, b \in \mathrm{C}$ est lui aussi un cône de K. Comme il est contenu dans un cône maximal (i.e. un cône d'ordre), il existe une relation d'ordre sur K pour laquelle les éléments de C sont tous positifs et l'élément x négatif. Appliqué à l'ensemble S des sommes de carrés de K, ce raisonnement fait voir que dans un corps ordonnable les éléments totalement positifs ne sont rien d'autres que les sommes de carrés.

Pour résoudre alors le 17^{e} problème de Hilbert à la manière d'Artin, il reste à démontrer qu'un polynôme $f \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ qui ne prend que des valeurs positives est en fait positif pour toutes les relations d'ordre sur le corps $\mathbf{R}(X_1, \ldots, X_n)$. C'est ce que fait Artin par récurrence sur n. Ce polynôme est donc une somme de carrés dans le corps $\mathbf{R}(X_1, \ldots, X_n)$. CQFD.

Mais la compréhension complète du raisonnement d'Artin passe par un approfondissement substantiel de la théorie des corps ordonnés, avec en particulier l'introduction de la notion de clôture "réelle" (qu'il serait plus judicieux d'appeler *clôture ordonnée*), et surtout par la mise en œuvre de deux "lemmes de spécialisation" que l'auteur de ces lignes n'est pas encore parvenu à digérer. Ceux qui ont du mal avec la langue de Goethe (donc celle d'Artin), peuvent consulter le livre d'algèbre, en anglais, de Nathan Jacobson [**11**] ou celui, en français, de Paulo Ribenboim [**15**], mais ce n'est guère plus digeste ! Enfin, l'histoire de ce problème ne s'est pas arrêtée à Artin, ni à la simple théorie des corps ordonnés : voir par exemple [**6**], [**13**] et [**14**]. Tout cela pourrait faire l'objet, après force cuillerées de pepsine, d'un feuilleton, à paraître dans les prochains numéros...

Références

[**1**] Emil ARTIN. —Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, *Abh. der Hamb. Univ.* V. Band (1927), 100-115.

[**2**] Emil ARTIN und Otto SCHREIER. —Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abh. der Hamb. Univ.* V. Band (1927), 85-99.

[**3**] Jacek BOCHNAK, Michel COSTE et Marie-Françoise ROY. —*Géométrie algébrique réelle* (p. 105-106), Springer Verlag, 1987.

[**4**] J.W.S. CASSELS, W. J. ELLISON and A. Pfister. —On Sums of Squares and on Elliptic Curves over Function Fields, *Journal of Number Theory* **3** (1971), 125-149.

[**5**] Man-Duen CHOI and Tsit-Yuen LAM. —Extremal Positive Semidefinite Forms, *Math. Ann.* **231** (1977), 1-18.

[**6**] Danielle GONDARD-COZETTE. —Le dix-septième problème de Hilbert et ses développements récents, p. 21-49 in *Séminaire sur les structures algébriques ordonnées*, sélection d'exposés 1984-1987, vol. II, Publications mathématiques de l'université de Paris VII.

[**7**] David HILBERT. —Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten, *Math. Ann.* **32** (1888), 342 - 350 ou *Ges. Abh.*, zweiter Band, Julius Springer, 1933, 154 - 161.

[**8**] David HILBERT. —Gedächtnisrede auf H. Minkowski, in *Gesammelte Abhandungen von Hermann Minkowski*, erster Band, S. VIII, B.G. Teubner, 1911.

[**9**] David HILBERT. —Über ternäre definite Formen, *Acta Math.* **17** (1893), 169 - 197 ou *Ges. Abh.*, zweiter Band, Julius Springer, 1933, 345 - 366.

[**10**] David HILBERT. —*Les fondements de la géométrie* (*Grundlagen der Geometrie*), Dunod, 1971.

[**11**] Nathan JACOBSON. —*Lectures in Abstract Algebra*, vol. 3, D. van Nostrand Company, 1964, 289 - 294.

[**12**] Theodor S. MOTZKIN. —The arithmetic-geometric inequality, in *Inequalities*, Oved Shisha, ed., Academic Press, Boston, 1967 ou *Selected Papers*, Birkhäuser, 1983, 203 - 222.

[**13**] Albrecht PFISTER. —Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten, *Invent. Math.* **4** (1967), 229 - 237.

[**14**] Albrecht PFISTER. —Hilbert's seventeenth problem and related problems on definite forms, in *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, AMS, XXVIII, 1976, 483 - 489.

[**15**] Paulo RIBENBOIM. —*L'arithmétique des corps*, Hermann, 1972, 198 - 211.

[**16**] Walter RUDIN. —Sums of Squares of Polynomials, *Amer. Math. Monthly* **107(9)** (2000), 813 - 821.

Je tiens à remercier ici les responsables de la Bibliothèque de Mathématique de l'Université Louis-Pasteur de Strasbourg qui m'ont permis d'accéder sans contraintes à toutes leurs richesses.

L'UTILISATION DES QUANTIFICATEURS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE TUNISIEN

Faïza CHELLOUGUI

Le texte qui suit s'appuie sur une étude didactique de la quantification menée dans le cadre de notre mémoire de DEA[1]. Il nous a paru nécessaire d'introduire le lecteur à ce travail en présentant une analyse succincte des textes du programme officiel des mathématiques dans l'enseignement tunisien et des manuels centrée sur les expressions utilisant des quantificateurs universels et existentiels. Nous proposons de voir comment est introduite la quantification dans notre enseignement secondaire. L'accent est principalement mis sur l'analyse des formulations mises en jeu dans les énoncés mathématiques en référence à la logique naturelle qui intervient comme un ensemble de connaissances implicites que les enseignants supposent présentes chez les apprenants.

Dans le cadre de sa thèse de doctorat en didactique des mathématiques, El Faqih (1991) développe la question de l'enseignement de la logique en déclarant :

« S'il est vrai qu'un enseignement de la logique tel qu'il a été conçu aussi bien dans son contenu que dans sa présentation, a conduit à un échec, il n'est pas du tout évident qu'une absence complète d'un minimum de logique ne soit pas, elle aussi, génératrice d'un certain nombre de difficultés susceptibles d'entraver le déroulement normal de leurs études. » (p.5)

En accord avec El Faqih, nous montrons d'une part que la quantification est un objet présent dans la plupart des activités mathématiques et d'autre part, qu'elle ne fait pratiquement plus l'objet d'un enseignement explicite ; autrement dit il s'agit d'une notion paramathématique au sens de Y.Chevallard (1985)[2].

Nous commencerons par une étude dans les curricula de l'utilisation des éléments de logique en particulier les quantificateurs dans l'enseignement secondaire. Cette étude sera suivie par l'examen de quelques chapitres des manuels officiels tunisiens, de 1998, de la 6e et de la 7e année[3] secondaire section : mathématiques. Cet examen sera analysé en suivant des niveaux de catégorisation élaborés en s'appuyant sur les différents types de formulations des énoncés apparus dans les manuels. Nous précisons que, en Tunisie, il y a un seul manuel à la disposition des enseignants et des élèves, c'est le manuel officiel ; il est rédigé par les concepteurs des programmes.

---

[1] Mémoire de DEA en didactique des mathématiques intitulé : « Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques, à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique », conduit sous la co-direction de V. Durand-Guerrier (Maître de Conférences à l'IUFM de Lyon) et M. Abdeljaouad (Professeur à l'ISEFC Université de Tunis) soutenu en novembre 2000.

[2] Yves Chevallard, La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné, La Pensée Sauvage1985.

[3] Ces niveaux correspondent aux 1reS et terminale S de l'enseignement français.

1. L'utilisation des quantificateurs dans les programmes tunisiens de l'enseignement secondaire

L'enseignement secondaire tunisien de mathématiques a connu quatre réformes successives des programmes importantes : en 1958, 1969, 1978 et 1991.

1.1. La réforme de 1958

La première réforme de 1958 a été caractérisée par l'importance accordée à la nécessité de développer l'esprit d'analyse et de synthèse de l'élève et de le faire participer à la construction de son savoir. Jusque là, l'enseignement des mathématiques s'appuyait sur le contenu de manuels français, dans lesquels, en seconde, l'enseignement de la logique était absent tandis que pour le programme de première le vocabulaire logique était introduit : implication, équivalence logique, signification des quantificateurs « il existe » et « quel que soit ».

1.2. La réforme de 1969

La réforme de l'enseignement tunisien de 1969 met l'accent sur l'axiomatique ; la démonstration y apparaît comme un objet privilégié d'enseignement.

Cet objet que l'élève se forge à partir de son expérience sensible et du savoir théorique qu'il acquiert peu à peu, doit être affiné en cours de scolarité pour devenir un instrument efficace. Ainsi, un enseignement sera jugé satisfaisant dans ce domaine si l'élève a acquis une maîtrise suffisante des notions logiques pour mathématiser aisément les situations simples qui lui sont présentées.

L'introduction de certaines notions de mathématiques formalisées se traduit souvent par des contraintes très strictes de notations et des écritures. Les programmes de 1969 sont légèrement adaptés à ces exigences, ils mettent l'accent sur la forme de la démonstration et plus de rigueur en matière de raisonnement, de quantification, de logique. Ainsi, dans les instructions du programme tunisien de 1976 relatives aux classes de 5e année secondaire[4], toutes sections confondues, nous pouvons lire :

« À l'occasion de divers énoncés rencontrés, les élèves auront leur attention attirée sur le rôle joué en mathématiques par les principaux connecteurs (et, ou, non, si …alors et ses synonymes, équivaut et ses synonymes) et quantificateurs (quel que soit ∀, il existe ∃). Ils noteront leurs règles d'emploi, tant pour formuler les énoncés que pour conduire les raisonnements ». (p.7)

1.3. La réforme de 1978

En 1978, une nouvelle réforme a donné lieu à des changements dans les programmes des années suivantes s'appuyant sur d'autres idées-forces (dialectique entre problèmes et outils théoriques, aspects expérimentaux des mathématiques, progressivité de l'exigence de formalisation en fonction des besoins,…). Aucun changement concernant l'enseignement de la logique n'apparaît dans cette réforme.

[4] Deuxième année secondaire tunisienne actuelle qui équivaut à la classe de seconde française.

1.4. Les modifications en 1988

À la différence des programmes de mathématiques d'avant 1988, les éléments de logique sont utilisés, à partir de cette même année, avec prudence et sans qu'une référence explicite ne leur soit faite. De plus, la tendance à formaliser l'écriture mathématique est moins nette. En effet, dans le commentaire général des programmes du second cycle pour les sections : Math.-Sciences et Math.-Techniques de 1988, il est recommandé que :

« Les éléments de logique seront manipulés au cours des apprentissages, bien qu'aucune référence dans les programmes n'y corresponde. L'enseignant guidera ses élèves à acquérir une bonne compréhension des concepts de logique par un entraînement continu à la justification des démarches et des raisonnements. Dans les écritures, l'emploi des symboles ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$) se fera graduellement, avec prudence et économie. Le symbole $\Leftrightarrow$ pourra être utilisé à partir de la 5e année. Il aura sa pleine utilisation justifiée dans la rédaction des démonstrations faisant intervenir des conditions nécessaires et suffisantes. » (p.25)

Nous pouvons attester que l'usage des quantificateurs est moins important dans ladite réforme.

1.5. La réforme de 1991

La réforme de 1991 vise à faire diminuer la prépondérance de la notion ensembliste et de l'algèbre linéaire dans les programmes. L'étude de la logique formelle disparaît des programmes et l'utilisation des quantificateurs n'est plus autorisée. Dans les programmes officiels de 1993 de la classe de 6e année secondaire et de la 7e année secondaire, section Sciences-Expérimentales et Techniques[5], nous pouvons lire :

« On habituera les élèves à intégrer dans leurs expressions orale et écrite, les notions élémentaires de logique et on pourra, dans ce cadre, utiliser avec prudence les symboles de l'implication et de l'équivalence, mais on évitera l'emploi des symboles de quantification qui seront avantageusement remplacés par les expressions écrites correspondantes. » (p.30)

2. Étude de quelques chapitres des manuels tunisiens de 6e et 7e année secondaire

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier quelques chapitres des deux manuels scolaires tunisiens : 6e année secondaire (Tome 1) et 7e année secondaire (Tome 1) utilisés en section : Mathématiques[6]. En outre, l'étude des manuels aide à mieux cerner le rôle de l'écrit ; la variété des formulations, les types de représentations et les exigences de rigueur sur les notions écrites.

---

[5] Correspondant à la 1re année scientifique française.

[6] Le contenu des chapitres choisis est le même pour les sections : Sciences-Expérimentales et Techniques, des niveaux scolaires cités.

2.1. Parties du manuel analysées

Nous avons choisi d'étudier les chapitres comportant les notions de suites numériques et ceux concernant la continuité et les limites d'une fonction. Dans l'enseignement supérieur, certaines de ces notions sont réintroduites de la même manière qu'au secondaire et enrichies par d'autres notions, comme les suites numériques, les suites extraites, les suites de Cauchy, etc. Ainsi, on rencontre des notions pouvant apparaître comme des généralisations simples d'autres notions déjà introduites dans l'enseignement secondaire et ne nécessitant en particulier aucun formalisme nouveau pour leur introduction comme par exemple le théorème des valeurs intermédiaires.

Le manuel tunisien adopte pour tous les chapitres les rubriques suivantes : *activités*, *informations mathématiques* (définitions, théorèmes, corollaires, commentaires, remarques, etc.), *exercices résolus*, *exercices de fin de chapitre non résolus*, « *retenons* » et *remarques*.

Nous nous intéressons aux types de formulations utilisés dans les manuels, en particulier sous la rubrique *informations mathématiques* et dans celle contenant des *exercices corrigés* (exercices résolus, activités résolues).

Pour notre analyse, nous classons les formulations en quatre caractéristiques différentes :

Formulation portant une quantification explicite

Par exemple, le théorème du sens de variation d'une fonction : « Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

si f est croissante sur I alors, pour tout x de I, on a : $f'(x) \geq 0$.
si f est décroissante sur I alors, pour tout x de I, on a : $f'(x) \leq 0$.
si f constante sur I alors, pour tout x de I, on a : $f'(x) = 0$ ».

Théorème, 6e année secondaire Tome 1, p.125, 1998

Formulation portant un élément générique

Par exemple, le théorème de l'unicité d'une limite, lorsqu'elle existe : « Si une fonction f admet une limite l en un point x_0 ou en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors cette limite est unique ».

Théorème, 6e année secondaire Tome1, p.45, 1998

Formulation portant une quantification universelle implicite

Par exemple, une réponse dans un exercice résolu est ainsi formulée : La fonction

$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est croissante, alors si $x \leq 3$ on a : $f(x) \leq f(3)$…

Exercice, 7e année secondaire Tome1, p.39, 1998

Formulation portant un conditionnel implicitement quantifié, où le conséquent peut être explicitement quantifié

Par exemple, la définition de limite finie d'une suite réelle est formulée ainsi : « Soit n_0 un entier naturel et U une suite réelle définie sur $I = \{n \in É, n \geq n_0\}$ et l un réel. On dit que la suite U admet pour limite l si, pour tout ε strictement positif, il existe un entier naturel p tel que : $(n \in I \text{ et } n > p) \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$ ».

Définition, 7e année secondaire Tome1, p.21, 1998

Nous constatons que, d'une part, il y a à la fois langage formalisé et langage naturel et d'autre part il n'y a aucune marque permettant d'énoncer que l'entier naturel « n » est pris universellement.

Les résultats de notre analyse seront synthétisés dans deux tableaux, que nous appelons Tableau 6e et Tableau 7e. En effet, dans chacun d'eux nous groupons par ligne et pour tous les chapitres de chaque niveau (6e et 7e) les *définitions*, les *théorèmes* (théorèmes et corollaires), les *commentaires*, les *exercices corrigés* (exercices corrigés, activités résolues, démonstrations de théorèmes), les *remarques* et les rubriques intitulées « retenons ». Dans les colonnes nous résumons la formulation mathématique utilisée dans chacune des rubriques selon sa caractéristique.

2.1.1. Étude du manuel de 6e année secondaire (Tome 1)

Notre synthèse porte sur les chapitres suivants du manuel : les suites réelles, limite d'une fonction, continuité d'une fonction, sens de variation – extrema.

Dans le tableau 6e suivant, nous résumons les caractéristiques de la formulation mathématique, que nous venons d'identifier, utilisées dans les rubriques mentionnées auparavant. La figure 6e représente les histogrammes de chaque formulation.

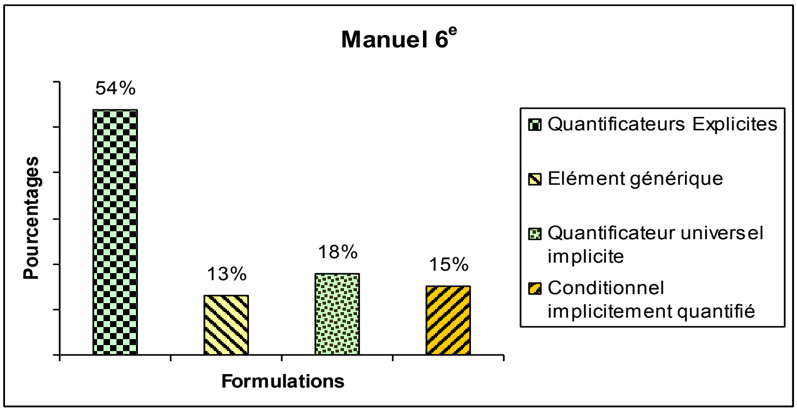
Tableau 6e

Récapitulatif du type de formulation mathématique des rubriques de quelques chapitres du manuel

Rubriques	Présence de quantificateurs explicites	Présence d'un élément générique	Présence d'un quantificateur universel implicite	Conditionnel implicitement quantifié
Définition	9	0	3	0
Théorème	11	6	0	1
Commentaire	11	0	4	4
Exercice corrigé	14	2	4	8
Remarque	6	2	5	0
Retenons	3	3	2	2
Total (t_i)	54	13	18	15

Pourcentage[7]	54 %	13 %	18 %	15 %

Histogramme 6^{e} : Histogramme du pourcentage du nombre associé à chaque type de formulation par rapport au nombre total.



2.1.2. Étude du manuel de 7^{e} année secondaire (Tome 1)

Notre synthèse porte sur les chapitres suivants du manuel : les suites réelles – convergence, limites, continuité, fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

Dans le tableau 7^{e} suivant, nous reproduisons le même travail effectué pour le manuel de 6^{e}. La figure 7^{e} représente les histogrammes de chaque formulation.

Tableau 7^{e}

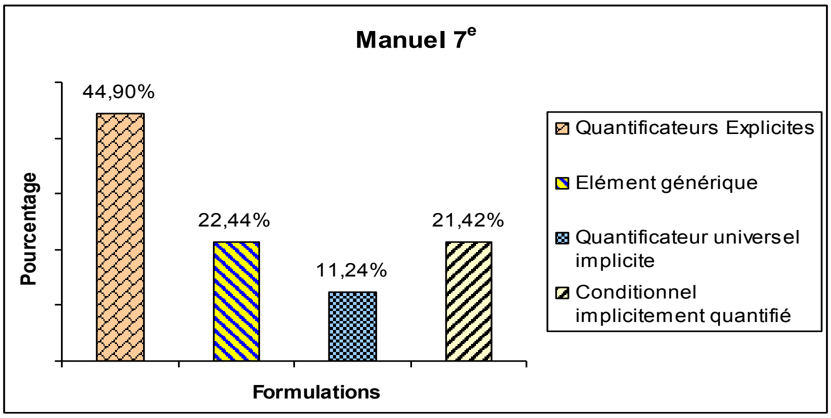
Récapitulatif du type de formulation mathématique des rubriques de quelques chapitres du manuel.

Rubriques	Présence de quantificateurs explicites	Présence d'un élément générique	Présence d'un quantificateur universel implicite	Conditionnel implicitement quantifié
Définition	6	0	0	2
Théorème	11	12	3	9
Commentaire	4	1	0	0
Exercice corrigé	12	3	7	10
Remarque	5	5	1	0
Retenons	6	1	0	0
Total (t_i)	44	22	11	21
Pourcentage[8]	44,9 %	22,4 %	11,2 %	21,4 %

7 Le pourcentage, pour chaque type de formulation, est donné par : $(\frac{t_i}{\sum t_i} \times 100)$, avec $\sum t_i = 100$.

8 Le pourcentage, pour chaque type de formulation, est donné par : $(\frac{t_i}{\sum t_i} \times 100)$, avec $\sum t_i = 98$.

Histogramme 7ᵉ : Histogramme du pourcentage du nombre associé à chaque type de formulation par rapport au nombre total



2.2. Analyse des résultats

L'analyse des rubriques de quelques chapitres des manuels de la 6e année secondaire et de la 7e année secondaire montre que la majorité d'entre eux est formulée avec des quantificateurs explicites (54 % pour la 6e et 44,9 % pour la 7e), ceci plaide en faveur de la sensibilité des contenus du manuel à une bonne explicitation des quantificateurs. Le reste des formulations des rubriques se répartit, suivant les trois autres types, avec des pourcentages équivalents. Ainsi, dans le cas où les formulations seraient énoncées avec un conditionnel implicitement quantifié, un apprenant peut trouver des difficultés. Par exemple, si les variables d'un antécédent d'une implication ne sont pas prises universellement (pour tout, quel que soit…) une simple justification avec quelques cas particuliers peut ramener l'apprenant au conséquent correspondant à cette implication. Bien que ce type d'énoncé soit apparu avec un pourcentage faible (15 % pour la 6e et 21,4 % pour la 7e) dans les manuels, ceci nous incite à penser qu'il est possible que cette tâche soit utilisée par certains apprenants.

D'autre part, les énoncés utilisant un élément générique sont apparus avec un pourcentage faible (13 % pour la 6e et 22,4 % pour la 7e). Nous pouvons pour ce cas, penser que les auteurs des manuels n'accordent pas assez d'importance à ce type de formalisme et la règle de généralisation universelle devient systématique tant que l'énoncé est défini pour un élément générique. Dans l'énoncé suivant : « Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$ », *une* joue le rôle d'élément générique, le domaine d'objets est implicitement l'ensemble des suites réelles.

3. Conclusion

L'analyse succincte des programmes a montré l'absence de l'apprentissage explicite de la quantification dans notre enseignement secondaire. Cette analyse a permis de mettre l'accent, d'une part, sur la place attribuée à la logique formelle, dans l'enseignement tunisien, et d'autre part, sur l'emploi des éléments de logique dans le raisonnement mathématique.

L'étude de quelques chapitres des manuels tunisiens de 6e et 7e année secondaire, centrée sur l'utilisation dans l'enseignement des quantificateurs, a permis de déterminer que plus de la moitié des formulations sont explicitement quantifiées. Cela traduit un effort remarquable des auteurs des manuels. Pour le reste des rubriques qui concernent les formulations portant un élément générique, une quantification universelle implicite ou un conditionnel implicitement quantifié, si elles semblent claires pour les auteurs des manuels et peut-être pour les enseignants, elles peuvent être sources de certaines difficultés dans la compréhension des connaissances mathématiques pour les apprenants.

Bibliographie

ARSAC G., DURAND-GUERRIER V. (1999), Démonstration et quantification existentielle, in *Acte de la dixième école d'été de didactique des mathématiques.*

CHELLOUGUI F. (2000), *Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique,* Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Institut Supérieur de l'Éducation et de la Formation Continue, Université de Tunis.

CHEVALLARD Y. (1985), *Transposition didactique du savoir savant au savoir à enseigner*, La Pensée sauvage éditions.

DURAND-GUERRIER V. (1991), *Les difficultés en logique des étudiants de premier cycle universitaire, Première approche*, Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Lyon 1.

DURAND-GUERRIER V. (1994), Problèmes de raisonnement et de logique chez les élèves de terminales C et de premier cycle universitaire scientifique ; les difficultés liées à l'implication ; questions méthodologiques, in *Actes du Premier Colloque Jeunes Chercheurs en Sciences Cognitives*, Université Joseph Fourier Grenoble 1, La Motte d'Aveillans.

EL FAQIH E.M. (1991), *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premiers cycle scientifique*, Thèse de l'université de Strasbourg[9].

[9] Disponible à la bibliothèque de l'IREM.

Manuels scolaires et aides pédagogiques pour l'enseignement secondaire tunisien

Manuel Tunisien (1979), Mathématiques, 5e année de l'Enseignement Secondaire, Section Maths-Sciences et Maths-Technique, République Tunisienne, Centre National Pédagogique (CNP).

Manuel Tunisien (1998), Mathématiques, 6e année de l'Enseignement Secondaire, Section Mathématiques, Tome 1, République Tunisienne, CNP.

Manuel Tunisien (1998), Mathématiques, 7e année de l'Enseignement Secondaire, Section Mathématiques, Tome 1, République Tunisienne, CNP.

Programmes Officiels de l'Enseignement du Second Cycle. (1969), Fascicule no3, Discipline Mathématiques, République Tunisienne, STD.

Programmes de Mathématiques Enseignement Secondaire. (1976), République Tunisienne, Direction de l'Enseignement secondaire technique et Professionnel.

Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Mathématiques. (1978, 1982, 1986, 1988, 1993, 1998), République Tunisienne, CNP.

Faïza CHELLOUGUI

Faculté des Sciences de Bizerte, ISEFC de Tunis, LIRDHIST de Lyon 1

LA DÉMONSTRATION [1]

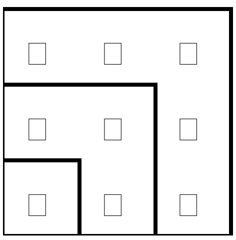
Alain CHAUVE

1. L'exigence platonicienne

L'exigence de démonstration apparaît avec les mathématiques. L'idée de mathématiques elle-même prend forme lorsque Platon distingue et sépare les choses mathématiques elles-mêmes des choses « visibles », concrètes, sur lesquelles on effectue des calculs ou des constructions. Les points, les lignes, les plans, les angles, les nombres ne nous sont pas donnés comme le sont des hommes, des animaux ou des arbres. Ce ne sont pas des choses concrètes que l'on peut observer ici ou là, que l'on peut décrire et dont on peut constater les propriétés. Nous ne pouvons que les concevoir, les saisir par la pensée (la *« dianoia »*). En séparant les choses visibles des choses intelligibles et invisibles, Platon assigne une nouvelle tâche aux mathématiciens.

Jusque là, en effet, les mathématiciens face à un problème concret, comme, par exemple, le problème de Délos (la duplication du cube) cherchaient une solution en traçant des figures et en procédant à des constructions. Certes « sous » les figures tracées, un carré, par exemple, ils considéraient le « carré en soi » qui est le « modèle invisible » de la figure, l'« hypothèse ». Ils « supposaient » sous les choses visibles quelque chose d'invisible et d'intelligible mais toujours en procédant à des constructions ou à des calculs effectués sur des choses visibles qui servent à représenter cet invisible : nombres et objets géométriques. Il ne s'agissait pas encore de démonstrations mais de procédés de construction ou de calcul que les mathématiciens mettaient en œuvre un peu empiriquement sur les figures qu'on trace ou sur les choses qu'on dénombre pour faire apparaître des propriétés mathématiques.

Par exemple, pour montrer que la somme des nombres impairs donne les carrés successifs, les Pythagoriciens se servaient du *« gnomon »*, c'est-à-dire de cailloux disposés en équerre pour former des carrés successifs :



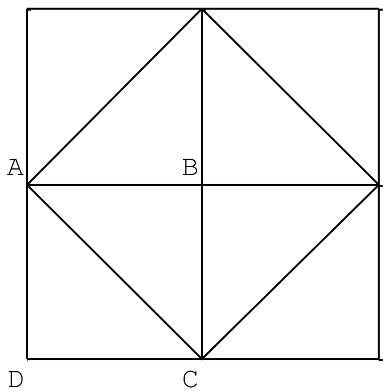
$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

etc.

[1]. Cet article paraîtra dans la revue de l'Association des Professeurs de Philosophie.

En géométrie, on se souvient de l'exemple donné dans le *Ménon* de la duplication du carré. Il suffit de construire sur la diagonale d'un carré ABCD le carré qui a pour côté cette diagonale et de compter les triangles égaux qui composent la surface des carrés pour s'assurer que le carré qui a pour côté la diagonale a bien une surface égale au double de celle du carré dont c'est la diagonale.



C'est en songeant à ces procédés que Platon exprime une exigence nouvelle en *République* VII, 527a : reformuler le discours dans lequel on parle des choses mathématiques et raisonne sur elles. On ne peut plus parler de ces choses comme on parle de choses concrètes :

« Aucun de ceux qui savent un peu de géométrie ne nous contestera que la nature de cette science est directement opposée au langage qu'emploient ceux qui la pratiquent. Ce langage, assurément, est fort ridicule et méprisable ; car c'est en homme de pratique, ayant en vue des applications, qu'ils parlent de carrer, de construire sur une ligne, d'ajouter et qu'ils utilisent partout des expressions de ce genre alors que cette science tout entière n'a d'autre objet que la connaissance. »

Dès l'instant où il est apparu que les choses mathématiques devaient être séparées des choses visibles apparaît aussi l'exigence de faire passer au premier plan ces choses mathématiques toujours « supposées » à l'arrière-plan des figures qu'on trace ou des cailloux que l'on compte pour avoir enfin affaire au « carré en soi », à la « diagonale en soi », *etc.*, et pour les considérer eux-mêmes. Apparaît alors en même temps l'idée qu'il faudrait développer une autre sorte de discours qu'il faudra expliciter et dont il faudra codifier les formes et les enchaînements d'expressions, c'est-à-dire la syntaxe, qui ne seront plus celles d'un discours où l'on exprime des opérations concrètes de construction ou de calcul : comment faudra-t-il exprimer ce qu'est un point, une ligne et leurs propriétés ? En faisant passer au premier plan les choses mathématiques, on fait passer au premier plan le discours mathématique.

On voit la difficulté : il faut se rendre capable d'apercevoir l'intelligible et d'en parler autrement qu'à travers des figures et des constructions ou des calculs. Mais comment se passer de figures qu'on trace ou de choses que l'on compte en continuant néanmoins à effectuer des constructions et des calculs ? Pour répondre à l'exigence platonicienne et élaborer un discours proprement mathématique il faudra répondre à deux conditions :

1) abstraire les procédés de construction et de dénombrement des représentations trop concrètes et empiriques de lignes qu'on trace ou de cailloux que l'on compte. Il faudra épurer le discours de tout ce qui exprime des activités concrètes de calcul ou de construction,
2) rapporter ces procédés abstraits à des règles générales qui peuvent s'imposer comme universellement valides. Ces procédés, en effet, présupposent des règles générales qui les fondent et qu'il faudra expliciter.

C'est en suivant cette voie que des considérations philosophiques vont se trouver impliquées dans l'élaboration et la constitution d'une théorie mathématique conçue comme un discours où l'on exprime des propriétés mathématiques et où l'on raisonne sur ces propriétés.

2. Comment le système d'Euclide répond à l'exigence platonicienne

Euclide est le fondateur d'une école de mathématiciens à Alexandrie, sous Ptolémée I, vers 300 av. J.C. Les historiens des sciences soulignent sa dette à l'égard d'Eudoxe qui fréquentait, avec Aristote, l'Académie de Platon. C'est avec Euclide, héritier d'Eudoxe, qu'on détache nettement les mathématiques des opérations concrètes d'arpentage ou de calcul et que l'on s'efforce de considérer les propriétés des figures et de leurs éléments (points, droites, plans, *etc.*) en elles-mêmes. On détache la géométrie des représentations empiriques de figures qu'on trace et sur lesquelles on procède à des constructions.

Euclide met en place un système déductif où l'on ne se contente plus de supposer, sous les figures et les constructions, des choses géométriques, mais où il s'agit de se donner la possibilité d'exprimer de façon purement mathématique les choses que conçoit le géomètre et d'expliciter les règles de la syntaxe du discours sur ces choses, de manière à pouvoir enchaîner déductivement les énoncés, les tirer les uns des autres et les établir les uns à partir des autres. Apparaît ainsi la possibilité de la démonstration ; apparaît aussi sa nécessité : il faudra démontrer ce qui semble pourtant lié à l'évidence d'une représentation ; par exemple, que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre.

La construction d'un tel système gouverné par la syntaxe d'un discours mathématique repose sur une distinction fondamentale. Il y a d'un côté les *raisonnements* qu'on tient et qui obéissent aux règles de la syntaxe logique du discours, il y a d'un autre côté les *choses* sur lesquelles on raisonne avec leurs propriétés et les lois auxquelles elles obéissent. D'un côté, il y a les « axiomes » *(axiomata)*, d'un autre côté, il y a les « définitions » *(horoi)* et les « postulats » *(aitèmata)*.

Les **axiomes**. C'est Aristote qui en avait clairement fixé la nature et la fonction. Il les avait appelés aussi « notions communes » *(koinai doxai)*. Euclide reprend cette conception et cette appellation. Ce sont les principes « à l'aide desquels a lieu la démonstration » (Aristote, *Seconds Analytiques*, I, 32) et qu'il ne faut pas confondre avec les principes à partir desquels on démontre quelque chose. Il s'agit des règles de raisonnement. Les axiomes relèvent tous du principe de contradiction : « Il est impossible que l'affirmation et la négation soient vraies et fausses en même temps » (Aristote, *Métaphysique*, □ 3). Ce principe est le principe suprême, ultime : « toute démonstration se ramène à ce principe comme à son ultime vérité » (*ibid.*). Aristote expliquait que ce principe ne concerne pas un certain « genre » de choses mais qu'il a une valeur universelle. Il exprime sous une forme générale une règle de raisonnement qui s'impose à chaque science sous une forme particulière et qu'elle doit respecter dans son domaine propre. Les axiomes d'une science expriment « analogiquement », comme dit Aristote, c'est-à-dire dans un domaine particulier d'objets – celui des grandeurs dans le cas de la géométrie, par exemple – ce que le principe de contradiction exprime de façon générale pour toute chose, pour « tout être en tant qu'être ». Dans cet esprit, Euclide formule 9 axiomes qui expriment l'exigence de non contradiction dans le domaine géométrique des grandeurs. Par exemple, « si, de choses égales, on ôte des choses égales, les restes sont égaux » (c'est la formulation d'Aristote, *Seconds Analytiques*, I, 10), ou encore le fameux « le tout est plus grand que la partie ».

Les **définitions** et les **postulats**. Ils constituent ce qu'Aristote avait appelé les « principes propres ». Dans les définitions, Euclide s'efforce d'exprimer dans un langage abstrait les choses mathématiques élémentaires – le point, la droite, *etc.* –, avec lesquelles on pourra exprimer de façon abstraite les figures géométriques. Considérons, par exemple, la définition du point : « le point est ce qui n'a pas de parties ». A l'évidence, Euclide cherche à dire ce qu'est le point géométrique en évitant d'avoir recours à une image, celle d'un grain de sable ou d'un minuscule caillou, par exemple. Il utilise des termes qui veulent évoquer une chose abstraite, la monade, dont il n'y a pas d'image sensible. Euclide a voulu reformuler abstraitement les expressions utilisées par les géomètres qui évoquaient des images sensibles de constructions et de figures qu'on trace. Par exemple encore, l'étrange définition de la droite – « la ligne qui repose également en tous ses points » (ou « qui est interposée également entre ses points ») – s'explique si l'on songe à l'architecte qui utilise un instrument de visée pour s'assurer qu'un alignement, celui d'un mur, par exemple, est parfaitement rectiligne.

Cependant, si les choses mathématiques, le point, la ligne, *etc.* reçoivent une définition abstraite, celle-ci reste purement nominale. De telles définitions nous disent ce que signifient droite, point, ligne, en nous disant seulement comment les concevoir sans image sensible, mais on ne peut rien faire de ces définitions. On ne sait comment les utiliser pour construire les objets géométriques. Il faudrait alors donner des définitions « réelles » qui explicitent comment ces choses mathématiques sont obtenues et construites intellectuellement. Il faudrait, par exemple, définir le point par l'intersection de deux droites. Ou encore, lorsque, par exemple, on définit le cercle comme une figure plane enfermée par une courbe telle que tous ses points sont à égale distance d'un point fixe appelé centre, on ne dit pas comment construire un cercle. La définition réelle est dans la construction abstraite : une figure obtenue par la rotation d'un segment de droite autour d'une de ses extrémités qui reste fixe.

Dès lors, il faut chercher les vraies définitions dans les postulats qui énoncent des règles de construction, règles fondamentales et générales qui norment tous les procédés de constructions. Hobbes avait dit fort justement que « ce qu'on appelle postulats et demandes sont certes réellement des principes, non pas cependant de démonstration mais de construction » (*De Corpore*, VI, 13). Que demande Euclide ? Qu'on puisse utiliser la règle et le compas. D'où les trois premiers postulats :

1) « de tout point à tout point mener une droite » (tracer une droite avec une règle),
2) « prolonger d'un trait continu [et un seul !] toute droite limitée dans sa direction » (prolonger une droite, de sorte que « deux droites n'ont pas de partie commune »),
3) « d'un point quelconque, décrire un cercle de rayon quelconque » (utiliser le compas).

Ces trois postulats figurent en tête des *Éléments* avec les définitions et marquent bien le souci de s'exprimer avec exactitude plutôt que de se rapporter à une figure. Il y a en outre deux autres postulats :

4) « tous les angles droits sont égaux entre eux »,
5) « si une ligne droite qui en coupe deux autres forme d'un même côté avec ces droites des angles internes dont la somme est inférieure à deux droits, les deux lignes ou leur prolongement se couperont du côté où la somme des angles est inférieure à deux droits ».

Ces postulats 4) et 5) interviennent inopinément dans le cours d'une démonstration. Sans eux, il faudrait, dans cette démonstration, s'en tenir à constater ce qui se passe sur les figures que l'on construit. Au lieu de s'en remettre à ce qu'on voit sur les figures qu'on trace et qui semble évident, on explicite sous la forme d'une règle générale, qu'on énonce, ce qui se passe quand on trace des figures. On explicite la règle qui se cache sous les évidences de la figure. Par exemple, l'évidence du parallélisme de deux droites relève d'une règle de construction qui n'a rien d'évident et que le postulat 5) énonce d'une façon qui n'est pas immédiatement claire et visible. Il ne faut surtout pas considérer que les postulats énoncent des évidences. C'est au contraire parce que ce qu'ils disent n'est pas évident qu'on est obligé de le dire et qu'il serait possible de le nier. Ils ne s'imposent pas par leur évidence ; ils s'imposent quand on veut démontrer géométriquement, c'est-à-dire quand on veut non pas s'en tenir à ce qu'on voit sur les figures ou à des suppositions et des conventions évidentes, mais quand on veut s'en remettre aux règles qu'il y a dans ces évidences et ces suppositions, les règles qui autorisent les constructions et qu'il faut énoncer rigoureusement et exactement.

Euclide a ainsi édifié une théorie mathématique où l'objet de la géométrie n'est plus les points, les lignes, les plans, *etc.*, mais les propriétés et les lois des grandeurs constructibles à la règle et au compas dans l'espace. Il ne s'agit plus d'apercevoir des objets, même abstraits, mais d'effectuer des opérations et des constructions sur des grandeurs et des figures dans l'espace. On est ainsi passé de la considération des figures dans lesquelles on voyait l'image de choses géométriques à la considération des façons de construire des figures dans l'espace et de raisonner sur des grandeurs. Les postulats sont les règles qui explicitent les possibilités de constructions qui y sont autorisées et qui nous autorisent à nous représenter des points, des droites, des angles, *etc.*, avec lesquels nous construisons des triangles, des carrés, des cercles, *etc.* Les axiomes explicitent les règles des raisonnements qu'on peut tenir sur les grandeurs qu'on construit. Les démonstrations font appel à ces règles qui expriment abstraitement et en général les possibilités d'effectuer des constructions avec des points, des lignes, *etc.* Elles les expriment abstraitement : elles ne parlent pas de la manière d'utiliser un compas ou de tirer un trait avec une règle ou une équerre. Elles les expriment en général : elles n'indiquent pas quel procédé de construction il faut utiliser ; c'est le géomètre qui doit trouver ce qu'il faut construire pour résoudre un problème : tracer, par exemple, une parallèle pour montrer que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.

3. Kant et l'interprétation philosophique de la démonstration

En donnant une réponse de type euclidien à l'exigence platonicienne d'un discours proprement et rigoureusement conforme au caractère abstrait des choses mathématiques, on fait surgir une question de type philosophique. A partir du moment où l'on fait passer au premier plan les règles ou lois de la géométrie, une question se pose inévitablement : d'où viennent-elles ? D'où tenons-nous cette possibilité de considérer des grandeurs et de les construire ? Poser cette question c'est considérer qu'au-delà des règles de construction, il y a, plus fondamentalement, des règles universelles et nécessaires qui fondent la possibilité de se donner des axiomes et des postulats qui norment toute construction géométrique.

C'est dans cette direction que s'oriente la réflexion kantienne sur la démonstration dans les mathématiques : sur quoi se fondent les lois de la géométrie qu'expriment les axiomes et les postulats ? Kant commence par préciser ce qu'il faut entendre par démonstration : « Seule une preuve apodictique, en tant qu'elle est intuitive, peut s'appeler démonstration »[2]. Il s'agit d'une preuve dont on est certain *a priori*, qui est irrécusable et qui s'impose nécessairement à tous. Le terme important qui donne la clé de ce caractère apodictique est le mot « intuitive ». La démonstration est une preuve apodictique parce qu'elle est intuitive et qu'elle n'est pas purement conceptuelle, c'est-à-dire purement logique : sa certitude n'est pas due à sa seule non contradiction. C'est pourquoi Kant soutient : « Il n'y a que les mathématiques qui contiennent des démonstrations, parce qu'elles ne dérivent pas leurs connaissances de concepts, mais de la construction de concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui peut être donnée *a priori* comme correspondant aux concepts »[3]. Procéder à des constructions, c'est faire appel à l'intuition : « construire un concept c'est représenter

[2] *Critique de la Raison pure*, Théorie transcendantale de la méthode, ch. I, 1re section.

[3] *Ibid.*

a priori l'intuition qui lui correspond »[4]. Et Kant donne l'exemple de la démonstration de la somme des angles d'un triangle[5]. Il y a bien d'un côté le concept de triangle, c'est-à-dire sa définition pure et simple, et, de l'autre côté, une intuition, c'est-à-dire une représentation obtenue par une construction. Cette représentation n'est certes pas empirique ; ce n'est pas celle du dessin qu'on fait sur le papier et dont il faudrait examiner empiriquement les propriétés, en mesurant, par exemple, les angles pour constater qu'ils sont égaux à deux droits. Il s'agit d'une représentation que l'on ne doit qu'à une intuition pure qui gouverne les constructions que l'on peut faire dans l'espace. La définition du triangle n'est mathématique que si elle correspond à une règle de construction, et cette règle elle-même est rendue possible et nécessaire par des règles plus fondamentales, des règles de représentation dans une intuition pure, des règles constitutives de toute représentation.

Ainsi, du point de vue de Kant, les démonstrations font appel à des constructions de figures ; ces constructions à leur tour font appel à des règles qu'on a dégagées et explicitées à titre d'axiomes et de postulats – Kant cite : le tout est égal à lui-même ; le tout est plus grand que la partie ; deux lignes droites ne circonscrivent pas d'espace ; entre deux points on ne peut mener qu'une ligne droite, *etc.* Mais fondamentalement ces règles ne relèvent pas du pur raisonnement et de ses principes logiques ; elles relèvent d'un principe dit « mathématique » que Kant appelle « axiome de l'intuition » : « Toutes les intuitions sont des grandeurs extensives »[6]. Ce principe n'est pas lui-même un axiome des mathématiques ; il est le « fondement de la possibilité des axiomes » en vertu duquel « ces axiomes mêmes […] ne sont admis dans la Mathématique que parce qu'ils peuvent être représentés dans l'intuition »[7].

Parler de démonstration revient donc à dire que les propriétés des objets mathématiques ne sont accessibles que dans une intuition pure, de sorte que le

---

[4] I*bid.*

[5] *Ibid. Que l'on donne à un philosophe le concept d'un triangle et qu'on le charge de trouver à sa manière quel peut être le rapport de ses angles avec l'angle droit. Tout ce qu'il a, c'est le concept d'une figure renfermée entre trois lignes droites et, dans cette figure, le concept d'un égal nombre d'angles. Il aura beau réfléchir, tant qu'il voudra, sur ce concept, il n'en fera sortir rien de nouveau. Il peut analyser et rendre clair le concept de la ligne droite, ou celui d'un angle, ou celui du nombre trois, mais non pas arriver à d'autres propriétés qui ne sont pas du tout contenues dans ces concepts. Mais que le géomètre s'empare de cette question. Il commence aussitôt par construire un triangle. Sachant que deux angles droits pris ensemble valent autant que tous les angles contigus qui peuvent être tracés d'un point pris sur une ligne droite, il prolonge un côté de son triangle et obtient deux angles contigus dont la somme égale deux droits. Il partage ensuite l'angle externe en traçant une ligne parallèle au côté opposé du triangle et voit qu'il en résulte un angle contigu qui est égal à un angle interne, etc. De cette manière, il arrive, par une chaîne de raisonnements, toujours guidés par l'intuition, à la solution parfaitement claire et en même temps générale de la question.*

Trad. Tremesaygues et Pacaud, P.U.F.

On soulignera dans ce passage les expressions « il prolonge », « il partage », « il voit », « toujours guidé par l'intuition ».

[6] *Critique de la Raison pure*, Analytique transcendantale, Doctrine du jugement, ch. II, 3e section.

[7] *Critique de la Raison pure*, Introduction (2e éd.), V.

géomètre doit au fond rapporter ces propriétés à des règles fondamentales qui gouvernent les procédures géométriques de construction. Ces règles sont celles de toute représentation. Elles sont les règles ultimes que nous impose une représentation dans une intuition pure. A ce titre, elles sont incontournables et irrécusables – apodictiques – lorsqu'on veut se représenter des objets mathématiques. La démonstration reste tributaire d'une intuition. Sans doute cette intuition n'a rien d'empirique. C'est une intuition pure à laquelle nous devons des représentations qui ne sont pas celles de choses concrètes. Elle commande des actes de représentation et elle est constitutive de nos facultés universelles de représentation. Néanmoins elle reste une intuition qui nous oblige à nous représenter les choses mathématiques et qui oblige les mathématiciens à se soumettre aux exigences fondamentales de la représentation. En ce sens, la démonstration ne serait qu'un instrument de représentation.

4. Conclusion

Comment doit s'exprimer le mathématicien pour tenir un discours conforme à l'exigence platonicienne de séparation entre le sensible et l'abstraction mathématique afin de pouvoir procéder démonstrativement ? Le système d'Euclide tente de satisfaire cette exigence, mais il y a une limite au caractère déductif du système euclidien : procéder à des constructions, c'est faire appel à l'intuition.

Le progrès des mathématiques a consisté à se débarrasser du support intuitif de la représentation et à s'affranchir de la limitation imposée au discours mathématique dont on exigeait qu'il ne soit pas seulement discursif mais qu'il se soumette aux exigences et aux possibilités de la représentation. Au contraire, on a dégagé et codifié les possibilités et les règles de formulations d'énoncés qu'offre le discours mathématique, de sorte que ce qui est passé au premier plan c'est le discours lui-même avec ses règles de formation et d'enchaînement d'énoncés mathématiques, sa syntaxe. Apparaît alors l'idée que lorsqu'on est en présence de ce discours, on est en présence de l'objet lui-même. On a en effet élaboré et codifié un discours où il ne s'agit plus d'exprimer des constructions, des calculs ou des propriétés de choses mathématiques, mais où il s'agit de former et d'enchaîner les expressions elles-mêmes. A la considération, par exemple, des droites parallèles se substitue la considération de la syntaxe des expressions dans lesquelles on parle de parallélisme. Aux objets mathématiques se substitue le discours où il est question d'objets mathématiques. Les propriétés des expressions du discours mathématique déterminent ce qu'il est possible et nécessaire de dire mathématiquement des objets mathématiques. Elles déterminent leurs propriétés mathématiques, elles deviennent les règles auxquelles les objets mathématiques obéissent. C'est la syntaxe qui fait l'objet et qui devient l'objet ; ce n'est plus la synthèse représentative. Cette syntaxe est celle d'un discours dans lequel tout ce qu'on dit doit être dit logiquement, de manière déductive, selon des enchaînements réglés d'expressions. Celles-ci sont mises dans un ordre déductif où elles forment une suite de conséquences : une proposition dépend d'une autre proposition dont elle se conclut. Les propositions sont enchaînées déductivement les unes aux autres et forment un système. Dans ce système il n'est plus question de faire appel à des constructions pour démontrer. La démonstration se fait à l'intérieur du système des expressions où il s'agit de procéder déductivement d'après des règles qui sont celles de la pure syntaxe des énoncés.

Ce mouvement est celui de l'axiomatisation et, au-delà, celui de la formalisation. Il a conduit à arracher les choses mathématiques et leurs propriétés au domaine de l'intuition pure avec les constructions qu'elle autorise pour les inscrire dans l'ordre déductif d'un discours, dans la syntaxe d'un système. Les choses mathématiques ont été extraites du domaine du constructible pour être replacées dans le domaine du déductible.

Pour pouvoir démontrer, il faut pouvoir se situer dans un système, c'est-à-dire à un autre niveau que celui de l'intuition qui nous fait appréhender les choses mathématiques. Il faut pouvoir se situer dans un discours qui forme un système d'énoncés. C'est pourquoi, devant la géométrie d'Euclide, les mathématiciens ne se sont pas arrêtés à l'interprétation philosophique de Kant. Celui-ci a bien vu que le *fondement* de la géométrie d'Euclide est intuitif et, à ce titre, relève d'une approche philosophique, mais ce qui a retenu l'attention des mathématiciens, ce n'est pas le « fondement » de cette géométrie mais sa *structure* qui, elle, n'est pas intuitive mais discursive et systématique.

Alain CHAUVE
Inspecteur honoraire de philosophie

LE RAISONNEMENT ET LE JUGEMENT D'EXISTENCE

GROUPE MATHÉMATIQUES-PHILOSOPHIE DE L'IREM DE STRASBOURG[1]

Le texte suivant est extrait d'une brochure de l'IREM de Strasbourg « Pour enseigner la philosophie des mathématiques » produite par un groupe de professeurs de mathématiques et de professeurs de philosophie qui se réunissent régulièrement pour échanger autour de différents thèmes. Le thème proposé dans cet extrait est la démonstration de l'existence de dieu par Saint Anselme de Canterbury. À partir de ce texte, nous proposons quelques échanges qui constituent autant de matériaux susceptibles d'alimenter une réflexion ou une activité en classe sur ce thème. Nous avons voulu restituer le caractère vivant du débat que nous laissons ouvert sans prétention d'exhaustivité, sachant que l'exposé d'un débat vaut mieux que des conclusions hâtives. Certains lecteurs pourront partager les opinions émises ou trouver que certains arguments sont critiquables voire contradictoires.

Pour préciser la réflexion sur les fonctions, procédures et possibilités du raisonnement dans le domaine de la philosophie, on pourra partir d'un exemple « extrême » issu de la philosophie scolastique : la démonstration de l'existence de Dieu par SAINT ANSELME DE CANTERBURY dans son *Proslogion, Allocution sur l'existence de Dieu*. Cet exemple conduit :

1) à examiner les procédures et surtout les possibilités du raisonnement dans le domaine de la philosophie,
2) à partir de là, on pourra en un second temps, s'interroger sur les démarches de la réflexion philosophique,
3) et finalement aborder la question de la démonstration d'existence en mathématique.

1. La démonstration de Saint Anselme de Canterbury

Proslogion, Chapitre 2 : « Que Dieu est vraiment ».

« Donc, Seigneur, toi qui donnes intellect à la foi, donne-moi, autant que tu sais faire, de comprendre que tu es, comme nous croyons, et que tu es ce que nous croyons. Et certes, nous croyons que tu es quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand. N'y a-t-il pas une nature telle parce que l'insensé a dit dans son cœur : « Dieu n'est pas ». Mais il est bien certain que ce même insensé, quand il entend cela même que je dis: « quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand », comprend ce qu'il entend, et que ce qu'il comprend est dans son intellect, même s'il ne comprend pas que ce quelque chose est. Car c'est une chose que d'avoir quelque chose dans l'intellect, et autre chose que de comprendre que ce quelque chose est. En effet, quand le peintre prémédite ce qu'il va faire, il a certes dans l'intellect ce qu'il n'a pas encore fait, mais il comprend que cette chose n'est pas encore. Et une fois qu'il l'a peinte, d'une part il a dans l'intellect ce qu'il a fait, et d'autre part il comprend que ça est. Donc l'insensé aussi, il lui faut convenir qu'il y a bien dans l'intellect quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand, puisqu'il comprend ce qu'il

[1] Cet article est extrait d'une brochure dont les auteurs sont des professeurs de mathématiques ou de philosophie, de l'Académie de Strasbourg, qui ont participé au groupe philosophie-mathématiques de l'I.R.E.M. de Strasbourg (Voir page 44).

entend, et que tout ce qui est compris est dans l'intellect. Et il est bien certain que ce qui est tel que rien ne se peut penser de plus grand ne peut être seulement dans l'intellect. Car si c'est seulement dans l'intellect, on peut penser que ce soit aussi dans la réalité, ce qui est plus grand. Si donc ce qui est tel que rien ne se peut penser de plus grand est seulement dans l'intellect, cela même qui est tel que rien ne se peut penser de plus grand est tel qu'on peut penser quelque chose de plus grand ; mais cela est à coup sûr impossible. Il est donc hors de doute qu'existe quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand, et cela tant dans l'intellect que dans la réalité… » Psaume 14 :1 ; 53 :1.

1.1. Analyse de la procédure de validation dans le raisonnement

On pourra utiliser la contribution suivante[2], qui a recherché quels éléments logiques et mathématiques pouvaient être repérés dans la démarche démonstrative de SAINT ANSELME. Nous avons inscrit en caractères gras les statuts mathématiques attribués à certaines parties du texte.

Notions premières
ce qu'on peut penser = les pensées ?
les objets de pensée

Postulat
Les pensées peuvent être classées par ordre de grandeur.

Remarques et questions :
Dans la phrase « Quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand » on peut se demander si ce sont les pensées qui sont classées ou les objets de la pensée (les choses pensées).

D'après la suite du texte, Anselme semble plutôt avoir choisi les pensées, du moins dans les premières lignes. Comme tout postulat, celui-ci est bien sûr tout à fait acceptable, bien qu'il pose des questions car beaucoup d'ensembles ne peuvent pas être ordonnés de façon satisfaisante, par exemple l'ensemble des points d'un plan ou de l'espace. Imaginer un classement dans les pensées n'est pas simple. Comment pourrais- je par exemple définir le plus grand d'une collection aussi banale que les objets de ma maison ? Le plus long, le plus volumineux, le plus lourd, celui que j'utilise le plus, celui que je préfère ?

Définition
« Quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand ». Le problème, c'est que cette phrase ne définit peut-être rien du tout.

« Un nombre entier tel qu'il n'y en a pas de plus grand » n'existe pas, pas plus qu' « un point du plan plus loin de l'origine que tous les autres » et je ne me prononcerais pas sur « une étoile plus loin de nous que toutes les autres ».

Anselme s'appuie sur le postulat suivant :

Postulat

Le « quelque chose » que nous venons de définir existe bien. En effet le texte admet l'existence de ce plus grand là.

[2] Contribution proposée par Nicole Vogel.

Dans la 3e ligne, il dit « nous croyons que tu es quelque chose de tel... »

Au milieu du texte, il dit de l'insensé « il lui faut convenir qu'il y a bien dans l'intellect... »

Ce postulat aussi est tout à fait légitime, mais il ne semblerait probablement pas très naturel à un Japonais ou à un Africain animiste.

Il reste une autre question qui n'est pas évoquée par Anselme (sans doute parce que sa réponse est évidente) : ce quelque chose est-il unique ?

Amusons-nous un peu avec la notion d'ordre en mathématique.

Si l'ordre est total (entre deux éléments, on peut toujours décider lequel est le plus grand) et s'il existe un plus grand élément, il est unique… donc si l'ordre sur les pensées est total et si Dieu existe, il est unique…

Par contre, si l'ordre n'est pas total, il peut y avoir une infinité d'éléments plus grands que tous ceux auxquels on peut les comparer et il peut y avoir une infinité de « dieux »...

De plus, des ensembles aussi « naturels » que l'ensemble des entiers par exemple, n'ont pas de plus grand élément.

Et si l'on veut contourner l'obstacle avec la notion d'infini, on sait depuis Cantor que l'infini n'est pas unique non plus...

On passe ensuite à une démonstration par l'absurde en partant du postulat suivant :

Postulat

La réalité d'une chose (ou la pensée de la réalité d'une chose ?) est supérieure à la pensée de la chose.

Démonstration

Ce qu'il y a de plus grand dans les pensées existe aussi dans la réalité, car la réalité d'une chose (ou la pensée de la réalité d'une chose ?) est supérieure à la pensée de la chose donc on pourrait trouver quelque chose de plus grand que la plus grande des pensées, ce qui est une contradiction.

Du point de vue logique, cette démonstration est fausse, car nous avons considéré au départ l'ensemble ordonné des pensées et le plus grand élément de cet ensemble.

Si on parle de réalité, il s'agit d'objets extérieurs à cet ensemble de référence.

En supposant qu'on puisse comparer (dire lequel est le plus grand) ceux-là aux pensées, il n'est pas contradictoire de trouver parmi eux des éléments plus grands que toutes ces pensées.

Par exemple, en mathématiques, l'intervalle]0,1[n'a pas de plus grand élément, mais 2 est plus grand que tous les éléments de]0,1[. Ou bien [0 ; 1] a un plus grand élément qui est 1, et 2 est plus grand.

Mais on ne sait pas très bien non plus si Anselme parle de la réalité correspondant à la chose pensée ou de la pensée que la chose pensée est réelle.

Dans le premier cas, cela voudrait dire que tout ce qu'on peut penser existe dans la réalité, ce qui est un postulat plutôt étonnant...

Dans le second cas, la pensée de la chose ne pouvait pas être ce qu'on pouvait penser de plus grand dès le début du raisonnement, puisque dans l'ensemble de référence, le plus grand élément serait « la pensée de la réalité de la plus grande pensée ».

Mais alors pourquoi s'arrêter là ? On pourrait poursuivre les emboîtements « la pensée de la réalité de la pensée de la plus grande des pensées... » et ainsi de suite ?

On peut observer que, dans une théorie mathématique construite à partir d'un système d'axiomes, une propriété que l'on démontre est déjà inscrite dans les axiomes que l'on suppose, en ce sens que si l'on supprime un ou plusieurs axiomes, la propriété ne sera plus vraie. Faut-il pour autant dire qu'en admettant les axiomes on effectue une pétition de principe pour ce qui concerne la propriété ? (rappel : pétition de principe = raisonnement qui consiste à supposer vrai ce qui est en question.)

On peut interpréter[3] mathématiquement le texte d'Anselme comme supposant qu'on construit dans l'ensemble des pensées un ordre total et qu'on suppose qu'il existe dans cet ensemble un plus grand élément qu'on appelle Dieu ; or en mathématiques, tout ensemble ayant un ordre total n'admet pas toujours un plus grand élément. Il est alors précisé qu'il ne faut pas être « mathématicocentriste ».

On peut[4] « insister sur le fait qu'il ne faut pas vouloir chercher dans ce raisonnement une comparaison directe avec des raisonnements mathématiques. Il doit, bien plutôt, servir à comprendre ce qui distingue ces raisonnements d'autres types de raisonnements, également logiques ».

1.2. Réflexions sur l'intention philosophique ou théologique de SAINT ANSELME

La réflexion critique technique (que l'on peut faire d'un point de vue mathématique) de la démonstration anselmienne conduit à s'interroger sur l'intention exacte de Saint Anselme, et sur le statut de sa démonstration. Cette problématique a donné lieu à un exposé[5] suivi d'un débat dont le compte rendu pourra être utilisé pour nourrir les réflexions sur la fameuse "preuve".

Sur la démonstration de St Anselme de l'existence de Dieu[6]

Quelle est l'ambition de St Anselme ?

Une ambition explicite formulée dans le préambule du Proslogion : « je me mis à chercher à part moi s'il n'était pas possible de découvrir un argument unique qui,

[3] Interprétation de Georges Glaeser.
[4] Souhait de Jean-Pierre Friedelmeyer.
[5] L'exposé a été pris en charge par Philippe Rohrbach.
[6] Compte rendu de Philippe Rohrbach avec des intertitres de Richard Cabassut.

pour être probant, n'eût besoin d'aucun autre que lui, et qui, à lui tout seul, suffit à garantir que Dieu est vraiment… » Pautrat. Gf. P. 35

C'est un argument a priori. Hors-contexte historique, empirique.

À qui s'adresse cette démonstration ?

Le dialogue avec l'autre : celui qui dit « il n'y a pas de Dieu ».

Point commun minimal: il entend ce que je dis. Il reconnaît les éléments signifiants de mon discours.

Comment sont définis les termes de la démonstration ?

Définition de Dieu : Aliquid quo nihil majus cogitari possit (AQNMCP). Quelque chose par rapport à quoi on ne peut rien penser de plus grand.

Que veut-on démontrer à partir de là ? L'existence de Dieu (ainsi défini).

Que veut dire existence ? Qui n'est pas seulement dans la pensée mais qui en outre existe réellement, véritablement, en dehors de la pensée.

Donc penser un être comme existant est plus grand que de le penser sans qu'il existe en dehors de la pensée, c'est-à-dire comme simple concept.

Que veut dire plus grand ? La discussion devrait porter sur ce point délicat. Il est certain que chez Anselme « plus grand » ne désigne pas une relation d'ordre totale (où les éléments sont comparables suivant cet ordre). Par exemple : on ne peut pas dire « dans l'ordre des sentiments » que le courage est plus grand que la bonté. Ce que veut dire Anselme ici : penser quelque chose comme existant en dehors de la pensée, et pas seulement comme un pur concept, c'est penser « plus », c'est une pensée qui a « plus de poids ». Je peux, en effet, penser le tableau avant de l'avoir fait. Je peux en outre, penser au tableau, une fois qu'il est réalisé. Cette dernière pensée contient davantage que la première.

Quels sont les arguments de St Anselme ?

Puisque j'ai défini Dieu comme AQNMCP, je ne peux pas le définir comme un simple concept, sinon je pourrais penser quelque chose de plus grand que lui, c'est-à-dire cet être avec, en outre, l'idée qu'il existe en dehors de ma pensée. Ce qui serait contraire à la définition de départ. Je suis donc dans la nécessité de penser Dieu comme existant en dehors de ma pensée, par définition, sinon, ce n'est plus Dieu que je pense.

La clé de la démonstration se trouve dans l'avant-dernière phrase : si AQNMCP est seulement dans l'intellect, il n'est pas AQNMCP, puisque je peux alors penser quelque chose de plus à son sujet qui est : il n'est pas seulement dans l'intellect, ce qui est en contradiction avec le fait qu'il est AQNMCP. Le mathématicien appelle cela une démonstration par l'absurde. Ce qui est frustrant ici, c'est que l'existence est démontrée par défaut. Le contraire de l'existence de Dieu aboutit à une contradiction en vertu de ce que nous avons admis au départ. Les matheux auraient sans doute aimé que je leur démontre positivement, par construction de l'objet, l'existence de Dieu ; quelle déception !

Anselme dit-il qu'exister est plus que penser ? Certes, il accorde à l'être une priorité sur le connaître. Mais l'intérêt de ce texte, me semble-t-il, c'est qu'il se place entièrement du point vu de la pensée : il est plus grand de penser qu'un être n'est pas seulement dans la pensée que de le penser seulement. Donc ce "plus grand" fait signe de l'intérieur même de la pensée. C'est la pensée elle-même, en elle-même, qui doit reconnaître l'impossibilité d'une existence <u>seulement</u> dans l'intellect de AQNMCP.

Nous avons ici une démarche formellement correcte : il y a une définition, il y a des axiomes (Penser que la chose existe est plus grand que penser la chose comme simple concept).

Discussion sur la critique du mathématicien

Les mathématiciens, lorsqu'ils parlent d'existence d'un objet, soit ils construisent l'objet, soit ils assurent l'existence de l'objet, sans le construire, par défaut (par exemple en montrant dans une disjonction des cas que le seul cas restant possible est en cohérence avec les axiomes).

Sur quoi porte alors la discussion à propos de cet exemple ?

Une question fondamentale : l'argument d'Anselme tombe-t-il sous le coup de la critique technique d'un mathématicien qui consiste à dire : dans un ensemble ordonné il n'y a pas toujours de plus grand élément (exemple des nombres entiers).

On peut répondre à cela qu'Anselme ne dit pas que AQNMCP est le plus grand élément que l'on puisse penser. Il dit : « Il est tel que rien ne se peut penser de plus grand. » Anselme ne part pas d'une comparaison qui permettrait de dire : Dieu est le plus grand des éléments de l'ensemble E.

1) Moreau, dans <u>Pour ou contre l'insensé ?</u> " Il ne faut pas dire : plus grand que toute chose existante, plus grand que tout ce qui existe, un objet désigné ainsi peut être une réalité contingente. Le *aliquid quo*... est conçu absolument comme l'être auprès de qui rien de plus grand ne peut être pensé. L'expression *majus omnibus* est une détermination objective, relative au donné empirique. *Aliquid quo majus*... est une notion réflexive où est impliqué l'absolu.
Cette formule traduit donc une exigence absolue de la pensée où se révèle la transcendance de l'être, sans laquelle notre pensée n'aurait aucun sens. "
Moreau montre qu'il faut distinguer entre la grandeur quantitative pour laquelle " il peut toujours y avoir plus grand " et une grandeur de valeur, comme le bien absolu. Cf. la discussion sur la juste mesure dans le Politique 283 d sq. Le bien suprême a une valeur propre en dehors de tout accroissement. Cf. Eth. Nic. II 6 1107a 6-8, 20-21 " C'est pourquoi dans l'ordre de la substance et de la définition exprimant la quiddité, la vertu est une médiété, tandis que dans l'ordre de l'excellence et du parfait, c'est un sommet ". Cf plus loin. Il n'y a pas excès ou défaut de courage en tant que tel, " du fait que le moyen est en un sens un extrême ".

2) La conception anselmienne de la vérité nous a fait voir que penser un être seulement dans l'intellect est moins que penser cet être " dans la vérité ". Penser

seulement un être c'est moins que, en outre, penser *à* lui. C'est-à-dire qu'il est plus grand pour un être de ne pas seulement être dans l'intellect. Or, nous pouvons *penser* que Dieu n'est pas seulement dans l'intellect, donc, comme il est ce par rapport à quoi nous ne pouvons rien penser de plus grand, il ne peut être pensé comme existant seulement dans l'intellect (autre formulation qui rendra plus sensible le point sur lequel j'aimerais faire porter mon commentaire : Nous pouvons penser que nous pouvons penser *à* Dieu et pas seulement le penser). Notez ici également l'équivalence " être plus grand " et " penser quelque chose de plus grand ". En d'autres termes encore, d'un être qui est seulement dans l'intellect, je peux penser quelque chose de plus grand, c'est qu'il existe en dehors de la pensée, dans la chose, et pas seulement dans l'intellect. Cf. le tableau ! Mais ici, ce qui rend cet axiome décisif, c'est que l'être dont nous parlons est tel que rien de plus grand ne peut être pensé que lui ! Le Dieu intra-mental n'a pas cette propriété. Un Dieu qui serait un pur idéal, ne répond pas à la définition, je dois donc penser Dieu nécessairement comme existant véritablement et pas seulement dans la pensée.

Éléments de discussion sur le texte d'Anselme

Dans le texte précédent on a souhaité présenter l'argumentation de St Anselme hors contexte, de manière an-historique, ce qui permet de se rapprocher des mathématiques lorsque celles ci se veulent également universelles et éternelles.

On[7] peut replacer le texte de St Anselme dans le contexte historique : St Anselme, moine du XVIe siècle, à la demande de ses autorités, produit ses méditations : c'est une prière avec laquelle St Anselme remercie Dieu de lui avoir donné l'idée de la preuve de l'existence de Dieu. Il y a deux manières de connaître Dieu : la foi ou la raison. Ici St Anselme veut connaître Dieu dans la foi. Descartes aura le projet de constituer une connaissance sans le recours à la foi en utilisant la raison naturelle. Descartes estime que parmi toutes les idées, une idée n'est pas le produit de mon imagination : l'idée d'un Dieu infiniment parfait. L'existence appartient à la nature d'un être parfait. Une objection : la pensée ne fait pas nécessité aux choses.

On peut se référer[8] à un texte de Roger Cuppens *« Les mathématiques d'une machine sont-elles préhilbertiennes ? »* [9] Dans ce texte Cuppens rappelle à propos de Brouwer et de l'intuitionnisme : « L'existence des entiers repose sur l'intuition. Tous les autres objets doivent être construits explicitement. Dans son refus des démonstrations d'existence non constructives, il est amené à refuser les démonstrations par l'absurde, le principe du tiers exclu et bien entendu l'axiome du choix ». On voit l'analogie avec la démonstration de St Anselme qui ne démontre pas l'existence de Dieu par construction mais par un raisonnement par l'absurde.

---

[7] Suggestion de Bruno de Solère.

[8] Référence proposée par François Pluvinage.

[9] Actes de l'Université d'été "Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques", 29 août-2 septembre 1994, Caen. IREM de Caen.

Précédemment on a invoqué[10] la pétition de principe que constituent les deux hypothèses suivantes :

- je pense à Dieu qui est défini comme quelque chose par rapport à quoi on ne peut rien penser de plus grand,
- penser à quelque chose et penser que ce quelque chose existe est plus grand que penser à quelque chose sans penser qu'il existe.

On en conclut alors que si on pense à Dieu, on pense nécessairement qu'il existe. Or, d'après Nicole Vogel, la conclusion est déjà inscrite dans les deux hypothèses.

2. La critique de la preuve ontologique par KANT

2.1. De l'impossibilité d'une preuve ontologique de l'existence de Dieu

Voir annexe

2.2. Analyses [11]

On souhaite replacer le texte de St Anselme dans le contexte historique et intellectuel : St Anselme, moine du XIe siècle, à la demande de ses autorités, produit ses méditations : c'est une prière avec laquelle St Anselme remercie Dieu de lui avoir donné l'idée de la preuve de l'existence de Dieu. Il y a deux manières de connaître Dieu : par l'autorité des Ecritures et par la nécessité de la Raison., qui s'opposent et s'articulent au sein de la foi. C'est seulement après St Thomas que la Raison sera opposée non seulement à l' autorité des Ecritures, mais à la foi elle-même, et c'est dans ce nouveau contexte intellectuel que Descartes formulera « sa » preuve ontologique. Donc St Anselme veut connaître Dieu au sein de la foi. Descartes aura le projet de constituer une connaissance sans le recours à la foi en utilisant la seule raison naturelle. Descartes estime que parmi toutes les idées, une idée ne peut être le produit de mon imagination : l'idée d'un Dieu infiniment parfait, l'imagination ne pouvant jamais donner que des représentations limitées. Pour Descartes, si nous concevons l'idée d'un être parfait, l'existence appartient nécessairement à un tel être. Descartes accepte cependant une objection : la pensée ne fait pas nécessité aux choses et répond à cette objection dans la troisième méditation. Cette troisième méditation propose une première preuve de l'existence de Dieu – dite « preuve par les effets », sans laquelle la seconde ne serait pas garantie –, preuve qui est un moyen par rapport à la solution du problème de la valeur objective des idées : il s'agit de montrer qu'une réalité objective correspond aux idées claires et distinctes, de « transformer les vérités nécessaires de la science en vérité des choses »[12]. Cela fait, Descartes pourra alors dans la Méditation Ve développer la preuve dite ontologique : un être parfait ne peut pas ne pas exister sinon il lui manquerait une perfection : l'existence.

C'est la preuve de la Ve méditation que Kant critique. Notons que dans les méditations le problème de Descartes était de garantir la certitude des sciences par

[10] Invocation de Nicole Vogel.
[11] Analyses de Bruno de Solère.
[12] Citation de M. Guérault, dans *Descartes dans l'ordre des raisons.*

l'existence de Dieu ; ce problème n'est plus celui de Kant qui part du fait de l'existence des sciences et cherche simplement à réfléchir aux conditions des possibilités et aux limites de celles-ci : la vérité des sciences dépend alors de la structure du sujet (on peut parler de « mort épistémologique de Dieu »).

La preuve de Descartes déduisait l'existence de Dieu de son essence après s'être efforcé de montrer qu'on avait le droit de faire ces déductions. Kant s'attaque à ce droit en montrant que l'existence n'est pas un élément de l'essence parmi d'autres, mais quelque chose qui peut ou non s'ajouter à l'essence.

Commentons le texte de Kant. On propose de réfléchir au cas d'une personne se trouvant devant un restaurant proposant un menu à 100 €. Quatre possibilités peuvent se présenter :

1) je crois avoir 100 €, je mange et je trouve effectivement les 100 € dans ma poche : à l'idée de 100 € correspond effectivement l'existence des 100 €,
2) je crois avoir 100 €, je mange mais je me rends compte que j'ai oublié les 100 € à la maison : à l'idée de 100 € dans ma poche ne correspond pas l'existence de 100 € dans ma poche,
3) je ne pense pas avoir 100 € dans ma poche, je ne rentre pas dans le restaurant et, en marchant, je découvre les 100 € dans ma poche : à l'idée de la non existence des 100 € dans ma poche répond la découverte de leur existence dans ma poche,
4) je ne crois pas avoir 100 € dans ma poche, et effectivement je ne les y trouve pas : l'idée de l'inexistence est confirmée par l'expérience.

La thèse de Kant est ainsi que seule la perception sensible permet de distinguer le concept d'un être réel et la réalité de cette chose. Pour attribuer une existence à un objet il faut sortir du concept de l'objet. L'existence d'un être parfait est possible mais elle n'est que possible ; l'idée de Dieu, être parfait, ne peut accroître notre connaissance, il faudrait pour cela une expérience qui nous apporterait la confirmation de l'existence.

3. Réflexions sur les démarches de la philosophie d'aujourd'hui

Un philosophe aujourd'hui ne tenterait plus de prouver l'existence ; la leçon de Kant a été retenue : l'existence ne se démontre pas, il faut qu'elle soit donnée dans une expérience possible.

Il paraît alors intéressant de s'interroger sur, d'une part, la place des jugements d'existence tant en mathématique qu'en philosophie et d'autre part, sur la spécificité des démarches philosophiques par rapport à celle des mathématiques.

En un premier temps les philosophes tendent à penser que pour les mathématiciens un objet existe dès lors qu'il est logiquement possible ; alors que c'était justement l'objet de la réfutation kantienne de démontrer qu'un concept sans contradiction ne garantit pas l'existence d'une réalité lui correspondant.

S'interroger sur l'existence pour un philosophe, c'est au fond se demander si telle chose est réelle dans la perspective même du bon sens qui distingue fiction et réalité.

Un problème du mathématicien est qu'il éprouve le besoin de préciser au départ le vocabulaire qu'il utilise, en donnant d'emblée un contenu exact et non équivoque à chaque notion : existence, réalité,… L'aboutissement de cette démarche est la présentation axiomatique. Une fois cette présentation minimale faite, il commence à raisonner.

En revanche le point de départ du philosophe est une situation vécue de sorte que le sens des termes s'éclaire (à des degrés divers, mais c'est justement l'objet de la démarche philosophique d'éclairer progressivement les notions tendant à cerner et à problématiser les situations vécues) tout au long de sa réflexion.

Il apparaît, par ailleurs, que l'entreprise anselmienne ou cartésienne, de prouver l'existence de Dieu ne correspond plus aux entreprises de la philosophie depuis Kant ; jusqu'à Kant les métaphysiciens ambitionnaient de prouver des existences par les seules ressources de la raison. Depuis la démarche philosophique part de la réalité vécue en s'efforçant de réfléchir aux conditions de possibilités de celles-ci (Kant : la science existe, quelles sont les conditions qui la rendent possible ?)

Peut-on faire une analogie dans ce débat pré-kantien / post-kantien avec le débat entre les mathématiciens constructivistes qui ne conçoivent une existence que par construction effective (ce qui renvoie au « vécu »), et les mathématiciens formalistes qui acceptent une existence par la seule force du raisonnement (existence « par défaut » d'objets qui ne sont pas construits) ?

Annexe

KANT, *Critique de la raison pure*, Dialectique transcendantale III, section 4.

On voit aisément, d'après-ce qui précède, que le concept d'un être absolument nécessaire est un concept pur de la raison, c'est-à-dire une simple idée dont la réalité objective est bien loin d'être encore prouvée par cela seul que la raison en a besoin, qui, d'ailleurs, ne fait que nous indiquer une certaine perfection inaccessible et qui sert proprement à limiter l'entendement plutôt qu'à l'étendre à de nouveaux objets. Or, il y a ici quelque chose d'étrange et de paradoxal : c'est que le raisonnement concluant d'une existence donnée en général à quelque existence absolument nécessaire parait être pressant et rigoureux, et que nous avons pourtant tout à fait contre nous toutes les conditions nécessaires à l'entendement pour se faire un concept d'une telle nécessité.

On a de tout temps parlé de l'être absolument nécessaire et l'on ne s'est pas donné autant de peine pour comprendre si et comment, on peut seulement concevoir une chose de cette espèce que pour en prouver l'existence. Or, il est vrai qu'il est très aisé de donner une définition nominale de ce concept, en disant que c'est quelque chose dont la non-existence est impossible ; mais on n'est pas plus instruit pour cela en ce qui concerne les conditions qui rendent impossible de regarder la non-existence d'une chose comme absolument inconcevable et qui sont proprement ce que l'on veut savoir, je veux dire que l'on ignore si, par ce concept, nous pensons ou non quelque chose en général. En effet, écarter par le mot inconditionné toutes les conditions, dont l'entendement a toujours besoin, pour considérer quelque chose comme nécessaire, cela ne suffit pas, encore à me faire comprendre si, par ce concept d'un être inconditionnellement nécessaire, je pense encore quelque chose ou si, peut-être, je ne pense plus rien du tout.

Bien plus, on a cru encore expliquer par une foule d'exemples ce concept risqué, d'abord, à tout hasard, et, à la fin, devenu tout à fait familier, de telle sorte que toute recherche ultérieure sur son intelligibilité parût tout à fait inutile. Toute proposition de géométrie, par exemple : qu'un triangle a trois angles, est absolument nécessaire ; et l'on a parlé ainsi d'un objet qui est entièrement hors de la sphère de notre entendement, comme si l'on avait parfaitement compris ce qu'on en voulait dire par le concept qui l'intéresse.

Tous les exemples qu'on avance ne sont tirés, sans exception, que des jugements, et non des choses et de leur existence. Mais la nécessité inconditionnée des jugements n'est pas une nécessité absolue des choses. Car la nécessité absolue du jugement n'est qu'une nécessité conditionnée de la chose ou du prédicat dans le jugement. La proposition précédente ne disait pas que trois angles existent d'une manière absolument nécessaire, mais que, si l'on pose la condition qu'un triangle existe (soit donné), il y a aussi en lui trois angles nécessairement. Toutefois, cette nécessité logique a montré une si grande puissance d'illusion qu'après s'être fait d'une chose un concept a priori agencé de telle façon que, de l'avis commun, l'existence rentrait dans sa compréhension (das Dasein mit seinen Umfang begriff), on a cru pouvoir en conclure sûrement que, puisque l'existence appartient nécessairement à l'objet de ce concept, c'est-à-dire sous la condition que je pose cette chose comme donnée (comme existante), son existence est aussi posée nécessairement (en vertu de la règle d'identité) et que cet être est, en conséquence, absolument nécessaire lui-même, parce que son existence a été conçue dans un concept arbitraire et sous la condition que j'en pose l'objet.

Si je supprime le prédicat, dans un jugement identique, et que je garde le sujet, il en résulte une contradiction, et c'est pourquoi je dis que ce prédicat convient nécessairement au sujet. Mais si j'enlève le sujet en même temps que le prédicat, il n'y a plus de contradiction, car il ne reste plus rien que la contradiction puisse affecter. Poser un triangle en en supprimant les trois angles est contradictoire ; mais faire disparaître à la fois le triangle et les trois angles, il n'y a plus là de contradiction. Il en est exactement de même du concept d'un être absolument nécessaire. Si vous lui ôtez l'existence, vous supprimez la chose même avec tous ses prédicats; d'où peut alors venir la contradiction ? Il n'y a rien extérieurement avec quoi il puisse y avoir contradiction, car la chose ne doit pas être extérieurement nécessaire ; il n'y a rien non plus intérieurement, car en supprimant la chose elle-même, vous avez supprimé en même temps ce qui est intérieur. Dieu est tout-puissant : c'est là un jugement nécessaire. La toute-puissance ne peut pas être supprimée dès que vous posez une divinité, c'est-à-dire un être infini avec le concept duquel cet attribut est identique. Mais si vous dites : Dieu n'est pas, ni la toute-puissance, ni aucun autre de ces prédicats n'est donné, car ils ont été supprimés tous ensemble avec le sujet et il n'y a plus la moindre contradiction dans cette pensée.

Vous avez donc vu que, si je supprime le prédicat d'un jugement en même temps que le sujet, il ne peut jamais en résulter de contradiction interne, quel que soit ce prédicat. Or, il ne vous reste pas d'autre refuge que de dire : il y a des sujets qui ne peuvent pas du tout être supprimés et qui, par conséquent, doivent subsister. Mais cela reviendrait à dire qu'il y a des sujets absolument nécessaires, supposition dont j'ai précisément contesté la légitimité et dont vous vouliez essayer de me montrer la possibilité. Car il m'est impossible de me faire le moindre concept d'une chose qui, même supprimée ainsi que tous ses prédicats, donne encore lieu à la contradiction et, en dehors de la contradiction, je n'ai, par de simples concepts purs a priori, aucun critérium de l'impossibilité.

Contre tous ces raisonnements généraux (auxquels personne ne peut se refuser) vous objectez un cas que vous présentez comme une preuve de fait, en me disant qu'il y a pourtant un concept, et, à la vérité, celui-là seul, où la non-existence est contradictoire en soi, c'est-à-dire dont on ne saurait sans contradiction supprimer l'objet, et que ce concept est celui de l'être infiniment réel. Il a, dites-vous, toute réalité et vous avez le droit d'admettre un tel être comme possible (ce que j'accorde pour le moment, bien que l'absence de contradiction de ce concept soit encore loin de prouver la possibilité de l'objet)[13]. Or, l'existence est comprise elle-même dans la toute réalité : donc, l'existence est contenue dans le concept d'un possible. Par conséquent, si cette chose est supprimée, la possibilité interne de la chose est supprimée aussi, ce qui est contradictoire.

Je réponds : Vous êtes déjà tombé dans une contradiction quand, dans le concept d'une chose que vous voulez uniquement concevoir au point de vue de sa possibilité, vous avez déjà introduit le concept de son existence, sous quelque nom qu'elle se cache. Si l'on vous accorde ce point, vous avez, en apparence, partie gagnée, mais, dans le fait, vous n'avez rien dit ; car vous avez commis une simple tautologie. Je vous demande : cette proposition : telle chose ou telle autre (que je vous accorde comme possibles, quelles qu'elles soient) existe, cette proposition est-elle, dis-je, une proposition analytique ou une proposition synthétique. Si elle est analytique, par l'existence de la chose vous n'ajoutez rien à votre pensée de la chose, et alors, de deux choses l'une : ou la pensée qui est en vous

[13] *Le concept est toujours possible, quand il n'est pas contradictoire. C'est le critérium logique de la possibilité et par là son objet se distingue du* nihil negativum. *Mais il n'en peut pas moins être un concept vide, quand la réalité objective de la synthèse par laquelle le concept est produit n'est pas démontrée en particulier, et cette démonstration, ainsi que nous l'avons montré plus haut, repose toujours sur les principes de l'expérience possible et non sur le principe de l'analyse (le principe de contradiction). Cela nous avertit de ne pas conclure aussitôt de la possibilité (logique) des concepts à la possibilité (réelle) des choses.*

doit être la chose elle-même, ou bien vous avez supposé une existence comme faisant partie de la possibilité, et alors l'existence est soi-disant conclue de la possibilité interne, ce qui n'est autre chose qu'une misérable tautologie. Le mot réalité qui, dans le concept de la chose, sonne tout autrement que celui d'existence dans le concept du prédicat, ne résout pas cette question. Car si vous appelez aussi réalité tout ce que vous posez (sans déterminer ce que vous posez), vous avez déjà posé et admis, comme réelle, dans le concept du sujet, la chose même accompagnée de tous ses attributs ; dans le prédicat vous ne faites que le répéter. Si vous avouez, au contraire, comme tout homme raisonnable doit raisonnablement le faire, que toute proposition d'existence est synthétique, comment voulez-vous soutenir que le prédicat de l'existence ne peut être supprimé sans contradiction, puisque ce privilège n'appartient proprement qu'aux propositions analytiques, dont le caractère repose précisément là-dessus !

Je pourrais sans doute espérer avoir directement réduit à rien cette vaine argutie par une détermination précise du concept de l'existence, si je n'avais fait l'expérience que l'illusion résultant de la confusion d'un prédicat logique avec un prédicat réel (c'est-à-dire avec la détermination d'une chose) repousse presque tout éclaircissement. Tout peut servir indistinctement de prédicat logique et même le sujet peut se servir à lui-même de prédicat ; car la logique fait abstraction de tout contenu. Mais la détermination est un prédicat qui s'ajoute au concept du sujet et l'augmente. Elle ne doit donc pas y être déjà contenue.

Être n'est évidemment pas un prédicat réel, c'est-à-dire un concept de quelque chose qui puisse s'ajouter au concept d'une chose. C'est simplement la position d'une chose ou de certaines déterminations en soi. Dans l'usage logique, ce n'est que la copule d'un jugement. Cette proposition : Dieu est tout-puissant, renferme deux concepts qui ont leurs objets : Dieu et toute-puissance ; le petit mot n'est pas du tout encore par lui-même un prédicat, c'est seulement ce qui met le prédicat en relation avec le sujet. Or, si je prends le sujet (Dieu) avec tous ses prédicats (dont la toute-puissance fait aussi partie) et que je dise : Dieu est, ou il est un Dieu, je n'ajoute aucun nouveau prédicat au concept de Dieu, mais je ne fais que poser le sujet en lui-même avec tous ses prédicats, et en même temps, il est vrai, l'objet qui correspond à mon concept. Tous deux doivent exactement renfermer la même chose et, par conséquent, rien de plus ne peut s'ajouter au concept qui exprime simplement la possibilité, par le simple fait que je conçois (par l'expression : il est) l'objet de ce concept comme donné absolument. Et ainsi, le réel ne contient rien de plus que le simple possible. Cent thalers réels ne contiennent rien de plus que cent thalers possibles. Car, comme les thalers possibles expriment le concept et les thalers réels, l'objet et sa position en lui-même, au cas où celui-ci contiendrait plus que celui-là, mon concept n'exprimerait pas l'objet tout entier et, par conséquent, il n'en serait pas, non plus, le concept adéquat. Mais je suis plus riche avec cent thalers réels qu'avec leur simple concept (c'est-à-dire qu'avec leur possibilité). Dans la réalité, en effet, l'objet n'est pas simplement contenu analytiquement dans mon concept, mais il s'ajoute synthétiquement à mon concept (qui est une détermination de mon état), sans que, par cette existence en dehors de mon concept, ces cent thalers conçus soient le moins du monde augmentés.

Quand donc je conçois une chose, quels que soient et si nombreux que soient les prédicats par lesquels je la pense (même dans la détermination complète), en ajoutant, de plus, que cette chose existe, je n'ajoute absolument rien à cette chose. Car autrement, ce qui existerait ne serait pas exactement ce que j'avais conçu dans mon concept, mais bien quelque chose de plus, et je ne pourrais pas dire que c'est précisément l'objet de mon concept qui existe. Si je conçois aussi dans une chose toute réalité sauf une, du fait que je dis qu'une telle chose défectueuse existe, la réalité qui lui *manque ne s'y ajoute pas, mais au contraire cette chose existe avec exactement le même défaut qui l'affectait lorsque je l'ai conçue, car autrement il existerait quelque chose d'autre que ce que j'ai conçu. Or, si je conçois un être à titre de réalité suprême (sans défaut), il reste toujours à savoir, pourtant, si cet être existe ou non. En effet, bien qu'à mon concept il ne manque rien du contenu réel possible d'une chose en général, il manque cependant encore quelque chose au rapport à tout mon état de pensée, à savoir que la connaissance de cet objet soit aussi possible a posteriori. Et ici se montre la cause de la difficulté qui règne sur ce point. S'il était question d'un objet des sens, je ne pourrais pas confondre l'existence de la chose avec le simple concept de la chose. Car le concept ne me fait concevoir l'objet que conformément aux conditions universelles d'une connaissance empirique possible en général, tandis que l'existence me le fait concevoir comme enfermé dans le contexte de toute l'expérience ; si donc, par sa liaison avec le contenu de toute l'expérience, le concept de l'objet n'est pas le moins du monde augmenté, notre pensée du moins en reçoit en plus une perception possible. Si, au contraire, nous voulons penser l'existence seulement par la pure catégorie, il n'est pas étonnant que nous ne puissions indiquer aucun critérium pour la distinguer de la simple possibilité.*

Quelles que soient donc la nature et l'étendue de notre concept d'un objet, il nous faut cependant sortir de ce concept pour attribuer à l'objet son existence. Pour les objets des sens, cela a lieu au moyen de leur enchaînement avec quelqu'une de mes perceptions suivant des lois empiriques ; mais pour des objets (Objecte) de la pensée pure, il n'y a absolument aucun moyen de connaître leur existence, parce qu'elle devrait être connue entièrement a priori, alors que notre conscience de toute existence (qu'elle vienne soit immédiatement de la perception, soit de raisonnements qui lient quelque chose à la perception) appartient entièrement et absolument à l'unité de l'expérience, et que si une existence hors de ce champ ne peut pas, à la vérité, être absolument déclarée impossible, elle est pourtant une supposition que nous ne pouvons justifier par rien.

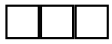
Le concept d'un Etre suprême est une idée très utile à beaucoup d'égards , mais, par le fait même qu'il est simplement une idée, il est incapable d'accroître par lui seul notre connaissance par rapport à ce qui existe. Il ne peut même pas nous instruire relativement à la possibilité d'une pluralité. Le caractère analytique d'une possibilité consistant en ce que de simples positions (des réalités) n'engendrent aucune contradiction, ne peut sans doute lui être contesté ; mais comme la liaison de toutes les propriétés réelles dans une chose est une synthèse dont nous ne pouvons pas juger a priori la possibilité, parce que les réalités ne nous sont pas données spécifiquement et que, quand même cela arriverait, il n'en résulterait aucun jugement, le caractère de la possibilité de connaissances synthétiques ne devant jamais être cherché que dans l'expérience à laquelle l'objet d'une idée ne peut pas appartenir, il s'en faut bien que le célèbre LEIBNIZ *ait fait ce dont il se flattait, c'est-à-dire qu'il soit parvenu, comme il le voulait, à connaître a priori la possibilité d'un être idéal aussi élevé.*

Par conséquent, la preuve ontologique (cartésienne) si célèbre, qui veut démontrer par concepts l'existence d'un Être suprême, fait dépenser en vain toute la peine qu'on se donne et tout le travail que l'on y consacre ; nul homme ne saurait, par de simples idées, devenir plus riche de connaissances, pas plus qu'un marchand ne le deviendrait en argent, si, pour augmenter sa fortune, il ajoutait quelques zéros à l'état de sa caisse. »

CORRIGÉ DU RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE TERMINALE
CRU 2003

Exercice 1

On supprime une case d'un échiquier carré qui en comporte 64.

Est-il possible de recouvrir les cases restantes à l'aide de triminos  ?

Solution

(d'après un message de notre correspondant Pierre RENFER)

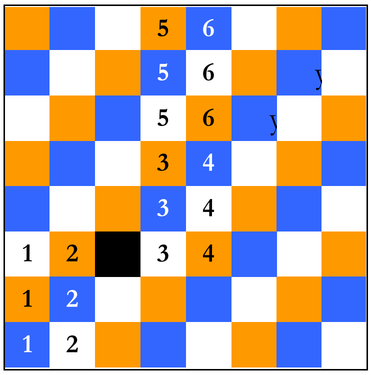
Au lieu du coloriage habituel de l'échiquier en noir et blanc, procédons à un coloriage tricolore de la manière représentée sur la figure : depuis la case inférieure gauche (la case A1 selon la désignation usuelle aux échecs) affectée de la couleur notée **a**, les couleurs se succèdent horizontalement dans l'ordre **a**, **b** et **c** et verticalement dans l'ordre **a**, **c** et **b.** Ainsi, un trimino placé sur l'échiquier recouvre toujours les trois couleurs.

Nous remarquons que la couleur **a** apparaît sur 22 cases, soit une de plus que les deux autres couleurs, qui apparaissent chacune sur 21 cases. Ce ne peut donc être qu'en supprimant une case de cette couleur que l'on peut espérer qu'un recouvrement par les triminos soit possible.

c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	a	b	c	a	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	a	b	c	a	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b

Mais si un tel recouvrement est réalisé, on peut le faire pivoter d'un quart de tour pour obtenir un nouveau recouvrement de l'échiquier privé d'une case, laquelle aura elle aussi pivoté d'un quart de tour. Et ce n'est possible que si cette case est aussi de la couleur **a**. Il nous faut donc chercher sur l'échiquier s'il y a une case de couleur **a** qui reste de couleur **a** quand on fait pivoter l'échiquier d'un quart de tour. Cela revient à rechercher si l'on peut trouver sur l'échiquier quatre cases de la couleur **a** disposées en carré. C'est bien le cas : sur la figure du haut, les couleurs dans ces cases sont désignées par des lettres soulignées.

Et la figure ci-contre indique un recouvrement de l'échiquier privé d'une telle case (C3 est noircie) : on a représenté six triminos placés verticalement, tous les autres pouvant être placés horizontalement.



Complément. En ligne avait été d'abord indiquée la solution ci-après, convenant pour un échiquier privé d'une case de bord (un cas qui est souvent considéré dans de tels problèmes consiste à retirer de l'échiquier une case de coin), mais susceptible d'être en défaut pour la suppression d'une case intérieure. Nous avons choisi de la laisser en ligne en précisant l'argument (*) qui peut être discuté. D'une part il est toujours intéressant de procéder à l'examen critique d'un raisonnement, d'autre part l'extension qui est proposée pour un nombre arbitraire de cases mérite d'être conservée.

Considérons la couverture par des triminos d'un carrelage ayant huit colonnes, mais dont le nombre de rangées peut être illimité. Chaque trimino peut être placé soit horizontalement, auquel cas il apparaît dans trois colonnes successives, soit verticalement. Fixons notre attention sur les triminos verticaux. Il y en a au moins 2 qui apparaissent dans la rangée 1 et qui vont alors jusqu'à la rangée 3. D'autres triminos verticaux peuvent intervenir dans la couverture des rangées 2 et 3 ; il est important de noter que si c'est le cas, leur nombre est un multiple de trois[1].

…								
9								
8								
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								

[1] Cet argument est valable sous l'hypothèse que l'on recouvre complètement les rangées considérées. Dans le cas du recouvrement qui a été indiqué pour l'échiquier privé d'une case sur la rangée 3, cette hypothèse n'est pas vérifiée.

Ainsi, il y aura de nouveau au moins 2 triminos verticaux qui apparaîtront dans la rangée 4 et iront jusqu'à la rangée 6. Et de même au moins 2 triminos verticaux allant de la rangée 7 à la rangée 9. Ôter une case *de la rangée 8* ne permettra donc pas le recouvrement souhaité. Par conséquent, ôter une case *du bord* d'un échiquier 8 × 8 ne conduit pas à une surface recouvrable par les triminos considérés.

Remarque et généralisation : *Le même problème pour un échiquier 7 × 7 peut aboutir à une possibilité de le recouvrir. En effet, des triminos verticaux apparaissant aux rangées 1, 4 et 7 seraient dans ce cas en nombre au moins égal à 1. Ôter une case à la rangée 7 fait alors disparaître l'objection à un recouvrement. Et il est facile de préciser une façon d'obtenir ce recouvrement si la case ôtée est une case de coin : on place des triminos verticaux sur la colonne qui est privée de la case de coin et des triminos horizontaux partout ailleurs.*

D'une manière générale, un échiquier n × n privé d'une case de coin peut être recouvert par des triminos horizontaux et verticaux si et seulement si n est de la forme n = 3p + 1, c'est à dire si n est égal à 4 ou 7 ou 10 etc.

Exercice 2

On considère la somme : S = 1+2+…..+30.

Dans cette somme on supprime un certain nombre de signes "+". Par exemple 2+3 est remplacé par 23 ou 2+3+4 par 234, pour obtenir une nouvelle somme S'.

Quel est le nombre minimal de signes "'+" à supprimer pour obtenir une somme S' valant 3030 ?

Solution

Remarquons tout d'abord qu'en vertu d'une formule qu'aucun candidat au rallye n'ignore,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465.$$

Dans la somme

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30,$$

faire disparaître un signe « + » situé devant un nombre à 1 chiffre (ainsi remplacer 8 + 9 par 89) revient à multiplier par 10 la valeur du nombre précédent, et faire disparaître un signe « + » situé devant un nombre à 2 chiffres (par exemple, remplacer 9 + 10 par 910) revient à multiplier par 100 la valeur du nombre précédent. Notons a l'entier qui précède le signe « + » que l'on fait disparaître. On change S en $S' = S + 9a$ dans le premier cas et en $S' = S + 99a$ dans le second.

Il est clair que $S + 9a$, avec $a < 9$, est plus petit que la valeur demandée 3 030, donc ne peut pas convenir. Considérons alors la possibilité que $S + 99a = 3\,030$, d'où $99a = 3\,030 - 465$ et donc $99a = 2\,565$. Comme 2 565 est divisible par 9 mais n'est pas divisible par 11, il n'y a pas de solution.

Essayons alors de faire disparaître deux signes « + » dans S. Si ces deux signes ne sont pas voisins, on est ramené à deux études du même type que précédemment et nous allons y revenir. Auparavant, on peut exclure la disparition de deux signes « + » voisins, car alors le résultat atteint serait ou bien nettement trop petit, comme c'est le cas si l'on remplace 7 + 8 + 9 par 789, ou nettement trop grand, comme c'est le cas si l'on remplace 8 + 9 + 10 par 8910. Pour deux signes « + » non voisins, il suffit de considérer

$$S + 9a + 99b, \text{ avec } a < 9 \text{ et } b > 8.$$

En effet, pour $S + 9a + 9b$, avec a et b inférieurs à 9, la valeur atteinte serait trop petite et pour $S + 99a + 99b$, avec a et b au moins égaux à 9, on retomberait sur l'objection précédente de non-divisibilité par 11.

L'égalité

$$S + 9a + 99b = 3\,030$$

revient à $9a + 99b = 2565$. Or la division euclidienne de 2 565 par 99 s'écrit

$$2\,565 = 25 \times 99 + 90.$$

Même si l'on prend la plus grande valeur possible pour b, soit $b = 25$, la valeur qu'il faudrait affecter à a serait égale à 10, qui dépasse la plus grande valeur autorisée, à savoir 8.

Reste à considérer la disparition de 3 signes « + ». L'étude précédente fournit une réponse, en remplaçant simplement a par $a_1 + a_2$, avec a_1 et a_2 inférieurs à 9 et $a_1 + a_2 = 10$. Et cette fois-ci, on aboutit à des solutions acceptables.

Prolongement possible : *Les curieux se demanderont si l'on peut atteindre 3 030 en supprimant plus de 3 signes « + » dans S…*

Exercice 3

Les cent membres d'une association reviennent du casino et s'asseyent autour d'une table ronde pour faire le bilan. Au cours de la soirée, l'association a gagné mille Euros. Le président en a gagné soixante. Il désire connaître les gains et les pertes de chacun des membres et constate que six personnes assises l'une à côté de l'autre autour de la table n'ont, à elles six, jamais gagné davantage que lui.

Pouvez-vous aider le président dans sa tâche ?

Solution

D'humeur généreuse, les 100 membres de l'association décident de placer chacun 10 euros sur la table pour les utiliser au bénéfice de l'association. Ainsi les 1 000 euros gagnés au casino se retrouvent-ils mis dans un circuit honorable et l'énoncé gagne pour sa part en simplicité. Les conditions de ce nouvel énoncé sont en effet :

- gain du président égal à 50 euros,
- bilan global nul (ce que les uns ont donné, les autres l'ont reçu),
- pour tout ensemble constitué de six voisins de table, bilan négatif ou nul.

En fait, le bilan ne peut être que 0 pour tout ensemble de six voisins de table, car si un bilan était strictement négatif pour un groupe donné de six voisins de table, les conditions énoncées empêcheraient de le compenser pour aboutir à un bilan global nul[2]. On peut ensuite considérer la réunion de 16 groupes successifs de 6 voisins, tous à bilan nul, qui laisse échapper un ensemble de 4 voisins ; le bilan d'ensemble étant nul, il en est donc de même pour celui de ces quatre voisins. Leur complémentaire dans un ensemble de 6 est constitué de deux voisins, pour lesquels on obtient encore un bilan nul. Ainsi toutes les paires de voisins donnent-elles lieu à un bilan nul : ce que l'un a reçu a été donné par l'autre. Le président ayant reçu 50 euros, il en sera donc de même pour tous les membres de numéro pair, alors que chacun des membres de numéro impair aura au contraire donné 50 euros. En ajoutant 10 euros à chacune de ces sommes pour revenir à l'énoncé initial, on obtient la réponse qui a été indiquée.

---

[2] Dans un aimable message électronique, une correspondante, Fabienne K., exprime le souhait que nous développions cet argument. *Car,* nous écrit-elle*, si l'on considère des ensembles disjoints de 6 voisins, il reste pour arriver à 100 un ensemble de 4 voisins. Pourquoi faut-il écarter la possibilité qu'un bilan positif pour ces 4 voisins équilibre le bilan strictement négatif envisagé ?* Vous avez raison Fabienne, ce point doit être précisé. Pour ce faire, considérons un recouvrement de l'ensemble des 100 membres par des ensembles disjoints, chacun constitué de 4 voisins, l'un de ces ensembles étant précisément celui dont le bilan est supposé strictement positif. Pour annuler ce bilan strictement positif, l'un au moins des autres ensembles de 4 voisins doit, lui, donner lieu à un bilan strictement négatif. Et c'est là qu'il apparaît une impossibilité, puisque le complémentaire de ces 4 voisins, constitué de 96 membres, se partitionne en seize ensembles disjoints de 6 voisins, donnant lieu chacun par hypothèse à un bilan négatif ou nul.

CORRIGÉ DU RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE PREMIERE CRU 2003

Exercice 1

Quelle est l'aire maximale d'un triangle dont les trois sommets appartiennent aux côtés d'un carré de côté 1 ?

Solution

Partons de trois points distincts K, L et M, quelconques sur les côtés du carré considéré. Soit A le sommet du carré le plus éloigné de la droite LM. La distance de A à la droite LM est évidemment supérieure (au sens large) à celle de K à cette même droite, de telle sorte que l'aire du triangle ALM est supérieure à celle du triangle KLM. Soit alors B le sommet du carré le plus éloigné de la droite AL. On remarque que nécessairement AB est un côté du carré. L'aire du triangle ABM est supérieure à celle du triangle ALM. Quel que soit alors le choix de M sur le côté parallèle à AB, l'aire du triangle ABM est égale à 1/2. Et sinon cette aire est inférieure à 1/2.

Récapitulons : On peut agrandir l'aire de tout triangle dont deux sommets ne sont pas deux sommets voisins du carré ; un triangle dont deux sommets sont des sommets voisins du carré a une aire au plus égale à 1/2. La valeur 1/2 représente donc le maximum de l'aire, maximum atteint pour une infinité de triangles.

Exercice 2

Claudine possède un chandelier contenant n bougies de même taille. Elle allume ce chandelier pendant n dimanches de la manière suivante : le premier dimanche, elle fait brûler une bougie pendant une heure ; le deuxième dimanche, elle fait brûler deux bougies convenablement choisies pendant une heure, et ainsi de suite jusqu'au n-ième dimanche où elle fait brûler les n bougies pendant une heure.

Pour quelles valeurs de n est-il possible que toutes les bougies soient entièrement consumées à l'issue du n-ième dimanche ?

Dans ce cas, donner une marche à suivre.

Solution

Prenons pour unité l'*heure*×*bougie*. Par exemple, deux bougies qui brûlent toutes les deux pendant une heure consomment 2 *heures*×*bougies*. Au bout des n dimanches, le nombre d'*heures*×*bougies* consommées est, d'après l'énoncé :

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n,$$

somme qui est égale à n(n+1)/2 selon une formule bien connue. Ce nombre sera un multiple de n à la condition que (n+1) soit divisible par 2, c'est à dire que n soit impair.

Réciproquement si n est impair, une combustion des bougies respectant les conditions de l'énoncé peut être organisée par exemple grâce à un tableau comme celui présenté pour 9 bougies.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

Un tableau de marche pour 9 bougies

Les bougies ont été numérotées de 1 à n (dans l'exemple, n = 9). On voit comment le tableau est rempli, en passant d'une ligne à la suivante par une permutation circulaire. Lorsque les cases au-dessus de la diagonale (les cases colorées) ont été éliminées, les bougies à utiliser un dimanche de numéro donné sont celles de la ligne commençant par ce numéro : par exemple pour nos 9 bougies, on fera brûler le 6-ième dimanche les bougies numérotées 6, 7, 8, 9, 1, 2. Le tableau est symétrique par rapport à la diagonale ; sur la diagonale, les numéros évoluent de deux en deux (1, 3, 5, etc.) de telle sorte que pour n impair, c'est à dire n = 2p + 1, tout numéro apparaît une fois sur la diagonale. Par conséquent, toutes les bougies seront bien utilisées le même nombre de dimanches, à savoir p + 1 (dans l'exemple avec 9 bougies, chacune est utilisée 5 dimanches sur les 9).

Il n'y a pas qu'une seule procédure possible. Ainsi, pour 5 bougies, voici deux présentations dimanche après dimanche des bougies à utiliser, toutes deux acceptables :

1-23-345-4512-51234 (méthode précédemment indiquée), 1-12-345-2345-12345.

Exercice 3

Grains de riz

Tout le monde connaît l'anecdote de ce roi qui s'engagea à récompenser l'inventeur du jeu d'échec selon ses souhaits, alors que celui-ci demandait à ce qu'on lui donne un grain de riz pour la première case de l'échiquier, deux grains de riz pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de riz à chaque case, jusqu'à la 64$^{\text{ème}}$.

On connaît moins la façon dont le roi se tira de cette situation : il exigea de ses sept seigneurs qu'ils fournissent chacun une part égale de la récompense arrondie au grain de riz inférieure. Lui-même se contenterait de fournir les grains de riz nécessaires pour faire le compte exact.

Combien le roi dut-il fournir de grains de riz ?

Solution

La somme de trois puissances consécutives de 2 est un multiple de 7. En effet, une telle somme s'écrit

$$2^a(1 + 2 + 4) = 7 \times 2^a.$$

Or $64 = 21 \times 3 + 1$. Ainsi, dans la somme des 64 puissances de 2 depuis $2^0 = 1$ jusqu'à 2^{63}, on peut former 21 groupes distincts de trois puissances de 2 consécutives, dont la somme est un multiple de 7, et il en reste alors une isolée. Le plus simple est de procéder à ces groupements en remontant de la fin (2^{63}) vers le début, ce qui amène à prendre en compte toutes les puissances de 2 en jeu sauf la première, à savoir $2^0 = 1$. Le reste dans la division par 7 de $1 + 2 + \cdots + 2^{63}$ est ainsi mis en évidence : il est égal à 1. Le nombre de grains de riz fournis par les seigneurs étant le multiple de 7 immédiatement inférieur à la somme considérée, il ne manque donc qu'un unique grain de riz que le roi doit fournir.

Nouvelle parution

ANNALES DE DIDACTIQUE ET DE SCIENCES COGNITIVES

VOLUME 8, ANNÉE 2003

CONTRIBUTIONS (PARTIE 1) DU COLLOQUE *ARGENTORATUM* 2002.

Raymond DUVAL, Décrire, visualiser ou raisonner : Quels apprentissages premiers de l'activité mathématique ? - Rudolf STRAESSER, L'inverseur de Peaucellier : décrire en géométrie - Dominique LAHANIER-REUTER, Tableaux et parcours de lecture - Dominique GUIN, Regards cognitifs sur l'activité mathématique instrumentée par les T.I.C. - Athanassios GAGATSIS, M. SHIAKALLI et A. PANAOURA, La droite arithmétique comme modèle géométrique de l´addition et de la soustraction des nombres entiers - Maryvonne PRIOLET et Jean-Claude REGNIER, Problèmes arithmétiques et registres sémiotiques : pratiques d'enseignants de cycle 3 de l'école primaire - Robert ADJIAGE, Registres, grandeurs, proportions et fractions - Florence FAUVET, Traitement de pathologies de l'apprentissage : démarches issues de la didactique des mathématiques. Etude d'un cas - Pierre BELMAS, Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire de SEGPA - Luis RADFORD, Narratives, expressions algébriques et calcul formel : de la constitution à la transformation du sens - Yves GIRMENS, Myrene LARGUIER, Sylvie PELLEQUER, L'apprentissage de la démonstration au collège, des tâches nouvelles en référence aux travaux de Raymond Duval - Guy NOËL, Pour une approche TGF dans les logiciels didactiques - Fernando HITT, Le caractère fonctionnel des représentations - Armando CUEVAS et François PLUVINAGE, Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques.

Bulletin de commande du volume 8 (2003) 295 pages, format 17 x 23, dos carré, 25 €¤ (*)

Les volumes 3, 4, 5 et 6 sont encore disponibles (12 €¤) ainsi que le vol. 7 (10 €¤)
Université Louis Pasteur - Bibliothèque de l'I.R.E.M.
7, rue René Descartes - F - 67084 STRASBOURG CEDEX
Merci de joindre si possible le règlement au nom du Régisseur de recettes de l'IREM
(Trésor Public : 10071-67000-00003004003-45).

Une facture peut être envoyée pour les établissements - Un reçu accompagnera l'envoi si vous réglez à la commande.

NOM : Prénom :

Adresse :

e-mail :

Je désire recevoir exemplaire(s) du volume 8 +

(*) Importante pour les frais d'envoi :
si commande comprise entre 10 € et 11,99 € ¤ : ajouter 3,5 € ¤
entre 12 € et 19,99 € ¤ : ajouter 5 € ¤
entre 20 € et 49,99 € ¤ : ajouter 7 € ¤
si supérieure à 50 € ¤ : ajouter 8 €¤.

Pour consulter les résumés des articles parus dans tous les numéros : http://irem.u-strasbg.fr