TABLE DES MATIERES

EDITORIAL

Ce volume des Annales de Didactique des Mathématiques et des Sciences Cognitives et le volume suivant sont deux numéros à la fois ordinaires et uniques de la revue. Ordinaires, ils le sont par la procédure habituelle de sélection et de révision des articles (lecteurs anonymes et choix final par le comité de rédaction). Leur unicité, ils la doivent à l'origine de tous ces articles : le colloque Argentoratum. Ce colloque, tenu à Strasbourg en juillet 2002, était organisé en l'honneur de Raymond DUVAL et François PLUVINAGE, tous deux fondateurs de la revue et animateurs constants et essentiels de la recherche en didactique des mathématiques sur le pôle strasbourgeois. De manière émouvante, il fut aussi l'occasion de la dernière apparition publique du fondateur de l'école strasbourgeoise, Georges GLAESER.

L'origine des articles imposait la thématique des deux volumes. D'un côté, la réflexion sur l'apport du point de vue sémiotique et cognitiviste en didactique des mathématiques. De l'autre, l'étroite relation entre la recherche dans ce domaine et le monde éducatif le plus large possible.

Ce volume est particulièrement constitué de toutes les communications ayant un lien avec les travaux de Raymond DUVAL. Il débute par un article de ce dernier qui lui permet de développer largement le thème abordé lors de sa conférence initiale : la spécificité des activités de description. Nous avons conservé dans leur forme originale les réactions des trois auteurs sollicités lors du colloque pour apporter leur point de vue sur l'apport de Raymond DUVAL.

Le numéro contient ensuite les articles sélectionnés par le comité de lecture. Ces articles témoignent de l'impact et de la diversité des recherches autour de la notion de registres de représentation sémiotique. Ils illustrent aussi la volonté de notre revue de servir de lieu d'échanges et de diffusion pour les chercheurs européens, latino-américains, africains : la liste n'est bien sûr pas exclusive. Cette volonté d'ouverture continuera à guider dans le futur les choix de l'équipe rédactionnelle.

ALAIN KUZNIAK

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 5.

ARGENTORATUM 2002

COLLOQUE DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES
EN L'HONNEUR DE
RAYMOND DUVAL & FRANÇOIS PLUVINAGE

Strasbourg, 4, 5 et 6 juillet 2002

organisé par
l'Institut de Recherches sur l'Enseignement
des Mathématiques de Strasbourg

Avec le soutien de

L'UFR de Mathématiques et d'Informatique.
L'Institut de Recherche Mathématique Avancée (UMR 7501 du CNRS).
Le Conseil Scientifique de l'Université Louis Pasteur.
Le Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire de l'Université Louis Pasteur.
L'Institut Universitaire de Formation des Maîtres d'Alsace.
L'Institut Universitaire de Formation des Maîtres du Nord-Pas-de-Calais.
L'Assemblée des Directeurs d'IREM (A.D.I.R.E.M.)
L'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (A.R.D.M.)

Comité Scientifique

Michèle ARTIGUE, EQUIPE DIDIREM, Université Paris 7.
Claire DUPUIS, I.R.M.A. et I.R.E.M. de Strasbourg.
Alain KUZNIAK, I.U.F.M. d'Alsace et I.R.E.M. de Strasbourg.
Colette LABORDE, Equipe IAM (Informatique et Apprentissage des Mathématiques), Université Joseph Fourier, Grenoble.
Ana Lobo MESQUITA, I.U.F.M. Nord Pas-de-Calais.
Avec l'appui du Comité de lecture de la revue "*Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*".

Comité d'Organisation

Nicole BOPP, I.U.F.M. d'Alsace, I.R.M.A. et I.R.E.M. de Strasbourg.
Michel DE COINTET, I.R.E.M. de Strasbourg.
Claire DUPUIS, I.R.M.A. et I.R.E.M. de Strasbourg.
Marie-Agnès EGRET, I.R.E.M. de Strasbourg.
Claudine KAHN, I.R.E.M. de Strasbourg.
Alain KUZNIAK, I.U.F.M. d'Alsace et I.R.E.M. de Strasbourg.
Ana Lobo MESQUITA, I.U.F.M. Nord Pas-de-Calais.
Jean-Claude RAUSCHER, I.U.F.M. d'Alsace et I.R.E.M. de Strasbourg.

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8.
2003, IREM de STRASBOURG

Programme scientifique

Jeudi 4 juillet 2002

Ouverture

****

Table ronde
"Regards cognitifs sur l'activité mathématique"

Exposé introductif

Raymond DUVAL
Décrire, visualiser ou raisonner : quels « Apprentissages premiers » de l'activité mathématique ?

Réactions

Rudolf STRAESSER (Bielefeld)
L'inverseur de Peaucellier : décrire en géométrie.

Dominique LAHANIER-REUTER (Lille)
Tableaux et parcours.

Dominique GUIN (Montpellier) :
Regards cognitifs sur l'activité instrumentée par les TICE.

Discussion – Débat
(Modérateur : Ana MESQUITA)

****

Exposés

Fernando HITT (Montréal)
Les représentations dans la construction de concepts mathématiques, dans la résolution de problèmes et dans la construction de structures cognitives.

Jean-Claude RAUSCHER (Strasbourg)
Un point de vue particulier pour évaluer l'enseignement des mathématiques : comment des étudiants perçoivent l'enseignement vécu durant leur scolarité.

Janine ROGALSKI et Marc ROGALSKI (Paris, Lille)
Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques.

Robert ADJIAGE (Strasbourg)
Registres, grandeurs, proportions et fractions.

Regina DAMM et Silvia MACHADO (Florianopolis & Sao Paulo)
Le développement des recherches brésiliennes sur la théorie des registres de représentation sémiotique.

Athanassios GAGATSIS, M. **SIAKALLI**, A. **PANAOURA** (Chypre)
La représentation de la ligne arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers.

****

Richard CABASSUT (Strasbourg)
Argumenter ou démontrer : continuité ou rupture didactique ? Les effets d'une double transposition.

Michalis KOURKOULOS et **Marie-Anne KEYLING** (Heraklion, Strasbourg) :
Eléments sur le comportement des élèves concernant l'autocorrection dans les algorithmes de l'algèbre élémentaire : les stratégies de localisation des erreurs.

Kallia PAVLOPOULOU et **Tasos PATRONIS** (Athènes, Patras)
Appropriation des écritures symboliques à propos d'un problème donné en langue naturelle.

****

Saddo Ag ALMOULOUD (Sao Paulo)
Une étude diagnostique en vue de la formation des enseignants en géométrie.

Claudia FLORES et **Thadeu MORETTI** (Paris, Florianopolis)
Regarder en perspective : analyse de la représentation dans l'espace et ses implications dans la visualisation de figures tridimensionnelles dans l'enseignement de la géométrie.

Ana MESQUITA (Lille)
Le rôle essentiel de la construction d'objets dans l'articulation de registres en situations. Tridimensionnelles.

Vendredi 5 juillet 2002

Atelier

Yves GIRMENS, Mirène LARGUIER et Sylvie PELLEQUER (IREM de Montpellier)
L'apprentissage de la démonstration au collège : des tâches nouvelles en référence aux travaux de Raymond Duval.

Exposés

Jean-Paul FISCHER et Christine **BOCÉRÉAN** (Metz, Nancy)
Impact de la réforme de 1970 sur les connaissances numériques des jeunes enfants.

Charalambos LEMONIDIS (Thessalonique)
L'enseignement des premières notions arithmétiques selon l'analyse des différentes représentations des quantités.

Maryvonne PRIOLET et Jean-Claude RÉGNIER (Lyon)
Problèmes arithmétiques et registres sémiotiques : pratiques d'enseignants de cycle 3 de l'école primaire.

****

Table ronde
"Histoire et enseignement des mathématiques"

Exposés

Jean DHOMBRES (Paris) **et Jean-Pierre FRIEDELMEYER** (Strasbourg)
Avantages et désavantages du biais historique dans la pratique de l'enseignant de mathématiques.

Discussion – Débat
(Modérateur : Claudine KAHN)

****

Remise à Georges GLAESER d'un exemplaire de l'ouvrage publié par l'IREM :
Jean-Claude REGNIER et Françoise PERRIER, 2002, *La didactique des mathématiques au travers d'un récit de vie - Entretiens avec Georges Glaeser*, sous forme d'un livre spécialement relié à son intention.

Exposés

Carlos Armando CUEVAS VALLEJO (Mexico)
Les projets d'action pratique : un programme didactique pour enseigner les mathématiques.

Gérard KUNTZ (Strasbourg)
De la possible influence de l'environnement informatique sur l'enseignement des mathématiques - Etude d'un exemple.

Guy NOËL (Mons)
Pour une approche TGF (tableaux - graphiques - formules) dans les logiciels didactiques.

Pierre BELMAS (Créteil)
Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire de SEGPA.

Florence FAUVET (Strasbourg)
Traitement de pathologies de l'apprentissage : démarches issues de la didactique des mathématiques.

****

Posters et présentation de documents

Mouloud ABDELLI (Constantine)
Evaluation des programmes de formation initiale à l'ENS de Constantine.

Maria-Laura LEITE-LOPES (Sao Paulo)
Le « Projeto Fundao ».

Cesar E. MORA-LEY et Alejandro Munoz DIOSDADO (Mexico)
Atelier de mathématique pour le développement de la maturité scolaire.

****

Démonstration de logiciels et présentation de sites mathématiques

Robert ADJIAGE
le logiciel ORATIO.

Sébastien HACHE
Mathenpoche, un didacticiel d'exercices de sixième, interactif et utilisable en ligne.

Sébastien HACHE
Ebeps, des annales de brevet virtuelles permettant un choix d'exercices de brevets classés par thèmes avec aides et corrections détaillées animées.

Emmanuel Vieillard-BARON
Bufadou, un moteur de recherche sur les sites mathématiques francophones.

Samedi 6 juillet 2002

Table ronde
"Acquis et applications de la didactique des Mathématiques"

Exposé introductif

François PLUVINAGE
Evolutions théoriques et pratiques des travaux en didactique des mathématiques.

Réactions

Moncef ZAKI (Fès)
Quelques résultats méthodologiques et de recherche au niveau universitaire.

Lucia GRUGNETTI (Parme)
Acquis et applications de la didactique des mathématiques du point de vue des élèves.

Marie-Jeanne PERRIN (Lille)
Les recherches portant sur l'enseignant en didactique des mathématiques.

Discussion - Débat
(Modérateur : Alain KUZNIAK)

****

Conclusion du colloque par Raymond DUVAL et François PLUVINAGE

****

Le Comité d'organisation remercie Marie-Agnès EGRET, Izmenia GUZMAN, Alain KUZNIAK, Ana MESQUITA, Jean-Claude RAUSCHER et Moncef ZAKI pour leur rôle de modérateurs des sessions d'exposés.

Le Comité d'organisation remercie tout particulièrement Catherine CHAUMONT, secrétaire de l'I.R.E.M.de Strasbourg, Evelyne Le GUYADER et Christiane MOLARD, bibliothécaires de l'I.R.E.M.de Strasbourg pour leur contribution efficace à l'organisation et la réalisation de ce colloque.

RAYMOND DUVAL

DÉCRIRE, VISUALISER OU RAISONNER : QUELS "APPRENTISSAGES PREMIERS" DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE ?

Abstract. The observation of phenomena, the recording of new data, and their description play a major role in any scientific work, for knowledge first depends on the spread of a field of observations and on the degree of their discrimination. By highlighting the role of "conceptions", "explanations" and "validation", do the teaching of sciences tend to underestimate the real time and the decisive role of the work of observation and description, which sciences learning requires? This is the issue that we intend to argue about, by focusing on an area in which the observation of phenomena is beyond any perception: mathematics. With this aim in view, we will analyse the kind of problems teaching provides for learning and, in order to understand the activity is truly required of students in problem solving, we must distinguish the backward analysis from the forward analysis.

The problems given for a learning purpose have a common striking feature: they arise from the (variable) gap between the complete description of some situation and one of the different minimal descriptions that can be derived from it. And the kind of required activity consists in understanding the description of the given of the problem and, sometimes, in producing new data in order to supplement the description. We will find that the same kind of activity must support other mathematical processes such as generalisation, search for counter-example...

Forward analysis, which is the classical one in didactics, involves analysing the (semiotic) production of students: both verbal data, including the deep variation from oral mode to the writing one, and visual creation (drawings, diagrams, schemata.....) There the analysis of students's productions meets the analysis of descriptions of observations within other sciences. We will show the necessity of taking into account several levels into the articulation of meaning, both in speech and in semiotic visualisation. Otherwise students's productions cannot be interpreted in a relevant way.

The importance of description tasks for mathematics learning is because any describing is an activity of representation, which mobilises one or several semiotic registers and which depends on the degree of their acquisition by students. But the fact that any describing is an explicit process of representation raises several crucial issues about research on mathematics education.

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 13 – 62.

Résumé. L'observation des phénomènes, l'enregistrement de données nouvelles et leur description joue un rôle primordial dans le travail scientifique. Car les connaissances dépendent d'abord de l'extension du champ des observations qui peuvent être effectuées et du degré de leur discrimination. En insistant sur les “conceptions”, les “explications”, leur “validation”, l'enseignement des sciences ne tend-il pas sous-estimer le temps et l'importance du travail d'observation et de description nécessaire pour l'apprentissage ? C'est cette question que nous nous proposons d'aborder dans cet article, en nous centrant plus particulièrement sur un domaine où l'observation des phénomènes échappe à la perception, celui des mathématiques. Pour cela nous analyserons les problèmes mathématiques proposés dans l'enseignement à des fins d'apprentissage, en distinguant deux types d'analyse : l'analyse en amont et l'analyse en aval.

Ces problèmes présentent une caractéristique commune : ils résultent de l'écart entre la description complète d'une situation et l'une des différentes descriptions minimales que l'on peut en dériver. Et l'activité requise pour les résoudre consiste dans la compréhension de la description donnée par l'énoncé et dans la production de données nouvelles pour compléter la description de l'énoncé. Et nous verrons que ce même type d'activité est requis pour d'autres démarches mathématiques : la généralisation, la recherche de contre-exemples...

L'analyse en aval, la plus classique, implique l'analyse des productions d'élèves : à la fois les productions verbales, avec la variation considérable des modalités orales et écrites ainsi que clés productions de visualisation (dessins, schémas....)Ici l'analyse des productions rejoint l'analyse des descriptions faites d'observations systématiques dans le domaine des autres sciences. Nous verrons la nécessité de prendre en compte plusieurs niveaux d'articulation du sens, aussi bien dans le discours des élèves que dans leurs productions de schémas ou de figures.

L'importance des tâches de description dans l'apprentissage ne tient pas seulement au fait qu'elles sont intrinsèques à l'observation des phénomènes, base de toute connaissance, mais qu'elles consistent également en une activité de représentation qui implique la mobilisation d'un ou plusieurs registres sémiotiques et qui dépend de leur maîtrise par les élèves. Mais ce fait que toute description soit une démarche de représentation soulève plusieurs questions décisives pour les recherches sur l'apprentissage des mathématiques.

Mots Clés : Analyse des représentations, analyse en amont et analyse en aval (de problèmes), contre-exemple, description complète, description minimale, désignation individualisante, désignation catégorielle, désignation fonctionnelle, droite munie de repères, explication, niveau d'articulation du sens, observation, opération discursive, problème et énoncé de problème, question, questionnement, visualisation iconique, visualisation non iconique, représentation sémiotique, système producteur de représentation, synergie et coordination

---

Trois mots phares semblent avoir guidé la recherche en didactique des mathématiques, ces dernières décennies, ou tout au moins en condenser les conceptions fondamentales : concept, problème, argumentation. Ils ont d'emblée été utilisés comme des indicateurs caractéristiques à la fois de ce qu'est l'activité mathématique et des conditions de son apprentissage. “Concept”, parce que ce terme renvoie à des propriétés et à une activité mentale de compréhension. “Problème”, parce que l'activité de recherche et de résolution constitue le travail mathématique et qu'un problème place les élèves dans une situation où ils doivent eux-mêmes faire et construire quelque chose. “Argumentation”, parce que l'exigence de “validation” ou de preuve y constitue l'exigence rationnelle et scientifique.

En prononçant d'emblée le verbe “décrire” et en mettant les démarches de description au premier plan des apprentissages mathématiques, nous semblons donc nous situer aux antipodes des problématiques didactiques de l'apprentissage des mathématiques. Pourtant les choses ne sont pas aussi tranchées. Tout d'abord dans la mesure où l'activité de description constitue comme l'autre face de toute activité d'observation systématique, les démarches de description sont fondamentales pour l'acquisition des connaissances scientifiques : elles contribuent à l'apport ou à la découverte de données nouvelles, base de tout développement de la connaissance. Ensuite, les démarches de description mobilisent des processus cognitifs de représentation qui sont hétérogènes, et elles requièrent, en outre, leur coordination. Ce qui renvoie à des processus d'apprentissages complexes et souvent longs à résoudre, processus que l'on retrouve dans des disciplines très différentes ainsi qu'on peut le vérifier quotidiennement au niveau de l'enseignement primaire. Enfin, les descriptions sont soumises à des exigences d'acceptabilité spécifiques : elles doivent permettre de reconnaître ce qui est décrit. Non seulement ces exigences sont aussi essentielles que celles de validité ou de validation, mais elles leur sont cognitivement préalables. Tout cela conduit donc à nous interroger sur la place réelle, et trop souvent sous-estimée, des démarches de description dans les premières étapes des apprentissages mathématiques, cela indépendamment et avant même toute forme de raisonnement.

C'est dans cette perspective que nous allons donc nous intéresser tout particulièrement à ce qui est mis en avant dans les apprentissages mathématiques : les problèmes. Quand on analyse les caractéristiques et la structure des problèmes mathématiques proposés aux élèves à des fins didactiques, on est frappé que par le fait qu'il s'agit le plus souvent d'un jeu très particulier de pure description. Et si l'on regarde l'activité permettant de mettre sur la voie d'une résolution, il s'agit simplement soit de décrypter une description minimale proposée, soit, dans le cas d'un “véritable problème” de se constituer une base locale d'observations pour amorcer la résolution. Et si, oubliant l'activité de résolution de problèmes, on regarde des démarches considérées comme fondamentales pour l'activité mathématique, telles que généraliser, produire des contre-exemples, définir... on s'aperçoit aussi qu'elles ne peuvent se développer que sur la base d'un réel travail préalable de description.

On ne peut pas souligner l'importance des descriptions, dans l'acquisition des connaissances scientifiques comme dans les premières étapes des apprentissages mathématiques, sans aborder une autre question fondamentale aussi bien pour la recherche que pour les enseignants : l'analyse des productions des élèves. Car c'est dans le cadre des démarches de description que l'on obtient les productions les plus personnelles et les plus diversifiées, puisqu'elles peuvent se faire aussi bien verbalement qu'à l'aide de dessins, de schémas... Il s'agit là, pour la recherche, d'une question méthodologique et, pour les enseignants, d'une question de diagnostic. Nous verrons que toute analyse des productions des élèves requiert que l'on distingue soigneusement dans toute production sémiotique, discursive ou non discursive, plusieurs niveaux d'articulation du sens, qui ne relèvent pas des mêmes opérations.

Enfin, d'un strict point de vue cognitif, toute démarche de description est, intrinsèquement, une activité de représentation. Mais dès que l'on prononce ce mot, s'ouvre immédiatement une alternative : représentation mentale et intérieure ou représentation sémiotique et matérielle ? Opposition classique que l'on retrouve dans presque toute la littérature didactique et qui, en réalité, repose sur une double confusion. La méconnaissance de l'importance des démarches de description n'est peut-être que le syndrome de cette double confusion concernant les représentations.

Telles sont les questions, concernant l'étude des “apprentissages premiers” en mathématiques, que nous nous proposons d'examiner en abordant successivement les points suivants :

1. Le fonctionnement cognitif des démarches de description,
2. la dimension heuristique d'une démarche de description : le cas de la “résolution de problème”,
3. le rôle des descriptions dans le développement d'autres démarches cognitives,
4. comment analyser la complexité des rapports entre discours et visualisation ?
5 descriptions et représentations : quelques questions décisives pour les recherches sur l'apprentissage des mathématiques.

1. Le fonctionnement cognitif des démarches de description

Pour avoir un premier aperçu de tout ce que l'activité de description recouvre, prenons deux exemples en dehors des mathématiques. Cela nous permettra de voir la complexité cognitive de cette activité, sa fonction décisive pour le développement des connaissances ainsi que la variété des tâches auxquelles elle donne lieu.

1.1. Deux exemples en dehors des mathématiques

Le premier exemple est classique : quelqu'un vous demande, ou vous demandez à quelqu'un d' “expliquer la route à suivre pour aller à...”. L' “explication” peut être seulement verbale, avec quelques gestes de la main pour matérialiser les directions. Elle peut aussi se faire par un dessin griffonné sur un bout de papier (en l'absence d'un plan de la ville ou d'une carte.) Naturellement, si la description est purement verbale, il faut que celui qui écoute puisse la convertir en images des lieux ou des bâtiments repères évoqués. Car comprendre une description verbale, c'est *visualiser* ce qui est décrit. Et qu'elle soit visuelle ou graphique, une description doit permette de reconnaître sur le terrain l'itinéraire décrit. Sinon, elle n'est pas utilisable. On voit donc qu'une démarche de description, même familière, requiert la mise en circuit de trois pôles

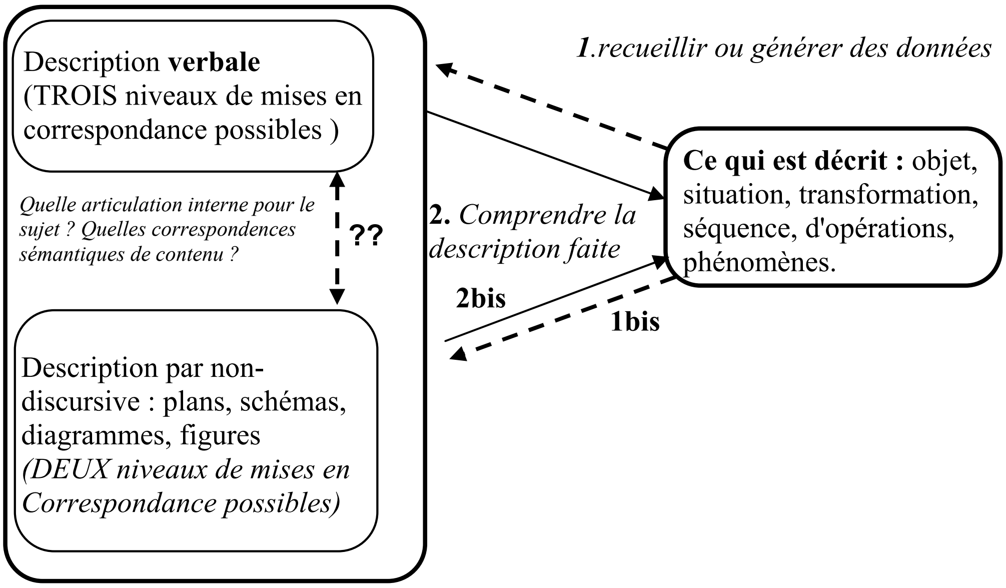


Figure 1 : Le fonctionnement cognitif d'une démarche de description selon les deux positions possibles : produire soi-même la description (1 et/ou 1bis) ou comprendre la description faite par un autre (2 et/ou 2bis.)

Ce schéma permet de voir les trois facteurs de variation cognitive qui jouent sur la compréhension ou la production d'une description : (1) le sujet a ou n'a pas déjà “rencontré” ce qui est décrit, (2) la capacité du sujet à articuler ou non les différents registres de représentation dans lesquels la description peut être faite, (3) la possibilité ou non d'un accès aux objets indépendamment des représentations qui peuvent en être faites.

Le deuxième exemple est différent. Comment faire découvrir à des élèves de 7-8 ans, l'existence physique de l'air et ses propriétés (l'air occupe un volume), sachant que ses propriétés physiques **ne sont pas perceptibles** : l'air est incolore, inodore, impalpable, de masse très faible. D'où la nécessité d' observations à travers des manipulations qui peuvent être très simples. Par exemple, on prend une bouteille en plastique vide et on fixe à son embouchure un ballon gonflable, comme ceux distribués dans les fêtes : on comprime la bouteille et le volume du ballon s'accroît. Dans cette situation d'observation, il y a un point crucial pour l'activité même de découverte : *l'observation du phénomène à des fins d'interprétation ou d'explication, implique la description de la manipulation*. Cette description peut être verbale (oralement ou consignée par écrit) mais elle peut aussi se faire aussi à l'aide d'un dessin dit “d'observation”. La fonction de cette description est à la fois de centrer l'attention sur les deux données observables de cette manipulation et de les enregistrer : la diminution du volume de la bouteille et l'augmentation du volume du ballon.

On voit donc que l'activité de description recouvre aussi bien des situations de transmission d'informations que des situations d'observation et qu'elle mobilise deux registres de représentations différents. D'ailleurs pour le mot “décrire”, les dictionnaires mentionnent deux significations : exposer par le détail et dessiner. Cette première analyse peut paraître triviale. Elle permet cependant d'attirer l'attention sur la complexité cognitive d'une démarche de description et d'attirer l'attention sur deux variables cognitives et didactiques dont la différence de nature est souvent négligée.

1.1.1. Deux variables cognitives, et didactiques, dans les activités de description

Tout d'abord, il ne faut confondre ce que nous appellerons une tâche “réelle” de description et une tâche “purement formelle” de description.

Une tâche de description est réelle quand elle requiert une observation de l'objet ou de la situation à décrire (Figure 1 *supra* : les flèches (1) ou (1bis)) : par exemple, établir un plan ou une carte à partir de relevés sur le terrain, ou encore effectuer des manipulations à l'aide d'un dispositif pour découvrir les propriétés physique de l'air. Ici, l'élève a un accès à chacun des deux éléments du couple {objet, représentation de l'objet}, indépendamment l'un de l'autre. Au contraire une tâche de description est purement formelle quand elle se limite à un simple changement de registre de représentation : description verbale à partir d'un dessin ou d'une “image” ou inversement. L'élève n'a plus un accès indépendant à l'objet représenté. Les descriptions formelles sont alors des tâches de conversion qui cherchent à respecter l'invariance de ce qui représenté ou, de manière plus ou moins laxiste : par exemple, des tâches de verbalisation libre sur une image, un schéma, des photos, ou plus rarement des tâches d'illustration d'un énoncé.

L'enseignement des sciences au niveau primaire se trouve souvent pris entre deux exigences contradictoires : d'une part nécessité de descriptions réelles c'est-à-dire engagées dans des démarches d'observation (“La main à la pâte”), en dehors desquelles il est difficile sinon impossible d'entrer dans une démarche scientifique, et d'autre part impossibilité de descriptions réelles pour beaucoup de phénomènes: *d'où le repli sur la consultation et la lecture de documents* (Gouanelle & Schneeberger, 1996) ! On notera qu'en géométrie les tâches demandant le programme de construction d'une figure (du moins à l'aide des instruments classiques) dans le cadre d'une transmission de message, sont plus des tâches formelles que des tâches réelles de description.

Ensuite, il faut prendre en compte la situation du sujet. En effet, ce qui est décrit, ou à décrire, peut être déjà familier. Cela veut dire que les données pertinentes ou utiles pour la description lui sont déjà disponibles et mobilisables. Il en est ainsi lorsqu'on explique un itinéraire à quelqu'un qui demande sa route et qui connaît un peu la ville ou le quartier. Mais cela n'est pas toujours le cas. Il faut alors d'abord chercher et recueillir les données importantes, et ensuite les organiser : c'est le cas de toute connaissance qui se fonde sur des observations comme, par exemple, en physique, en géologie, en astronomie....Ici l'acquisition de connaissances ne peut pas faire l'économie d'un travail de description réelle. La démarche de description apparaît alors dans toute sa complexité : indissociable d'un relevé de données et de leur organisation, elle impose que l'on distingue plusieurs niveaux de correspondance, entre la description verbale ou graphique (plan, schéma, figure...) et les phénomènes décrits (*infra* III 4, IV1.) Et il n'est pas inutile de rappeler ici combien les tâches de description se révèlent difficiles pour les élèves, même lorsqu'il s'agit d'une simple situation de transmission d'informations pour décrire ce qu'ils connaissent déjà.

1.2. Comprendre une description

C'est dans cette position (Figure 1 : flèches (2) et (2bis)) que l'enseignement place le plus souvent les élèves, y en compris en mathématiques. Et cela non seulement avec tous les documents écrits qui servent de référence, mais également avec les problèmes, du moins avec cette catégorie d'énoncés de problèmes qui semblent largement répandus au niveau de l'enseignement primaire, les problèmes d'application à la vie “concrète” (infra II 4.) Naturellement, pour que la compréhension ne soulève pas de difficultés majeures, les descriptions présentées aux élèves le sont généralement avec un double souci. On veille à ce que la description verbale :

- renvoie à quelque chose que l'on pense être déjà connu des élèves,
- soit accompagnée d'une illustration ou d'un schéma.

Deux raisons semblent justifier ces choix. En premier lieu, si comprendre une description c'est visualiser ce qui est décrit, on doit comprendre plus facilement un texte, ou un énoncé, si on a déjà vu ou manipulé l'objet décrit. *Il n'est plus alors nécessaire de lire tout l'énoncé ou d'examiner le dessin descriptif avec beaucoup d'attention.* On peut se référer aux souvenirs ou à l'expérience que l'on en a. Mais, évidemment, vouloir se ramener systématiquement à ce cas de figure présente un inconvénient didactique : on n'apprend pas à comprendre des descriptions d'objets *qui d'une manière ou d'une autre ne sont pas déjà familiers*. En second lieu, on suppose qu'un schéma, un graphe ou une figure seraient plus directement accessibles qu'une description verbale. Ne serait-ce que parce qu'on identifie immédiatement ce qu'ils représentent et que l'on y verrait clairement les relations. D'où le fait que dans les documents didactiques ou dans les textes de vulgarisation, les descriptions verbales soient très souvent doublées d'"images". Mais cela fait souvent oublier que comprendre une description par visualisation ce n'est pas seulement reconnaître l'objet décrit mais *c'est aussi pouvoir mettre en correspondance les unités du dessins et les traits de l'objet décrit* (par exemple des repères d'orientation pour un plan.) Et là, des difficultés de "lecture" ou d'analyse des représentations visuelles proposées apparaissent très souvent.

Le problème de la compréhension des descriptions n'est donc pas de savoir si un type de présentation visuelle (flèche 2bis) est préférable à l'autre (flèche 2) ou s'il doit l'accompagner comme un deuxième "support", mais bien celui des correspondances entre une description verbale et un des différents types de description par visualisation (Figure 1 : double flèche en pointillés.) Ce problème recouvre trois questions. *Toutes les représentations visuelles ou toutes les "images" montrent-elles de la même manière ?* L'articulation entre une description visuelle et une description verbale va-t-elle de soi ou ne requiert-elle pas un long apprentissage ? Et lorsqu'un description vient en accompagner une autre, quelle fonction remplit-elle réellement ?

Arrêtons nous à la première de ces trois questions. Pour en voir la difficulté, il suffit de comparer deux images différentes de ce qu'on pense être une même chose. Prenons, par exemple, des représentations de l'"espace". On voit tout de suite des équivoques surgir. Ainsi, regarde-t-on une figure géométrique comme on regarde un plan du quartier ou la carte d'une région ? Regarde-t-on le patron d'un solide comme on regarde la représentation en perspective du même solide (Duval 2000b) ? Ou regarde-t-on un plan de quartier comme on regarde un schéma de circuit électrique ? Ou encore regarde-t-on le schéma de coupe d'un volcan ou le dessin d'un stade du développement embryonnaire comme on regarde des personnages sur les images d'une bande dessinée ? Ces questions, qui débordent le champ didactique, n'ont rien d'arbitraire, *puisque cette diversité de représentations visuelles ("support" dit-on) est proposée à tous les élèves dès le primaire***.** Et il suffit de se limiter à l'exemple des représentations de "l'espace" pour voir le fossé considérable entre le fonctionnement cognitif de représentation requis pour la “lecture” d'un plan et celui requis pour la “lecture” d'une “figure géométrique. On ne peut donc pas se contenter de l'opposition rhétorique entre langage et image ou entre espace pratique et espace géométrique, **il faut distinguer deux types de visualisation :** la visualisation iconique, fondée sur des critères de ressemblance entre des éléments de la représentation et l'objet de représenté, et la visualisation non iconique exclusivement fondée sur des contraintes d'organisation interne (Duval 2002b.) Ainsi un plan ou un patron relèvent d'une visualisation iconique tandis que les figures géométriques relèvent d'une visualisation non iconique. Non seulement les fonctionnements représentationnels de ces deux types de visualisation sont hétérogènes, mais ils n'offrent pas les mêmes prises ou les mêmes appuis à la description verbale et au raisonnement (*infra* IV.)

2. La dimension heuristique d'une démarche de description : le cas de la “résolution de problème”

Pour percevoir l'importance des démarches de description, il suffit de rappeler leur rôle heuristique dans le développement des connaissances scientifiques. Toute découverte, en effet, dépend de la détection ou du rassemblement de données nouvelles concernant les phénomènes (astronomiques, physiques, géologiques, biologiques...) que l'on étudie. La constitution ou l'élargissement d'un corpus de données est une phase décisive dans la “construction” des connaissances scientifiques. Et ce corpus reste une base de référence dont les connaissances ne peuvent jamais être complètement détachées. Or, c'est seulement dans les démarches d'observation et d'exploration, instrumentalisées ou non, que l'on peut accéder à des données nouvelles ou élargir le corpus de données dont on dispose. Et toute démarche d'observation implique nécessairement des tâches de production de descriptions.

En va-t-il de même en mathématiques ? La réponse n'est pas d'emblée évidente car les objets mathématiques ne sont pas phénoménologiquement et instrumentalement accessibles, comme ceux des autres champs scientifiques. Cela d'ailleurs a souvent conduit à relativiser, dans le cadre de l'enseignement, l'importance des tâches de description, du moins celles de description verbale, au détriment des activités de raisonnement à des fins de justification ou de preuve ! La seule exception, peut-être, concerne l'enseignement de la géométrie avec l'introduction, vers le milieu des années 1970-1980, de tâches de description de construction de figures en situation de transmission de message. Et cela parce qu'après une approche trop axiomatique on découvrait qu'il fallait faire prendre conscience aux élèves à la fois de la nécessité de dénominations précises et de l'existence des contraintes figurales internes aux figures géométriques.

Pourtant si l'on regarde ce qui est considéré comme la voie royale de l'apprentissage des mathématiques, la résolution de problème, force est de constater que les activités cognitives mobilisées consistent pour l'essentiel en des tâches de compréhension et de production de description : compréhension de l'énoncé et recueil de données pour la résolution. Il suffit pour s'en convaincre d'analyser les problèmes proposés aux élèves dans le domaine numérique.

2.1. Caractéristiques et structure d'un énoncé de problème

Dans leur très grande majorité, les énoncés de problème proposés au élèves, au niveau primaire ou au niveau du collège, consistent en **la description partielle** d'une situation, de manière à ce que les informations données permettent de retrouver les informations manquantes ou omises. La situation ainsi décrite peut être un traitement instancié, une configuration géométrique, une procédure, un jeu, etc. Une question vient généralement indiquer la (ou les) information(s) manquantes à retrouver. On peut ainsi donner une définition procédurale d'un énoncé de problème : **on obtient un énoncé de problème EN AMPUTANT LA DESCRIPTION COMPLÈTE d'une situation et, cognitivement, il y a autant de types d'énoncés différents qu'il y a de manières différentes de supprimer des données dans une description complète pour obtenir UNE DESCRIPTION MINIMALE,** (c'est-à-dire une description permettant de reconstituer la description complète.) Autrement dit, l'énoncé change d'abord en fonction des données supprimées.

Un deuxième facteur intervient souvent dans la fabrication des problèmes : le décor. Soit on s'en tient au domaine des objets et des opérations mathématiques, soit le plus souvent on évoque une situation “concrète” du monde environnant, pour montrer que les mathématiques “sont utiles”, qu'elles “servent” ou pour “donner du sens” (!) Cette évocation constitue une deuxième description qui se superpose à la première. Évidemment la distinction entre description partielle et description complète ne concerne pas cette évocation. Car cette deuxième description est neutre par rapport à la première : on peut changer le décor évoqué par cette deuxième description sans changer le problème posé par la description partielle.

DESCRIPTION

COMPLETE
Toutes les informations sont données.
Pas d'énoncé de problème possible.

Les variations de description conservent le même contenu : ce ne sont que des variations de surface.

MINIMALE
Certaines informations seulement.
Un énoncé de problème possible.

Il y a plusieurs descriptions minimales possibles, NON ÉQUIVALENTES, d'une même situation : elles ne conservent pas le même contenu.
Différents types de problème.

Une description *problème de mathématiques*

Superposition de deux descriptions hétérogènes :
problèmes d'application.
word problems.

Générer des données nouvelles par rapport à celles explicitées dans l'énoncé

On se limite aux données fournies.

Figure 2 : Analyse en amont des énoncés de problèmes "didactiques".

Les analyses didactiques centrées sur la résolution ne considèrent que le passage de l'énoncé donné à ses différents traitements possibles (analyse en aval) et négligent le passage d'une description complète à une description minimale ainsi que les procédure pour discriminer la superposition des descriptions. Il est pourtant décisif si l'on veut faire entrer les élèves dans ce jeu si particulier que constitue la fabrication de problèmes mathématiques didactiques et, par suite, leur résolution.

Prenons l'exemple prototype des problèmes additifs, ceux qui demeurent les premiers problèmes et qui sont toujours massivement proposés aux élèves dans le primaire, quels que soient les changements de programme et les réformes ! Ainsi, pour une opération numérique donnée, il y a trois énoncés possibles correspondant à une question sur l'état (ou sur la transformation) initial, intermédiaire ou final : (4 + 3 = ...), (4 ..... = 7), (.... + 3 = 7). Mais une démarche analogue peut être faite avec des configurations géométriques. Ainsi, on peut proposer aux élèves des tâches de reconstitution ou de **restauration** de figures qui ont été endommagées, en jouant, en outre, sur la nature des instruments utilisables pour reconstituer ou reproduire la figure : la complexité de la tâche dépend de ce qui aura été supprimé dans la figure à restaurer (Perrin et Gaudin, 2002.)

Naturellement l'exemple des problèmes additifs nous renvoient à une catégorie particulière de problèmes, les problèmes d'application à une situation non mathématique (G. Vergnaud 1976 ; 1990 p.149-158.) Or la particularité de tous ces types d'énoncés est de SUPERPOSER DEUX DESCRIPTIONS HÉTÉROGÈNES : d'une part celle d'un traitement instancié comme nous venons de le voir et d'autre part celle de la situation “concrète” d'application choisie pour “donner du sens”. C'est cette deuxième description superposée qui associe aux nombres de l'opération à trou une valeur sémantique d'état ou de transformation ainsi que, pour les valeurs de transformation, l'une des deux valeurs opératoires d'un couple d'antonymes (“gagner/perdre” pour les situations de jeu, “monter/ descendre” pour les déplacements verticaux, “vendre/acheter“pour les situations commerciales....) *Et c'est en fonction de cette association avec une valeur sémantique que les nombres en viennent à désigner des quantités.* Les énoncés de problèmes de mise en équation ou en système d'équations, comme tous les problèmes d'application, sont des énoncés qui superposent deux descriptions hétérogènes.

Cependant si l'on ne regarde plus les problèmes par rapport aux énoncés, ceux-ci plaçant les élèves dans la position de devoir comprendre des descriptions faites par quelqu'un d'autre (descriptions dont le principe de production est toujours passé sous silence, comme pour les tours de prestidigitation), mais par rapport à la résolution, il nous faut introduire une troisième distinction. Il y a les problèmes dont la résolution requiert que l'on génère des nouvelles données (par exemple la recherche d'objets répondant à une ou à deux conditions fixées (R. Douady, 1986, p. 13-20) et ceux pour lesquels on peut se limiter aux seules données de l'énoncé (les problèmes additifs évoqués et plus généralement tous les problèmes d'application.) Or devoir générer des données nouvelles place en position de devoir soi-même produire une description et cela dans un travail d'observation. On peut alors voir l'hétérogénéité cognitive des tâches que peut recouvrir l'expression, trop globalisante, de “résolution de problème”.

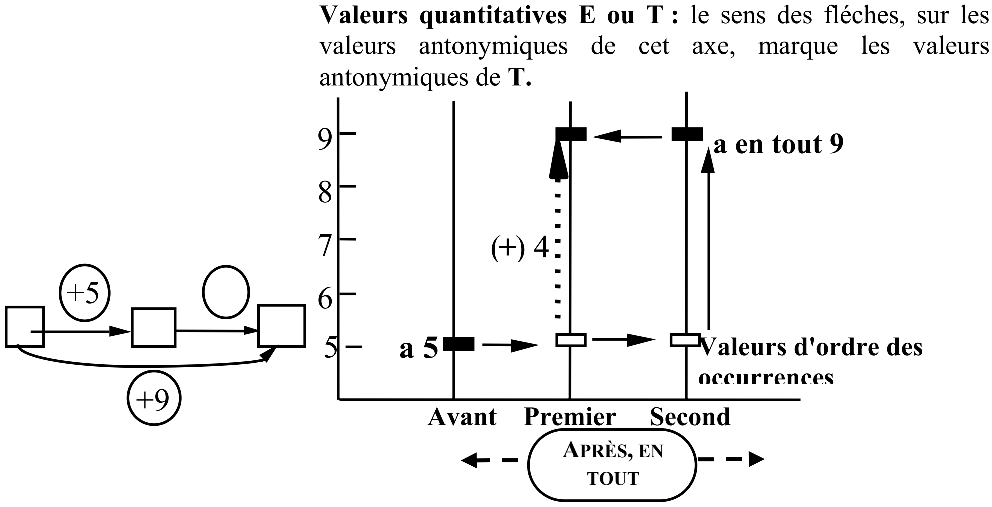
2.2. Les différentes tâches impliquées dans la résolution d'un problème

Pour analyser et évaluer la complexité d'un problème, on ne peut pas se référer seulement aux notions mathématiques ou aux procédures mathématiques que sa résolution mobilise, il faut aussi tenir compte du fait que le problème posé tient à la description partielle minimale choisie et de ce que l'énoncé y superpose une seconde description et, enfin, de la nécessité ou non de produire de nouvelles données en vue de sa résolution.

2.2.1 La compréhension de l'énoncé

C'est évidemment la première tâche. On voit tout de suite qu'il peut y avoir une différence considérable entre comprendre un énoncé à une seule description et comprendre un énoncé à double description. Arrêtons sur la compréhension des énoncés à double description : l'une étant la description minimale d'un traitement arithmétique, ou algébrique, instancié, et l'autre l'évocation stéréotypée d'un scénario censé être familier aux élèves.

Tout d'abord comprendre ce type d'énoncé, c'est être en mesure de “sélectionner les informations pertinentes ou utiles” pour résoudre le problème. On trouve cette formulation dans toute la bonne littérature. Oui, mais comment un élève peut-il faire cette sélection ? Presque tout le monde sent alors la nécessité de faire appel à des “représentations”. Oui encore, mais lesquelles ? Et là se trouve le point aveugle dans beaucoup de recherches ou de propositions didactiques : *à quelles conditions doivent répondre ces représentations auxiliaires — et transitionnelles— pour que les élèves puissent non seulement comprendre — et donc résoudre— le problème particulier qui leur est posé mais aussi tous les autres problèmes possibles de ce type ?* Ainsi, dans le cas de l'exemple prototypique des problèmes additifs, faut-il recourir à des représentations de type unidimensionnel, comme le schéma de calcul relationnel (Vergnaud 1976, 41-42; 1990,150-157) comme on le retrouve aujourd'hui dans tous les manuels à l'intention des enseignants, ou à des représentations de type bi-dimensionnel (Damm 1992) mais peu utiles d'un strict point de vue mathématique ?



Les rectangles noirs correspondent aux données de l'énoncé.

Figure 3 : Lequel de ces deux types de représentation peut faire entrer les élèves dans la compréhension d'un problème additif ? Celui, unidimensionnel, à gauche ou celui bi-dimensionnel à droite ? Les deux schémas sont ici instanciés pour des énoncés du type : “Pierre a (ou “a gagné” ou “a perdu”) 5 billes. Il joue une partie (ou il “joue une deuxième partie”.) En tout il a 9 billes (ou “a gagné”, ou “a perdu”)”.

On voit tout de suite que le schéma de calcul relationnel est congruent à l'une des trois opérations à trou possibles pour une addition donnée (5+4 =9), tandis que le schéma bi-dimensionnel est congruent à la double description de l'énoncé *et il permet de séparer les deux descriptions.* En effet, ce que l'on appelle les “informations pertinentes” de l'énoncé, celles que l'élève doit “sélectionner”, correspondent chacune au CROISEMENT DE DEUX DÉTERMINATIONS SÉMANTIQUES DIFFÉRENTES (marquées ici par deux axes différents.) C'est la prise en compte *du croisement de deux déterminations sémantiques* différentes qui permet de repérer *une information* et c'est cette prise en compte qui différencie radicalement la lecture d'un énoncé mathématique et celle d'un énoncé ordinaire ! On peut évidemment s'arranger pour court-circuiter cet aspect dans la résolution de quelques particuliers de ce genre. Mais alors faut-il s'étonner que la grande majorité des élèves traîneront des difficultés insurmontables, y compris sur certains problèmes additifs jusqu'à BAC + 3 (Delègue et Roussel , 2000) ?

2.2.2. Générer des données : l'inventaire de cas possibles pour examen

Dans la plupart des problèmes d'application, il n'y a pas à générer de nouvelles données pour résoudre, il y a simplement à **convertir** celles qui sont indiquées dans l'énoncé. La tâche de résolution se réduit alors à la tâche de compréhension de l'énoncé, comme pour les problèmes additifs évoqués ci-dessus. D'ailleurs, la réponse peut être immédiatement trouvée à la seule lecture de l'énoncé ou même à sa simple écoute. Ainsi la résolution des problèmes additifs ne requiert en rien le recours à l'écriture ou à la production de traces écrites formant ensuite une base d'observation (Duval 2000a p. 147.) La seule difficulté consiste à *discriminer la superposition de deux descriptions et le croisement de deux déterminations sémantiques*. C'est pourquoi ce type de problème est souvent opposé aux “vrais” problèmes, c'est-à-dire à ceux demandant une recherche.

Ainsi, dans le problème de la recherche d'un rectangle de demi-périmétre égal à 41 cm et d'aire 402 cm2, la première phase de résolution consiste à générer une liste plus ou moins longue de “couples (a,b) dont la somme est égale à 41” et dont on regarde que “le produit voudra bien être proche de 402” (Douady 1986, p.22.) Les élèves peuvent ainsi produire des listes d'additions et de multiplications de deux entiers, en variant ces deux entiers. Ces listes peuvent aller du couple (20, 21) à (16,25), et parfois au delà. Leur examen permet de remarquer des variations d'approximation en raison de la variation des écarts entre les deux nombres. Il peut aussi conduire à la recherche d'un deuxième nombre qui ne soit plus un entier. Il peut aussi arriver que, dans la génération de la liste des couples, la centration sur le nombre 402 jouant un rôle privilégié de repère, fasse oublier la deuxième condition d'où la production de couples tels que (19,21.) Dans ce cas, l'examen des données produites permet un feed-back sur la compréhension de l'énoncé, c'est-à-*dire ici le repérage des deux contraintes.*

La génération de données consiste donc en la production d'une première description dont l'adéquation à la description détaillée demandée (ici le rectangle partiellement décrit, la longueur des côtés n'étant pas donnée) peut ensuite être contrôlé. Deux autres exemples illustrent parfaitement l'importance de cette démarche de description. Il y a tout d'abord le célèbre problème de la course à 20 ! Deux joueurs, A et B, peuvent chacun avancer au choix de 1, 2 ou 3 cases. A jouant en premier, qui peut, à coup sûr, arriver le premier à la case 20 ? Comme dans l'exemple précédent, il faut commencer par générer des données, c'est-à-dire envisager un ou deux enchaînements de coups possibles. Mais, ici, un autre aspect des démarches de description apparaît : l'organisation spatiale des données générées permet de mettre en évidence la régularité de la progression du joueur B et donc de remarquer **un effet de "**quelque chose" à identifier sur l'évolution de la partie. En outre, *la focalisation de l'attention peut se faire dans deux directions très différentes :* soit sur la manière de jouer de B en réponse au choix de A, soit sur les données de la progression numérique de B. Enfin, la progression numérique des positions successives de B peut donner lieu à deux descriptions verbales différentes également pertinentes : l'une additive (+4) et l'autre multiplicative (x 3.) Ce qui, au passage permet de soulever la question : à quelle description verbale, implicite ou explicite, renvoie l'emploi d'un terme de propriété ?

	A : coup n	**B : coup n+1**	
description *forward* ↓	1 ou 2 ou 3		
	. . .	**4** . . .	
		12	
	13 ou 14 ou 15		
		16	
	17 ou 18 ou 19	**20**	↑ description *backward*

Figure 4 : Description des déroulements possibles de la partie.

Un dernier exemple montrera que la description ne consiste pas uniquement en la génération de données numériques. C'est le problème de l'escargot. Il doit franchir un mur de 10 m : le jour il monte de 3 m mais, la nuit, il glisse et descend de 2 m. Combien de jours lui sont nécessaires pour parvenir au haut du mur. Il suffit d'énoncer ce problème pour obtenir rapidement, même avec des Professeurs des écoles, la réponse 10 avec le refus d'aller au-delà. Or, ici, la compréhension de la description faite implique ici que le lecteur pense à distinguer la position le matin et celle atteinte le soir du même jour. Et une organisation des données numériques, analogue à celle de la figure 5, devient alors possible.

Il y a, bien évidemment d'autres tâches de résolution, dont certaines seront indirectement évoquées dans la section suivante. Nous nous sommes limités ici aux deux tâches d'amorçage de la solution : la compréhension de l'énoncé et la génération de données, c'est-à-dire la compréhension d'une description particulière (parmi différentes descriptions minimales possibles) faite par quelqu'un d'autre et la production de données permettant l'examen de la situation décrite. **Car c'est sur ces deux tâches d'amorçage que butent la majorité des élèves.**

On voit donc l'intérêt de s'attarder sur les démarches de description : cela ne permet pas seulement de remettre au premier plan une certaine parenté dans le rôle heuristique de l'observation pour les mathématiques et pour les autres sciences, cela montre l'urgence d'une réelle analyse cognitive des problèmes qui sont élaborés à des fins didactiques. Or, le plus souvent, les explications ou commentaires didactiques se contentent d'une référence aux notions très générales de “conception” ou de “conceptualisation”. D'où la tentation d'expliquer par un même schéma d'analyse les démarches de résolution des problèmes à description unique et ceux à double description.

3. Le rôle des descriptions dans le développement d'autres démarches cognitives

On ne saurait trop souligner l'importance de l'activité de description pour l'acquisition des connaissances, y compris en mathématiques. On la retrouve au cœur de démarches cognitives très différentes et pourtant essentielles : se poser des questions, généraliser, trouver des contre-exemples, définir... On peut même affirmer que toutes ces démarches sont des démarches périphériques à toute tâche réelle de description (*supra* I b.) Ce qui veut dire qu'une déficience constatée de manière durable pour l'une de ces démarches est le syndrome d'un enseignement dans lequel les tâches réelles de description ont été, d'une manière ou d'une autre, court-circuitées. Nous en retiendrons quatre :

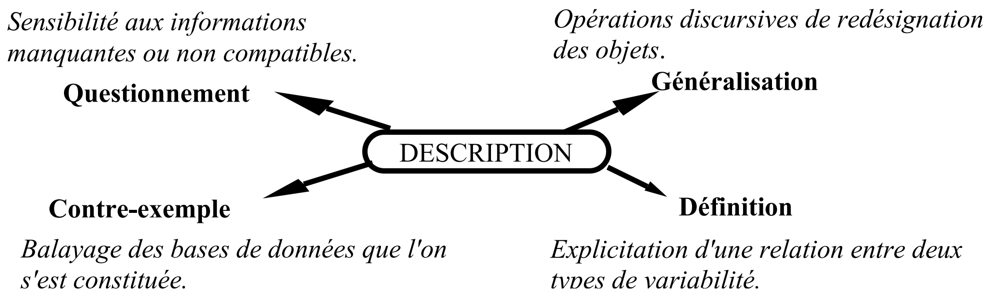


Figure 5 : Interconnection de démarches cognitives impliquées dans tout travail d'exploration ou de recherche.

3.1. Description et questionnement : *"Madame, comment on fait pour poser une question ?"*

On ne saurait souligner l'importance, dans l'acquisition des connaissances scientifiques, du fait de **SE poser** des questions : il s'agit, là aussi, d'une condition nécessaire pour le développement de la compréhension dans les apprentissages. Mais, bien évidemment, les questions sont peut-être ce qu'il y a de plus difficile à communiquer, dans la mesure où une question posée ne se transforme pratiquement jamais en une question que l'on se pose. Car une question déborde toujours le contenu des connaissances qu'elle paraît mobiliser : elle a des effets de résonance sur tout ce qu'un individu croit savoir ou ne pas savoir. Aussi, pour bien distinguer les questions que l'on se pose et celles qui nous sont posées par quelqu'un d'autre, préférerons nous parler dans le premier cas de "questionnement", le second cas ne dépassant pas souvent le sentiment d'obligation généré par une demande. Or l'un des indices du questionnement n'est pas seulement l'attitude de recherche qu'il déclenche mais la compréhension du "pourquoi la question se pose".

Pour susciter le questionnement, on recourt toujours (Platon s'y référait déjà : *République*, 524d) au même ressort : la "contradiction", soit entre ce à quoi le sujet pouvait s'attendre et ce qui se produit effectivement, soit entre des avis divergents dans le cadre d'une confrontation-débat. La première voie requiert principalement que l'on puisse faire des observations dans le cadre de mini-manipulations ou de montages : ce qui est relativement naturel s'il s'agit de découvrir l'existence de l'air et de ses propriétés physique ou de découvrir le fonctionnement d'un circuit électrique... En mathématiques, un travail sur les configurations géométriques à l'aide instruments (classiques ou informatiques, ou même purement bricolés comme des bouts de papier déchirés n'importe comment) nous rapproche de ces conditions. Mais, en dehors de ce champ, cela semble difficile à mettre en oeuvre. C'est pourquoi on privilégie, le plus souvent, la seconde voie, celle des confrontations-débats, laquelle pourtant présente une double limitation :

- elle subordonne le questionnement à la validation, ce qui induit d'ailleurs une réduction des questions à la formulation de conjectures (mathématiques) ou d'hypothèses (dans les autres sciences),
- elle se heurte à l'inaccessibilité perceptive et instrumentale des données, puisque les objets mathématiques ne sont accessibles que sémiotiquement. D'ailleurs cette inaccessibilité perceptive et instrumentale des données en mathématiques, traduit le fait qu'elles sont toujours relatives à un ensemble de cas possibles.

On voit donc la divergence entre les deux voies pouvant conduire à un questionnement : *la première s'ouvre avec la dynamique des démarches de* *description tandis que la seconde ne commence qu'avec une exigence de validation,* et donc avec les contradictions potentielles d'une argumentation ! Or la difficulté de susciter un questionnement s'accroît si l'on tient compte du fait que, dans l'enseignement des mathématiques, les questions sont liées et subordonnées à la “résolution de problème”. Nous venons de voir, en effet, *le caractère relatif et conventionnel des questions des problèmes mathématiques élaborés à des fins didactiques* : il tient au choix de la description minimale. Or l'impasse faite, dans l'enseignement, sur la cette scène primitive de la fabrication des problèmes didactiques est pour le moins surprenante, alors qu'avec la plupart des élèves se posent des questions sur ce “ce qu'on demande”, “par où commencer pour “réfléchir”, “qu'est-ce qu'il faut prendre en compte pour…” .

Une observation, banale, faite il y a peu de temps en fin d'année scolaire dans une classe de CE1 où un certain nombre d'élèves étaient déjà en “grande difficulté”, nous aidera à mieux cerner ce problème cognitif et didactique du questionnement. Le but de l'enseignante était de faire découvrir aux élèves ce qu'avait de particulier un énoncé de problème par rapport à d'autres énoncés. Cet objectif prenait d'ailleurs place dans le cadre plus global d'un projet de travail sur la lecture. L'enseignante avait proposé le texte suivant avec la consigne de le compléter par une question que l'on pouvait poser pour que cet énoncé devienne un problème :

Pour l'anniversaire de Sarah, maman a acheté 3 paquets de 5 gâteaux. Chaque paquet coûte 4 francs.

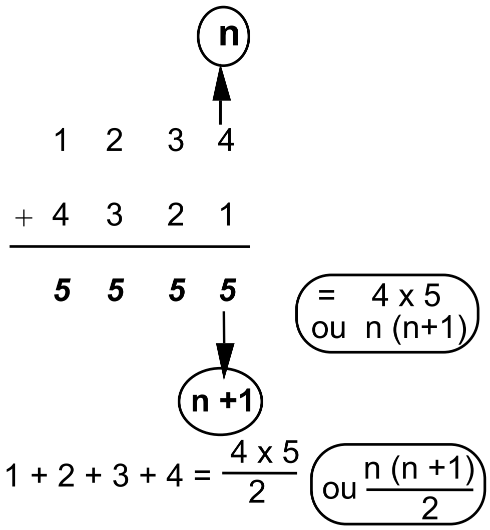
On remarquera que ce texte est déjà une description minimale puisque la description complète du scénario évoqué (“Sarah a acheté”) requiert que la somme payée à la caisse soit indiquée (“et elle en a eu pour 12 francs.”.) Or cette tâche avait plongé une partie des élèves dans l'embarras, les autres écrivant quelque chose qui, soit n'était pas une question, soit ne correspondait pas à une question transformant l'énoncé en “problème”. Ajoutons que ceux qui avaient posé la question “combien a-t-elle payé ?” proposaient comme solution 3x5 ! Mais le plus révélateur fut l'interrogation de l'un de ceux que cette tâche embarrassait : “*Madame, comment on fait pour poser une question ?*”. Or une telle interrogation, souvent refoulée dans des classes moins “difficiles” ou moins “hétérogènes”, est l'un des points clés pour faire entrer la grande majorité des élèves dans la compréhension de ce qu'est un problème et pour leur faire explorer les variations de solutions pour des variations d'énoncés qui souvent linguistiquement insignifiantes.

C'est pour répondre à cette question d'élève, souvent refoulée, qu'il est parfois proposé aux élèves de “fabriquer” eux-mêmes des énoncés de problème. C'est une activité pédagogiquement stimulante (puisque les élèves sont conduits à changer de position : produire une description et non plus seulement comprendre celle qui a été produite par un autre), mais didactiquement stérile (puisque les élèves reproduisent des stéréotypes d'énoncés *sans prendre conscience des variations possibles de descriptions minimales et donc d'énoncés*) parce que, cognitivement, d'une naïveté surprenante (puisqu'elle ne fournit *aucun outil pertinent pour cette tâche*) !

Pour faire entrer les élèves dans la dynamique, très particulière, du questionnement générant les problèmes mathématiques de nature “didactique”, il est nécessaire de les faire d'abord travailler sur la description complète d'une situation et ensuite de leur faire *inventorier les différentes manières d'amputer cette description complète pour obtenir des descriptions minimales*. Cela relève de ce que nous avons appelé **une analyse en amont,** et non pas **en aval,** des problèmes (Duval, 2002 p. 98-100.) Naturellement le critère d'une description minimale consiste dans la possibilité de retrouver la donnée supprimée à partir des données conservées : cela implique donc que l'on analyse aussi les opérations permettant de passer d'une donnée à une autre. Autrement dit, c'est en travaillant sur le passage d'une description complète à une description minimale possible d'un objet ou d'une situation que les élèves peuvent entrer dans la compréhension d'un énoncé de problème. Sans un tel travail, les énoncés de problèmes, c'est-à-dire des descriptions minimales particulières, restent une activité aveugle et aléatoire pour la grande majorité des élèves. Et, finalement, la résolution d'un problème reste aussi idiosyncrasique, aussi fragmentaire que le remplissage d'une grille de mots croisés. Il suffit de changer un mot pour que tout à nouveau s'embrouille “dans la tête”. Et nous ajouterions qu'un tel travail serait aussi peut-être nécessaire pour les futurs enseignants. Et cela d'autant plus que la description complète devient plus riche ou plus complexe (voir Annexe I.)

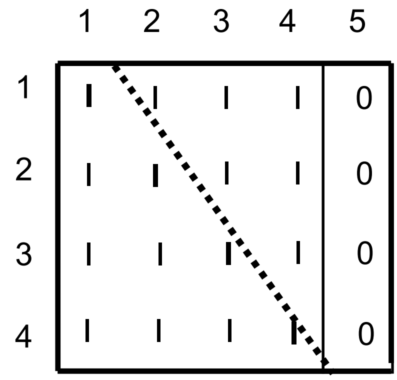
3.2. Description et généralisation

D'un point de vue cognitif, une généralisation se fait toujours sur la base d'une description. Le passage de valeurs numériques particulières à une écriture littérale des nombres permettant d'expliciter la généralité de propriétés observables est un des passages cruciaux dans l'enseignement des mathématiques. Pour l'illustrer nous allons reprendre un problème célèbre : calculer la somme des 100 premiers nombres entiers. Voici en parallèle la solution donnée par Gauss alors jeune élève et une représentation dont on peut se demander si elle est vraiment géométrique.



La solution du jeune Gauss.

Solution pythagoricienne.



Pour voir la correspondance entre cette représentation et la formule littérale, il est important de bien discerner : (1) la disposition **triangulaire** des “I” à droite (ceux, diagonaux, en gras représentent le nombre 4 dans la suite des nombres), (2) la disposition **rectangulaire** incluant les “0”, partagée par la “diagonale” qui divise ce rectangle en un nombre égal de cases.

Figure 6 : Sur laquelle des deux représentations (remplissant une fonction de description) “voit-on” le mieux ?

Regardons la solution du jeune Gauss. Il y a d'abord l'astuce de l'inversion de la suite des nombres pour effectuer la somme de chacun des termes de la suite directe avec ceux de la suite inversée. Les données ainsi générées font apparaître l'invariance du résultat des sommes. La suite invariante de ces résultats permet alors d'introduire une procédure multiplicative pour effectuer leur somme. Il n'y a plus enfin qu'à neutraliser l'effet dû au détour initial par l'inversion de la suite des nombres.

La généralisation consiste évidemment en une description de la solution qui ne se limite plus aux données particulières de l'exemple (ici de petits nombres, d'où la possibilité d'une représentation “géométrique” !.) **Or généraliser requiert que l'on passe dans un registre discursif, car cela repose** sur des opérations discursives de désignation des objets ou, plus exactement, **sur des opérations de redésignation des objets déjà désignés** (Duval 2001a.) Car il s'agit de transformer les références à des objets particuliers (les nombres 4 et 5) en référence à des objets quelconques.

Cela commence avec une "qualification" des nombres : 4 est le "dernier nombre" de la suite et 5 est le "résultat invariant de chaque somme des termes…". Remarquons qu'une telle qualification fait passer d'un niveau de *DÉSIGNATION INDIVIDUALISANTE* à un niveau de *DÉSIGNATION CATÉGORIELLE* plus indéterminé. Peu importe que cela se fasse de manière explicite ou implicite, cela traduit le moment nécessaire où le sujet remarque des caractéristiques sur une liste de désignations individualisantes et homogènes. Cependant cette qualification n'est pas opératoire. D'où la substitution conventionnelle de lettres qui rendent possible la *DÉSIGNATION FONCTIONNELLE*, spécifique aux écritures littérales. Si le "dernier nombre" de la suite est redésigné par "n", le "résultat invariant…" peut alors être désigné par "n +1". Or **ces substitutions successives de désignations de nature différente constituent une révolution cognitive par rapport aux opérations ordinaires de désignation des objets.** Elles représentent un seuil qui peut être très long et délicat à franchir pour beaucoup d'élèves, à la fin du primaire ou au Collège. Et cela peut être d'autant plus difficile que l'enseignement, aussi bien en mathématiques qu'en français, accorde plus d'importance au vocabulaire qu'aux différentes opérations de référence qui permettent de désigner des objets, même et surtout avec un lexique restreint (Duval 2002c.) Cognitivement, pour l'apprentissage, ce n'est pas le vocabulaire qui importe, mais les différentes opérations discursives possibles pour désigner un même objet, opérations que l'on explicite avec les deux variables que sont la réduction de la taille du lexique et lechangement de registre.

Naturellement l'écriture littérale de la formule exige une autre opération propre au second niveau d'articulation du sens (*infra* 4) : désigner la relation entre les objets que l'on vient de redésigner.

Regardons maintenant la visualisation bi-dimensionnelle à droite sur la figure 6 : elle souvent présentée comme interprétation "géométrique" de la formule, c'est-à-dire selon le sens *formule → visualisation* et *non pas dans le sens inverse* comme pour la solution de Gauss. Est-elle vraiment plus simple ou plus facile à voir ? On peut faire tout de suite deux remarques :

- l'articulation entre la formule et la visualisation suppose *une double discrimination visuelle dans la figure :* d'une part les emboîtements de dispositions triangulaires de "I", lesquels visualisent la progression arithmétique de la suite, et d'autre part la configuration rectangulaire laquelle visualise la transformation d'une procédure additive en procédure multiplicative !!!
- le double jeu de la visualisation : elle mobilise la reconnaissance d'une figure géométrique comme un "*objet continu"* et sa lecture comme tableau à double entrée c'est-à-dire comme "*ensemble discontinu"* d'éléments, car

> la "diagonale" doit partager la forme rectangle en un nombre de cases égales. Autrement dit, *la visualisation devient très "formelle"* selon le sens que Piaget donnait à ce terme : "toute différence entre les opérations infralogiques (c'est-à-dire portant sur un objet continu) et logico-mathématiques (c'est-à-dire portant sur une ensemble discret) disparaît" (Piaget 1973, p.119.)

Cette visualisation s'avère donc très coûteuse à "lire". Et, par rapport à l'écriture littérale de la formule, elle ne remplit qu'une fonction d'illustration et non pas une fonction heuristique.

3.3. Description et contre-exemple

La notion de contre-exemple est associée, de manière quasi-réflexe, à celle de raisonnement. Et cela en raison des situations où le recours à un contre-exemple est décisif. Tout d'abord, sur le mode de la réplique dans une discussion, il constitue la réfutation d'une déclaration trop générale. Ensuite, la résistance au contre-exemple est un test d'acceptabilité pour les définitions ou les relations d'implication. Ainsi, pour déterminer si "$x^2= 9$ implique $x=3$" ou si c'est seulement l'implication réciproque qui est vraie, il faut évidemment penser à ce que non seulement $(3)^2$donne 9 mais aussi $(—3)^2$. Avec les contre-exemples, on glisserait donc sur le versant "logique" du langage, c'est-à-dire là où comptent uniquement les mécanismes de quantification, directement liés aux opérations discursives de référence à des "objets", et les mécanismes de négation comme de réciprocation des termes, qui, eux, sont liés aux opérations discursives de la construction énonciative des propositions. Un tel glissement exige d'ailleurs un changement complet de point de vue sur ce que l'on dit ou sur ce qui est dit : il faut neutraliser la compréhension *de re,* qui est de nature associative, pour ne s'en tenir qu'au *de dicto,* lequel renvoie à des formes d'expression et à des règles et, donc, à des possibilités de substitution déductive valide (Duval 2000a 148-150, 157.)

Cependant, d'un point de vue cognitif, le contre-exemple n'est pas fondamentalement une affaire de raisonnement (Duval 1995 p. 297-300.) Et cela en raison des conditions nécessaires de sa production. En effet, la capacité d'un individu à produire un contre-exemple dans un domaine de connaissance dépend de la base de données dont il dispose en ce domaine, ou de son degré de familiarité avec ce domaine. Ce qui nous renvoie aux démarches préalables d'observation et de description qu'il a eu ou non l'occasion de pratiquer dans le domaine où les définitions comme les conjectures à tester sont avancées. D'ailleurs, rechercher un contre-exemple équivaut à faire la démarche inverse de celle de généralisation évoquée ci-dessus. Par exemple, lorsqu'il s'agit d'implications concernant les propriétés de nombres ou de fonctions, la généralisation se fait par le recours à une écriture littérale ou à l'utilisation de variables. Or l'incapacité, souvent constatée dans des questionnaires de logique, à penser à des contre-exemples pour tester l'acceptabilité d'implications proposées, révèle en réalité une déficience préalable d'un travail de description. Tout se passe comme si les étudiants ne disposaient pas de la base de données nécessaire pour trouver un exemple qui aille contre. Déficience qui n'est pas à imputer aux étudiants mais à l'enseignement.

3.4. Les descriptions verbales en sciences : définitions et dénominations, ou la codification interprétative des données observables

Rappelons, tout d'abord, que tout discours (ou toute “production langagière”), articule au moins **trois niveaux de sens,** chacun de ces niveaux renvoyant à des opérations discursives et à des processus cognitifs très différents (Duval 1995 p. 88-94, 2000a.) Or, généralement, quand on parle de “description” ou d' “explication”, on se limite au troisième niveau (figure 7, ci-dessous), les deux premiers étant laissés à la charge des élèves ou étant souvent compactés sous les termes commodes et rarement explicités de “conception” ou de “conceptualisation”. Cet écrasement des trois niveaux de sens en un seul revient à oublier deux choses. Dans les sciences, le travail des description, qui conditionne celui d'interprétation, commence dès le choix des termes ou des expressions que l'on emploie pour qualifier les données observées. *Et l'accès à la maîtrise du langage ne se fait pas au troisième niveau mais au second.* Il suffit d'ailleurs de regarder comment des enfants décrivent, oralement ou sur leurs cahiers, les résultats des observations faites dans le cadre d'une manipulation ou dans celui de la construction d'une figure géométrique qu'ils viennent de réaliser, pour le constater.

Niveaux d'articulation du sens	*OPÉRATIONS DISCURSIVES (dépendantes du système sémiotique utilisé)*	*Processus cognitifs mobilisés*	*Types d'expressions produites*
I. Fonction référentielle	- choix d'un élément dans un lexique - composition de plusieurs éléments d'un lexique (désignation indirecte par une description définie ou par une désignation fonctionnelle)	- associations déjà automatisées de “mots” et de “choses” - discrimination des objets composant un processus ou une situation et désignation directe ou indirecte de ces objets	**Dénominations** par un nom propre - un syntagme nominal, -des lettres, ...
II. Fonction apophantique	- Choix d'un objet d'ancrage (le sujet grammatical) - Quantification - Liaison entre une désignation d'objet (s) et une désignation de propriété ou de relation	Focalisation - sur un objet - une relation entre des objets ou entre deux types de variation	**Propositions prenant un statut** de - définition, - constat - conjecture, - théorème, etc....
III. Fonction d'expansion discursive	Convergence des références successivement effectuées (Cohérence et continuité thématiques)	Choix d'un référentiel ou d'une perspective et intégration de chaque observation locale dans un ensemble (contexte, connaissances acquise...)	- relevés énumératifs (organisés ou non) de données, Ñ ” explication”

Figure 7 : Les trois niveaux d'articulations du sens.

L'analyse cognitive du discours se fait à partir des opérations discursives et non à partir des marques de surface ou des formulations produites. Elle se contrôle par la conversion du discours analysé dans un autre registre. C'est de cette manière que l'analyse cognitive diffère de l'analyse linguistique. Plus généralement, le développement de la “maîtrise de la langue” se fait à partir de la prise de conscience des opérations discursives (Cons. Op.) et non pas à partir de la connaissance des règles ou des régularités grammaticales du discours, ou du vocabulaire (Gr. & Vo.) ou encore de simples activités de communication (Comm..) Ce que l'on peut traduire par l'hypothèse fondamentale pour l'apprentissage de la langue : (Cons. Op.) $\Rightarrow$ (Gr. &Vo) ou (Com.m.)), la réciproque étant fausse. Cela est fondamental pour comprendre l'apport de l'enseignement des sciences et des mathématiques à l'enseignement de la langue.

On remarquera, en ce qui concerne le premier niveau d'articulation du sens, **l'antagonisme** entre des associations déjà automatisées de mots et de choses et l'exigence d'une dénomination indirecte par un syntagme nominal. Or, presque toujours, la description d'observations conduisant à la découverte de phénomènes non perceptibles exige le passage d'une dénomination directe à une démnomination indirecte.

Par exemple, pour découvrir les propriétés physiques de l'air, c'est-à-dire qu'il se conserve, qu'il a un volume..., des enfants de 8-9ans avaient pu observer ce qui se produisait lorsqu'ils comprimaient une bouteille de plastique avec un ballon fixé à son goulot. Ce qui est perceptible, et donc descriptible dans le cadre d'une telle manipulation, c'est la diminution de la place “vide” dans la bouteille avec l'augmentation du volume du ballon. Or les mots “vide” ou “rien” sont spontanément employés pour qualifier un récipient non rempli de quelque chose de visible, comme du liquide, une poudre... Et ce *codage lexical quasi-automatique,* qui commande aussi bien le discours intérieur que le discours oral, a continué de fonctionner lorsqu'il s'agissait de dire ce qui est observé dans le cadre de la manipulation. Il y a eu ainsi, au cours de toute la séquence d'enseignement, des différences importantes de progression entre les élèves qui se contentaient de dire l'“**l'air”** et ceux qui, au contraire, essayaient de préciser : “**la place** vide” ou “**la place** de l'air **dans...”,** après avoir dit que “l'air n'avait plus de place dans le ballon”. On voit ainsi le piège et l'erreur de toute assimilation du recours au langage comme à une “mise en mots”. Elle conduit à méconnaître la diversité des opérations discursives qui permettent de désigner un phénomène ou un objet et à oublier l'obstacle des associations verbales automatiques qui sont prédominantes dans la spontanéité de l’expression orale. En réalité, la remise en cause d'une telle prédominance ne peut se faire qu'en travaillant au second niveau d'articulation du sens, sur une “mise en propositions”. D'où une question importante pour les apprentissages dans les domaines scientifiques : *dans quelle mesure un travail sur les ancrages (c'est-à-dire sur la manière de désigner les phénomènes observés) dans l'expression des propositions entraîne-t-il une plus grande discrimination dans les observations pratiquées ?*

On ne peut pas oublier cependant la connotation négative du mot “description”. Il évoque l’ennui des descriptions “littéraires”, et surtout toute description verbale va à l'encontre du principe d'économie dans la mesure où sa compréhension implique la conversion en une représentation permettant de visualiser (*supra* I b)[1]. Plus généralement, il y a l'idée que toute compréhension d'un discours doit pouvoir se traduire en une reformulation plus brève, comme on peut le voir dans les étranges pratiques de résumé ou de contraction de texte, voire dans l'extraction de mots-clés. *D'où l'illusion que toute expression serait contractable à souhait* (et, donc, inversement extensible ?), comme si, finalement, un texte, une phrase ou même seulement un mot pouvaient remplir indifféremment les mêmes fonctions discursives et contenir la même information. C'est l'illusion de Joubert : "tourmenté par la maudite ambition de mettre toujours tout un livre dans une page, toute une page dans une phrase et cette phrase dans un mot. C'est "moi"" (Joubert, Carnets, vol. II, Gallimard 1994.) Cette illusion, caractéristique de **l'entropie propre à la communication verbale,** revient à "débrancher" les descriptions verbales des bases de données, ou des d'observations, qui les ont générées et qu'elles organisent.

Aussi, pour ce troisième niveau d'articulation du sens, devrions-nous plutôt employer le terme "explication" et non pas celui de "description", mais en rappelant qu'une explication est de l'ordre de la description et non pas de celui de la validation et de la preuve (Duval 1992 p. 40-41, 58.) Car une explication est cognitivement aux antipodes de l'argumentation. Quel avantage alors à ce changement de terminologie ? Une explication ne se contracte pas car on ne peut pas la dissocier des objets et des processus qu'elle décrit : elle appelle des tâches de production de données ou d'exemples dans le cadre de manipulation. Une explication ne se fait pas sur des documents déjà constitués, comme pourtant on peut le voir dans l'enseignement des sciences au primaire.

4. Comment analyser la complexité des rapports entre discours et visualisation ?

Combien de fois l'adage "un diagramme vaut (mieux que) dix mille mots" (Larcin et Simon 1987) n'a-t-il pas été décliné, en variant bien évidemment l'argument de la proposition : "dessin", "schéma", "croquis", "figure", "image mentale".... et même "photo" ! Cela conduit non seulement à considérer que toute représentation visualisante pourrait se suffire à elle-même, mais qu'elle serait plus accessible que n'importe quel discours, surtout avec les élèves de l'enseignement

1 Souvent les figures en géométrie ont été considérées comme remplissant ce principe d'économie pour la compréhension d'une situation géométrique. Témoin cette explication déjà ancienne et dont l'opposition récente du terme "figure" à celui de "dessin" n'est pas si éloignée ; deux rôles au moins peuvent être attribués aux figures en géométrie : "d'une part elles **illustrent les situations** étudiées, d'autre part elles servent de support à l'intuition en faisant apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations **qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal"** (Bessot 1983 p.35.)

primaire qui n'ont pas encore acquis une aisance fonctionnelle avec l'expression écrite (compréhension et écriture de “textes”.) En d'autres termes, on reconnaît un privilège didactique de l'“image”, ou du “dessin”, par rapport au “langage”, *comme si la reconnaissance de ce qu'une image représente était évidente et devait rendre compréhensibles les énoncés qu'on lui associe !* Bref, on postule que l'articulation entre “image” et “langage” se ferait spontanément.

La persistance des difficultés que soulèvent la lecture, l'utilisation ou parfois la construction de figures en géométrie, suffit à rappeler qu'il n'en est peut-être rien. Et, en dehors du domaine si particulier de la géométrie, on peut aussi rappeler les difficultés soulevées par l'utilisation de représentations visualisantes pour la résolution des problèmes à double description : ainsi celles qui sont proposées dans la littérature didactique pour les problèmes additifs sont loin d'avoir les vertus que l'on prête aux “images”, quelles soient schématiques ou mentales. Contrairement à l'adage souvent décliné, les rapports entre le contenu d'une image ou d'un dessin et un énoncé, descriptif ou explicatif, ne sont pas toujours évidents ou pertinents. *Souvent les élèves ne voient pas ou ne peuvent pas faire le passage de l'un à l'autre.* Et si on se place du côté des enseignants, aussi bien en mathématiques qu'en dehors des mathématiques, force est de constater que le recours didactique aux images se fait souvent de façon aveugle. Tout cela nous renvoie à l'un des problèmes cruciaux dans tout apprentissage : celui des correspondances et des non-correspondances cognitives entre le discours et les différents types de visualisation. Comment le poser et, surtout, comment l'analyser ?

4.1. Les deux niveaux d'articulation de sens dans un “dessin” (image ou schéma)

Commençons par une précision d'ordre terminologique et théorique. Toutes les représentations se partagent en deux grandes classes, selon les systèmes mobilisés pour les produire : soit des *systèmes sémiotiques,* soit uniquement des *systèmes physiques* (instruments optiques) ou *neurophysiologiques* (souvenirs visuels....) En effet, d'une classe à l'autre, **le rapport entre le contenu d'une représentation et ce qu'elle représente change radicalement d'un cas à l'autre (***infra* Figure 12.) Ainsi, pour les représentations sémiotiques, non seulement la production relève d'un choix intentionnel mais la relation du contenu à l'objet représenté est uniquement **une relation de référence**. Au contraire, pour les représentations non sémiotiques, dont la production ne dépend pas d'un contrôle intentionnel, la relation du contenu à l'objet représenté est **une relation d'effet à cause.** C'est pourquoi, dans les deux cas, le contenu d'une représentation dépend autant des possibilités d'explicitation du système par lequel la représentation est produite que de l'objet représenté ou que des intentions du sujet (Duval 1999 p. 40-48.) On voit alors la confusion du recours à des notions comme celle d'“image mentale”, pour expliquer les processus cognitifs de compréhension, dans la mesure où une telle notion ne permet pas de distinguer les représentations qui sont des prolongements automatiques de la perception et celles qui résultent de l'appropriation et de l'intériorisation de systèmes sémiotiques de représentation. Nous nous limiterons ici aux représentations sémiotiques : dessins, schémas, figures, plans, croquis, etc.

Pour pouvoir analyser le contenu d'une visualisation d'ordre sémiotique, il faut bien distinguer les unités figurales que l'on peut y “reconnaître”, lesquelles prennent de ce fait une valeur représentative élémentaire, et les relations entre les unités figurales pouvant être reconnues, lesquelles ont une valeur représentative de composition. On voit alors la nécessité de distinguer deux niveaux d'articulation du sens (à la différence des discours qui en comportent trois.)

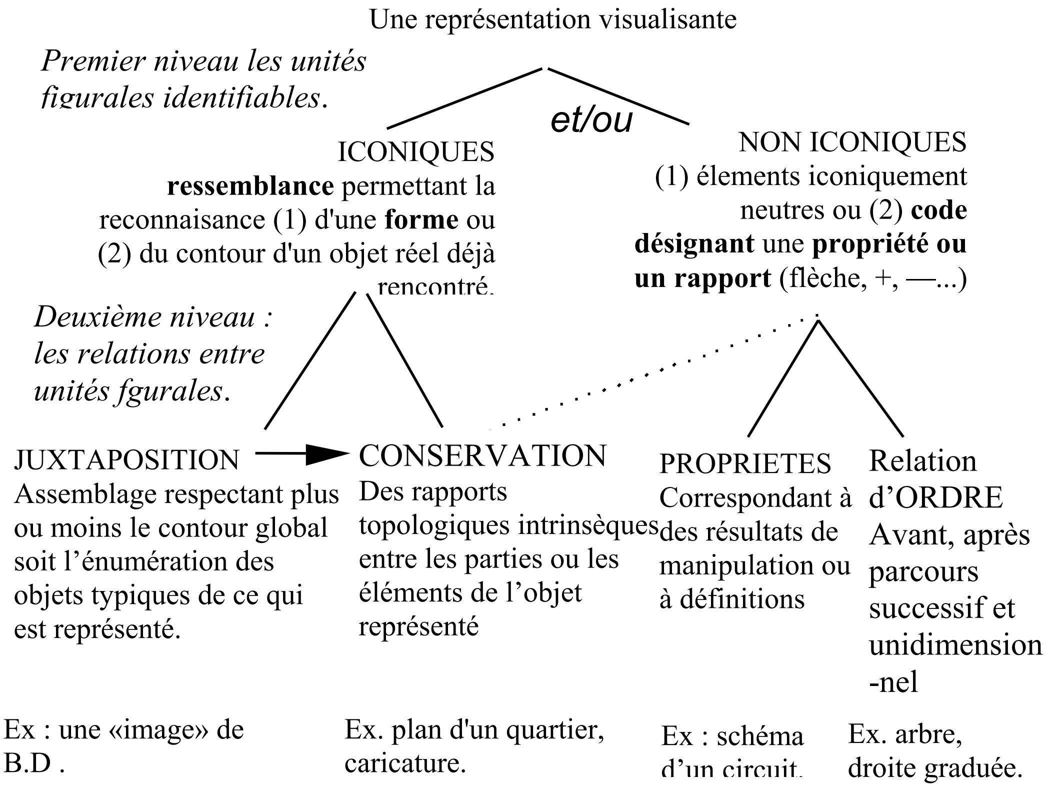


Figure 8 : Les deux niveaux d'articulation du sens dans une visualisation d'ordre sémiotique.

Les exemples indiqués correspondent à des cas purs que l'on peut trouver dans des documents didactiques. On peut alors voir apparaître un clivage entre les visualisations iconiques, qui fonctionnent sur une ressemblance entre ce qui est dessiné et ce qui est représenté, et les visualisations non iconiques qui exigent la surimpression d'un codage d'informations. Or l'activité de codage échappe à la visualisation ou la neutralise (supra I, 2.) On peut aussi remarquer que la ressemblance peut s'établir soit à un seul des deux niveaux ou aux deux : d'où des variations possibles pour représenter un visage, par exemple, ou n'importe quel objet de l'environnement.

Cette distinction de deux types d'unités figurales et de deux niveaux d'articulation permet d'analyser les productions des élèves et de mesurer la lente évolution de leurs productions, allant d'une simple juxtaposition d'unités figurales jusqu'à ces représentations que Piaget qualifiait de “formelles”. Au premier rang de ces représentations “formelles”, c'est-à-dire des représentations où le codage commande totalement la visualisation, il faut compter les droites munies de repères. Or on y recourt souvent pour “faire voir”, en oubliant que ces représentations formelles sont aussi des représentations polymorphes (si ce terme a un sens pour les représentations D1 !) car elles ne sont pas composées des mêmes unités figurales.

4.2. Une visualisation polymorphe : les “droites” munies de repères

On recourt souvent à une droite pour visualiser tout ce qui implique la prise en compte de phénomènes de succession ou l'une des propriétés de la relation d'ordre. Mais, dans toutes les représentations ainsi produites, le tracé de la droite est un support de rangement unidimensionnel (effaçable ou non) *pour des repères qui sont des unités figurales non iconiques et qui doivent être associées à d'autres unités figurales non-iconiques telles que* des noms, des nombres, des flèches, des symboles d'opérations. On peut ainsi obtenir beaucoup de “droites *quelque chose”* qui peuvent être classées selon les fonctions qu'elles remplissent (Duval 1999 p. 62.)

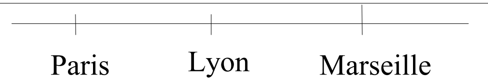
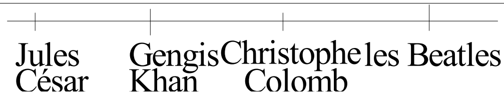
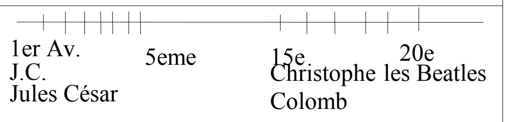
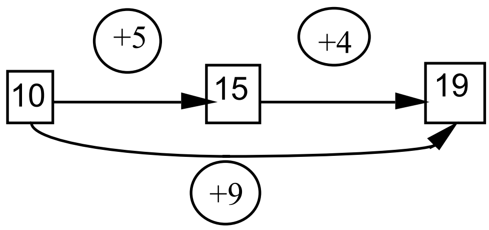
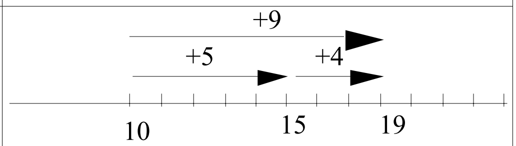
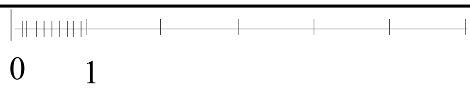
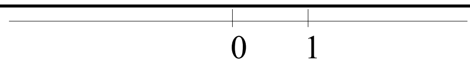
I. Simple **fonction de synopsis**	1. Villes ou étapes d'un itinéraire	
	2.Un ordre temporel	
	3. Frise chronologique (ici les intervalles deviennent des unités figurales permettant d'évaluer des distances)	
II. **Fonction de matériau** pour des déplacements ou pour d'autres types d'opérations	4. Schéma relationnel : des unités figurales spécifiques, (ex. **des flèches) doivent être superposées aux repères de la "droite".**	
	5. Une variante isomorphe	
III **Fonction de traitement** fondée sur un principe de construction par subdivision indé-finement réitérable	6. Droites graduées (outil de mesure)	
Limite du processus de subdivision pour repérer les points	7. Droite des réels	

Figure 9 : Variétés des représentations visualisantes utilisant la "droite" proposées pour faciliter la "compréhension".

La liste indiquée n'est évidemment pas exhaustive. Il y a autant de "droites (quelque chose)" que de combinaisons des différents types d'unités figurales iconiques et non iconiques possibles.

Hormis le recours à des repères, les six visualisations ci dessus ne mobilisent pas les mêmes unités figurales. En outre, toutes les unités figurales mobilisées sont des unités non iconiques. Il suffit pour s'en rendre compte de s'en tenir au premier niveau d'analyse des unités figurales mobilisées.

	Unités visuelles iconiquement neutres				Unités discursives codant les unités visuelles		
UNITÉS FIGURALES PERTINENTES	Repères	**(sous)-repères** construits par subdivision	Intervalles	**Flèches**	**Symboles d'opérations**	Nombres codant **systématiquement** les repères	Nombres ou noms codant **contextuellement** les les unités repérées
I.1	oui						oui
I.2	oui						oui
I.3	oui		oui				oui
II.1	oui			oui	oui		oui
II.2	oui			oui	oui		oui
III.1	oui	oui	oui			oui	
III.2	oui		oui			oui	oui

Figure 10 : Analyse de différentes représentations utilisant la “droite”.

Il y a donc un saut considérable de fonctionnement représentatif quand on passe d'une droite I.3 à une droite II.2 ou III.1. On ne saurait trop souligner l'hétérogénéité de ces trois types de représentations unidimensionnelles : ils peuvent être d'autant plus opaques que les repères peuvent donner lieu à des codages multiples et hétérogènes. Plus particulièrement, on ne saurait trop souligner la complexité de II.2 : la lecture du codage des flèches superposées se fait dans une direction différente de celle du parcours des repères sur la droite : la visualisation opératoire relève d'un balayage horizontal, tandis que les indications pour cette visualisation opératoire requiert un balayage transversal.

Venons en, maintenant, à la question souvent posée : peut-on considérer ces différentes “droites”, ou seulement certaines d'entre elles, comme un registre ? Une telle question peut être symptomatique de la confusion souvent faite entre représentation et registre de représentation. Sans en reprendre ici la description et la définition, rappelons l'un des intérêts méthodologique et théorique de la notion de registre (Duval 1995) : elle permet d'analyser la complexité cognitive propre aux différents types de représentations sémiotiques qui sont mobilisés dans l'activité mathématique et à ceux plus variés encore que l'enseignement des mathématiques conduit à introduire. Ainsi, par exemple, n'importe quelle figure géométrique mobilise simultanément plusieurs registres de représentations, chaque registre ayant ses moyens spécifiques de traitement. D'où cette conséquence qui n'est pas négligeable pour les apprentissages de la géométrie : l'utilisation des figures géométriques par un élève suppose que se soit mise en place pour lui la coordination des registres mobilisés. On pourrait donc dire qu'une représentation qui mobilise simultanément deux registres (parfois trois) est une représentation mixte. Et c'est ici manifestement le cas ici pour les “droites quelque chose”, à cette différence près qu'ici seul un des deux registres mobilisés donne un moyen de traitement. L'intérêt de la notion de registre ne se limite donc pas à souligner l'importance de la coordination des registres de représentation dans l'apprentissage, il est aussi de donner un outil pour analyser le contenu et la complexité cognitive de toutes les représentations, aussi bien de celles qui ne relèvent que d'un seul registre que de celles qui sont représentations mixtes.

On peut d'ailleurs se demander si on peut encore parler de visualisation pour toutes ces représentations ayant pour support une “droite” : elles ne sont qu'une mise en ordre linéaire de repères discriminables, et la valeur représentative de ces repères dépend uniquement du codage qui en est fait (celui-ci renvoyant à un autre registre pour le traitement.) Or une telle mise en ordre linéaire permet seulement de simultanéiser des appréhensions successives. Il suffit de considérer III.2 pour constater pour constater qu'il n'y a rien à voir concernant les nombres réels (les irrationnels.)

4.3. Un cas d'espèce étrange : les figures en géométrie

À la différence des différentes représentations utilisées aussi bien dans les sciences ou dans les textes documentaires, les figures géométriques semblent échapper à la distinction de deux niveaux d'articulation du sens. Et cette exception apparente est remarquable. Car loin d'invalider la pertinence du mode d'analyse proposé, elle contribue à montrer la complexité cognitive invisible de la visualisation géométrique. Prenons tout d'abord le premier niveau d'articulation du sens et demandons nous quelles sont les unités figurales que contient une figure donnée. Négligeons les informations codées (lettres, sigles de propriété, valeurs numériques...) qui reportent les hypothèses sur le dessin et concentrons nous sur le “dessin” qui est construit, ou constructible, instrumentalement (sinon il ne pourrait pas donner lieu à des tâches de reproduction ou même de construction !.) Notre question revient donc à se demander ce que l'on voit “au premier coup d'œil sur le dessin”. Ce sont évidemment soit des formes D2 (des “zones” ou des “surfaces”) soit une forme D3 (un “solide” ou un “volume”) qui est elle-même partagée en faces visibles D2... Cela dépend du jeu automatique et non-consciemment contrôlable des mécanismes gestaltistes d'organisation perceptive. Et chacun sait combien il est difficile, sinon presque impossible, de voir ensuite autre chose que ce que l'on a identifié au premier coup d'œil sur un dessin. Rappelons, pour qui en douterait, les plaintes indéfiniment récurrentes des enseignants sur les difficultés des élèves à imaginer un “tracé auxiliaire” dans une figure, à prolonger un trait au delà d'un contour fermé (c'est-à-dire à voir le support “droite” d'un côté, ou à voir un réseau de droites sous-jacent à une forme D2), à réorganiser les sous-figures d'une configuration (voir des parallélogrammes là où l'on reconnaît un assemblage de triangles et réciproquement) etc... En d'autres termes, **cela veut dire que les unités vues et identifiées sont des unités D2 ou D3 et non pas des unités D1, encore moins des unités D0,** qui elles sont pourtant les seules unités codées par des lettres ou des valeurs numériques !!! Et nous touchons là au point décisif pour notre question : passer de D3 en D2 (lorsqu'il s'agit par exemple de considérer des plans de section d'un solide) et, surtout, passer de D2 en D1 représente non seulement une gymnastique mentale mais une gymnastique visuelle qui peut parfois prendre des années et qui requiert, tous cas, un apprentissage spécifique. Et nous ne parlons pas du passage de D1 en D0, puisque les seuls points représentables ou visibles sont toujours des points exceptionnels ou mis en vedette (sommet d'un polygone, extrémité d'un segment, intersection de droites, position surlignée sur une ligne droite ou courbe, unité libre en dehors d'une figure....)

Ces rappels sur ce que l'on voit au premier coup d'oeil sur une figure géométrique (c'est-à-dire construite avec un instrument produisant visuellement une propriété géométrique -la primitive de l'instrument-) et sur ce que l'on ne peut s'empêcher de continuer à voir ensuite nous conduisent aux trois observations suivantes :

- (1) toute activité géométrique sur une figure implique des déplacements continuels dans l'échelle des dimensions D3-D0, l'activité discursive de description ou de raisonnement privilégiant toujours la prise en compte des organisations aux dimensions inférieures tandis que la visualisation fait prédominer les organisations aux dimensions supérieures (Duval 1995 p.191-192),
- (2) les unités figurales que l'on peut voir ou reconnaître dans une figure sont toujours relatives à un nombre particulier de dimensions qui s'impose au regard ou à celui que l'on s'impose dans la manière de regarder. Cela veut dire que la décomposition d'une forme D2 simple (triangle, quadrilatère) en une configuration de formes D1 (les côtés pour considérer leurs relations) suppose que **l'on “casse” dimensionnellement et non pas gestaltiquement cette unité figurale iconique D2 !**
- (3) casser dimensionnellement une unité figurale Dn en une configuration d'unités Dn-1 est une opération totalement différente de

casser gestaltiquement une configuration de formes, par exemple D2 en une autre configuration de formes D2 (voir des parallélogrammes dans un triangle partagé en triangles qui apparaissent en joignant les milieux du triangle de départ.)

Ces trois observations nous permettent de comprendre pourquoi les figures géométriques, à la différence du fonctionnement représentationnel de tous les autres types de visualisation sémiotique, présentent cette originalité extraordinaire : **les unités figurales discernables dans une figure ne sont pas constantes mais peuvent varier à la fois dimensionnellement et gestaltiquement en fonction du problème à résoudre.** Et c'est cette variabilité qui fait la puissance aussi bien heuristique qu'illustrative des figures en géométrie. Elles sont associativement plus fluides et plus riches que les tâches du célèbre test de Rorschach. Malheureusement elles inspirent souvent moins les élèves ! La prise en compte du second niveau d'articulation du sens dans les figures nous conduirait à la fois à prendre en compte le rôle des instruments ainsi que le rôle de déductions locales articulant théorèmes et constatations (les données apparaissant dans les transformations du regard sur la figure dans une démarche heuristique.)

On ne peut que regretter que l'introduction de la plus fréquente de la géométrie se fasse dans la méconnaissance et le plus souvent à l'encontre de ces trois caractéristiques de la visualisation géométrique. L'accent mis sur la reconnaissance des variétés de figures (de triangles ou de quadrilatères par exemple) ou la croyance que partir des unités figurales D1 et D0 serait plus simple en sont les expressions les plus typiques. Dans un cas, l'apprentissage de la géométrie se ramène à celle de la confection d'un herbier de formes D2 ou D3 et, dans l'autre, à la constitution d'un discours aveugle, c'est-à-dire sans aucune prise sur le fonctionnement visuel des figures. Quels types d'activités peuvent alors introduire les élèves dans les changements dimensionnels du regard que la visualisation géométrique exige, et cela dès l'enseignement primaire ? Ni les tâches de construction de figures, contextualisées ou non dans des situations de transmission de message, ni même les reproductions de figures ne semblent adaptées à cet objectif. Pour cela il faut proposer des tâches de restauration de figures, qui posent de véritables problèmes pour passer d'une vision spontanée d'unités D2 à une analyse en termes d'unités D1 et pour aussi apprendre à casser la stabilité des unités D2 identifiées au premier coup d'œil (Perrin 2003.)

4.4. Quelle (s) articulation (s) entre discours et visualisation ?

L'analyse des rapports entre discours et visualisation, ou dans une situation particulière donnée entre un énoncé et un “dessin” (diagramme, schéma, figure...), ou entre un texte et une image requiert que l'on réponde à trois questions.

La première porte sur l'existence de leurs correspondances : elles déterminent ce que l'on pourrait appeler la “zone d'intersection” entre le contenu de l'énoncé et le contenu du “dessin”. Cela concerne la pertinence des visualisations proposées comme des aides. *Force est de constater que, cette zone est souvent très réduite.* Le rapport entre l'énoncé et l' “image” n'est souvent perceptible que pour l'expert ou pour celui qui en a fait le “montage”.

La deuxième question porte sur le passage de l'un à l'autre. Il s'avère très souvent, en mathématiques, qu'une même visualisation puisse être décrite par une grande variété d'énoncés différents, comme si elle explicitait leur organisation commune. Nous prendrons ici deux exemples. Le premier est, évidemment, celui des représentations graphiques cartésiennes par rapport à l'écriture algébrique de relations : ainsi les valeurs numériques du coefficient directeur d'une fonction affine ou de sa constante peuvent varier sans que les valeurs visuelles qualitatives du graphe de cette fonction changent. Le second concerne les énoncés de problèmes à double description. Ainsi, quelle que soit la situation concrète évoquée, quelle que soit la place de la question, quelle que soit la taille des nombres, quelle que soit la présence ou l'absence de données inutiles, tous les problèmes additifs se visualisent par le même type de schéma : soit unidimensionnel soit bidimensionnel (Figure 4.) Le choix entre ces deux types de visualisation dépend de l'importance que l'on donne au calcul relationnel ou, au contraire, à la compréhension de l'énoncé du problème pour la résolution des problèmes additifs. Dans tous ces cas, **l'intérêt d'une visualisation pour les problèmes dont les énoncés superposent deux descriptions hétérogènes, n'est pas d'être utilisé pour aider à résoudre un ou des énoncés particuliers mais pour comprendre et résoudre l'ensemble de toutes les variations possibles d'énoncés.**

La troisième question s'inscrit dans une perspective d'analyse fonctionnelle, et non plus seulement structurale, comme c'était le cas pour les deux précédentes. En effet, lorsque dans le déroulement d'une démarche, on fait appel à une description verbale et à une représentation visualisante, simultanément ou alternativement, le schéma que l'on mobilise peut remplir des fonctions très différentes : illustration, appréhension synoptique d'une organisation, apport d'informations complémentaires, matériau de travail... On peut ainsi distinguer au moins huit fonctions différentes que les représentations auxiliaires peuvent remplir par rapport à une représentation considérée comme principale, c'est-à-dire comme autosuffisante (Duval 1999 p. 57-67.) Par exemple on peut se demander si les deux représentations de la somme d'une suite d'entiers proposées plus haute (Figure 6) remplissent les mêmes fonctions. L'intérêt ou la valeur didactique que l'on prête à un type de visualisation est donc relatif à la fonction que l'on fait remplir à ce type de visualisation. L'absence d'analyses fonctionnelles, systématiques et contrôlables, des types de visualisation que l'on propose ou que l'on fait construire dans des séquences d'activités est un facteur important dans les difficultés auxquelles se heurtent leur bonne utilisation dans les classes.

5. Descriptions et représentations : quelques questions décisives pour les recherches sur l'apprentissage des mathématiques

Toutes les analyses précédentes des démarches de description ainsi que de la variété des descriptions possibles nous ont sans cesse ramené au problème de production de représentations comme à celui de la compréhension des représentations produites. L'activité de représentation est au cœur même de toute démarche de description. Et pour mieux souligner cette coextensivité, il suffit de rappeler qu'il ne peut pas y avoir de connaissance scientifique sans des descriptions relatives à des observations et de recueil de données (*supra* Ib.) Au cours de cet exposé, nous avons cherché à voir comment cela aussi se vérifiait pour l'apprentissage des mathématiques. Et le lecteur aura vite perçu que c'est par la prise en compte en compte des registres de représentation que nous avons pu avancer dans cette analyse. Bien sûr, il ne s'agit pas de rabattre l'activité mathématique sur une activité de description, qui justement se présente de manière si différente en mathématiques et dans les autres sciences. Mais la mise en évidence de l'importance des activités de description en mathématiques permet de voir que *la prise en compte des représentations dans l'analyse de l'acquisition des connaissances scientifiques et mathématiques ne peut pas être réduite à la seule explication des erreurs des apprenants !* C'est même se condamner à mal poser le problème des apprentissages que d'entrer dans cette logique.

Rappelons d'ailleurs cette donnée historique. Toute la réflexion épistémologique et cognitive sur la construction des connaissances mathématiques de Descartes à Frege et Hilbert s'est développée autour de la question des rapports entre représentation et objet, et tous les progrès dans cette réflexion se sont trouvés liés à la reconnaissance du caractère sémiotique des représentations ainsi qu'à l'élaboration de méthodes pour analyser les représentations (Duval 1998.)

Que l'on prête attention à la grande variété des démarches description qui sont sollicitées dans l'enseignement des mathématiques, aux caractéristiques du fonctionnement cognitif que le développement des mathématiques n'ont cessé de développer depuis plus de trois siècles ou aux problèmes de compréhension des mathématiques quels que soient les contenus conceptuels, on se retrouve face à quelques questions décisives pour la recherche. Et il nous semble d'autant plus essentiel d'essayer de les formuler, qu'une focalisation, trop souvent exclusive, sur le quotidien du travail dans la classe les fait souvent perdre de vue. Nous en retiendrons quatre.

5.1. Comment analyser les “représentations” ?

Toute représentation doit être analysée par rapport aux deux “réalités” qui la constituent : d'une part ce qu'elle représente et d'autre part le système par lequel elle est produite.

La première relation est évidemment la relation qui est classiquement retenue. Non seulement cette relation conduit à distinguer soigneusement le contenu de la représentation et l'objet représenté, “l'image” et le “modèle” (Platon *République* 509e-510), mais elle permet de distinguer plusieurs types de représentation, par exemple en fonction de l'existence, ou non, d'une ressemblance entre le contenu de la représentation et l'objet de la représentation. C'est sur la présence ou l’absence de cette relation que Peirce s'est appuyé pour proposer ses célèbres classifications de représentations.

La deuxième relation est généralement méconnue. On se contente généralement d'attribuer la production des représentations directement au sujet lui-même, comme si elles étaient le reflet global de son savoir. Cela revient non seulement à réduire le sujet à sa seule conscience actuelle, mais à oublier la diversité et l'hétérogénéité des représentations produites. Or cette diversité des représentations produites par les sujets, quel que soit leur niveau de savoir, s'explique par la diversité des systèmes producteurs de représentations dont ils disposent, ou plus exactement qui constitue leur “architecture cognitive” (Duval 2002.) D'où les trois conséquences immédiates :

(1a) Le contenu de la représentation d'un objet varie considérablement selon le système mobilisé pour produire la représentation de cet objet. En d'autres termes ce que le contenu d'une représentation explicite concernant les propriétés ou les particularités d'un objet ne dépend pas seulement de l'objet ou des intentions du sujet, mais il dépend également des possibilités et des limites spécifiques au système mobilisé.

(1b) Une classification de la diversité des représentations ne peut être fondée que sur les systèmes producteurs de représentation (Duval 1999 p. 34-48.) On voit alors apparaître deux grand types de systèmes producteurs : les systèmes physiques et neuronaux qui produisent automatiquement des représentations, et les systèmes sémiotiques qui permettent la production intentionnelle de représentations. Les deux seuls types de relation possibles entre le contenu d'une représentation et l'objet représenté dépendent uniquement de cette dichotomie des systèmes producteurs.

Une représentation : quelque chose QUI SE TIENT À LA PLACE DE quelque chose d'autre.

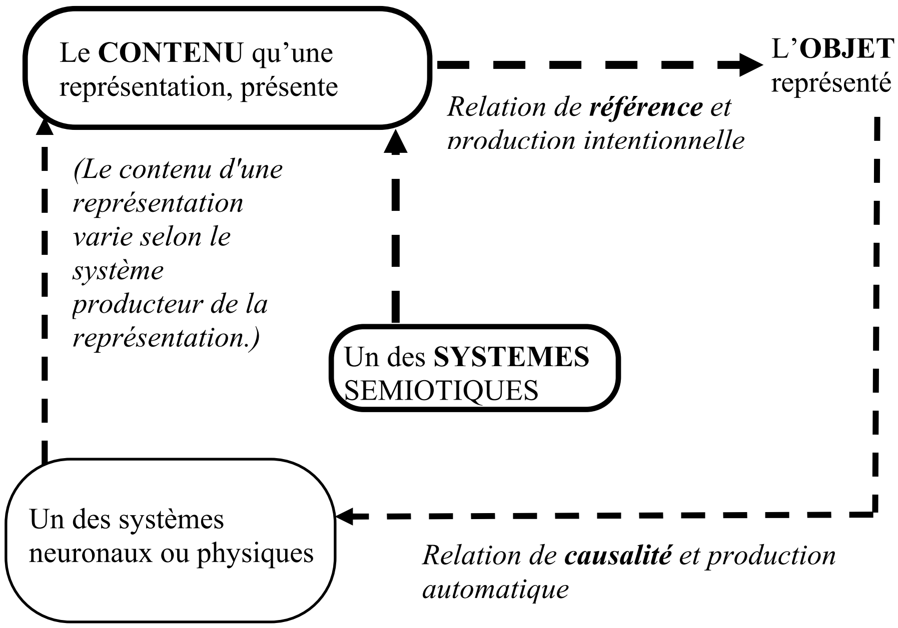


Figure 11 : Les trois aspects constitutifs d'une représentation.

On ne peut pas distinguer véritablement le contenu d'une représentation et l'objet qu'elle représente sans prendre en compte le système par lequel la représentation est produite. La possibilité de représentations différentes d'un même objet dépend de la diversité des systèmes dont un sujet dispose. On voit ici l'équivoque de l'expression “représentation mentale” dans la mesure où sa production peut aussi bien relever de systèmes non sémiotiques que de systèmes sémiotiques.

La psychologie cognitive s'intéresse prioritairement aux représentations produites par toutes les organisations neuronales. Et ce que nous avons appelé “registres de représentation sémiotique” est un sous-ensemble des systèmes sémiotiques : ils doivent respecter un minimum de règles non seulement pour que les représentations produites soient identifiables par autrui, mais aussi pour permettre une transformation contrôlable des représentations, c'est-à-dire leur traitement ou leur conversion (Duval 1995 p. 36-39.) Une classification plus détaillée des différents types de représentation sémiotique peut être faite : elle doit prendre en compte à la fois la distinction entre représentations discursives et représentations non discursives et celle entre représentations multifonctionnelles, qui sont non algorithmisables, et les représentations monofonctionnelles qui le sont (Duval 2000c p. 65.)

(1c) *L'analyse cognitive d'une représentation sémiotique doit se faire à partir des systèmes par lesquels elle est produite.* Son outil principal est la prise en compte des variations de contenu chaque fois que l'on change de registre pour représenter un objet. C'est de cette manière, par exemple qu'une analyse cognitive du discours est radicalement différente d'une analyse linguistique du discours ou même d'une analyse qui n'aurait pour but que de détecter la mise en œuvre ou non de “concepts”. Cette approche permet de définir des variables indépendantes cognitives, qui peuvent également être des variables didactiques dans l'organisation des tâches.

5.2. Les représentations sémiotiques sont-elles intrinsèques ou extrinsèques au fonctionnement de la pensée en mathématiques ?

C'est évidemment la question intéressante mais qui évidemment n'intéresse pas puisque la réponse serait a priori évidente du fait que les mathématiques relèvent de la pensée et non pas du langage. En réalité, ce blocage repose sur l'étrange réduction des “représentations” à de simples “support” venant remplir certaines fonctionnalités didactiques. Or si nous partons de la relation fondamentale pour l'analyse des représentations, celle de leur production, on peut tout de suite remarquer qu'une représentation sémiotique peut être produite (Duval 1999 p. 57-62) :

- *à titre d'auxiliaire* (et donc de manière transitoire) *par rapport à une autre représentation*, qui elle apparaît comme représentation principale : leur fonction est d'aider la compréhension de la représentation principale.... Ainsi, les représentations données en exemple plus haut dans les Figures 4, 5, 6, 9 sont des représentations auxiliaires : elles doivent aider la compréhension de l'énoncé, la recherche d'une solution, le sens d'opérations sur des nombres, etc... Mais les élèves peuvent se fabriquer leurs propres représentations,
- *à titre intrinsèque* (et donc de manière autosuffisante) pour remplir celle des trois fonctions cognitives majeures qui est prioritaire en mathématique : le traitement. Ainsi toutes les représentations qui relèvent de registres discursifs monofonctionnels et sans lesquelles aucun calcul ne serait possible sont intrinsèques au fonctionnement de la pensée mathématique. Mais il en va de même pour la langue dans certaines situations, car elle est indispensable pour l'énonciation des propositions, quel que soit leur statut théorique (définition, théorème, conjecture... .)

	REPRÉSENTATION DISCURSIVE (Uniquement des règles de combinaison d'unités, entraînant un ordre linéaire pour l'appréhension des chaînes produites)	**REPRÉSENTATION NON-DISCURSIVE**
REGISTRES MULTI-FONCTIONNELS Les traitements effectués dans ces registres ne sont pas algorithmisables	(Langue naturelle commune permettant des associations verbales et des énoncés) *Type de production impliquant des opérations discursives (à trois niveaux d'articulation de sens) :* *Description, explication,* *Raisonnement :* - *argumentation à partir d'observations, de croyances.* - *déduction valide à partir de définitions ou de théorèmes)*	(Formes et configuration de formes **en dimension 2 ou 3,** puis par médiation instrumentale en D 1) *Type de production :* ***ICONIQUE*** *(dessins, caricatures, croquis...)* ***NON-ICONIQUE*** *(les figures géométriques construites avec un instrument et donnant lieu à des appréhensions discursives et opératoires)*
	REPRÉSENTATIONS AUXILIAIRES LIBRES pour réduire la distance cognitive des conversions	
REGISTRES MONO-FONCTIONNELS les traitements sont principalement des algorithmes	(Codes permettant l'association directe d'une unité à l'unité d'un autre système ou à un objet (structure dyadique des signes) : systèmes de numération, symboles d'opérations, de variables, de quantificateurs...) *Type de production :* *des expressions permettant des substitutions univoques, condition de tout calcul*	(Combinaison D2 de formes D1 et D0 orientées ou non orientées) *Type de production :* *diagrammes, schémas, graphes, cartes...* *Les graphes cartésiens permettent des traitements (interpolation, extrapolation), les autres productions répondent à d'autres fonctions que celle de traitement*

Figure 12 : Les différents registres de représentations utilisés en mathématiques. Les flèches représentent les différentes conversions requises par l'activité mathématique.

Or, généralement quand on parle de représentations sémiotiques, on scotomise toutes les représentations produites à titre intrinsèque, comme si les objets mathématiques étaient accessibles en dehors de tout système de représentation sémiotique et comme si les possibilités de traitement (raisonnement ou calcul) n'étaient pas liées aux systèmes sémiotiques utilisés, et comme si les représentations sémiotiques étaient subordonnées aux représentations produites par des systèmes non sémiotiques... Résultat de cette scotomisation : les représentations sémiotiques se trouvent assimilées à ces représentations auxiliaires qui d'une certaine manière restent extrinsèques aux démarches mathématiques. Or il ne peut y avoir de recherche sur la pertinence et l'utilité réelle de toutes les représentations auxiliaires qu'en les mettant en relation avec les autres représentations sémiotiques que l'on utilise de manière intrinsèque.

C'est la raison pour laquelle, dans l'analyse de l'activité mathématique à des fins d'apprentissage, nous prenons comme notion primitive non pas celle de “concept” mais le couple {représentation, objet} (Duval 2002a.)

5.3. Les premiers apprentissages en mathématiques : acquisitions conceptuelles ou acquisitions surtout fonctionnelles ?

Les apprentissages des toutes premières années de la vie, ceux au cours desquels le tout jeune enfant apprend à utiliser sa voix pour reproduire les sons des paroles qu'il entend, ses mains dans des gestes de plus en plus volontaires et plus en plus fins, à coordonner sa vision et ses gestes... sont des apprentissages fonctionnels. Ce qui caractérise les apprentissages fonctionnels c'est le fait qu'un sujet apprend à faire fonctionner et à maîtriser un système producteur qui est là à sa disposition et qui fait déjà partie de lui-même. Il y a une expression qui définit parfaitement un apprentissage fonctionnel c'est “prendre en main” : en ce sens on peut dire qu'un enfant apprend à prendre en main ses mains, sa voix, les possibilités d'exploration de ses sens, les possibilités d'action de son corps. Merleau-Ponty (1945, p. 161-162, 289) expliquait ainsi pour la main : “un mouvement est appris lorsque le corps l'a compris, c'est-à-dire lors qu'il l'a **incorporé** à son “monde”, et mouvoir son corps c'est viser à travers lui les choses, c'est le laisser répondre à leur sollicitation qui s'exerce sur lui sans aucune représentation”. Il en va de même pour tous les systèmes culturels sémiotiques, à commencer par la langue, qui fonctionnent dans le milieu relationnel où l'enfant se développe et qu'il doit aussi s'incorporer pour enrichir les potentialités d'actions et de représentation de son “architecture cognitive” initiale. On ne saurait donc confondre les acquisitions fonctionnelles avec des acquisitions conceptuelles.

Or, dans la mesure où l'activité mathématique implique de faire fonctionner, d'une manière de plus en plus en maîtrisée, des registres de représentation communs à d'autres domaines de connaissance et des registres spécialisés pour les traitements mathématiques, on peut se demander si les premiers apprentissages en mathématiques ne doivent pas prendre autant en compte les acquisitions fonctionnelles que les acquisitions conceptuelles. Cette question est d'autant plus importante qu'à la suite d'une ou de deux décennies de référence inconditionnelle au constructivisme, on en est venu à penser tous les apprentissages mathématiques en termes d'acquisitions conceptuelles. Et cela nous renvoie à un problème plus fondamental.

L'étude des changements impliqués, d'une part, par la multimodadilité sensorielle (voir, entendre respectivement dans l'écrit et la parole...) et, d'autre part, par la variété des registres de représentation sémiotique constitue l'entrée majeure pour analyser les mécanismes de compréhension et les problèmes d'incompréhension dans les apprentissages. Car il y a là un jeu considérable de variations, aussi bien pour les contenus accessibles que pour les opérations possibles, chaque fois que l'on change de modalité ou que l'on change de registre. *La connaissance ne peut véritablement commencer à se construire que lorsqu'une synergie commence à s'établir, chez le sujet, entre les fonctionnements des différents systèmes représentatifs, sensoriels comme sémiotiques.* Naturellement cela présuppose un certain degré de maturation ou de maîtrise pour le fonctionnement spécifique de chaque système, cela se fait souvent de manière indépendante et non synchrone. *Les stades que l'on repère dans le développement des acquisitions ne concernent en réalité que des émergences en surface d'un début de synergie.* C'est l'oubli de cette différence qui non seulement a conduit à des erreurs d'analyse dans le développement de l'enfant (par exemple sur le rôle du langage dans le développement de l'intelligence) mais à confondre la construction de connaissances et la construction du sujet capable de ces connaissances.

En mathématiques, c'est la synergie, non naturelle, entre des registres de représentation sémiotique hétérogènes qui est évidemment fondamentale. Et la géométrie, à l'opposé de l'algèbre, constitue le domaine où cela apparaît de la manière la plus spectaculaire. Mais bien qu'apparemment monoregistre, l'entrée dans l'algèbre repose également sur une synergie de registres de représentation.

5.4. Un même modèle général pour rendre compte de l'apprentissage des mathématiques ?

Cette question revient à se demander si les problèmes d'apprentissage sont fondamentalement les mêmes selon que l'on considère les tous jeunes enfants, les élèves durant la période de scolarisation obligatoire ou les étudiants de l'université engagés dans des filières spécialisées. On peut ainsi considérer trois niveaux :

- celui d'émergences spontanées d'activités numériques ou des premières représentations de l'espace que l'on peut observer chez les jeunes enfants et que l'on retrouve, avec des manifestations diverses, dans toutes les cultures,
- celui des mathématiques enseignées impliquant l'appropriation de connaissances et d'outils de représentation mathématiques par tous les élèves d'une classe d'âge,
- celui des mathématiques avancées qui requièrent un travail quasi à temps plein et qui ne concernent qu'une partie très infime de la population.

Très souvent, les recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques tendent à minimiser les différences radicales entre ces niveaux et cherchent à généraliser un modèle qui, en fait, se réfère exclusivement à un seul niveau. Ainsi, vouloir importer un modèle de pratique issu des mathématiques avancées se heurte à de sérieuses limites (Duval, 2000a p. 165-166.) À l'inverse, les didacticiens ont bien perçu l'inadéquation radicale des études de psychologie qui s'en tiennent au niveau des émergences pour étudier la diversité et la complexité des apprentissages du C.P. jusqu'à la fin du Lycée. Cette inadéquation radicale est facile à expliquer. Au niveau des émergences spontanées, le développement de l'activité mathématique est indépendant de tout recours à l'écriture et ne dépend réellement que d'une “pratique orale” (Duval, 2000a p.146-147.) Au contraire, au niveau de la scolarisation obligatoire, le développement de l'activité mathématique est au contraire lié à la pratique de l'écriture (système de numération, écriture littérale, algèbre..) et de tous les moyens de représentation visuelle.

6. Conclusion

Lorsqu'on regarde les conditions d'entrée, pour de jeunes élèves, dans un processus d'acquisition de connaissances aussi bien scientifiques que mathématiques, on ne peut qu'être frappé par le caractère crucial des démarches de description. L'enjeu des démarches description est la constitution d'une base d'observations personnelles, de plus en plus large et surtout de plus en plus fine, des phénomènes qui relèvent d'un champ d'investigation. C'est cela qui permet de construire scientifiquement des connaissances et qui “donne du sens”, dans la mesure que c'est là le moment fondamental où s'amorcent à la fois la découverte et la prise de conscience. Décrire, c'est d'abord recueillir les *data* pertinents, ce qui implique leur intégration dans un processus de représentation qui doit être nécessairement multiregistre.

Cela est évidemment trivial dès qu'il s'agit de sciences où l'observation, les manipulations, les expériences ont en quelque sorte le premier et le dernier mot. Mais en mathématiques, cela peut sembler moins évident. Non que l'on y méconnaisse les activités de description (principalement lorsqu'il s'agit de “figures géométriques” à construire, à faire construire, à analyser...), mais celles-ci ne peuvent y apparaître que secondaires, car l'activité privilégiée est la résolution de problème, et celle-ci appelle des démarches d'explication et de justification qui sont au moins tout aussi fondamentales pour la compréhension proprement mathématique. Or ici nous nous heurtons à des questions essentielles aussi bien pour les apprentissages des élèves que pour la formation des enseignants : qu'est-ce qu'un problème mathématique ? Qu'est-ce que résoudre un problème mathématique ? À quelles conditions résoudre un problème permet-il des acquisitions transférables ? Naturellement, quand nous parlons de “problèmes”, il s'agit de problèmes pour des élèves de primaire ou de collège, bref des *non-problèmes* depuis fort longtemps pour les mathématiciens.

C'est par rapport à ces interrogations que nous avons introduit la distinction entre description complète d'une situation et description minimale faite dans un énoncé, une description complète donnant lieu à une variété de descriptions minimales qui peuvent apparaître très différentes entre elles. Les problèmes mathématiques proposés aux élèves à des fins didactiques sont toujours une description minimale parmi d'autres, la solution consistant à remonter vers l'un des aspects de la description complète qui a été volontairement omis. Cette analyse de la notion de problème pour élèves permet de mettre en évidence deux points essentiels :

(1) La génération de problèmes mathématiques pour l'enseignement relèvent en profondeur d'une même procédure, quelle que soit la manière dont chaque enseignant a le sentiment de s'y prendre pour élaborer un problème. Et avec cette procédure, nous pouvons générer tous les problèmes possibles et donc évaluer le poids des variables cognitives et didactiques qui jouent sur la remontée vers la description complète, laquelle est relative à une procédure mathématique ou à des propriétés mathématiques. Et cela permet d'établir une graduation contrôlable du coût ou de la difficulté de décryptage des différentes descriptions minimales

(2) Il y a des conditions pour la compréhension du problème et de sa résolution par les élèves, donc pour une réelle transférabilité. Celle-ci ne se détermine pas au niveau de l'activité concernant un ou deux problèmes mais à celui de l'ensemble des problèmes générables. Un réel travail permettant la compréhension et l'appropriation de la résolution de problème ne doit pas se faire à partir d'un énoncé de problème mais à partir du passage d'une description complète à des descriptions minimales et dans les passages inverses. Tout énoncé de problème et toute variation dans les énoncés de problèmes doivent être regardés en fonction de cet écart constitutif du problème. C'est pourquoi la question d'un problème d'enseignement correspond si rarement à une véritable question, c'est-à-dire à un questionnement.

C'est d'ailleurs dans le cadre de démarches de description que l'on obtient les productions d'élèves les plus personnelles et les plus diversifiées. Et cela aussi bien dans l'observation des phénomènes à l'aide de dispositifs instrumentaux que dans la résolution de problèmes mathématiques. Cela constitue non seulement une source considérable de données qualitatives mais également un défi non moins redoutable aussi bien pour le chercheur que pour l'enseignant. Comment interpréter les productions verbales et les dessins et schémas produits par les élèves ? Force est de reconnaître que l'utilisation reste le plus souvent impressionniste (la compréhension du lecteur, sa compétence faisant foi) ou rhétorique (on se contente de citer des extraits pour illustrer.) Et surtout cela ne permet pas d'effectuer des comparaisons contrôlables, voire parfois quantifiables, entre des productions différentes pour les mêmes élèves en des situations différentes ou à des échelles de temps différentes. Comment alors pouvoir discerner véritablement les évolutions ou les blocages profonds dans les acquisitions ?

Nous avons essayé de proposer un cadre d'analyse intrinsèque aux possibilités complexes qu'offre le discours (et dont la maîtrise est requise pour le développement des connaissances) et à celles qu'offre les différentes formes de visualisation sémiotique. Cela nous a permis entre autres de mettre en évidence le déséquilibre entre “langage” et “image” pour reprendre une opposition simpliste : d'un côté trois niveaux dans l'articulation du sens et de l'autre seulement deux niveaux (sans même prendre en compte l'hétérogénéité interne entre représentations iconiques et représentations non iconiques !)

Tous ces rappels suffisent à montrer le caractère fondamental des démarches de description pour l'acquisition des connaissances scientifiques et mathématiques, ainsi que leur complexité cognitive. Cela veut dire que l'enjeu premier dans l'enseignement doit être de décrire et non pas d'argumenter. Nous insistons sur cette conséquence contre la mise au premier plan, ces dernières années dans l'enseignement primaire, de l'argumentation. Sans être ignorées les démarches de description sont didactiquement et cognitivement sous-estimées. On passe trop vite du “quoi” au “pourquoi ?” Toute exigence de justification et d'argumentation est prématurée et stérilisante tant que les apprenants n'ont pas eu le temps d'entrer dans des démarches de description. La production d'arguments, leur examen critique, tout autant que la production, inséparable de questions, trouvent leur source dans la base d'observations personnelles que les élèves ont pu eux-mêmes recueillir, base d'observations qui ne devient utilisable que lorsqu'elle commence à intégrer des variations. D'ailleurs les exigences de justification sont souvent ambiguës. Leur demande conduit trop souvent à ne pas vraiment distinguer la planification d'une action à faire et les raisons de la fiabilité d'une interprétation. Les difficultés d'argumentation —hormis les débats sur des questions touchant des questions de vie dans la classe ou l'école— sont d'abord des déficiences dans les démarches description.

BIBLIOGRAPHIE

DAMM Regina, 1992, *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte.* Thèse, Strasbourg, UniversitéLouis Pasteur.

DELÈGUE H-P. et ROUSSEL J., 2000, Introduction à la complexité des problèmes à énoncé, *Spirale,* n° 26, p. 119-138.

DOUADY Régine, 1986, Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°7.2, 5-31.

DUVAL Raymond, 1992, Argumenter, démontrer, expliquer :continuité ou rupture cognitive ? *Petit x* 31, p. 37-61.

DUVAL Raymond, 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Bern, Peter Lang.

DUVAL Raymond, 1998, Signe et objet (I) : trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°6, p. 139-163.

DUVAL Raymond (Ed.), 1999, *Conversion et articulation des représentations analogiques*, Volume 1, Lille, I.U.F.M. Nord Pas-de-Calais : D.R.E.D. 115 p.

DUVAL Raymond, 2000a, Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques.* 20/2, p. 135-170.

DUVAL Raymond, 2000b, Costruire, vedere e ragionare in geometria : quali rapporti ? *Bolletino dei docenti di matematica* 41, p. 9-24 (version française disponible).

DUVAL Raymond, 2000c, Basic issues for Research in Mathematics Education, *Proceedings of th 24th Conference of PME* Vol 1, p. 55-65. Hiroshima.

DUVAL Raymond, 2002c, L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets, *Actes du SFIDA* , IV, n°13-16, Nice, IREM.

DUVAL Raymond, 2002a, Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres. dans *Actes de la journée en Hommage à Régine Douady,* 83-105 Paris 7 : IREM.

DUVAL Raymond, 2002b, “Voir” en Mathématiques. A paraître dans *Matemática Educativa : Aspectos de la investigación actual*.

GOUANELLE C., 1996, SCHNEEBERGER P.,Utilisation de schémas dans l'apprentissage de la biologie à l'école : la reproduction humaine, *ASTER* n°22, p. 57-86.

LARKIN J.H., SIMON H.A., 1987, Why a diagram is (sometimes) worth Ten Thousand Words, *Cognitive Science* 11, p. 65-99.

PERRIN Marie-Jeanne et GAUDIN M., 2002, Etudes des figures à l'école élémentaire. Des surfaces aux points, Dijon, Journées IUFM.

PERRIN Marie-Jeanne, 2003 (à paraître), Studying geometric figures at primary school from surfaces to points, CERM 3

PIAGET Jean, 1950, *Introduction à l'épistémologie génétique 1, La pensée mathématique*, Paris, P.U.F.

VERGNAUD Gérard et DURAND Catherine, 1976,Structure des problèmes additifs et complexité psychogénétique, *Revue Française de Pédagogie*, 36, p. 28-43.

VERGNAUD Gérard, 1990, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 10/2.3, p. 133-170.

Annexe : l'ambiguïté des problèmes dont l'énoncé décrit une situation "réelle"

On insiste beaucoup sur la résolution de problème, mais on s'interroge peu sur ce qui différencie les problèmes mathématiques de tous les autres types de problèmes en dehors du domaine des mathématiques. Par exemple, est-ce qu'un problème de mathématiques fonctionne comme une interrogation sur les phénomènes de la nature que l'on peut observer ou sont-ils des exercices d'autant plus conventionnels qu'ils dépendent des hypothèses et des contraintes particulières que quelqu'un a choisies ? Pour comprendre la caractérisation que nous proposons, en introduisant la relation entre une description complète et une description partielle minimale, on peut partir des observations suivantes qui peuvent être faites en prenant ce qui est présenté comme "problème" dans les manuels.

Un problème de mathématiques est inséparable de son énoncé

La demande d'exécution d'une opération n'est pas un problème.

La question dans un énoncé de problème est la formulation rhétorique d'une demande de résolution et non pas l'expression d'un questionnement.

Exemple 1 : *quel est le prix d'un nounours en gélatine sachant que pour 100 centimes (d'euro) j'ai eu 40 nounours ?*

Une opération numérique lie trois nombres. Sa description complète est donc du type 40 × 2,5 = 100. Il y a donc trois manières de l'amputer. Et selon le choix fait, l'opération permettant de retrouver la donnée numérique supprimée peut être une opération de multiplication ou de division. Cette amputation est plongée dans une deuxième description, celle d'un scénario de la vie réelle : ici celle qui est familière au consommateur. D'où des formulations possibles du type " quel est le prix d'un nounours sachant que pour 1 euro j'ai eu. 40 nounours ? " ou " combien ai-je payé sachant qu'un nounours coûte et que j'en ai pris 40 ? " Ici le plongement de la description partielle dans un scénario de la vie réelle ne conduit pas à des énoncés étranges. Mais cela survient dès que l'on veut complexifier la présentation des données numériques de la description partielle, comme dans l'énoncé suivant :

Exemple 2 : *Je veux acheter un panneau de latté dont la surface sera de 2,4 m2, qui soit le plus épais possible mais qui ne devra pas peser plus de 15 kg. Sachant que le latté pèse 0,500 tonne par mètre cube, quelle épaisseur en mm vais-je choisir ? (le rayon bricolage propose des lattés de diverses épaisseurs en nombres entiers de mm).*

La complexification de la présentation des données numériques joue sur les deux types de description. D'une part, elle fait une présentation non homogène pour les unités de grandeur (tonne et kilo, mètre carré et mètre cube) ce qui requiert des conversions d'unités. D'autre part, la description complète d'un panneau de latté requiert 4 informations (*la longueur, la largeur, l'épaisseur et le poids* du panneau). La description partielle donne des informations par rapport à la surface (longueur × largeur) et par rapport au volume ! Cela revient donc à présenter les données d'une manière telle qu'elles ne sont pas directement utilisables pour résoudre le problème. On peut aussi ajouter que supprimer l'information directe et simple de l'épaisseur et donner une information sur le poids du latté au mètre cube est contraire à toute pratique d'étiquetage dans les rayons de Castorama ou de Leroi-Merlin. En **réalité ce problème est du même type que celui des nounours mais noyé dans deux exercices de conversion d'unités de grandeur**.

Exemple 3 : *Convertir en en heures et en minutes une durée de 340 minutes.*

Analysée en termes de registre cette tâche de conversion d'unités de grandeur est évidemment un traitement. Elle consiste (selon la distinction de Frege entre sens et référence qui est fondamentale pour toute analyse en terme de registres) en un changement de sens qui conserve la référence au même objet (ici la durée d'un intervalle de temps). Ce traitement est une opération de redésignation d'un objet. Cela n'apporte aucune information nouvelle ou manquante. *Il ne peut donc pas y avoir de question dans ce type de tâche,* sinon de manière rhétorique afin d'atténuer la brutalité connotative d'une instruction.

Exemple 4 : *De retour de la supérette, Jacques a noté ses achats. Il apparaît notamment sur son relevé l'indication suivante :*

	Prix au kilo	*poids*	*prix*
Bœuf	*12 euros*	*0, 650 kg*	*7,15 euros*

Pourquoi Claudine, après, avoir regardé ce relevé, lui dit-elle de prendre sa fiche de caisse pour vérifier ?

L'énoncé consiste ici en la description complète d'une opération d'achat. Il n'y a aucune information manquante. Certes on pourrait demander "quel est l'age de la caissière ?". On voit tout de suite qu'il y a un présupposé implicite de cohérence général à toute description : **la question posée doit porter sur un élément de la description complète.** Ce qui est ici le cas mais est-ce vraiment une question ? En fait la question est une demande de vérification de l'opération faite. Il s'agit donc d'une simple tâche de contrôle. Si l'on veut considérer cela comme un problème, alors il faut considérer que toute opération de vérification d'une opération est un problème.

Il est donc important de ne pas confondre les consignes d'un exercice et les énoncés de problème (pour nous limiter aux seuls "problèmes verbaux"). L'intérêt et l'enjeu de la prise en compte de cette caractérisation des problèmes comme relation entre une description complète et une description minimale possible est double.

Il concerne d'abord l'identification des variables à prendre en compte pour déterminer le degré de difficulté d'un problème. Presque toujours, ces variables sont déterminées en fonction du contenu mathématique (la nature des nombres, des opérations…), c'est-à-dire en aval. Nous le faisons en fonction de la description minimale et en fonction d'une part des surcodages de chacune des informations constituant la description minimale et d'autre part des interférences sémantiques entre les deux types de description superposées. Cette analyse en amont, nous permet de prendre en compte toutes les tâches cognitives (celle de repérage des "informations pertinentes, celle de leur conversion et celle de leur organisation opérations à effectuer...) qui se trouvent ainsi rajoutées et qui vont permettre de mieux comprendre des écarts considérables quand on change de description minimale en gardant le même scénario.

Il concerne ensuite la compréhension, par les futurs enseignants et par les élèves, de la nature de cette activité très particulière qu'est la résolution d'un problème mathématique, c'est-à-dire d'un problème produit par le choix des données qui en constituent l'énoncé. Pour cela, l'analyse en amont, et non pas en aval apparaît fondamentale, car elle conduit à développer deux types d'activité. (1) La description complète renvoie à un travail qui est une activité importante en dehors des mathématiques (physique, géographie…) : observer et relever, dans une situation, toutes les données caractérisant un phénomène ou un processus. (2) Effectuer sur une description complète un travail de réduction qui, lui, est caractéristique de l'activité mathématique : réduire au maximum la description complète mais de manière à pouvoir retrouver les informations que l'on aura supprimées. Or la plupart des élèves ne sont pas conscients que c'est là le premier geste mathématique, celui-là même que l'on retrouve aussi dans la manière de définir mathématiquement (le contre-exemple n'étant qu'un test de validité pour la pertinence de la réduction effectuée sur une liste de propriétés "candidates"). Et nombre de futurs professeurs d'école qui, sur ce point, ne sont guère plus avancés que les élèves, n'est pas du tout négligeable.

RUDOLF STRÄßER

L'INVERSEUR DE PEAUCELLIER : DÉCRIRE EN GÉOMÉTRIE

Abstract. Concerning the geometry in this text, I wish to emphasize a rather negative aspect: the current want of a satisfactory theory for semiotic non-linguistic systems. I would also like to point out an interesting pedagogical use: the possibility of concrete applications.

Résumé. A propos de la géométrie, je souligne dans ce texte un aspect plutôt négatif : le manque actuel d'une théorie satisfaisante pour les systèmes sémiotiques non langagiers et un aspect intéressant dans les applications pédagogiques : des possibilités d'utilisation concrètes.

Mots clés : géométrie, inverseur de Peaucellier, unités figurales.

---

1. Introduction

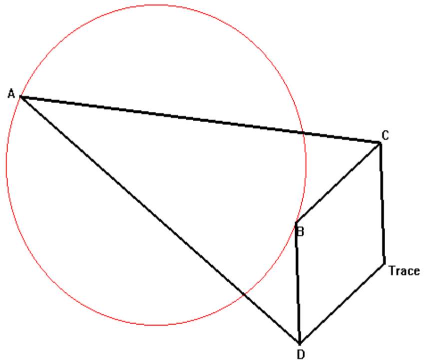
Comme réaction au texte de Raymond Duval, je présente l'inverseur de Peaucellier. L'analyse de ce mécanisme géométrique me servira comme illustration pour mes arguments un peu sceptiques sur certaines propositions et conséquences du texte de Raymond, mais aussi pour montrer un aspect de la géométrie, qu'on a tendance à oublier : l'aspect - si on peut dire - utilitaire de la géométrie, ou (d'après Gaspard Monge), l'aspect « géométrie descriptive ».

2. L'inverseur de Peaucellier : description et exploration

L'inverseur de Peaucellier est un mécanisme géométrique, un assemblage de 6 barres, dont quatre forment un losange. Deux des extrémités du losange sont liées à un point à l'extérieur du losange avec les deux autres barres de même longueur entre elles. Ce point à l'extérieur est fixé sur un cercle, un troisième coin du losange (qui se trouve entre les deux déjà mentionnés) peut se promener sur ce cercle.

Si je prends les « trois niveaux d'articulation du sens » des descriptions verbales de Raymond Duval, j'étais dans la fonction référentielle et apophantique - et je pense qu'il vaut mieux regarder la visualisation du dessin 1 ci-dessous pour bien comprendre la construction de l'inverseur de Peaucellier.

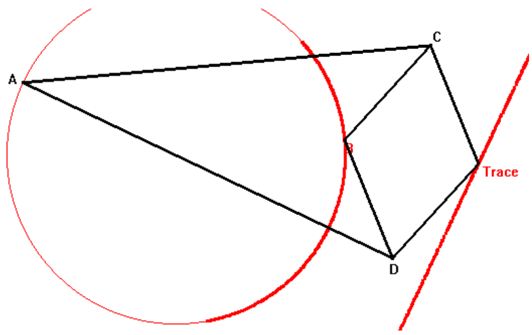
Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 63 – 68.



Dessin 1 : Schéma de l'inverseur de Peaucellier

Avec le dessin, on a changé de registre, on est dans les représentations sémiotiques - et la description langagière nous a dirigés dans le premier niveau « d'articulation du sens dans une visualisation d'ordre sémiotiques » , les unités figurales identifiables (voir par ex. « losange » et « cercle » .) Plus précisément, le dessin 1 donne une représentation iconique, avec quelques relations entre unités figurales (par ex. « de même longueur » , « sur le cercle »), représentation parlante de la « juxtaposition » , « conservation » et « propriétés » (« deuxième niveau : les relations entre unités figurales » .)

Mais la description de l'inverseur de Peaucellier n'est pas encore finie : l'inverseur a comme fonctionnalité de **transformer un arc en un segment** (cf. Klein1908, p. 108.) Si le point B se promène sur le cercle, la hauteur opposée - la « trace » - se promène sur un segment. C'est la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne (longuement recherchée pour une utilisation technique, surtout mécanique.)



Dessin 2 : Fonctionnalité de l'Inverseur de Peaucellier

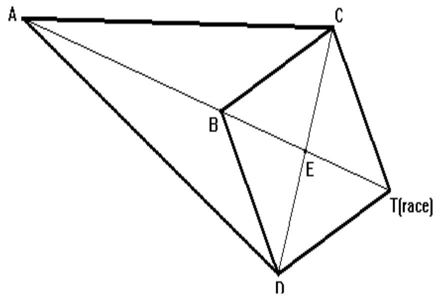
Pour la description verbale, on est évidemment dans le troisième niveau d'articulation du sens, la « fonction d'expansion discursive ». Mais à quel niveau d'articulation du sens situer le dessin 2, la représentation sémiotique, iconique - surtout si on regarde la configuration de façon dynamique, sur un écran à l'aide d'un logiciel de type Géométrie dynamique (par ex. Cabri-géomètre) ?

3. La variabilité des unités figurales en géométrie et algèbre

Dans la présentation de l'inverseur, il y avait des changements multiples des unités figurales (6 'barres', qui forment un 'losange', au lieu d'un cercle, on ne regarde qu'un arc, le 'segment' qu'on peut voir est pensé comme une droite etc..) D'après Raymond Duval : C'est proto-typique pour la géométrie (voir son texte, p. 20) - et je suis tout à fait d'accord avec lui en ce qui concerne la géométrie.

Mais regardons une description algébrique du dessin (voir ci-dessous) :
(1) $(AB+BE)^2 + EC^2 = AC^2$
(2) $BE^2 + EC^2 = BC^2$
(pour les deux équations : ->Pythagore)

(1) $(AB+BE)^2 + EC^2 = AC^2 \Rightarrow$
$AB^2 + 2AB\ BE + BE^2 + EC^2 = AC^2 \Rightarrow$
$AB\ (AB + 2\ BE) + BE^2 + EC^2 = AC^2$



Dessin 3 : Mieux comprendre la description algébrique

Soustraction de
(2) $BE^2 + EC^2 = BC^2$ donne l'équation
(*) $AB\ (AB + 2\ BE) = AC^2 - BC^2$, impliquant que le produit des deux longueurs AB et AT est constant.

Ceux qui connaissent la Géométrie euclidienne, en déduisent : 'Trace' est l'image de B sous une inversion et par conséquent : 'Trace' « se promène » sur une droite.

Je ne voulais ***pas*** le prouver, mais montrer : Dans la déduction faite

$$(1)(AB+BE)^2 + EC^2 = AC^2 \Rightarrow$$
$$AB^2 + 2AB\ BE + BE^2 + EC^2 = AC^2 \Rightarrow$$
$$AB\ (AB + 2\ BE) + BE^2 + EC^2 = AC^2$$

Soustraction de

$$(2)\ BE^2 + EC^2 = BC^2$$

donne l'équation

$$(*)\ AB\ (AB + 2\ BE) = AC^2 - BC^2 = const.$$

on change constamment les unités sémiotiques, dont l'hypothèse :

Dans (tous ?) les systèmes sémiotiques *opérationnels* (ceux qui sont utilisés pour transformer une description, ceux qui sont pour un traitement dans la représentation), on change constamment les unités sémiotiques. C'est la raison fondamentale pourquoi les systèmes opérationnels peuvent servir au traitement.

Mais qu'est-ce qu'on fait dans les systèmes à l'usage descriptif (les systèmes pour identifier et délimiter un objet ; pour la différence « opérationnel » versus « descriptif » -'action' versus 'display' systems- voir par exemple Kaput 1994, pp. 382 et suivantes) ? Dans les systèmes à l'usage *descriptif,* on ne change pas les unités sémiotiques ? En plus, il faut mentionner qu'on est loin d'un système vraiment opérationnel en géométrie - si on compare avec l'algèbre. C'est pourquoi il faut constamment changer les unités figurales iconique en géométrie ?

4. Les niveaux d'articulation dans une visualisation

Dans son analyse cognitive du discours, Raymond Duval distingue ***trois*** « niveaux d'articulation du sens » (p.36)

I. Fonction référentielle
II. Fonction apophantique
III. Fonction d'expansion discursive.

Pour les visualisations d'ordre sémiotique il ne distingue que seulement ***deux*** niveaux (p.40) :

I. Unités figurales identifiables
II. Relations entre unités figurales.

Pour moi, cette différence entraîne deux questions :

- Est-ce la fonction apophantique correspond aux relations entre unités figurales ? Si on regarde les descriptions sémiotiques, surtout les dessins géométriques, les relations entre unités figurales prennent le « statut de définition, constat, conjecture, théorème, etc. » , ce que sont exactement les types d'expressions produites de la fonction apophantique, (voir p. 36 du texte de Raymond Duval),
- est-ce qu'il y a des systèmes sémiotiques non-langagiers d'une fonction d'expansion discursive (« niveau III ») ? Comme description sémiotique, le langage de l'Algèbre peut illustrer cette fonction explicative des systèmes hors la langage maternelle / de tous les jours. La section 3 de ce texte en donne un exemple pour les représentations « non-iconiques » - et l'analyse de la fonctionnalité dynamique de l'inverseur de Peaucellier en

est peut-être une illustration dans une représentation iconique du dessin/Géométrie.

Tout court, pour moi les réponses sont « **oui** » pour les deux questions ! Mais je veux bien ajouter un commentaire en ce qui concerne les visualisations : Pour une visualisation qui aide vraiment à comprendre une situation, voir résoudre un problème, il faut une relation entre deux systèmes sémiotiques, dont un de type analogue, non-propositionnel (?iconique?) et l'autre non-iconique. Une visualisation est une activité dans les deux directions où on prend un jugement dans un système pour le comprendre (métaphoriquement) dans l'autre (cf. Kadunz 2000 and Kadunz&Sträßer 2001.) Par conséquence, l'adage du valeur d'un diagramme est vraiment à re-penser (voir la partie IV du texte de Raymond Duval) !

5. Conclusions

Je veux bien conclure avec deux remarques assez générales :

Si on regarde les systèmes sémiotiques non-langagiers, surtout ceux iconiques / analogues, on a l'impression qu'on est loin d'une théorie satisfaisante pour l'articulation du sens et pour une analyse fonctionnelle. La longue histoire de la géométrie a fourni un champ vaste d'illustrations et de démarches possibles. Une théorie (didactique ?) pour l'usage de ce système si répandu n'est pas encore écrite.

Plus spécifiquement, pour la géométrie, il y a - à côté de l'aspect formel et logique si fameux et bien analysé (voir les travaux sur « preuve et argumentation ») - l'aspect « concret d'application » . C'est un aspect souvent négligé dans la présentation de la géométrie en didactique des mathématiques et hors la didactique. Mais c'est exactement cet aspect qui a fait survivre la géométrie aux attaques des « Maths modernes » et c'était la raison pour laquelle j'ai choisi l'inverseur de Peaucellier comme exemple. Gaspard Monge a créé la « géométrie descriptive » « ...Pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère... »
(Monge dans le « programme » de la Géométrie descriptive, p.xv de la 6ième éd.1838.)

BIBLIOGRAPHIE

KADUNZ G., Visualisierung, Bild und Metapher. Die vermittelnde Tätigkeit der Visualisierung beim Lernen von Mathematik. *Journal für Mathematikdidaktik, 21*(3/4), 280 – 302, 2000.

KADUNZ G. & STRÄßER, R., *Visualisation in Geometry : Multiple Linked Representations ?* PME 25 - Utrecht, vol. 3,. 201-208, 2001.

KAPUT J., The Representational Role of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience and Elevating Levels of Cognition. In R. Biehler & R. W. Scholz & R. Sträßer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* Dodrecht : Kluwer. (pp. 379-397), 1994.

KLEIN F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Vol. 2 : Geometrie (réimpression :1968.) Berlin : Springer, 1908.

RUDOLF STRÄßER, BIELEFELD ET LULEÅ
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Postfach 100 131
33501 Bielefeld, ALLEMAGNE

e-mail : rudolf.straesser@uni-bielefeld.de

DOMINIQUE LAHANIER REUTER

TABLEAUX ET PARCOURS DE LECTURE

Abstract. This article lies within the theoretical scope elaborate by Raymond Duval in order to describe the tabular organization of information. It proposes to highlight the following paradoxe : We need various types of tables to take in account a mathematical "corpus of data"; nevertheless, students seem to refuse this diversity.

Résumé. Cet article s'inscrit dans le cadre théorique élaboré par Raymond Duval de la description typologisante de l'organisation de l'information en tableaux. Il se propose de mettre en évidence la situation paradoxale suivante : il semble qu'il soit nécessaire de mobiliser divers types de tableaux pour rendre compte d'un "corpus de données" mathématiques, tandis que les apprenants paraissent refuser cette diversité.

Mots clés : Tableaux, didactique des mathématiques, lecture et écriture de tableaux.

Je voudrais dire ici la profonde reconnaissance que j'éprouve à l'égard de Raymond Duval, tout d'abord pour la contribution à la recherche en didactique que représente l'ensemble de ses écrits, mais aussi pour m'avoir permis de travailler en sa compagnie durant ces trois dernières années. En effet, côtoyer une telle passion pour la spéculation intellectuelle, un tel mouvement incessant de la pensée est une expérience marquante et je le remercie encore de m'en avoir fait bénéficier.

Intervenir ici, dans ce cadre, me semblait indissociable de cette entreprise dont je souhaitais rendre compte, aussi brièvement soit-il. C'est pour cela que je m'appuierais essentiellement sur les recherches que nous avons pu développer à Lille ces derniers temps. Mais je ne saurais me contenter, ou plutôt R. Duval ne saurait se contenter d'un compte rendu, il me faudra donc problématiser celui ci. La question à laquelle je vais essayer d'apporter des éléments de réponse est celle ci : les résultats obtenus l'ont été à partir d'une démarche essentiellement cognitive. Sont-ils des résultats pertinents pour la didactique des mathématiques ?

1. Position du problème : liens et effets de la lecture et de l'écriture de tableaux sur l'apprentissage des mathématiques

Les recherches que nous avons menées s'inscrivent dans une entrée dans le champ didactique qui tend à poser le problème des relations entre d'une part les processus d'organisation d'information et les objets textuels qui permettent de les engager et d'autre part les processus d'apprentissage. Nous retrouvons là un

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 69 – 83.

problème auquel les contributions de R. Duval ont été déjà nombreuses, en particulier lorsqu'il s'est penché sur les problèmes d'argumentation, de démonstration et de description, mais aussi sur ceux qui concernent les articulations entre registres de représentation. Quant à nous, nous nous sommes particulièrement intéressés dans cette perspective aux formes d'organisation tabulaires, à partir desquelles nous avons tenté d'élaborer une typologie.

Cela ne va pas sans poser quelques questions. En effet, la typologie que nous avons pu construire est une typologie des tableaux existants, qui est relativement indépendante a priori du type de tâche associée ainsi que du type d'informations organisées par le tableau. Par conséquent l'utilité de cette typologie pour comprendre et décrire dans l'enseignement apprentissage des mathématiques la diversité des tableaux mobilisés et des tâches qui leur sont associées, et enfin l'efficacité et l'utilité didactique de ces tâches est à questionner.

On peut mieux comprendre le sens de cette interrogation en évoquant par exemple les travaux auxquels R. Duval a apporté une contribution importante. Je pense en particulier à ceux qui éclairaient l'utilité didactique d'une analyse socio-linguistique des textes de démonstration[1]. Cette utilité ne sera manifestement pas interrogée de la même façon, puisque dans ce cas l'objet pris en compte, le texte de démonstration, possède une référence immédiate dans l'activité mathématique. Même s'il est vrai qu'écrire et/ou lire des textes de démonstration ne recouvre pas l'activité de démonstration dans son intégralité, on peut concevoir qu'écrire un texte cohérent de démonstration, construire et identifier des normes à ces textes, sont bien des activités mathématiques, qui participent à l'élaboration de certains savoirs spécifiques à cette discipline. Or, il me semble au contraire que la lecture ou l'écriture d'un tableau n'est pas a priori construite en tant qu'activité inscrite dans le domaine spécifique de savoirs de chaque discipline. Ce sera par conséquent le premier point que je m'attacherai à développer.

1.1. Les résultats obtenus

Avant de pouvoir envisager une réponse à ces questions, il est nécessaire de rappeler brièvement les résultats auxquels nous sommes parvenus. Nous avons donc pris comme sujet d'étude **l'organisation de l'information sous forme tabulaire**, et nous avions comme projet de différencier les formes de tableaux existants que nous avions pu relever, aussi bien dans des pratiques de classe que dans des pratiques extra scolaires. Raymond Duval[2] a proposé de concevoir comme

---

[1] E. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde, 2001, *Produire et lire des textes de démonstration*, Ellipses, Paris.

[2] R. Duval, 2002 " Comment analyser le fonctionnement représentationnel des tableaux et leur diversité ? " in R. Duval, 2002, *L'organisation visuelle de l'information en tableaux* ,

unité représentationnelle élémentaire de cette organisation, les organisations qui régissent l'ensemble des éléments disposés en colonne ou en ligne d'un tableau ou une partie de ces éléments : il s'en suit que pour que l'on puisse faire une lecture cohérente d'un tableau, il est nécessaire tout d'abord identifier ces organisations. De même, si l'on veut en écrire un, il faut en élaborer une, ce qui signifie en particulier que l'on n'écrit pas un tableau en juxtaposant des cases, mais en les organisant. Le premier résultat qui me semble à retenir est que ces organisations ne sont ni naturelles ni transparentes. Elles sont en effet toujours à découvrir, comprendre ou d'un autre point de vue à inventer. Le second résultat est celui qui nous a permis, en catégorisant les différents types de tableaux, de comprendre quels rôles jouaient et les éléments visuels du tableau et les articulations entre ces derniers et l'organisation qu'il dévoile. Parmi ces éléments visuels, nous retiendrons tout particulièrement :

- les segmentations de l'information que représentent les traits du tableau (ou les dispositions aérées),
- la nature des éléments des cases (symboles, chiffres etc.),
- les cases vides,
- les éléments visuellement caractérisés, soit par leurs places privilégiées (première ligne, première colonne) soit par leurs typographies particulières (en gras, en gros), et que nous appellerons les marges du tableau.

Ce sont les rôles particuliers de ces deux derniers éléments que nous allons nous attacher à décrire. En effet, nous avons retenu l'idée de classer les différents tableaux que nous avions “ récoltés ”, selon le **nombre** d'organisations que le tableau nous faisait découvrir.

S'il n'existe qu'une seule organisation, un ordre unique, nous avons sous les yeux ce que RD appelle des tableaux juxtapositions de plusieurs listes. Cet ordre unique peut être le **fruit**, la **conséquence** d'une organisation identique qui existe entre les éléments divers de deux colonnes, par exemple les tableaux de proportionnalité ou au contraire provenir d'une seule des listes, par exemple les dictionnaires restreints dont une seule liste est organisée alphabétiquement et qui définit ainsi l'ordre de l'autre liste. Cet ordre unique est donc à rechercher dans la liste des éléments d'une des colonnes (ou d'une des lignes.) Il n'est pas annoncé, répétons le, il est à découvrir.

S'il existe deux organisations, l'une en ligne et l'autre en colonne qui se croisent, nous avons alors affaire à ce que RD appelle les tableaux “ croisement de marge ”.

Nous retiendrons par conséquent ici que la lecture d'un tableau (ou son écriture) suppose l'identification du nombre de ces organisations et leur “ nature ”. Puis celle des rôles que peuvent prendre la première colonne et / ou la première ligne soit les **marges** du tableau si elles annoncent ces organisations ou seulement les catégories d'éléments des cases**, le statut** des informations contenues dans la case en haut à gauche.

1.2. A quelles conditions ces résultats auront-ils une pertinence en didactique des mathématiques ?

Avant de reprendre quelques résultats de cette recherche, je voudrais tout d'abord insister ici sur ce que j'appellerai l'enjeu didactique d'une description typologisante de la pluralité des tableaux existants. Cet enjeu didactique me paraît reposer sur deux axes :

1) L'axe de la réflexion disciplinaire, réflexion qui peut suivre des chemins différents, mais cependant destinés à s'articuler. J'en distinguerai trois : tout d'abord, l'interrogation qui lie les tableaux objets identifiés de savoirs dans la discipline scientifique de référence (dans notre cas les mathématiques) aux tableaux objets d'enseignements spécifiés dans la discipline scolaire. Ensuite, la réflexion sur les types de tâches et des types de tableaux associés dans la pratique de la classe, réflexion qui a pour objectif en particulier de reconstruire ou d'identifier des cadres d'attente des enseignants dans la discipline scolaire mathématique. Enfin, celle sur les éventuels dysfonctionnements et les interprétations que l'on peut en proposer, toujours en interrogeant ces interprétations quant à leur spécificité disciplinaire.
2) Le deuxième axe est celui de la réflexion sur les ingénieries didactiques ou plutôt sur la place que peut prendre un tel objet (les tableaux.) Cette réflexion peut être de deux ordres selon que ce sont les articulations entre différents types de tableaux qui sont à penser comme des “ leviers de commande ” de l'ingénierie ou selon que l'on considère que ce sont des apprentissages construits à partir de tâches de lecture/écriture de tableaux qui sont davantage les objectifs de ces ingénieries. En bref, il s'agit de savoir si l'organisation tabulaire peut être aussi bien un moyen d'ingénierie ou un but de celle-ci.

Ce sont les axes de réflexion que je me suis donnée. Ces axes nous suggèrent de regarder en quoi les tableaux peuvent participer à l'ingénierie didactique, puis sur le terrain des constats ce que leur utilisation révèle des pratiques de classe, ce que leur utilisation erronée nous dit des difficultés des apprenants. Je commencerai par examiner les ingénieries didactiques.

2. Proposition : Un premier pas nécessaire pour que la lecture et l'écriture de tableaux soient considérées comme pouvant avoir un effet sur l'apprentissage des mathématiques est qu'elle puisse être envisagée plutôt comme un parcours de lecture ou d'écriture

Dans le cas que nous évoquons ici, les principes qui ont été énoncés plus haut nous ont déjà éclairés certainement sur la lecture et l'écriture de tableaux. (elle nous montre et nous explique certaines difficultés en nous montrant certaines complexités, nous éclaire sur la pertinence de certaines tâches, etc.) Mais le point sur lequel je voudrais surtout insister est le suivant : ce que les règles énoncées qui ont débouché sur cette typologie nous ont tout d'abord permis de constater, c'est que dans une situation où il est nécessaire d'organiser des informations, dans une situation où il existe des structurations mathématiques à **exhiber,** donc dans une situation où l'organisation tabulaire doit représenter ces structures, il n'y a pas un seul tableau possible, et pas davantage un seul type bien au contraire. La typologie produite nous montre avec évidence ai je envie de dire, qu'un ensemble d'informations peut se représenter sous divers types de tableaux. Cela ne va pas sans évoquer ce que Raymond Duval désignait comme une possible spécificité de l'activité mathématique, à savoir le jeu constant entre la pluralité des représentations possibles d'une situation. Ce que j'avancerai serait alors que c'est dans cette pluralité des organisations tabulaires que doit être recherchée l'utilité en didactique des mathématiques de ce travail, et que je vais m'efforcer d'illustrer.

2.1. Deux exemples de tâches qui montrent qu'une activité de lecture et d'écriture de tableaux, lorsqu'elle est pensée comme parcours, comme choix possible entre plusieurs tableaux est une activité mathématique

J'ai pris volontairement des exemples de situations où les tableaux à mobiliser ne sont pas des objets mathématiques (telles que le sont les matrices.) Les tableaux à convoquer le sont en tant que mode de représentation, d'organisation. De même, je n'ai pas précisé le niveau d'enseignement qui pourrait se révéler le plus adéquat pour des situations d'enseignement apprentissage. Il est bien évident que les ingénieries à élaborer devraient tenir compte de ces variables.

2.1.1. Premier exemple : des droites parallèles et perpendiculaires : quelle gestion mathématique de la diversité des tableaux convoqués ?

Le premier exemple est tiré d'un exercice ancien.[3] Quatre droites D_1, D_2, D_3,D_4 présentent une configuration telle que : D_1 est parallèle à D_2, D_3 est parallèle à D_4, D_1 est perpendiculaire à D_3, D_2 l'est aussi, D_1 est perpendiculaire à D_4, D_2

[3] Il s'inspire d'un exercice de Papy, 1963, *Mathématique moderne*, Didier, Paris.

l'est aussi. Deux tableaux (au moins) sont possibles à organiser cette liste de données.

Le premier par exemple est un tableau croisé, organisé par les deux marges qui bordent le tableau :

	D_1	D_2	D_3	D_4
D_1	//	//	$\perp$	$\perp$
D_2	//	//	$\perp$	$\perp$
D_3	$\perp$	$\perp$	//	//
D_4	$\perp$	$\perp$	//	//

Le second un tableau de " données ", ou encore un tableau de correspondances entre listes, organisé par la liste de la marge de gauche.

Droites	être // à D_1	être // àD_3	être $\perp$ à D_1	être $\perp$ à D_3	être // à D_2	etc.
D_1	x			x	x	
D_2	x			x	x	
D_3		x	x			
D_4		x	x			

Ces deux tableaux sont différents, le premier renforçant plutôt la lecture d'une identité entre les couples de droites (D_1 et D_2 sont interchangeables) le second renforçant plutôt celle de l'identité entre relations " être // à D_1 " étant ici la même relation qu' " être $\perp$ à D_3 ".

Cet exemple nous permet de nous poser le problème du savoir en jeu. Ici, il est celui du statut du théorème qui dit que " lorsque deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre ". Certes, les deux tableaux nous font " voir ", nous montrent cette propriété dans le cas de la configuration donnée et l'un des intérêts de la confrontation de ces deux tableaux peut être celui de fournir deux représentations textuelles de cette propriété. Est-ce là leur seule fonction ? Je répondrai non, dans cet exemple. En effet, ces deux tableaux sont manifestement surabondants, répétitifs. La similarité de certaines colonnes ou de certaines lignes qui est une conséquence du théorème, de ce savoir mathématique, nous autorise*, si ce savoir mathématique est supposé connu du* *lecteur*, à reformer un nouveau tableau, à réorganiser les données que nous possédons, afin de fournir un tableau ou un texte descriptif qui soit, comme toute description mathématique, non surabondant, économique etc.

Par conséquent, construire, élaborer un tableau représentant une structuration mathématique est avant tout un parcours. On construit, on élabore un tableau qui est satisfaisant à un instant donné, pour l'abandonner, le remanier, le reconstruire l'instant d'après. Ceci permet de mieux comprendre l'importance de poser la question : Qu'est-ce qu'un tableau satisfaisant ? et par conséquent celle ci : Quelles sont les normes, quelles sont les attentes définies explicitement ou implicitement dans les pratiques de la classe ?

Ce premier exemple nous montre par conséquent qu'il existe dans le champ disciplinaire des mathématiques des contraintes spécifiques sur le choix d'un tableau satisfaisant, et que ces contraintes spécifiques ne concernent pas la forme, le type de tableau obtenu, mais font référence aux savoirs qui permettent d'élaborer un tableau “ minimal ”, “ économique ”.

Je n'en ai pas fini avec cet exemple, aussi trivial soit-il.

J'ai volontairement choisi une situation où le statut des informations à organiser était flou : s'agissait-il d'informations visuelles, perçues sur une figure, ou d'informations mathématiques telles que le codage peut le transmettre ou tel qu'un texte l'établit ? En d'autres termes, de quel point de vue les parallélismes et orthogonalités organisant les quatre droites sont-elles des propositions valides? Ceci nous permet de distinguer, dans l'enseignement apprentissage les tableaux qui permettent, à l'aide de savoirs mathématiques, d'expanser de l'information et ceux, qui à l'aide de ce même savoir permettent de la réduire.

2.1.2. Deuxième exemple : Les trois figures, une autre exploitation possible de la diversité des tableaux

Trois figures sont données, un rectangle de dimensions 2x4, un autre de dimensions 2x3 et enfin un triangle rectangle de dimensions 3,4,5. La tâche est identique, dans la formulation de la consigne à ce qui a été vu précédemment : décrire à l'aide d'un tableau les trois figures.

Encore une fois, plusieurs tableaux peuvent être envisagés.

Un tableau de “ données ”, de juxtaposition de listes :

Figures	axes de symétrie	nbre côtés	périmètre	aire
rectangle 2x4	2	4	12	8
rectangle 2x3	2	4	10	6
triangle	0	3	12	6

Un tableau croisé, qui comporte une case vide :

Périmètre / Aire	10	12
6	Rectangle 2x3	triangle
8		Rectangle 2x4

ou un essai de tableau de juxtaposition de listes, qui s’avère ici impossible à compléter :

périmètre	10	12	...
aire			

L’exploration des possibilités d’organisation ou de réorganisation des informations sous forme de tableaux permet - peut-être - d’entrer dans des espaces de problèmes par des modes différents de ceux esquissés dans le premier exemple. On accède cette fois au champ des problèmes par le biais de la présence d’une case vide : pourquoi l’est-elle ? doit-elle le rester ? ou par le biais d’une impossibilité qui nécessite en retour une explication.

Le problème didactique que je poserai est alors le suivant : la dévolution de tels problèmes se trouve-t-elle facilitée par le fait que leurs expressions sont particulièrement simples à construire, par le fait que ces problèmes se pensent en termes de représentations tabulaires ? Pour le dire autrement, le manque de connaissance que représente la case vide du tableau croisé est-il mieux perçu, mieux compris comme tel, qu’il ne le serait par la question : “ Existe-t-il une figure d’aire 8 et de périmètre 10 ? ” ?

Puisque la mise en place de situations permettant cette comparaison est encore à faire, je serai donc très prudente. Je me contenterai d'avancer que faire élaborer des réorganisations de tableaux est une activité qui peut être génératrice de problèmes, en ce que des cases vides dans des tableaux désignent manifestement des manques de connaissances, en ce que des impossibilités acceptées peuvent devenir des phénomènes requérant des explications.

Après cette exploration qui je l'espère aura fait ressortir à quel point il semble nécessaire de penser la diversité des tableaux et de la penser comme fil directeur d'une activité mathématique, il est temps de se tourner vers les constats que nous permettent d'établir les recherches sur la place que peut jouer la diversité des tableaux dans l'enseignement des mathématiques.

3. Du côté des constats : une diversité souvent refusée

J'ai dit plus haut qu'un autre intérêt didactique de cette recherche consiste à établir certains constats. Je n'évoquerai pas ici ceux qui ont pu l'être concernant les difficultés de lecture et d'écriture qui ont pu être exposées ailleurs. Ceux sur lequel j'aimerai m'attarder sont fondés sur la même idée qui a constitué le fil directeur de la recherche d'ingénieries didactiques éventuelles. J'ai donc choisi d'interroger, très brièvement, les quelques faits qui me semblent relever cette fois d'un refus de cette diversité des tableaux que j'ai pu mettre en avant.

3.1. Une diversité souvent refusée institutionnellement

Que ce soit à l'école élémentaire, au collège ou au lycée, plusieurs tableaux sont identifiés comme des objets d'enseignement de la discipline mathématique : " LE tableau de proportionnalité ", " LE tableau de variation ", " LE tableau de signes " " LE tableau de conversion ". Ces différents tableaux ont des formes imposées (particulièrement les éléments des marges), imposées par l'Institution (voir I.O[4]), imposées par les manuels, imposées par les enseignants : (" Même s'il y a des symétries, je veux qu'ils présentent le tableau de variation complet ", " S'il y a des symétries, il faut qu'ils les utilisent pour réduire le tableau de variation ".) J'ajouterai qu'au travers des énoncés des exercices, c'est encore une fois l'unicité d'un tableau décrivant une situation qui semble prévaloir et qu'il resterait à explorer de façon plus systématique les cadres d'attente des enseignants dans des

[4] " Reconnaître la proportionnalité sur un tableau complet de nombres. On pourra notamment constituer un tableau des abscisses et ordonnées de points...compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité.. Savoir construire un tableau de valeurs d 'une fonction affine (4ème) On conviendra dans les tableaux de variation que les flèches obliques de variations etc ; (Te ES)

situations d'élaboration de tableaux. Je terminerai cette approche très succincte en soulignant que le plus souvent les recompositions d'informations accompagnées de transformations de tableaux sont jugées “ transparentes ” par les auteurs de manuels. C'est en tout le cas me semble-t-il en statistiques, lorsqu'un tableau de distribution est composé à partir d'un tableau de données.[5]

Au regard de cette diversité qui me paraît peu exploitée, je ferai correspondre la réticence des élèves telle que j'ai pu la percevoir.

3.2. Une diversité souvent refusée par les apprenants

Je m'autoriserai ici à étendre ou à entendre dans un sens très large le terme “ d'enseignement apprentissage des mathématiques ”. Les exemples que je vais explorer sont en effet des exemples que j'ai pu rencontrer dans ma propre pratique d'enseignante : les deux premiers apparaissent au cours d'un enseignement dispensé en licence de Sciences de l'éducation, qui est un enseignement de statistiques, envisagé en tant qu'enseignement méthodologique. Le troisième a été relevé dans l'écriture d'un dossier par un étudiant de maîtrise (toujours de Sciences de l'éducation.) J'ai tenu à conserver cet exemple, bien qu'il ne soit pas à proprement parler un travail produit dans le cadre d'un enseignement de mathématiques. Il s'agit à mes yeux d'une illustration d'un problème récurrent, qui tient au choix et à l'exploitation de tableaux statistiques dans un compte rendu ou une analyse d'observation.

3.2.1. L'absence de transformations d'un tableau de données statistiques

Comme je l'ai dit plus haut les deux premiers exemples qui illustrent ce refus de prise en compte de la diversité des tableaux sont des productions d'étudiants relevées dans un cours de méthodologie statistique. Nous essayons de travailler, pour respecter cet aspect méthodologique de l'enseignement, à partir de corpus de données brutes. Cela suppose que le premier tableau (dans la chronologie des traitements à effectuer) est un tableau de données, donc de correspondances entre listes, dont l'ordre est assuré par celui de la première colonne, qui est la liste des sujets. Cet ordre est, primitivement, externe. Il peut être alphabétique, il est le plus souvent celui de l'ordre dans lequel sont apparus les individus examinés. Or, il apparaît que certaines erreurs, certains dysfonctionnements constatés dans les traitements statistiques à développer seraient - en partie et en partie seulement - liés à une résistance à transformer le tableau initial. Le premier exemple que je donnerai est celui d'une erreur récurrente dans le calcul de la médiane de la série de valeurs numériques. Les étudiants concernés déterminent cette valeur à partir du tableau initial, en désignant comme valeur médiane la valeur de la ligne médiane du tableau initial (par exemple, si l'on a 15 sujets, ils désignent comme valeur

[5] Voir par exemple C. Robert, 1995, *L'empereur et la girafe*, Diderot ed., Paris.

médiane la valeur de la 8ème ligne, qui est la valeur du 8ème individu.) L'absence de réorganisation du tableau initial, la constante référence à ce dernier (non questionnée) est visible. Donner du sens à la médiane s'accompagne de la prise de conscience que plusieurs tableaux rendent compte de la situation de prise de données.

Nous trouvons également trace de cette représentation de la stabilité, de l'unicité du tableau dans d'autres erreurs. J'ai relevé ainsi dans des copies d'examen des incompréhensions de la consigne “ établir un tableau croisé de deux variables ” à partir d'un tableau de données. En voici un exemple illustrant selon moi encore une fois la permanence du tableau initial, que l'étudiant ne veut, ne peut songer à transformer.

Question : On définit la variable “ longueur du texte produit ” comme une variable à deux modalités : “ court ” si la longueur du texte produit est inférieur à 30 mots, “ long ” sinon. Etablir le tableau croisé entre les deux variables “ longueur du texte produit ” et “ conformité du texte ”.

Tableau initial

sujet	Nombre de mots du texte	Conformité du texte
1	28	c
2	25	n
3	33	c
4	32	c
5	25	n
...	....	....

Tableau “ croisé ”

sujet	texte long	texte court	Conformité du texte
1		28	c
2		25	n
3	33		c
4	32		c
5		25	n
...			....

L'étudiante ne produit pas un tableau croisé qui serait, de par sa structure, son organisation, totalement différent du tableau de données initial, qui rappelons le est le document à partir duquel la tâche se définit. Si nous essayons de reconstituer ou reconstruire les traitements effectués, nous voyons apparaître :

- un dédoublement d'une colonne du tableau initial
- des répartitions des éléments de la colonne initiale selon les catégories proposées par le texte.

Il semble donc que la capacité à remplacer une catégorie de données numériques par une désignation de leur classe d'équivalence, à actualiser l'opération de construction de ces classes d'équivalence et à concevoir la différence entre variable et modalités de la variable soit en quelque sorte contrariée par les traitements visibles de réécriture du tableau initial. C'est pourquoi on peut se demander si les traitements pragmatiques de réorganisation, d'élaboration de nouveaux tableaux sont absents parce que la démarche mathématique n'est pas assurée, parce que l'idée qu'un tableau est en quelque sorte " intouchable " est prédominante, ou encore parce que ces deux phénomènes interagissent.

3.2.2. La stabilité des tableaux statistiques dans les mémoires d'étudiants.

J'ai choisi dans un dernier temps d'ouvrir le champ des exemples. C'est en fait l'importance de ce phénomène qui m'y invite. En effet, certains dossiers ou mémoires que produisent les étudiants s'élaborent à partir de recueils de données. Il s'agit pour eux de produire une organisation de ces données et de la donner à lire à un lecteur qui est un évaluateur critique. Le mode d'organisation privilégié est celui des tableaux[6]. Or, il apparaît dans la plupart de ces écrits des difficultés à gérer non seulement la place de ces tableaux, l'articulation du texte discursif et de ceux ci[7], mais aussi à gérer ce que j'appellerai dans ce cadre la diversité des tableaux possibles. Dans la plupart des mémoires ou dossiers, tout tableau est présenté comme " immuable ". J'entends par là que :

- un tableau n'est jamais réorganisé ;
- ni scindé, ni aggloméré à un autre tableau ;
- ni repris, évoqué à un autre endroit du texte.

Je proposerai un seul exemple de cette " résistance ", un exemple volontairement interrogeant. En effet, le discours produit par l'étudiant peut être considéré comme répondant aux attentes du lecteur/correcteur. Néanmoins, il est possible d'interroger justement le choix des tableaux[8] donnés à lire.

---

[6] Ce choix est pour partie un choix guidé par ce que les étudiants perçoivent des attentes de l'enseignant.

[7] J'ai pu évoquer ailleurs l'intérêt à prendre en compte ces difficultés particulières (D. Lahanier Reuter (sous presse), " Position du scripteur et gestion des tableaux ", *Cahiers* THEODILE, Université Lille III.)

[8] L'absence de traits est remarquable : peut-on encore désigner par tableau une telle représentation ? Je le pense ici, étant donné que les conditions très matérielles dans lesquelles le dossier a été composé ne sont celles que nous connaissons actuellement. Ce dossier a été écrit il y a une dizaine d'année, alors que les étudiants n'étaient pas encore familiarisés avec les instruments de bureautique (maniement d'EXCEL, de WORD etc.)

P. FLOCHEL, Rapport pour l'UC2637, dir. Lahanier, 1994. V. d'Ascq
28

Voici les résultats :

Evaluation des élèves de C.P. (La Fontaine petits – mi – octobre 1990)

Nombre d'élèves concernés : 72

1ère épreuve	Nombre	Réussites	%
Des jetons sont dessinés.	7	49	68
Les élèves doivent en écrire	5	55	76
le nombre	3	61	85
	1	65	90

2ème épreuve	Nombre	Réussites	%
Un nombre est écrit	4	59	82
Les élèves doivent dessiner	8	46	64
le nbre de jetons correspondant	6	50	69
	2	62	86

Pour ces deux épreuves si on range les nombres dans l'ordre croissant de 1 à 9, on obtient les pourcentages de réussite suivants :

90 86 85 82 76 69 68 64

J'ai dit que le discours produit était conforme aux attentes. Effectivement, le document nous présente des données recueillies et nous permet de comprendre que l'ordre externe (celui de la passation) peut être confronté à un autre ordre (celui des nombres à écrire qui est l'inverse de celui des pourcentages de réussite.) Il y a donc deux organisations différentes des données qui sont présentées : la première est effectuée par le biais de deux tableaux distincts, la seconde par une phrase et une liste de pourcentages. Ce qui nous intéresse ici est que l'étudiant a choisi de ne pas nous présenter un autre tableau qui agglomérerait les deux premiers et à l'intérieur duquel les listes de nombres seraient réorganisées. Nous retrouvons donc une trace de ce que j'interprète comme une " résistance " à déplacer, réorganiser des tableaux déjà là. Quelles peuvent être les raisons de ce choix ? On peut, pour comprendre l'absence de trois tableaux sur une seule page, invoquer des arguments de présentation, voire de style. Mais il est aussi possible de comprendre le choix de l'étudiant en supposant que ce qui est important, ce qui est construit, élaboré de façon personnelle, (c'est-à-dire l'interprétation des données, la mise en évidence des ordres inverse des places des nombres à écrire dans la suite numérique et des pourcentages de réussite) devrait être dit : un tableau, simple mise à plat de données collectées, peut être balayé du regard par le lecteur. En revanche, un discours linéaire, lui, doit retenir son attention. Tout se passe comme si les tableaux n'étaient le reflet d'aucune action importante, ou devant être considérée comme telle. Ils sont là, mais ils sont subordonnés au texte qui les encadrent : ils ne sont pas le lieu de la compréhension.

4. Conclusion

En guise de conclusion, il me semble intéressant de soutenir que l'élaboration de tableaux rendant compte d'organisations de données doit être considérée comme un parcours, un choix de possibles. Cette position permet au moins d'interroger les tableaux à lire et non plus de les considérer comme des modèles intangibles à respecter. Elle autorise également l'exploration questionnante d'une situation, bien que cette affirmation demeure à l'heure actuelle une hypothèse à valider et par conséquent à reformuler. Cependant cette position me paraît à construire, et à construire contre des résistances importantes. C'est dire que le champ de recherche ne fait que s'ouvrir.

BIBLIOGRAPHIE

BARBIN E., DUVAL R., GIORGIUTTI I.,. HOUDEBINE J, LABORDE C., *Produire et lire des textes de démonstration*, Ellipses, Paris, 2001.

DUVAL R., “ Comment analyser le fonctionnement représentationnel des tableaux et leur diversité ? ” in R. Duval, 2002, *L'organisation visuelle de l'information en tableaux* , Séminaire Conversion et articulation des représentations, volume II, IUFM Nord Pas-de-Calais, 2002.

LAHANIER REUTER D., “ Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques ”, in R. Duval, 2002, *L'organisation visuelle de l'information en tableaux* , Séminaire Conversion et articulation des représentations, volume II, IUFM Nord Pas-de-Calais, 2002.

LAHANIER REUTER D., “ Lecture, écriture et gestions de tableaux”, *Cahiers* THEODILE n°3, Université Lille III, sous presse.

Université Lille III

Equipe THEODILE EA 1764

DOMINIQUE GUIN

REGARDS COGNITIFS SUR L'ACTIVITE MATHEMATIQUE INSTRUMENTEE PAR LES TIC

Abstract. The cognitive analysis of an instrumented activity requires one to take into account both the potentials and the constraints of the artefact. The detailed study by Raymond Duval on the situation of the student who is required to simultaneously handle the various registers of several environments, leads us to introduce into the design of Computer Environments for Human Learning (CEHL) notions such as instrumental orchestration.

Résumé. L'analyse cognitive d'une activité instrumentée demande la prise en compte d'une part des potentialités, d'autre part des contraintes de l'artefact. Les études précises de Raymond Duval, sur la situation de l'élève qui doit simultanément gérer les différents registres de plusieurs environnements, conduisent notamment à introduire dans la conception des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH) des notions comme celle d'orchestration instrumentale.

Mots clés : Technologies d'information et de communication, apprentissage humain, transposition informatique, complexité cognitive, ingénierie didactique.

Raymond Duval dans sa présentation s'est situé essentiellement au niveau de l'enseignement primaire. Dans ce qui suit, j'essaierai de montrer comment ses idées se sont diffusées non seulement en didactique des mathématiques à tous les niveaux, mais aussi plus largement en informatique. Après avoir présenté succinctement des éléments d'analyse de l'activité instrumentée, j'évoquerai brièvement les recherches dans le domaine de la conception des EIAH (Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain) qui se sont appuyées sur les travaux de Raymond Duval.

1. Eléments d'analyse de l'activité instrumentée

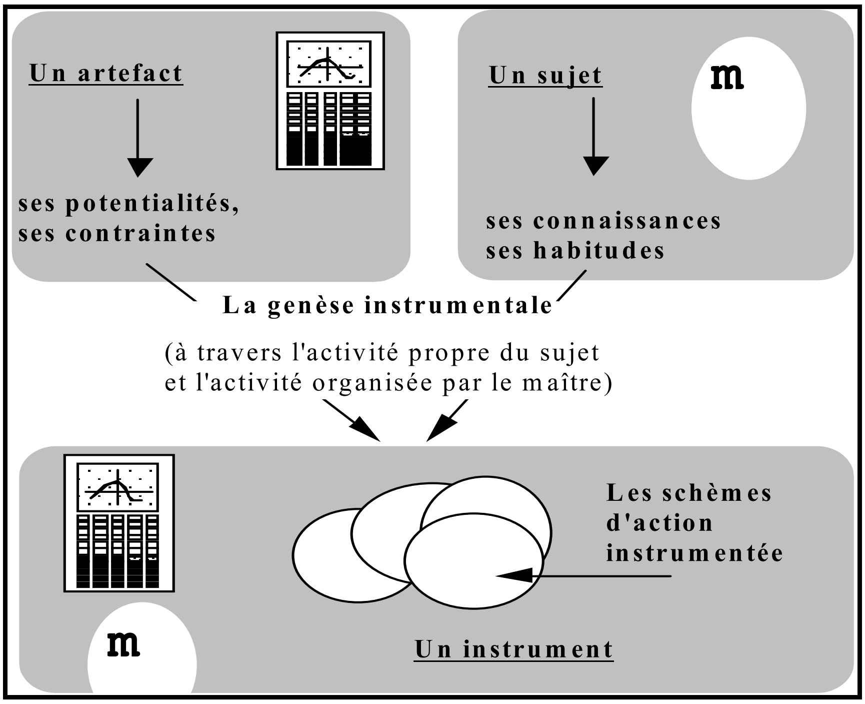
Quittons le niveau de l'enseignement primaire (auquel se situait la présentation de R. Duval) pour les classes scientifiques de fin de lycée. Si l'on considère la problématique de l'intégration des TIC, l'on se trouve confronté à une situation très contrastée : d'une part, une *volonté institutionnelle forte* s'affiche en matière d'intégration (que ce soit dans les programmes scolaires ou l'aide à des projets de recherche) et les élèves se sont « appropriés » rapidement des outils tels que les calculatrices graphiques ou symboliques (dotées d'un système de calcul formel.) D'autre part, les établissements offrent encore une *faible accessibilité* à ces outils (Guin, Joab & Trouche 2002, § 3.1.2) et l'on estime à moins de 10% le

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 85 – 93

nombre de professeurs qui intègrent effectivement les TIC dans leurs pratiques professionnelles (Guin 2001.)

Dans la communauté internationale des chercheurs du domaine, les années 90 se caractérisent par un changement de point de vue : alors que les premières recherches reposaient sur un *postulat* d'effet nécessairement positif des TIC sur l'apprentissage, les dernières recherches sont plutôt centrées sur un *questionnement* des effets des TIC sur l'apprentissage et la recherche des raisons de l'intégration marginale qui ne s'avère pas spécifique à la France (CNCRE 2000.)

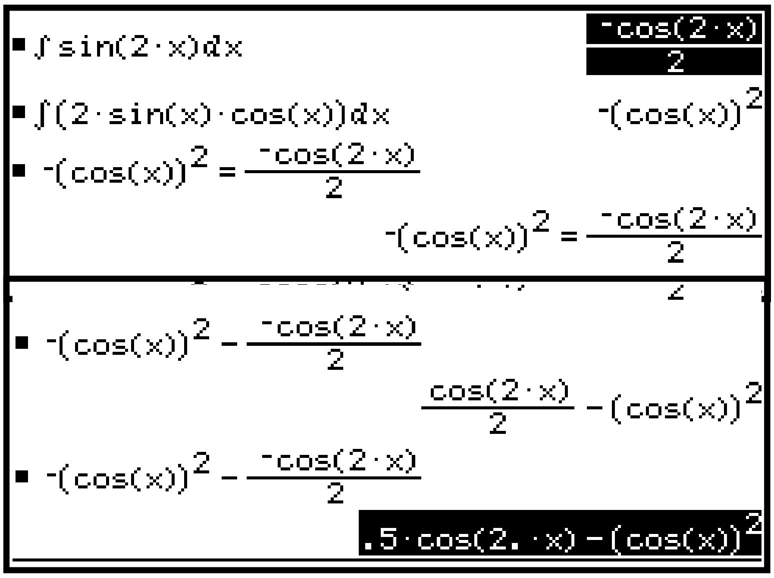
La construction d'un instrument de l'activité mathématique met en jeu des processus complexes. L'analyse cognitive de l'activité mathématique instrumentée s'appuie sur les travaux développés par P. Rabardel (1995) qui dissocie l'*artefact*, avec ses potentialités et ses contraintes, et l'*instrument* construit par un individu, avec ses habitudes et ses connaissances. Il désigne par *genèse instrumentale* le processus de construction d'un instrument par un individu constitué d'une part par une partie de l'artefact qu'il a sélectionnée et d'autre part des *schèmes d'action instrumentée*, qui permettent de réaliser une tâche, mais aussi de contrôler l'action et de construire des connaissances.



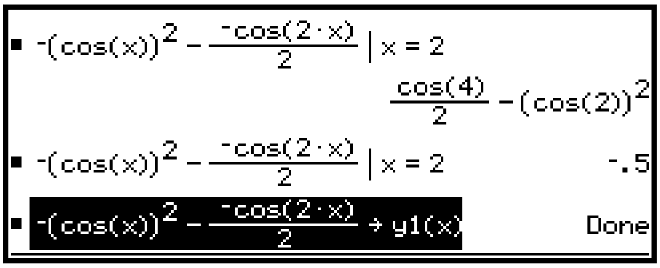
D'un outil à un instrument (Trouche, in Guin & Trouche 2002, p 198)

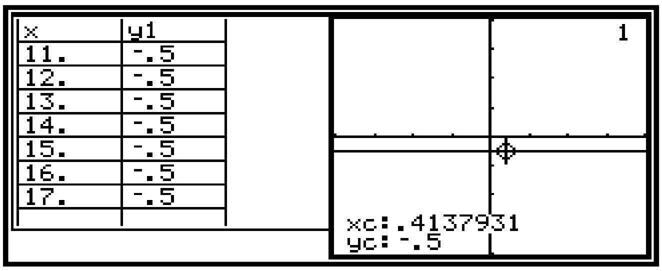
L'analyse cognitive de l'activité instrumentée débute donc par l'analyse des potentialités et des contraintes de l'artefact. Les TIC offrent de nouvelle potentialités de visualisation qu'il s'agit d'exploiter avec un objectif didactique. En effet, Raymond DUVAL (1996) a souligné l'importance de disposer de plusieurs représentations sémiotiques et de pouvoir passer d'une représentation à un autre, soit dans un même registre (*traitement*), soit dans un autre registre (*conversion*.) Voici des exemples de ce type avec une calculatrice symbolique :

Un exemple de travail intra-registre :



Un exemple de travail inter-registre :

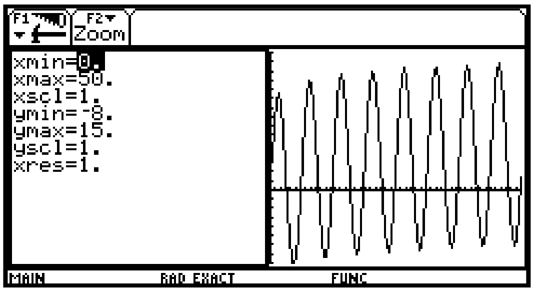




Ces potentialités nouvelles expliquent sans doute les vertus prêtées à ces artefacts, ainsi, l'on trouve explicitement dans certaines publications des assertions telles que : « l'environnement informatique permet de voir, donc de comprendre ». C'est *sous-estimer* fortement la *complexité cognitive* de l'activité instrumentée. L'analyse de l'activité instrumentée doit prendre en compte d'une part la notion *de transposition informatique* par laquelle N. Balacheff (1994) désigne ce travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en œuvre de cette représentation par un dispositif informatique : en effet, qu'il s'agisse ensuite de « montrer » la connaissance ou de la « manipuler », la transposition informatique peut avoir des conséquences importantes sur le résultat des apprentissages.

D'autre part, l'élève doit gérer simultanément, non seulement l'articulation entre les différents registres sémiotiques de l'environnement papier/crayon, mais aussi celle des différents registres de l'artefact. Or, déjà, dans l'environnement papier/crayon, R. Duval a souvent souligné, que cette coordination n'a rien de spontanée et peut susciter de grandes difficultés chez les élèves. Il faut donc d'une part analyser les potentialités et les contraintes a priori de l'artefact, d'autre part observer les comportements des élèves durant leur activité instrumentée pour pouvoir repérer les indices d'un apprentissage ou d'une conceptualisation quelconque.

R. Duval a mis en évidence le fait que la visualisation mathématique est fondée sur des *contraintes*. Lors du passage d'un registre de l'environnement papier/crayon au registre correspondant de l'artefact, des contraintes liées à la transposition informatique vont nécessairement intervenir. Par exemple, Luc Trouche (1997) a montré comment les contraintes internes, telles que les problèmes de discrétisation, peuvent avoir des conséquences significatives sur le comportement des élèves.



Par exemple, face à ce graphe calculatrice de la fonction ln x + 10 sin x, 10 % seulement d'un effectif de 50 élèves de terminale scientifique donnent la réponse correcte pour la limite de cette fonction à l'infini, alors que les réponses sont toutes correctes pour le même effectif ne disposant pas d'une calculatrice. La situation est similaire pour la même expérience réalisée au niveau DEUG A. Ainsi, le sujet adapte l'outil à ses tâches, des gestes s'installent, et ces gestes peuvent avoir une influence sur la conceptualisation.

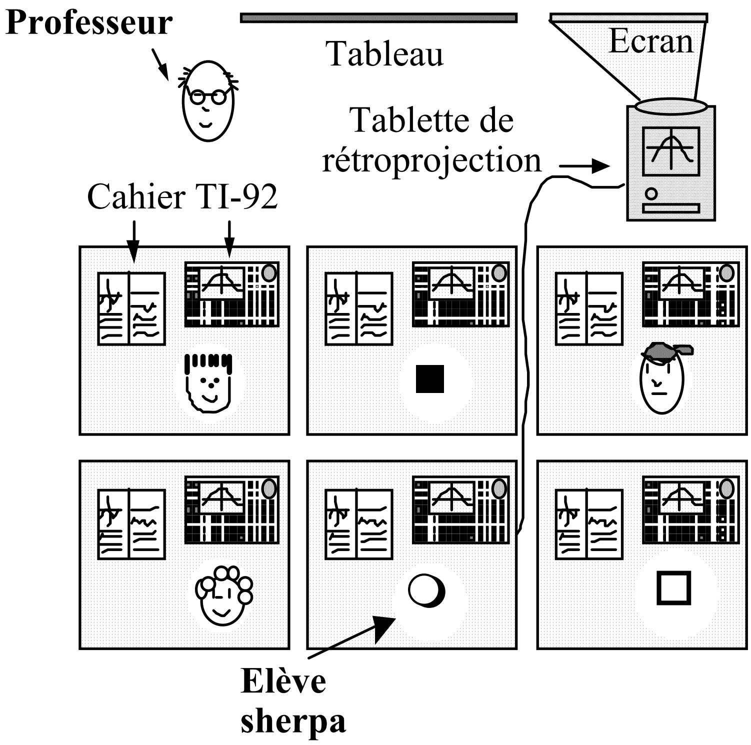
Dans sa présentation, R. Duval a évoqué l'intérêt des *démarches scientifiques d'exploration*, la possibilité de générer de nouvelles données, de les organiser et de sélectionner les informations pertinentes, de constituer ou d'élargir un corpus de données : tous ces éléments constituent une phase décisive dans la construction de connaissances. Il est clair que, dans ce contexte, les TIC pourraient favoriser l'entrée dans une démarche d'observation (simulation etc..)

Les TIC pourraient également favoriser une entrée dans la *dynamique du questionnement* évoquée par R. Duval, par la confrontation des données recueillies dans les différents registres des artefacts : elles devraient susciter un questionnement et la formulation de conjectures. Cependant, gardons-nous de l'illusion d'une entrée naturelle dans une démarche expérimentale en environnement informatique : le ressort de la contradiction, le questionnement ne sont pas automatiques chez les élèves. Par exemple, face à deux graphes calculatrices contradictoires d'une même fonction, les élèves ne perçoivent pas nécessairement cette contradiction (Trouche 1997.) De même, M. Artigue (1995) a montré que les élèves développent des comportements efficaces d'adaptation aux TIC qui ne sont pas nécessairement liés à une activité mathématique.

Par conséquent, l'enseignant joue un rôle crucial dans l'organisation de l'articulation du travail instrumenté avec le travail en environnement papier/crayon. Il est donc nécessaire de penser soigneusement des *ingénieries didactiques* (Artigue, in Guin & Trouche 2002, p 277) intégrant l'environnement informatique, plus généralement, il faut gérer l'ensemble *du système d'exploitation didactique*

(Chevallard 1992.) L. Trouche introduit la notion d'*orchestration instrumentale* (in Guin & Trouche 2002, p 257) qui désigne un dispositif, partie prenante du système d'exploitation didactique, qu'une institution (l'institution scolaire en l'occurrence) organise dans le but d'*orienter l'action instrumentée* des élèves. Une orchestration instrumentale est définie par un quadruplet : un ensemble *d'individus* ; un ensemble d'*objectifs* (relatifs à la réalisation d'un *type de tâches* ou à l'aménagement de l'environnement de travail) ; une *configuration didactique* (c'est-à-dire une structure générale du dispositif) et un ensemble de *modes d'exploitation* de cette configuration.

Voici un exemple d'orchestration instrumentale ayant pour objectif la *socialisation* « relative » des genèses instrumentales et visant à organiser les conditions d'entrée dans une démarche expérimentale (exploration, questionnement, débat) :



2. Conception des Environnements Informatiques pour l'apprentissage Humain

Les travaux de R. Duval sur l'analyse cognitive de l'activité de démonstration géométrique ont eu une influence importante dans la recherche en informatique sur la conception des EIAH. En effet, les travaux du Groupe Intelligence Artificielle de l'I.R.E.M. de Strasbourg (M.-A. Egret, D. Guin, G. Kuntz, N. Vogel...) se sont développés en interaction avec ceux de (Duval & Egret 1989) sur l'organisation déductive du discours. Ils ont donné lieu à deux publications : la première portait sur une analyse cognitive et didactique des logiciels d'aide à la démonstration géométrique disponibles à l'époque (GIA, 1989) et la seconde sur la modélisation de la démonstration géométrique du logiciel Geometry Tutor, présenté a l'époque dans la communauté Intelligence Artificielle comme une référence (GIA, 1991.)

Les résultats de ces travaux se sont diffusés dans la communauté française des EIAH et les années 90 ont donné lieu à la naissance de plusieurs tuteurs intelligents d'aide à la démonstration géométrique : *Mentoniezh* (Py 1990), *Geomus* (Bazin 1993), *Chypre* (Bernat 1993) et *Cabri-Euclide* (Luengo 1997.)

Dans un autre domaine, celui des problèmes additifs, l'analyse des processus cognitifs et des représentations opératoires, réalisée par R. Duval et R. Damm (1992) a conduit à une modélisation des processus cognitifs intégrable à un EIAH (Guin 91 ; Guin & Duval 92.) La simulation des processus de compréhension et de résolution de l'élève expert depuis l'énoncé linguistique jusqu'à la description minimale en termes d'opérateurs Ajoute et Retranche n (n étant un entier positif) met en évidence la complexité de la résolution (21 classes.)

Comment pourrait-on faciliter le passage de l'élève à une résolution experte ? Une suggestion serait d'exploiter la *manipulation directe* du logiciel Cabri pour construire des figures animées offrant une visualisation en regard de l'ensemble des variations possibles (Guin, Delgoulet & Salles 2002.) Durant le colloque, j'ai fait une démonstration de ces figures animées Cabri (réalisées par J. Salles) qui pourraient favoriser chez les élèves une démarche scientifique d'exploration instrumentée et l'accès à une résolution en termes d'opérateurs. Ce modeste cadeau veut témoigner de ma reconnaissance à R. Duval pour tout ce qu'il a apporté à la communauté scientifique, au-delà de la communauté de didactique des mathématiques.

DOMINIQUE GUIN, ERES & LIRMM
Université Montpellier 2, CC 051, Département de mathématiques
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER CEDEX 5

BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE M., Une approche didactique de l'intégration de l'EIAO à l'enseignement, in Guin D., Py D., Nicaud J.-F. (eds*), Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur*, Eyrolles, 17-28, 1995.

ARTIGUE M., L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques, in Guin D. & Trouche L. (eds), 2002.

BALACHEFF N., Didactique et intelligence artificielle*. Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 14(1/2), 9-42, 1994.

BAZIN J.-M., GEOMUS : Un résolveur de problèmes de géométrie qui mobilise des connaissances en fonction du problème posé, Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1993.

BERNAT P, CHYPRE : un logiciel d'aide au raisonnement, *Repères IREM*, vol 10, 1993.

CHEVALLARD Y., Intégration et viabilité des objets informatiques, in Cornu B. (ed), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, 183-203. P.U.F., 1992.

Collectif CNCRE, De l'analyse de travaux concernant le TIC à la définition d'une problématique de leur intégration dans l'enseignement. *Rapport de recherche*. IREM Paris VII, 2000.

DAMM R., Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte. Thèse de Doctorat, IREM de Strasbourg, 1992.

DUVAL R., Quel cognitif retenir en didactique ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* , vol 16(3), 349-382, 1996.

DUVAL R. & EGRET M.-A, L'organisation déductive du discours, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol 2,. 25-40, IREM de Strasbourg, 1989.

DUVAL R. & GUIN, Processus cognitifs et représentations opératoires dans l'activité de compréhension d'énoncés additifs, Actes du colloque ECCO's 92, Orsay, 1992.

GIA, Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol 2, 89-109, IREM de Strasbourg, 1989.

GIA, Modélisation de la démonstration géométrique dans Geometry Tutor, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol 4, 2-37, IREM de Strasbourg, 1991.

GUIN D., La notion d'opérateur dans une modélisation cognitive de la compréhension des problèmes additifs, *Mathématique, Informatique et Sciences Humaines*, vol 113, 5-33, 1991.

GUIN D., Intégration des outils de calcul symbolique dans l'enseignement des mathématiques : comment concevoir une formation mieux adaptée ? *Actes de l'Université d'Eté « Le métier d'enseignant de mathématiques au tournant du XXI*ème *siècle »*, APMEP 133,. 77-93, 2001.

GUIN D., DELGOULET J. & Salles J., Formation aux TICE : concevoir un dispositif d'enseignement autour d'un fichier rétroprojetable. *Actes du colloque international EM2000*, *« L'enseignement des mathématiques dans les pays francophones »,* IREM de Grenoble, 2002.

GUIN D., JOAB M. & TROUCHE L., *Suivi de formation à distance pour les enseignants de mathématiques, bilan de la phase expérimentale,* IREM de Montpellier (CDRom), 2002.

GUIN D. & TROUCHE L. (eds), *Calculatrices symboliques, faire d'un outil un instrument du travail mathématique : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage, 2002.

LUENGO V., Un micro-monde de preuve intégrant la réfutation : Cabri-Euclide, in Baron M., Mendelsohn P., Nicaud J.-F. (eds), *Actes de EIAO'97*, 85-98, Hermès, 1997.

PY D., Reconnaissance de plan pour l'aide à la démonstration dans un tuteur intelligent de la géométrie. Thèse de Doctorat. Université de Rennes, 1990.

RABARDEL P., *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin, 1995.

TROUCHE L., A propos de l'enseignement des limites de fonctions dans un « environnement calculatrice », étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation. Thèse de Doctorat. Montpellier : Université Montpellier II, 1997.

TROUCHE L., Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs, in Guin D. & Trouche L. (eds), 2002.

A. Gagatsis, M. Shiakalli et A. Panaoura

LA DROITE ARITHMETIQUE COMME MODELE GEOMETRIQUE DE L´ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION DES NOMBRES ENTIERS

Abstract. This article presents the results of an experimental study that looks into the use of number line as a geometrical model for addition and subtraction of natural numbers. The study was conducted in Cyprus with 106 7-to 8-year old primary school students. After a short description of various pieces of research, which deal with the role of representation in the learning of mathematics, the use of number line in primary school mathematics teaching is analysed. Student's responses drawn from four questionnaires illustrate their difficulty concerning the use of the number line model. These difficulties can be explained in two ways: (a) by the dual nature of the number line as a geometrical model and (b) by students' different conceptions related to the representation of natural numbers and their operations on a number line.

Résumé. Ce texte présente une étude théorique et expérimentale sur la droite arithmétique comme modèle géométrique pour l'addition et la soustraction des nombres naturels. Après une brève description des recherches sur le rôle des représentations dans l'apprentissage des mathématiques, nous analysons l'utilisation de la droite arithmétique dans l'enseignement de l'école primaire. Notre recherche auprès des élèves grecs de l'école primaire de Chypre, basée sur quatre questionnaires, montre une difficulté en ce qui concerne l'utilisation du modèle de la droite arithmétique pour l'addition et la soustraction des nombres naturels. Ces difficultés pourraient être expliquées par la double nature de la droite arithmétique en tant que modèle géométrique et aussi par les différentes conceptions des élèves liées à la représentation des nombres et à la représentation sur la droite arithmétique des nombres naturels et de leurs opérations.

Mots clés : Droite arithmétique, modèle géométrique, l'addition et la soustraction des nombres naturels, représentations, apprentissage des mathématiques, école primaire, statistique implicative.

1. Introduction

Le concept de représentation fait, depuis quelques années, l'objet de nouvelles recherches qui se placent généralement dans les sciences de l'éducation, à la croisée des sciences cognitives, de la psychologie, de la sémiologie, de l'épistémologie et de la didactique. Chez de nombreux chercheurs, il joue un rôle fondamental pour expliquer l'activité intellectuelle. Mais les usages de ce terme sont assez différents d'une discipline à l'autre. Ces recherches peuvent être classées globalement en quatre catégories :

A. *Théories des représentations* (Duval, 1987, 2001 ; Goldin, & Kaput, 1996 ; Hall, 1998 ; Kaput, 1987 ; Roth, & MacGinn, 1998 ; Von Glaserfeld, 1987.)
Cette première catégorie concerne des travaux qui proposent une théorie

Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 8, p. 95 – 112.

cognitive concernant le rôle des représentations dans l'apprentissage des mathématiques. Plusieurs auteurs insistent sur la distinction entre *représentations internes et représentations externes*. Raymond Duval insiste sur le caractère sémiotique des représentations et sur le fait qu'elles permettent des traitements en mathématiques (Duval, 2001.)

B. *Représentations et résolution des problèmes en Mathématiques (Goldin, 1987 ; Lesh, Behr, & Post, 1987.)*
Cette deuxième catégorie concerne des travaux qui proposent des recherches concernant le rôle des représentations dans la résolution des problèmes en mathématiques.

C. *Le rôle des représentations dans la compréhension et l'apprentissage de notions mathématiques :*

- Sur la fonction : Duval, 1987 ; Duval,2001 ; Gagatsis, Michaelidou, & Shiakalli, 2001.
- Sur les fractions : Lesh, Behr, & Post, 1987 ; Markou, 2001 in : Gagatsis et all, 2001.
- Sur le cercle et la géométrie en général : Janvier, 1987 ; Mesquita, 1998.
- Sur l'addition et la soustraction des nombres naturels à l'école élémentaire : Ernest, 1985 ; Gagatsis, & Panaoura, 2000 ; Hart, 1981.

D. *Le passage d'un type de représentation à un autre* : Duval, 1987, 2001 ; Gagatsis, & Mougi, 2000 ; Gagatsis, Michaelidou & Shiakalli, 2000 ; Gagatsis, & Panaoura, 2000 ; Janvier, 1987.

Notre recherche concerne surtout les catégories C et D mais, comme elles ont toutes une base théorique commune, elle prendra en compte les quatre catégories. En particulier cette étude concerne l'utilisation de la représentation de la droite arithmétique pour l'apprentissage de l'addition et la soustraction des nombres naturels à l'école élémentaire.

2. Utilisation de modèles dans la formation en mathématiques

Plusieurs auteurs ont traité du sens et du rôle des modèles dans la formation en mathématiques. On peut établir une distinction générale entre deux catégories de modèles : les "modèles de l´intellect de l´élève" et les "modèles du processus d´apprentissage".

Ces modèles sont utilisés par les chercheurs pour décrire et expliquer les connaissances, les structures et les opérations cognitives des élèves**.** Habituellement, les élèves n´ont pas conscience de leurs propres structures et opérations cognitives – au moins dans la forme où celles-ci sont décrites dans les modèles. Ils ne peuvent donc pas utiliser les modèles de la première catégorie. Par contre, les modèles de la deuxième catégorie reflètent les processus intuitifs liés au contenu mathématique enseigné, et ainsi ils peuvent être utilisés par les élèves à un certain stade du développement de leur pensée ou du processus de résolution d´un problème. Nous nous pencherons ici sur les modèles de cette deuxième catégorie.

E. Fischbein (1972) considère qu´un modèle utilisé dans l´enseignement doit avoir pour principale fonction de générer (de produire) et de représenter une quantité infinie de propriétés à partir d´un nombre limité d´éléments et de règles de combinaisons, de la même manière que la structure de la langue permet à l´enfant de créer une quantité infinie de phrases à partir d´un petit nombre d´éléments et de règles grammaticales. Un modèle est donc un mode de représentation (comme la langue), mais une représentation n´est un modèle que si elle possède le caractère "génératif" en question. En outre, un modèle doit conduire facilement, et indépendamment du système initial qu´il représente, à de nouvelles informations portant sur ce système.

Par exemple, un graphique adéquat peut nous donner des informations sur les diviseurs d´un nombre et leurs relations, tout en nous suggérant de multiples idées, comme par exemple le fait que le système des diviseurs d´un nombre est parfois ordonné de la même manière que l´ensemble des sous-ensembles d´un ensemble donné : ainsi est-on conduit à se demander pour les diviseurs de quels nombres obtient-on une telle situation, etc. On peut donc dire que les présentations graphiques de ce type constituent un modèle pour la divisibilité, comme les diagrammes de Venn (ou de Euler) consituent un modèle pour les différentes opérations et relations dans les théories des ensembles (Gagatsis & Patronis, 1990.)

3. Les modèles géométriques

3.1. Définitions - Exemples

Nombreuses sont les représentations géométriques à avoir été utilisées par les mathématiciens et les professeurs de mathématiques en tant que modèles de formulation ou modèles de validation. R. Thom mathématicien et philosophe ayant étudié le profit que l'on peut tirer de la construction d´un modèle géométrique décrivant une situation, affirme qu´un tel modèle nous offre un point de vue global (holistique), absent de la description verbale en raison de la fragmentation inhérente au discours. Selon Thom, un autre avantage de la construction du modèle géométrique réside dans le fait qu´elle donne à l´individu la possibilité de "maintenir" l´objet de son étude à une certaine distance, en le représentant dans l´espace (Thom, 1979.)

Qu´est-ce donc qu´un modèle géométrique ? On pourrait dire, en première approximation, qu´il est une représentation géométrique d´un problème, adaptée à une étude ultérieure, c´est-à-dire une représentation géométrique qui possède ce caractère génératif et ce caractère de découverte que Fischbein réclame pour un modèle (1972.)

Gagatsis et Patronis (1990) proposent une définition plus précise, bien que toujours inscrite dans un cadre intuitif plutôt que strictement formel :

"Soit une collection S de points, droites ou autres figures dans un espace euclidien de dimension n, et qui représente un système Σ d´objets, une situation ou un processus. Nous dirons que la collection S est modèle géométrique de Σ si les propriétés géométriques intrinsèques des éléments de S (i.e. les propriétés géométriques que nous observons dans les points, les droites, etc., de la collection S indépendamment de Σ) nous fournissent une certaine information sur Σ, c´est– à-dire correspondent à des propriétés effectives de Σ. Si cette condition est respectée par les seules propriétés topologiques des figures de la collection S, alors nous dirons que S est un modèle géométrique au sens large (ou topologique)".

En d´autres mots, nous pourrions dire que la collection S est modèle géométrique pour Σ (respectivement, modèle géométrique au sens large) s´il existe une application de l´ensemble des propriétés de Σ sur l´ensemble des propriétés géométriques intrinsèques de S (respectivement : des propriétés topologiques de S.)

Exemples :

a) Dans les manuels de mathématiques, les représentations géométriques courantes des identités algébriques sont en ce sens des modèles géométriques, tandis que les représentations graphiques des fonctions sont généralement des modèles géométriques au sens large.
b) Le modèle géométrique décrit ci-après peut être utilisé pour résoudre dans l´ensemble des nombres réels le système paramétrique d'inconnues x et y,

$$x + y = s \quad (1)$$
$$x . y = p \quad (2).$$

Par exemple, soit p>0 ; alors, pour toute valeur de s et p>0 nous avons, dans le plan cartésien, une droite qui représente l´équation (1) et une hyperbole (à deux branches) qui représente l´équation (2). En étudiant le nombre de points d'intersection de la droite et l´hyperbole (deux, un seul ou aucun point commun), on parvient facilement à la condition nécessaire et suffisante pour la résolution de ce système. Ici, le modèle consiste en deux familles de courbes (droites et hyperboles), dont les propriétés géométriques sont toutes en relation avec le problème (comme par exemple la situation limite où la droite (1), déplacée parallèlement à elle-même quand s varie, devient à certain moment donné tangente à la courbe (2)).

3.2. La droite arithmétique comme modèle géométrique

Soit Σ l´anneau des entiers ou le corps des nombres rationnels (ou un corps qui contient Q) avec les opérations suivantes : addition, soustraction, multiplication et division.

Soit S la droite graduée, c´est à dire la droite avec un ensemble discret de points qui correspond aux nombres entiers ou rationnels. Un isomorphisme canonique :

$$\Sigma \rightleftarrows S \quad (1)$$

permet à S d'être un modèle géométrique de Σ.

Ainsi, les opérations sur les nombres de Σ correspondent aux opérations sur les segments orientés ou aux opérations sur les nombres et segments orientés (comme par exemple le produit d´un nombre multiplié par un segment orienté.) L´isomorphisme (1) fonctionne dans deux directions. La droite graduée fonctionne comme modèle géométrique des opérations sur Σ de la manière suivante : Deux nombres étant donnés dans Σ, ils correspondent à deux éléments de S, l´opération est faite dans S et le résultat est "traduit" de nouveau par un nombre de Σ. Cette procédure peut être pour certains élèves plus laborieuse que la simple exécution de l´opération dans Σ à l´aide d´un algorithme.

4. L'utilisation de la représentation de la droite arithmétique pour l'apprentissage de l'addition et de la soustraction des nombres naturels à l'école élémentaire

4.1. Recherches sur l'utilisation de la droite arithmétique

Plusieurs manuels des mathématiques de l'école élémentaire proposent la représentation de la droite arithmétique comme une aide visuelle pour l'apprentissage de l'addition et de la soustraction des nombres naturels à l'école élémentaire.

Cette utilisation est basée sur l'idée répandue parmi quelques chercheurs que la représentation de la droite arithmétique joue en rôle très important dans l'enseignement des opérations des nombres entiers (Ernest, 1985 ; Fueyo, & Bushell, 1998 ; Klein, Beishuizen, & Treffers, 1998.) Cette idée est aussi exprimée par quelques auteurs de livres de méthodologie des mathématiques pour l'enseignement primaire (Billstein, Libeskind, & Lott, 1984 ; Paige, Thiessen, & Wild, 1982.)

En plus, la capacité de faire des additions et des soustractions des nombres entiers est souvent incluse dans la liste des objectifs des programmes scolaires (DfEE, 1999 ; NCTM, 2000 ; Ministère de l' Education et de la Culture de Chypre,1994.)

Enfin, certains chercheurs utilisent des exercices d'addition et de soustraction à l'aide de la droite arithmétique dans des buts d'évaluation (Reisman, 1982 ; Underhill, Uprichard, & Heddens, 1982 ; Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1981 ; Carr, & Katterns, 1984.)

Néanmoins, certains chercheurs expriment des doutes sur l'efficacité de l'utilisation de cette représentation : Ernest (1985) commente les résultats de l'évaluation de NAEP concernant l'addition des nombres entiers par des enfants de 9 et 13 ans (Carpenter et al.,1981 ; Ernest, 1985.) D'après lui, il y a un fait surprenant concernant ces résultats : seulement un quart des enfants de neuf ans et la moitié des enfants de treize ans examinés sont capables de répondre aux exercices d'addition sur la droite arithmétique. Ce fait est en contradiction avec les performances des élèves aux autres items d'addition : au moins la moitié des élèves de neuf ans et le quatre-cinquième des élèves de treize ans peuvent répondre correctement à chacun des autres items. Pourquoi cette disparité des résultats ? Est-elle due au fait que les items d'addition sur la droite arithmétique testent la compréhension de l'addition tandis que les autres ne la testent pas ? Ernest en doute (Ernest, 1985, p.420.) Au contraire il attire l'attention sur la grande différence entre la compréhension des élèves de l'addition des nombres entiers et la compréhension du modèle de la droite arithmétique de cette opération. D'après lui, il y un danger "*à imposer une relation très étroite entre l'évaluation de la compréhension de l'addition par les élèves et celle des tâches sur la droite arithmétique"* (Ernest, 1985, p.421.)

Si on revient à l´esprit des recherches sur les représentations du paragraphe 1 (introduction) on trouve aussi des avis défavorables au modèle de la droite arithmétique. Ainsi Dufour-Janvier, Bednarz et Belanger (1987) soulignent le fait que l'introduction précoce et l'utilisation d´un nouveau système de représentation peut avoir des effets négatifs sur l'apprentissage, ou conduire à des conceptions erronées qui pourraient fonctionner comme obstacles pour des stades suivants de l'apprentissage. Comme exemple d´une représentation "problématique", ils donnent le modèle de la droite arithmétique. En dehors des difficultés d'utilisation de la droite arithmétique comme moyen de représentation des opérations, les chercheurs mettent à jour des interprétations erronées qui pourraient être présentes chez quelques élèves à cause du contexte dans lequel elle est utilisée. Par exemple, quelques enfants voient les nombres qui sont situés sur la droite arithmétique comme des panneaux qui sont placés le long d'une route, sans comprendre la nécessité de leur placement à distance égale. Un pourcentage non négligeable d'élèves développe l'idée que la droite arithmétique présente une série de pierres, sur lesquelles on peut marcher, séparées par des vides. Une telle conception est très éloignée de celle de densité des nombres réels qui apparaît sur la droite arithmétique.

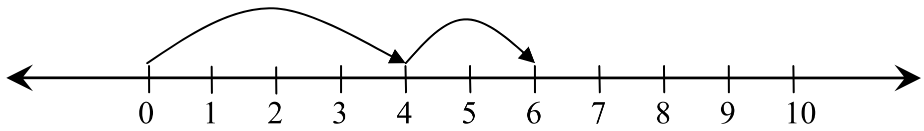
D´autres chercheurs contestent le « grand pouvoir » de la représentation de la droite arithmétique :

-"…le modèle de la droite arithmétique doit être abandonné" (Hart, 1981. p.87),

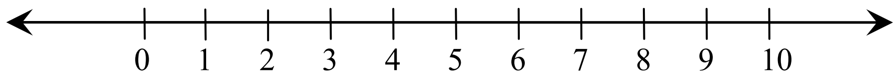
-"Une droite arithmétique n'est pas une aide visuelle utile pour les jeunes enfants, pour l'addition et la soustraction des nombres entiers." (Liebeck, 1984, p.194.)

4.2. La droite arithmétique dans l'enseignement de l'école primaire de Chypre

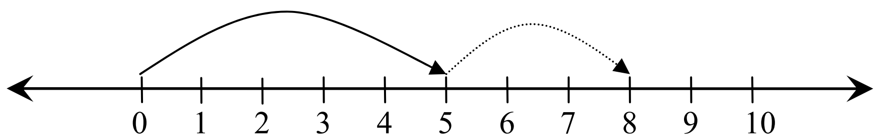
A Chypre, sous l'influence des manuels des mathématiques d'autres pays, la représentation de la droite arithmétique est utilisée systématiquement et sur un long terme dans l'enseignement de l'addition et de la soustraction des nombres naturels. Ainsi, après l'introduction de cette représentation et son application sur des additions simples, on propose aux élèves la figure suivante et quelques exercices :



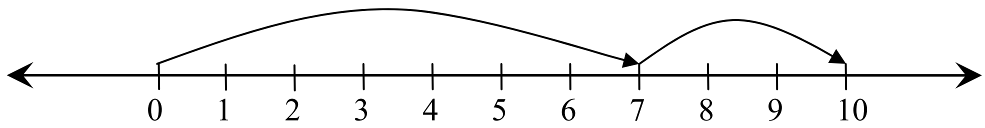
Compléter $4 + 2 = 6$



$5 + 3 = 8$



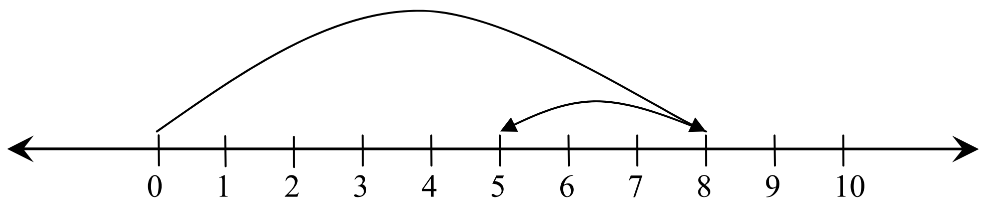
$5 + \square = 8$



$7 + 3 =$

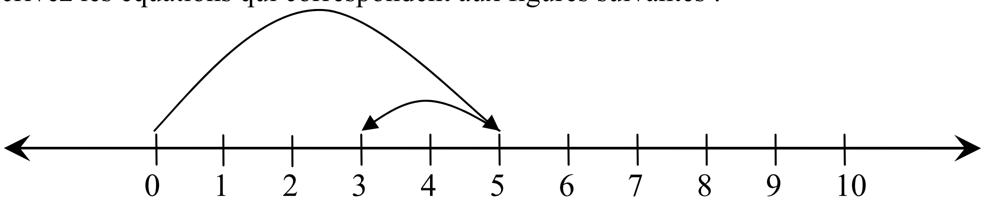
(Manuel de mathématiques de première année de l'école primaire de Chypre, page 40.)

Après l'introduction de la soustraction des nombres naturels, la représentation de la droite arithmétique est utilisée pour la visualisation de cette opération. A la page 71 du même livre, on propose aux élèves la figure suivante et quelques exercices :

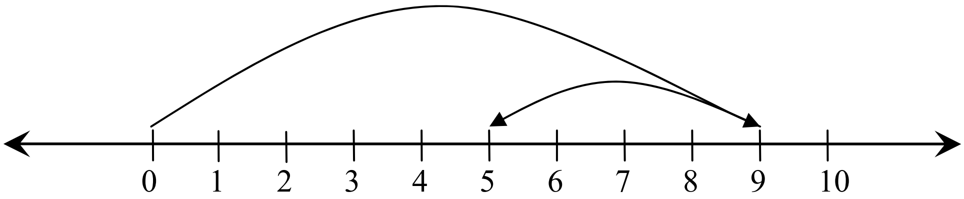


$8 - 3 = 5$

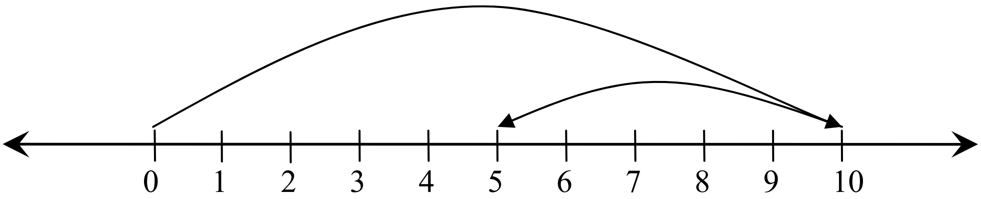
Ecrivez les équations qui correspondent aux figures suivantes :



_ =



_ =



_ =

(Manuel de mathématiques de première année de l'école primaire de Chypre, page 71.)

On peut donc supposer que les élèves grecs de Chypre connaissent la règle du jeu et qu'ils ont une bonne expérience de la représentation de la droite arithmétique pour l'exécution des additions et des soustractions des nombres naturels.

5. Notre recherche

L'objectif principal de notre recherche concerne l'efficacité de la représentation de la droite arithmétique pour l'exécution des additions et des soustractions. *La droite numérique améliore-t-elle la connaissance des opérations numériques ?*

Pour cela nous avons proposé à 106 élèves de 7-8 ans de Chypre les quatre questionnaires suivants (tous les élèves ont répondu aux quatre questionnaires) :

<u>Questionnaire A</u>

Huit opérations (additions ou soustractions) sont proposées :
$14 + 3 = \square$, $8 + 7 = \square$, $13 + \square = 16$, $9 + \square = 15$, $19 - 4 = \square$, $12 - 5 = \square$,
$18 - \square = 16$, $13 - \square = 9$.

<u>Questionnaire B</u>

Huit opérations du même type avec l'utilisation possible (mais pas obligatoire) de la représentation de la droite arithmétique.

<u>Questionnaire C</u>

Huit opérations du même type avec l'utilisation obligatoire (par contrat) de la représentation de la droite arithmétique.

<u>Questionnaire D</u>

Quatre opérations du type inverse de celui du questionnaire C : On propose sur la représentation de la droite arithmétique une addition ou une soustraction et on demande l´opération et son résultat. Les quatre opérations qui sont dessinées sur la droite correspondent à : 13+4=17, 7+5=12, 16-4=12, 11-5=6.

Les exercices des questionnaires C et D correspondent, en général, aux exercices des pages 40 et 71 du manuel grec présentées au paragraphe 5.2 (et aussi de plusieurs autres pages de ce même livre.)

6. Résultats

6.1. Pourcentages de réussite

Les tableaux 1 et 2 qui suivent, donnent les réussites des élèves aux questions A et B.

Tableau 1
Pourcentage de réussite aux questions A1 – A8

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**
97,2%	86,8%	81,1%	73,6%	79,2%	67,9%	75,5%	63,2%

Tableau 2
Pourcentage de réussite aux questions B1 – B8

B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**	**B7**	**B8**
91,5%	87,7%	87,7%	83,0%	85,8%	82,0%	84,0%	74,5%

Dans les deux tableaux précédents, on voit que la réussite est généralement meilleure pour les questions B1 – B8, où les élèves avaient à leur disposition la représentation de la droite arithmétique. En particulier, le pourcentage de réussite passe de 73,6% à 83% pour les questions A4 – B4 et de 67,9% à 82% pour les questions A6 – B6. Une augmentation analogue est observée pour les questions A7 – B7 et A8 – B8. Une exception apparaît pour les questions A1 – B1.

Les tableaux qui suivent donnent les réussites des élèves aux questions C et D.

Tableau 3
Pourcentage de réussite aux questions C1 – C8

C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**C8**
68,9%	71,7%	64,2%	64,2%	51,9%	53,8%	52,8%	47,2%

Tableau 4
Pourcentages de réussite aux questions D1 – D4

D1	**D2**	**D3**	**D4**
67,0%	67,9%	55,7%	54,7%

Les réussites aux questions C et D apparaissent peu différentes. Des différences statistiques significatives sont présentes seulement à l'intérieur de chacun des questionnaires C et D, distinguant les questions portant sur l'addition et celles portant sur la soustraction.

Pour leur part, les réussites aux questions A et C présentent des écarts importants. Dans la représentation graphique qui suit, nous observons la grande différence entre les réussites aux questionnaires A et C.

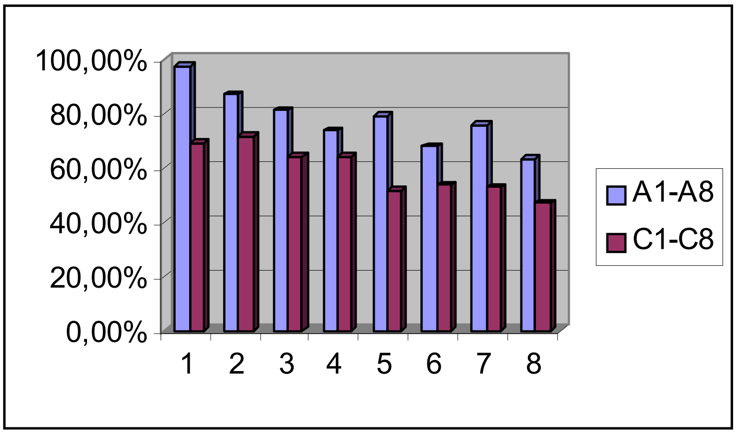
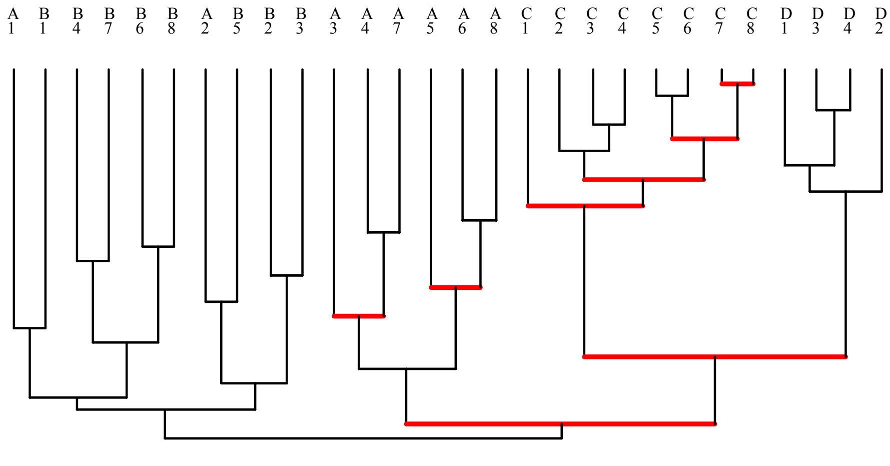


Figure 1 : Questions A et C

6.2. La méthode d'analyse implicative de Régis Gras

On observe pour les élèves de Chypre, des implications entre les huit exercices du questionnaire C et entre les quatre exercices du questionnaire D et une faible liaison entre les questions du C et du D.

On observe aussi une compartimentalisation des questionnaires C et D par rapport aux questionnaires A et B comme c'est évident sur l'arbre de similarité qui suit:



Arbre de similarité : C:\Gagatsis\chic1.2\arithmetic1.csv

Figure 2 : Arbre de similarité

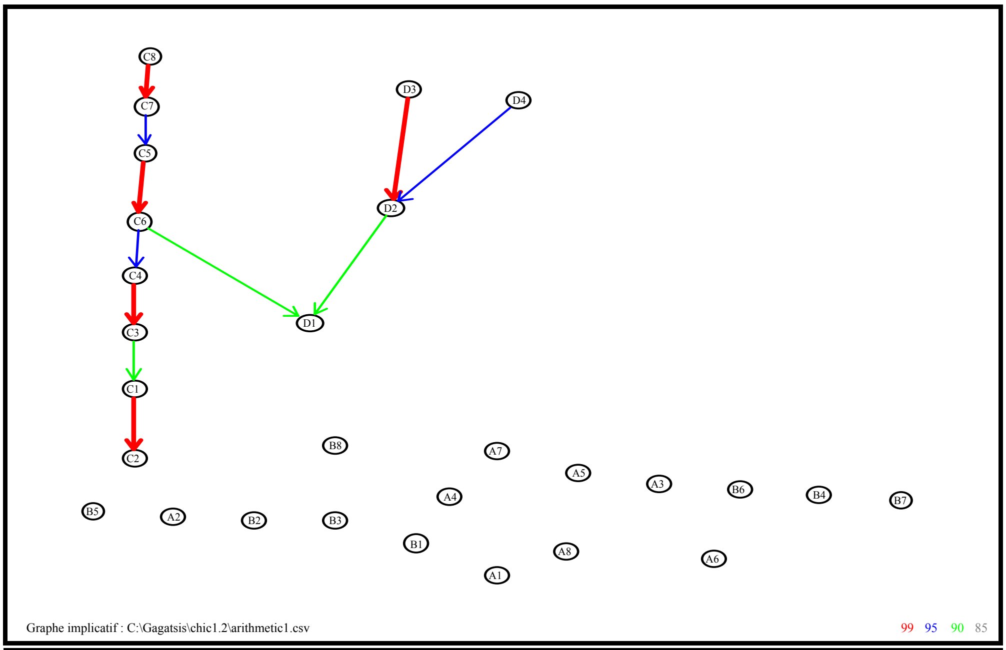


Figure 3 : Graphe implicatif

L'analyse implicative et l'arbre de similarité montrent clairement une cohésion forte des questions des questionnaires C et D et, à l'inverse, presque aucune relation entre les questions des questionnaires A et B. De plus, les questionnaires C et D s'avèrent plus difficiles que les questionnaires A et B. Ces résultats montrent que l'utilisation de la représentation de la droite arithmétique pour l'apprentissage de l'addition et la soustraction des nombres naturels à l'école élémentaire peut créer des problèmes à un grand nombre d'élèves.

7. Discussion

7.1. Conceptions reliées à la représentation de la droite arithmétique

L'approche globale statistique adoptée dans ce texte ne permet pas de cerner les conceptions spécifiques liées à la droite arithmétique. En effet, il existe une différence fondamentale entre trois référents (conceptuels) lorsque la droite arithmétique est utilisée :

- ou bien, les points qui représentent les nombres entiers sont des objets d´un espace affine ; exemple, le point 7,
  (conception statique 1 – " photographique ")
- ou bien, deux points étant donnés, la distance entre ces points repérés renvoie à un espace euclidien à une dimension familier des enfants,

(conception 2 – “cartographique”)

- ou bien, deux points étant donnés, on peut envisager deux opérateurs qui les échangent et qui renvoient à un espace vectoriel (ou à une transformation : la translation.) Un opérateur conduit à l´addition (exemple 5 + 6 = 11) et un autre conduit à la soustraction (exemple 11- 6 = 5)

  (conception dynamique 3 –cinématique.)

Ces trois conceptions peuvent être associées à trois types de tâches qui apparaissent dans le questionnaire C :

1. placer (trouver) sur la droite arithmétique les points 7, 12, 9…
2. quelle est la distance entre les points 12 et 7, 16 et 9, etc. (à associer à : $12 - 7 = \boxed{}$, $16 - 9 = \boxed{}$) ?
3. quels sont les points correspondant à : $11 + 8 = \boxed{}$, $14 + 9 = \boxed{}$?

Cette co-existence possible des trois conceptions pourrait être source d´obstacles épistémologiques pour le concept d’ordre et les opérations entre nombres.

7.2. La “ double ” nature de la droite arithmétique comme modèle de représentation dans l´enseignement

1. Une droite ordinaire de la Géométrie Euclidienne peut être un modèle géométrique pour l´addition, la soustraction, la multiplication et la division des nombres rationnels (et aussi pour la construction des nombres irrationnels.) Descartes fait essentiellement la même chose dans sa *Géométrie*, afin de généraliser la signification des nombres : les opérations sur les nombres réels sont représentées comme des opérations sur les segments de la droite.

2. Une droite munie d’une échelle est un type mixte de représentation. D´un côté, elle fonctionne comme un nouveau modèle géométrique où les rationnels ne correspondent pas seulement aux segments orientés et aux opérateurs mais aussi à l’ensemble des points distingués de la droite. D´un autre côté, la graduation peut être utilisée comme un moyen d’arithmétisation. En accord avec le “ Principe de mesure de la droite ” (Birkoff & Beatkey, 40-42), les points sur la droite peuvent être “ numérotés ” de telle manière que les différences de nombres mesurent les distances entre les points correspondants. Ainsi, chaque opération géométrique (comme l´addition des segments etc.) peut être “ traduite ” par une opération arithmétique et exécutée algorithmiquement.

3. Habituellement ce que nous entendons par “droite arithmétique” comme outil didactique est une droite munie d’une échelle qui permet la représentation et l´exécution des opérations arithmétiques en offrant ainsi aux enfants une visualisation. Cette possibilité est supposée être un aide à la compréhension et à la résolution des problèmes des tâches mathématiques. Néanmoins, avant

d´entrer dans des expérimentations ou des évaluations didactiques, nous devons être conscients de la double nature d´une représentation telle qu´elle a été analysée ci-dessus. Les enseignants doivent être conscients de cette double nature afin d´éviter le “ glissement ” des enfants d´une fonction à l´autre et leur confusion.

4. Nous appelons «droite graduée » le triplet :

$$\mathcal{S}^1 = (E^1, O, O+\longrightarrow)$$

O : un point pris au hasard choisi comme origine des coordonnées
O+$\longrightarrow$ une application 1-1 des nombres réels sur les points.
E^1 : l'ensemble des points de la droite où l'application 1-1 :

$$\begin{array}{ccc} O+\longmapsto & R\longmapsto & E^1 \\ a\longleftrightarrow & O\longmapsto & a \end{array}$$

est telle que la distance entre les points O+$\longrightarrow$ a et O+$\longrightarrow$ b est égale à $|b-a|$ (donc en particulier la distance entre O et O+$\longrightarrow$a est $|a|$).

La dernière demande est équivalente au « Ruler Postulate » de Birkoff.

La droite graduée $\mathcal{S}^1$ est un modèle géométrique du système $\Sigma^1 = (R, +)$ (c.à.d du groupe additif des réels)
Chaque élément de R^1 (c.à.d chaque nombre réel) a est représenté par un élément de $\mathcal{S}^1$ et ceci de deux façons (attention au fait que les éléments de $\mathcal{S}^1$ sont de deux espèces) :
1° comme un point de E^1 et plus concrètement O+$\longrightarrow$a
2° comme une transformation géométrique (translation parallèle) de E^1 et plus concrètement la transformation :

$$T_a : (O\longmapsto X)\longrightarrow(O\longmapsto(X + a)) = (O + \longrightarrow X) + a$$

Et l'opération (addition) du système Σ^1 est représentée sur $\mathcal{S}^1$ comme suit. Etant donnés deux nombres réels a,b, le résultat de l'addition a + b (dans Σ^1) correspond au point :

$$T_b\,(O \longmapsto a) = (O \longmapsto a) \longmapsto b = (O\longmapsto a) + b,$$

où le nombre réel a est représenté ou bien comme un point (O $\longmapsto$ a) ou bien comme une transformation (T_a) tandis que le nombre réel b est représenté comme une transformation T_b.

5. La théorie des *Registres de Représentation Sémiotique* de R. Duval n'est pas suffisante pour la description de la structure de la droite graduée. En effet, cette structure n'est pas un objet mathématique qui accepte différentes représentations dans divers systèmes sémiotiques (comme le décrirait la théorie des registres).
Au contraire, cette structure est un objet mathématique complexe qui met en jeu nécessairement, de manière interne, au moins deux systèmes sémiotiques

$\longrightarrow$

différents : celui des points de l'espace (comme par exemple O, O+ a, etc.) et celui des translations parallèles (ou les vecteurs libres, comme par exemple T_a, T_b, etc. La structure d'un espace affine ne peut être sûrement pas représentée par un seul et unique système de points.

7.3. Questions de recherche

La droite numérique améliore-t-elle la connaissance des opérations numériques ?

Si on se base sur les résultats de notre recherche et sur l'analyse théorique des paragraphes 7.1 et 7.2, nous pouvons confirmer que dans certaines conditions l'utilisation de la droite rend plus complexes la tâche des élèves. Pour un élève qui ne sait pas compter et qui a compris la représentation, en particulier qui a compris que la flèche qui englobe deux intervalles consécutifs représente " ajouter 2 ", la droite peut servir à " trouver " le résultat d'une addition comme 3 + 2. Mais il est improbable que l'élève comprenne cela avant de savoir le résultat 3 + 2 = 5, illustré par diverses représentations (réunion de collections par exemple).

De sorte que le diagramme ne fait qu'ajouter une certaine complexité et éventuellement, pour un débutant, de la perplexité.

L'utilisation de la droite pour des calculs effectifs sur des nombres plus grands montre qu'il y a très vite une complexité effective qui rend le modèle assez inutilisable.

La principale difficulté vient de ce que l'élève qui ne voudrait pas utiliser ses connaissances numériques devrait compter effectivement des intervalles, ce qui ne lui apporte que peu d'avantages par rapport au dénombrement d'une collection d'objet mobiles par exemple. Seule l'énumération est simplifiée.

L'utilisation de la droite numérique pour représenter des nombres aide-t-elle ou contrarie-t-elle les élèves à comprendre et à calculer ?

Nous croyons que notre expérience ne permet pas de répondre définitivement à cette question qui, à notre avis, doit être étudiée indépendamment pour chaque structure (ordre naturel discret, structure additive des naturels, structure de groupe additif des entiers, structure de groupe additif des décimaux) et aux diverses étapes de l'apprentissage.

BIBLIOGRAPHIE

BILLSTEIN R., LIBESKIND S., & LOTT J. W., 1984, *A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers*, California : Benjamin / Cummings.

CARPENTER T. P., CORBITT M. K., KEPNER H. S. Jr., LINDQUIST M. M., & REYS R. E., 1981, *Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress,* Reston, Va : NCTM.

CARR K., & KATTERNS B., 1984, *Mathematics in School*, 13 (4), 30-34.

DFEE, 1999, *The national curriculum for England*. London : DfEE.

DUFOUR – JANVIER B., BEDNARZ N., & BELANGER M., 1987, Pedagogical considerations concerning the problem of representation, in C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 109-122, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

DUVAL R., 1987, The role of interpretation in the learning of mathematics. Diastasi, 2, 56-74 (in Greek).

DUVAL R., 2001, Pourquoi les représentations sémiotiques doivent-elles être placées au centre des apprentissages en mathématiques ; In A. Gagatsis (Ed), Learning in Mathematics and Science and Educational Technology, 67-90, Intercollege press : Cyprus.

ERNEST P. 1985, The number line as a teaching aid. Educational Studies in Mathematics, 16 (4), 411-424.

FISCHBEIN E., 1972, Les modèles génératifs et le développement intellectuel. ActivitésRecherches Pédagogiques, 5, 10-14.

FUEYO V., & BUSHELL D. Jr., 1998, Using number line procedures and peer tutoring to improve the mathematics computation of low-performing first graders. Journal of Applied Behavior Analysis, 31 (3), 417-430.

GAGATSIS A., & MOUGI A., 2000, Aptitude of primary school students in formulation of algebraic relations in a context of translation tasks. Proceedings of the 6th Conference of the Cyprus Paedagogical Association, Contemporary Research in Educational Sciences, 337-347(in Greek).

GAGATSIS A., & PANAOURA G., 2000**,** The interplay of the arithmetic line in the resolution of addizione and subtraction tasks. Proceedings of the 6th Conference of the Cyprus Paedagogical Association, Contemporary Research in Educational Sciences, 348-359 (in Greek).

GAGATSIS A., & PATRONIS T., 1990, The use of geometrical models in the teaching of mathematics. Cahiers de Didactique des Mathematiques, 6, 55-71.

GAGATSIS A., MICHAELIDOU E., & HIAKALLI M., 2001, Theories of representation and the learning of mathematics. Nicosia : Erasmus IP1.

GOLDIN G. A., 1987, Levels of language in mathematics problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 59-65.) Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

GOLDIN G. A., & KAPUT J. J., 1996, A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe & . . . . Mahwah, Theories of mathematical learning, 397-430, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

HALL N., 1998, Concrete representations and the procedural analogy theory. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (1), 33-52.

HART K. M. (Ed.), 1981, Children's understanding of mathematics. London : John Murray.

JANVIER C. (Ed.), 1987, Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

KAPUT J. J., 1987, Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 19-26.) Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

KLEIN A. S., 1998, BEISHUIZEN M., & TREFFERS A., The empty number line in Dutch second grades : Realistic versus gradual program design. Journal for Research in Mathematics Education, 29 (4), 443-464.

LESH R., BEHR M., & POST T., 1987, Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 41-58, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

LIEBECK P., 1984, How children learn mathematics. Harmondsworth : Penguin.

MESQUITA A. L., 1998, On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. The Journal of Mathematical Behavior, 17 (2), 183-196.

Ministère de l'Education et de la Culture de Chypre, 1994, Curriculum for elementary schools. Nicosia : Department of Curriculum Development.

NCTM, 2000, rincipals and standards for school mathematics. Reston, Va : NCTM. Association of America.

PAIGE D. D., THIESSEN D., & WILD M.,1982, Elementary mathematical methods. New York : Wiley

REISMAN F. K., 1982, A guide to the diagnostic teaching of arithmetic. Columbus, Ohio : Charles E. Merrill.

ROTH W. M., & MCGINN M. K., 1998, Inscriptions : Towards a theory of representing as social practice. Review of Educational Research, 68 (1), 35-59.

UNDERHILL B., UPRICHARD E., & HEDDENS J., 1982, Diagnosing mathematical difficulties. Columbus, Ohio : Charles E. Merrill.

VON GLASERSFELD E., 1987, Preliminaries to any theory of representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 215-225, Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Département de l'Education
Université de Chypre
P.O. Box 20537
1678 NICOSIE, CHYPRE
Tel. 00357-22-753725
Fax. 00357-22-753702
e-mail : gagatsis@ucy.ac.cy

MARYVONNE PRIOLET ET JEAN-CLAUDE RÉGNIER

PROBLÈMES ARITHMETIQUES ET REGISTRES SEMIOTIQUES : PRATIQUES D'ENSEIGNANTS DE CYCLE 3 DE L'ECOLE PRIMAIRE

Abstract. Analyzing data collected from a survey of primary school teachers, this article aims at conveying some elements of the answers to the following question: « To what extent are 8-year old students actually confronted with the use of aids bringing together arithmetic problems which are presented in several semiotic registers? »

Résumé. A partir de données recueillies lors d'une enquête auprès d'enseignants de l'école élémentaire, cet article vise à communiquer quelques éléments de réponses à la question suivante : « Dans quelle mesure les élèves du cycle des approfondissements (classes de CE2) sont-ils effectivement confrontés à l'utilisation de supports rassemblant des problèmes arithmétiques présentés sous la forme d'une pluralité de registres sémiotiques ? »

Mots-clés : Registres sémiotiques, problèmes arithmétiques, école primaire, vecteurs d'apprentissage.

1. Préambule

Notre recherche a débuté dans le cadre de la Maîtrise de Sciences de l'Éducation (Priolet 2000) par une étude centrée sur les effets produits, chez l'apprenant, par la forme de présentation des données (texte, tableau, schéma, graphique, texte assorti de dessins) d'un problème arithmétique sur sa résolution. Nous nous sommes situés dans la perspective des travaux conduits par Raymond Duval (Duval 1995.) Pour ce faire, nous avons construit nos données, d'une part, à partir d'un questionnaire adressé à un échantillon de 81 enseignants du cycle des approfondissements de l'école primaire, et d'autre part, à partir des réponses écrites fournies par l'échantillon de 1081 élèves, à l'occasion de travaux de résolution de problèmes arithmétiques proposés en classes de CE2.

L'échantillon d'enseignants et celui des élèves sont issus des écoles de trois circonscriptions scolaires relevant de deux Académies. Leur constitution est basée sur une combinaison de méthodes aléatoires et de méthodes des quotas. Les deux échantillons sont dépendants dans la mesure où il s'agit des élèves de CE2 et de leurs enseignants.

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 113 – 126.

Ayant constaté la présence de manuels scolaires de mathématiques dans près de 80% des classes du cycle des approfondissements[1] de l'école primaire, nous nous sommes alors demandée – ce fut alors l'objet de notre DEA (Priolet 2001) – comment les manuels scolaires étaient utilisés dans les classes. Nous avons d'ailleurs étendu nos investigations à l'utilisation des TICE et nous avons fait le choix de réunir « manuels scolaires » et « TICE » sous le terme « vecteurs d'apprentissage ». Une approche intrinsèque, de type ergonomique, nous a alors permis de décrire et d'analyser l'activité même de l'enseignant proposant à ses élèves, lors de séances de résolution de problèmes arithmétiques, l'utilisation des « vecteurs d'apprentissage » cités.

Après avoir étudié plus spécifiquement « l'environnement » de l'élève — en examinant notamment la place et le rôle des « vecteurs d'apprentissage » —, nos travaux en cours se poursuivent, d'une part, pour tenter de cerner chez les apprenants quelques causes d'échec et de réussite dans le domaine de la résolution de problèmes arithmétiques, d'autre part, pour expliciter les relations susceptibles d'exister entre les modalités des performances des élèves et l'enseignement dispensé dans les classes par l'observation et l'analyse des pratiques effectives des enseignants lors de séquences de résolution de problèmes. Nous tenterons ainsi de positionner les « vecteurs d'apprentissage » dans les dispositifs d'enseignement-apprentissage au sein desquels nous examinerons plus spécifiquement le rôle que peut jouer chacun d'entre eux dans le recours par l'apprenant à la « conversion » de registres de représentation en s'appuyant sur le cadre théorique développé par Raymond Duval. (Damm 1992) (Mesquita 1989) (Duval 1995.)

2. Introduction

Nous nous sommes demandés si les élèves placés en situation de résolution de problèmes arithmétiques étaient confrontés à la lecture d'énoncés exprimés avec différents registres de représentation. Il s'agissait, en premier lieu, d'examiner si les manuels scolaires de mathématiques contenaient effectivement une diversité de représentations et, en second lieu, de considérer l'usage de ces manuels dans les pratiques des enseignants au sein des classes du cycle des approfondissements. Une analyse de manuels de mathématiques édités pour les uns entre 1960 et 1970, et pour les autres entre 1995 et 1999 nous a permis d'effectuer une approche comparative. Le questionnaire soumis aux 81 enseignants de CE2 nous a apporté des réponses à quelques questions relatives aux pratiques des enseignants.

[1] **Cycle des approfondissements de l'école primaire :** encore appelé « cycle 3 », il correspond aux classes de CE2, CM1 et CM2 (élèves âgés de 8 à 11 ans.)

Le présent article expose les principaux résultats issus du questionnaire adressé aux enseignants. Ce dernier est articulé autour de quatre thématiques liées à la place accordée aux représentations sémiotiques :

– les outils des élèves,
– la résolution de problèmes dans les classes,
– la préparation des séquences de résolution de problèmes par le professeur,
– la salle de classe.

3. Analyse de manuels de mathématiques de la classe de CE2

Afin de comparer la place des registres en langue naturelle dans les énoncés de problèmes extraits d'ouvrages parus à une trentaine d'années d'intervalle — ouvrages publiés chez différents éditeurs français entre 1960 et 1970 et entre 1995 et 1999 — , nous avons eu recours à la classification proposée par Raymond DUVAL (Duval, 1996). Ainsi, pour chaque situation-problème, avons-nous recherché la présence de représentations sémiotiques à caractère textuel. Dès lors qu'elles étaient présentes, nous avons examiné la situation dans laquelle se trouvait l'énoncé en langue naturelle. Se trouvait-il dans une situation de production autosuffisante ? Dans le cas contraire, quelle était (ou quelles étaient) la fonction (ou les fonctions) de la (ou des) représentation(s) auxiliaire(s) ?

	Énoncés analysés	Énoncés en langue naturelle en situation de « production autosuffisante »	Énoncés en langue naturelle **non** en situation de « production autosuffisante »
dans les manuels de mathématiques parus entre 1960 et 1970			
Effectifs	72	65	7
	Fréquences (%)	**90,3%**	**9,7%**
dans les manuels de mathématiques parus depuis 1995			
Effectifs	41	13	28
	Fréquences (%)	**31,7%**	**68,3%**

S'agissant des manuels scolaires actuels, nous remarquons que moins de 1/3 des problèmes étudiés comportent un énoncé en langue naturelle placé en situation de production autosuffisante et donc que plus des 2/3 des problèmes étudiés comportent des représentations auxiliaires. En revanche, plus de 90 % des problèmes étudiés figurant dans les manuels des années 60-70 comportaient un énoncé en langue naturelle placé en situation de production autosuffisante.

Pour les différentes fonctions des représentations auxiliaires, nous avons, dans l'analyse des 113 énoncés, repéré principalement quatre fonctions de représentations auxiliaires parmi les sept explicitées dans la classification proposée par Raymond DUVAL (Duval 1999) :

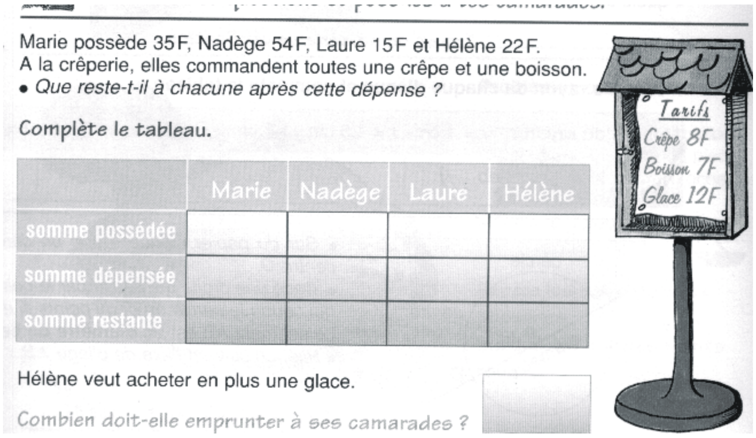
- apport d'informations complémentaires,
- illustration,
- interprétation explicative,
- interprétation heuristique.

		Énoncés en langue naturelle **non** en situation de « production autosuffisante »				
	Énoncés analysés	Total	Apport d'informations complémentaires	Illustration	Interprétation explicative	Interprétation Heuristique
Manuels parus entre 1960 et 1970	72	7 **(9,7%)**	3 **(43,0%)**	0 **(0,0%)**	3 **(43,0%)**	1 **(14,0%)**
Manuels parus entre 1995 et 1999	41	28 **(68,3%)**	19 **(49,0%)**	8 **(20,5%)**	8 **(20,5%)**	4 **(10,0%)**

Dans les manuels des années 60, nous relevons la dominante des apports d'informations complémentaires et des interprétations explicatives en proportions égales. Dans les énoncés étudiés, nous n'avons jamais relevé de représentations auxiliaires ayant fonction soit d'exemple, soit d'illustration. Nous remarquons aussi que les représentations auxiliaires étaient très peu présentes dans les manuels scolaires avant 1970, et que, lorsqu'elles l'étaient, elles revêtaient soit une fonction d'apports d'informations complémentaires, soit une fonction explicative. La place des représentations auxiliaires s'est considérablement accrue depuis les années 1970. Nous notons également l'augmentation de la part réservée à la fonction illustrative.

A partir d'énoncés de problèmes extraits de différents manuels actuels, nous avons tenté de repérer les différentes représentations sémiotiques et leurs fonctions, d'identifier les registres et de cerner les tâches des lecteurs desdits énoncés. Nous avons utilisé la grille d'analyse fonctionnelle des représentations sémiotiques proposée par R. DUVAL.

Cet exemple est extrait d'un manuel scolaire de 1995 :



Marie possède 35F, Nadège 54F, Laure 15F et Hélène 22F.
A la crêperie, elles commandent toutes une crêpe et une boisson.
• *Que reste-t-il à chacune après cette dépense ?*

Complète le tableau.

	Marie	Nadège	Laure	Hélène
somme possédée				
somme dépensée				
somme restante				

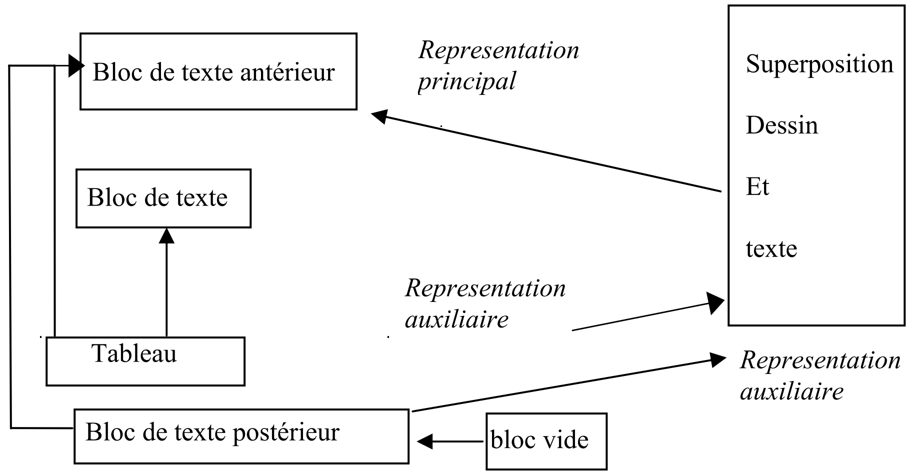
Hélène veut acheter en plus une glace.
Combien doit-elle emprunter à ses camarades ?

(extrait de : CORRIEU, L, dir, *Vivre les mathématiques CE2*, A. Colin, Paris, 1995)

3.1. Analyse fonctionnelle des représentations sémiotiques

Représen-tation sémiotique	**Registre** (implique un système de représentation)	**Libres** ne relevant pas d'un registre	**<u>Situation</u>**	**Fonctions**	**Tâches**
bloc de texte antérieur	langue naturelle		non autosuffisante	représentation principale	il s'agit là de la représentation principale, mais qui n'est pas en situation autosuffisante (on ne dispose pas de toutes les données pour résoudre)
texte *Complète le tableau* »	langue naturelle		auxiliaire		retour sur le texte antérieur et aller vers le tableau
tableau à compléter	tableau		auxiliaire	interprétation heuristique	retour sur le texte et sur le dessin comportant les tarifs
bloc de texte postérieur	langue naturelle		non autosuffisante	représentation principale par rapport au dessin, mais auxiliaire par rapport au texte antérieur (bloc n°1)	retour sur le dessin (tarif) et sur le texte initial (ou sur le tableau si déjà renseigné)
Représenta-tion mixte : superpositi on dessin et texte	texte	et image (signifiance visuelle autonome)	auxiliaire et autosuffisante	apport d'informations complémentair es	

On obtient une organisation d'ensemble du type :



Nous avons constaté à partir des études d'un ensemble d'énoncés de problèmes numériques que les manuels scolaires actuels contiennent une variété de représentations qui amèneraient les élèves à se confronter à la conversion de représentations dès lors qu'il est nécessaire de procéder à un changement de registre.

Selon Raymond DUVAL (Duval 2000), toute activité mathématique requiert l'utilisation d'au moins deux registres de représentations. Mais dans quelle mesure les élèves sont-ils effectivement confrontés à cette variété de représentations ?

4. Confrontation effective des élèves de CE2 à la résolution de problèmes arithmétiques

Par le moyen du questionnaire adressé à chaque enseignant, nous avons recueilli les informations suivantes :

Chaque élève de CE2 dispose-t-il d'un manuel de mathématiques ? ☐
d'un fichier de mathématiques ? ☐

***Si oui**, lequel ? (titre, éditeur, collection)* ______________________________

***Sinon**, les élèves disposent-ils d'un livre pour deux ?* ____________________
Lequel ? (titre, éditeur, collection) ____________________________________

4.1. Nombre de manuels de mathématiques par élève de CE2

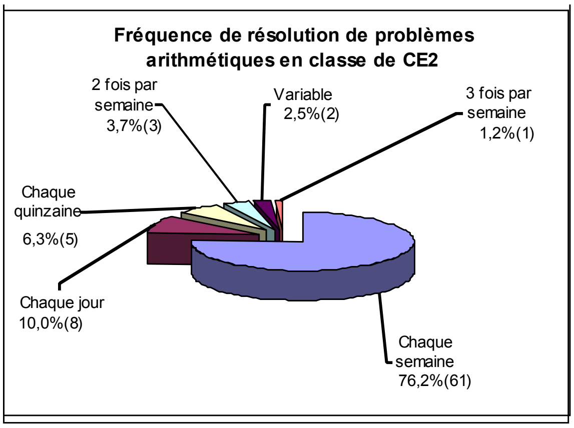
Au moins un outil par élève (manuel ou fichier)	**79% (64 classes sur 81)**
Aucun outil par élève (manuel ou fichier)	**18,5% (15 classes sur 81)**
Un outil pour deux élèves (manuel ou fichier)	**2,5% (2 classes sur 81)**

Dans les quatre cinquièmes des classes de notre échantillon, chaque élève dispose individuellement d'au moins un manuel ou d'un fichier auquel il peut recourir soit de manière autonome, soit à la demande de l'enseignant. Mais la présence d'un ouvrage de mathématiques par élève ne saurait impliquer de fait la mise en place de fréquentes confrontations des élèves aux résolutions de problèmes. Quelle est donc dans les classes concernées le niveau de fréquence d'activités de résolution de problèmes ?

• Nombre de problèmes :
En moyenne, selon quelle fréquence proposez-vous à vos élèves de CE2 de résoudre des problèmes arithmétiques ?
Fréquence journalière ☐ *nombre moyen de problèmes traités* ______
Fréquence hebdomadaire ☐ *nombre moyen de problèmes traités* ______
Fréquence : quinzaine ☐ *nombre moyen de problèmes traités* ______

Autre réponse : ________________________________

4.2. Fréquence de résolution de problèmes arithmétiques au CE2



80 enseignants ont répondu à cette question. Dans plus de 3 classes sur 4, les élèves sont hebdomadairement confrontés à une activité de résolution de problème, mais seulement dans 1 sur 10 quotidiennement. Il ressort que la résolution de problèmes de mathématiques demeure une activité faiblement mise en œuvre si nous quantifions le temps passé par un élève sur l'année scolaire dans cette situation didactique.

Nous nous sommes également intéressés à la phase de correction en demandant aux enseignants concernés par l'enquête, si :

• Correction des problèmes

D'une manière générale, pour la résolution de problèmes arithmétiques, vous procédez le plus souvent :
- à une correction individuelle ☐
- à une correction collective ☐

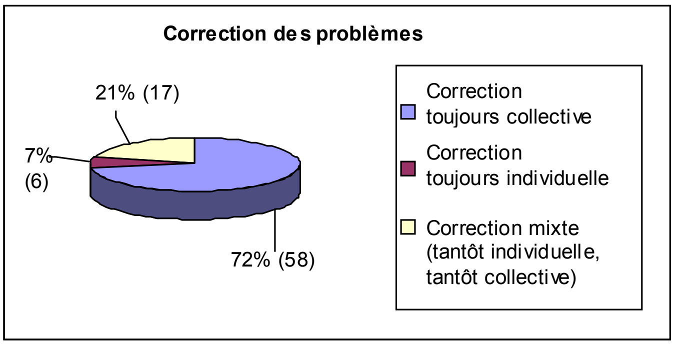
Si vous procédez le plus souvent à une correction collective :

- *Vous partez prioritairement :*
- de la réponse exacte d'un élève ☐
- de la confrontation de plusieurs réponses exactes d'élèves, mais de réponses présentées différemment ☐
- de la confrontation d'au moins une réponse exacte d'un élève et d'au moins une réponse erronée d'un élève. ☐

- *Vous préférez proposer vous-même directement une solution* ☐

- *Vous introduisez systématiquement au cours de la correction collective une autre forme de résolution que celle(s) proposée(s) par vos élèves* ☐

Nous obtenons les réponses suivantes :

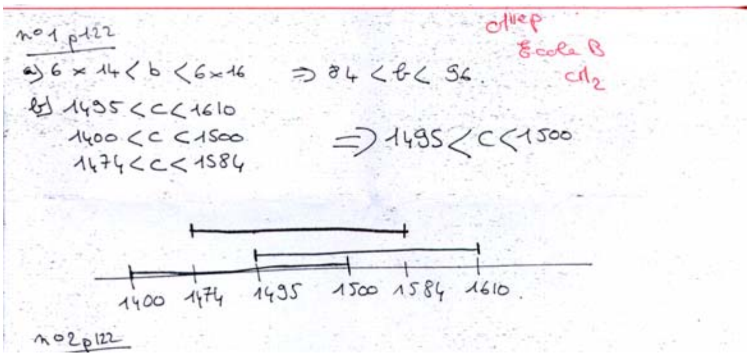


Point de départ : réponse exacte d'un élève.	**6,7% (5)**
Point de départ : confrontation de plusieurs réponses exactes d'élèves, mais de réponses présentées différemment	**38,7% (29)**
Point de départ : confrontation d'au moins une réponse exacte d'un élève et d'au moins une réponse erronée d'un élève.	**50,7% (38)**
L'enseignant préfère proposer lui-même directement une solution.	**0%**
L'enseignant introduit systématiquement au cours de la correction collective une autre forme de résolution que celle(s) proposée(s) par les élèves.	**2,7% (2)**
Non réponse.	**1,3% (1)**

La phase de correction est encore, dans près de 3 classes sur 4, réalisée sur un mode exclusivement collectif conforme aux habitudes pédagogiques françaises. Dans cette activité de correction collective, près de 90% des enseignants partent d'une confrontation des réponses produites par les élèves. Les uns (50%) s'appuient sur une confrontation entre une réponse exacte et une réponse erronée tandis que les autres (38%) sur une confrontation entre plusieurs réponses exactes. Sans doute sont ici mobilisées, chez les enseignants, des représentations de l'erreur, de son statut et de son rôle dans l'apprentissage. Nous pourrions interpréter aussi ces données comme une tentative de prise en compte implicite par l'enseignant de la variabilité des registres sémiotiques de représentations et d'expression mobilisée dans la résolution de problèmes de mathématiques par les élèves.

L'un des professeurs qui introduit de façon systématique une forme différente de résolution, explique qu'il s'agit là d'une phase très importante dans son enseignement. En effet l'introduction, lors de ce temps de correction, de différentes représentations offre à ses élèves une occasion de passer d'une forme de représentation à une autre forme, par exemple passer d'un tableau à un texte, pour résoudre et pour expliquer le mode de résolution adopté.

Voici un exemple de correction pour laquelle différentes représentations ont été introduites par l'enseignant (extrait de la fiche de préparation d'un enseignant) :



5. Préparation des séquences de résolution de problèmes par les enseignants

À partir des questions suivantes, nous avons procédé à quelques investigations en relation aux pratiques de préparation des séquences de résolution de problèmes par des enseignants de CE2.

• Outils de l'enseignant *Utilisez-vous un ouvrage spécifique pour préparer vos séquences de mathématiques ?* ________ *Lequel ? (titre, éditeur, collection, livre du maître ou livre de l'élève)* ________ ____ *Sinon, comment procédez-vous ?* ________________________ • Résolution des problèmes *D'une manière générale, dans le cadre de la préparation de vos séquences relatives à la résolution de problèmes présentés aux élèves de CE2 :* *a) vous résolvez systématiquement le problème par écrit préalablement* ☐ *d) vous résolvez le plus souvent le problème mentalement* ☐ *c) vous recherchez systématiquement par écrit plusieurs façons de résoudre le problème* ☐ *Si oui à la question c) , merci de préciser l'utilité que vous percevez dans cette démarche et l'utilisation que vous en faites avec vos élèves.* ____

Le tableau ci-dessous met en évidence la modalité "résolution mentale" comme dominante devant la "pratique écrite de la résolution". Nous pourrions interpréter ce résultat comme un indice du fait que la plupart des enseignants se placent très souvent dans une situation qui ne les confrontent pas à l'explicitation du recours à un registre sémiotique de représentation et d'expression.

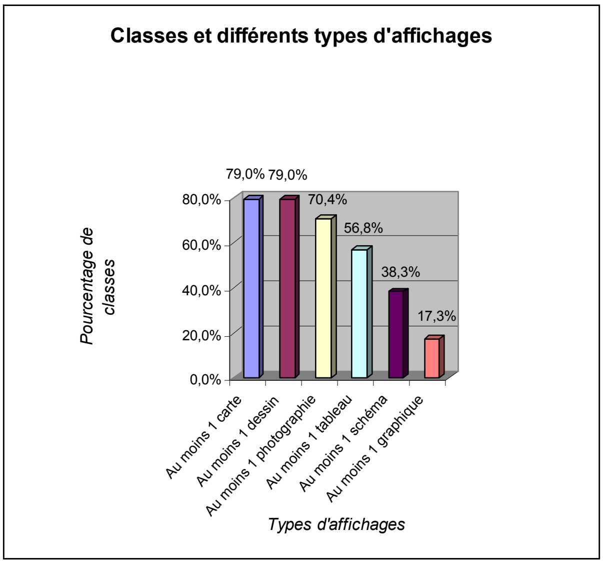
	oui	non	Non réponse au § « Résolution de problème »
L'enseignant résout systématiquement le problème par écrit, préalablement	**21,2% (17)**	**75% (60)**	**3,8% (3)**
L'enseignant résout le plus souvent le problème mentalement	**53,7% (43)**	**42,5% (34)**	**3,8% (3)**
L'enseignant recherche systématiquement par écrit plusieurs façons de résoudre le problème	**28,7% (23)**	**67,5% (54)**	**3,8% (3)**

6. Salle de classe et registres de représentations

Par les questions suivantes, nous avons tenté de décrire l'environnement de la classe et le bain culturelle mathématique dans lesquels évoluent les élèves :

Merci d'indiquer dans chaque case le nombre de représentations effectivement affichées (le jour où vous renseignez ce questionnaire) dans votre classe ***et*** *visibles par les élèves.*

- *tableaux à double entrée* _____
- *schémas* _____
- *cartes* _____
- *graphiques* _____
- *dessins d'enfants, reproductions d'œuvres* _____
- *photographies* _____
- *autres (précisez)* ____



Ces résultats attestent que, dans les classes de l'échantillon, les enseignants procèdent à des affichages de représentations de types tableau, schéma et graphique qui relèvent de registres sémiotiques utilisés dans la résolution de problèmes de mathématiques. Cependant nous n'avons pas ici d'informations suffisantes et significatives sur la relation entre ces deux éléments : affichage et résolution.

7. Conclusion

L'objet de notre étude était de repérer l'usage des registres sémiotiques de représentation et d'expression dans les situations d'enseignement-apprentissage proposées par les enseignants en mathématiques à l'école primaire en France. Les résultats que nous avons obtenus, sont issus des réponses à un questionnaire adressé à un échantillon de 81 enseignants encadrant un total de 1081 élèves âgés de 8/9 ans en classes de CE2.

Il ressort que dans 79% des classes nous avons noté la présence de documents écrits de mathématiques mais que seulement 10% des enseignants proposent une situation de résolution de problèmes arithmétiques quotidiennement, durant le temps scolaire. Le mode de correction laisse penser qu'une prise en compte implicite de la variabilité des registres sémiotiques de représentation et d'expression est mobilisée. Mais la pratique écrite de la résolution de problèmes par l'enseignant lui-même lors de la préparation de sa séquence didactique est relativement délaissée au profit d'une "résolution mentale" qui ne lui donne pas l'occasion de la confrontation à l'usage explicite des registres sémiotiques.

BIBLIOGRAPHIE

DAMM Regina, 1992, *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*, Thèse de Doctorat, ULP Strasbourg.

DUVAL Raymond, 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Berne, Peter Lang.

DUVAL Raymond, 1996, Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? , *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol.16, n°3, Grenoble, La Pensée Sauvage, 349-382.

DUVAL Raymond, 1999, *Conversion et articulation des représentations analogiques*, IUFM Nord-Pas de Calais.

DUVAL Raymond, 2000, L'analyse cognitive des problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques, *Conférence faite au Tercero Encuentro en didactica de la Matematica, Universidad Catolica de Valparaiso*.

MESQUITA Ana, 1989, *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments d'une typologie,* Thèse de Doctorat, ULP Strasbourg.

PRIOLET Maryvonne, 2000, *Résolution de problèmes arithmétiques et registres sémiotiques*, Mémoire de Maîtrise en Sciences de l'Éducation, sous la direction de J.Cl. RÉGNIER, Université Lumière Lyon 2, 363.

PRIOLET Maryvonne, 2001, *Résolution de problèmes numériques au cycle des approfondissements de l'École Primaire, recours à la production de représentations écrites et vecteurs d'apprentissage*, Mémoire de D.E.A. de Sciences de l'Éducation, sous la direction de F. CLERC, Université Lumière Lyon 2.

Maryvonne PRIOLET, Jean-Claude REGNIER

Institut des sciences et pratiques d'éducation et de formation (ISPEF)
Centre de recherche en sciences de l'éducation (CRSE) EA 648
16 quai Claude Bernard
69365 LYON Cedex 07

e-mail : Jean-Claude.Regnier@univ-lyon2.fr

ROBERT ADJIAGE

REGISTRES, GRANDEURS, PROPORTIONS ET FRACTIONS

Abstract. This article is to be regarded as the continuation of a theoretical and experimental research that concerned the links between various systems expressing rational numbers and their conceptualisation at the elementary school level (9 to 11 year-olds.) A collection of twenty software programs, specifically conceived for this purpose, greatly facilitated the teaching experiment. Our Hypothesises were strongly validated but certain difficulties arose with problems of ratios and proportions linked to the physical magnitudes. Thus, we reconsider the role of magnitudes in our new research, respecting a precise protocol of separation and articulation of the mathematical and physical fields. In this protocol, the graduated lines is considered as a register of transition between a semiotic and a physical approach of the relative magnitudes. This register allows both to represent and process them. We analyse the first observations of a new group of 12 year-old learners.

Résumé. Ce travail s'inscrit dans la continuité d'une recherche sur les liens entre diverses formes d'expression des nombres rationnels à l'école élémentaire (9-11 ans) et leur conceptualisation. Les hypothèses de cette recherche ont été amplement validées par une expérience d'enseignement privilégiant l'environnement informatique de la série des logiciels ORATIO. Une analyse plus précise des observations laisse cependant apparaître des résultats plus nuancés dans la résolution de problèmes rationnels liés aux grandeurs physiques. Sans revenir à une approche classique où ces derniers sont seuls habilités à fonder le "sens" de la notion de rationnel, nous avons renforcé le rôle des grandeurs dans notre dispositif, en suivant un protocole précis de séparation et d'articulation des champs physiques et mathématiques. Dans ce nouveau dispositif, la droite graduée apparaît comme un registre de transition entre les modes de fonctionnement physique et sémiotique et un outil privilégié de la représentation et du traitement des problèmes rationnels liés aux grandeurs. Nous analysons les premières observations issues d'une mise en œuvre de ce nouveau dispositif dans une classe 6ème.

Mots-clés : Proportion, rapport, grandeur, registre sémiotique, problèmes rationnels, fraction, droite graduée.

Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 8, p. 127 – 150.

Cette recherche et cette communication s'inscrivent dans la continuité de travaux précédents (Adjiage ; 1999) : la description, l'analyse et les résultats d'une expérience d'enseignement de la notion de rationnel à la charnière école-collège. L'idée centrale de ce dispositif était que l'acquisition de la notion de rationnel passait par la découverte d'invariants entre trois registres d'expression (Duval ; 1995, p. 21) parmi lesquels celui des droites graduées (Adjiage & Pluvinage ; 2000) jouait un rôle prépondérant, tant pour l'expression initiale des rationnels que pour le contrôle des résultats obtenus dans les autres registres. Rappelons enfin que ces apprentissages reposaient sur un travail systématique de séparation et d'articulation des trois registres mobilisés dans l'environnement des logiciels de la série ORATIO (Adjiage & Heideier ; 1998), spécialement conçus et développés dans ce but.

Cette expérience a connu des succès, pointés notamment lors de l'évaluation nationale à l'entrée en 6ème, mais elle n'a pas permis de départager la population observée de l'échantillon national en résolution de problèmes rationnels liés aux grandeur. Il était donc nécessaire de reconsidérer le protocole d'enseignement autour de questions comme : quelle place pour les grandeurs dans ce dispositif ? A quel moment ? Quelle articulation avec les registres ? Quel rôle la droite graduée peut-elle jouer dans cette articulation ? C'est pour répondre à ce type d'interrogations que nous avons mis en place un nouveau protocole qui doit durer deux années (6ème et 5ème[1].)

Nous tenterons, à l'issue d'une première année d'observation, de démonter la complexité de la notion de rationnel à travers :

- la diversité des problèmes physiques qui la sollicitent,
- la diversité des registres sémiotiques qui permettent leur expression et leur traitement mathématique,
- la difficulté à repérer et à actionner les articulations entre le champ physique et le champ mathématique d'une part, entre les divers registres mobilisables d'autre part.

Nous serons ainsi amenés à repenser l'activité rationnelle en deux champs séparés bien qu'habituellement intriqués sinon embrouillés, tant dans l'esprit des élèves que des enseignants, à savoir le champ physique et le champ mathématique. Nous décrirons alors notre protocole d'enseignement qui reconnaît et organise les séparations et les articulations en valorisant pour cela la référence à la droite graduée qui apparaît de plus en plus comme un puissant outil de transition entre champs et registres.

---

[1] Classes de Michel Barthelet, collège de Herrlisheim, 67850.

1. Cinq modalités d'appréhension d'un problème de proportion (Transparent Arg1)

L'étude de cas suivante va permettre d'introduire les enjeux et les hypothèses majeurs principaux de ma recherche. Elle s'appuie sur les divers types de procédures de résolution d'un problème de mélange, recensées dans deux classes de 6ème. Ce problème est l'un des nombreux items d'une évaluation diagnostique proposée en septembre 2001 avant enseignement. Il est construit sur le modèle des problèmes de Noelting (1980) repris par Alarcon (1982.)

1.1. L'énoncé d'un problème de mélange, les types de procédures de résolution recensées (Transparents Arg1 et Arg2)

1.2. Les cinq modalités (Transparent Arg3)

Il s'agit d'une classification des procédures recensées en fonction d'une intégration plus ou moins réussie des deux composants du mélange en une nouvelle entité qui préfigure le rapport de l'un à l'autre. Ces modalités ne sont pas à regarder comme les étapes obligées et successives d'un processus d'acquisition, car des phénomènes de simultanéité, de régression ou de saut ont été observés. On peut néanmoins relever que, s'il est délicat de tenter une hiérarchisation des modalités 1-2-3, l'accès aux modalités 5-6 témoigne d'une plus-value conceptuelle et opératoire sur les notions de rapport et de proportion.

2. Comment se déploie l'activité dans cet exemple ?

Pour tenter de répondre à cette question nous allons examiner l'échantillon, très représentatif, des réponses élèves que nous proposons sur le transparent Arg2.

2.1. Réponses de Modalité 1

2.1.1. Type 1-c (LINDA)

Elles s'en tiennent à une vision partielle de l'expérience physique d'un sur-dosage en chocolat dans la recette A. Elles sont sans doute orientées par la présence du terme chocolat dans la question, relayée par le côté visuellement attracteur de la couleur noir. Elles sont très peu interprétatives (au sens d'un traitement de l'énoncé qui amènerait par exemple à différencier "parts de chocolat" et "goût du chocolat") et mathématisées, et pourraient se décrire en termes de stimuli : "chocolat, plus de noir perçu en A qu'en B", et de réponse : "plus de chocolat donc plus de goût".

2.1.2. Type1(l-c) (GUILLAUME)

Elles sont aussi très limitées sur le plan de l'interprétation du texte, pouvant se ramener à une description séquentielle des lignes du dessin (plus de chocolat en A qu'en B sur la première ligne, plus de lait en A qu'en B sur la deuxième ligne.) On peut ici penser à une modélisation rudimentaire non exprimée, qui donne au chocolat et au lait des rôles symétriques ("plus de verres de chocolat **et** de verres de lait"), assimilant le mélange à une paire {A ; B} et lui appliquant un théorème implicite : si A1 > B1 et A2 > B2, alors {A1 ; A2} > {B1 ; B2}.

2.1.3. Type1-l (GEOFFREY)

Elles témoignent de plus de profondeur dans l'interprétation de l'énoncé car elles prennent en compte le **goût** comme entité "inversement proportionnelle" à la quantité de lait. Comme la question porte sur le chocolat, d'ailleurs cité dans la réponse, et que le résultat passe par une considération sur le lait, on peut supposer qu'un lien est créé entre les deux constituants, même si le chocolat disparaît de la comparaison finale. L'énoncé est ici traité puisque le **goût** du chocolat est bien distingué de la **quantité** de chocolat. Il n'apparaît en revanche pas de mathématisation, mais plutôt l'évocation d'une expérience physique banale : plus dilué par le lait, donc moins le goût du chocolat.

2.2. Réponses de Modalité 2

Elles se contentent d'une description non opératoire de la situation. Il n'y apparaît donc ni traitement de l'énoncé, ni mathématisation. Ces réponses, dont 3 sur un total de 7 dans les deux classes sont exactes, témoignent tout à la fois d'un refus de s'exonérer d'un des deux constituants (contrairement à la modalité précédente) mais aussi de la gêne à leur appliquer **un** traitement qui **les** prenne en compte simultanément.

2.3 Réponses de Modalité 3

La description devient opératoire tout en restant qualitative. Des tentatives (Emmanuel et Mylène), encore maladroites, pour dégager une nouvelle entité « mélange » à partir d'un traitement verbal des constituants (« plus de **goût** », « chocolat**ée** ») apparaissent. Un lien est en voie d'établissement entre les deux composantes du goût (« 2 parts de chocolat pour **juste** 1 part de lait ».) Il témoigne d'une bonne prise en compte de l'expérience mentale, de sa coordination avec le texte de l'énoncé, et des traitements qu'on est capable d'appliquer au dernier sous le contrôle de la première. La mathématisation reste ici encore embryonnaire.

2.4. Réponses de Modalité 4

Avec ces dernières, on observe pour la première fois la mobilisation en actes de propriétés de la linéarité pour traiter cette "entité" (le goût, le mélange) appréhendée via une "dualité" (lait et chocolat.) L'aspect lapidaire de la réponse de Nathalie masque un processus complexe de séparation et d'articulation d'une expérience physique, d'un traitement, sans doute en langue naturelle, de l'énoncé, et d'un proto-modèle mathématique (la linéarité.) Ce dernier, reconnu pertinent par l'élève, l'autorise à rechercher un référent commun puis de rapporter, par des opérations légitimes dans le modèle, toutes les quantités à ce référent commun, ce qui permet d'effectuer la comparaison sur un seul constituant, et donc, au final, de réaliser le programme des élèves de la modalité 1. On notera que les moyens d'expression sollicités pour le traitement mathématique restent implicites (Nathalie) ou rhétoriques (Jennifer et Éric), ou passent par une schématisation qui se substitue aux mots qui semblent manquer à Marjorie.

2.5. Modalité 5

Un seul élève sur les 47 évalués recourt explicitement à une expression numérique, fractionnaire et / ou entière, pour caractériser le goût chocolaté et effectuer sa comparaison. Une fois l'expression fractionnaire reconnue légitime pour représenter le lien, une fois trouvée l'expression fractionnaire adéquate, la comparaison de ces entités à deux composants se ramène à une comparaison de nombres. Une fraction bien comprise est donc un objet mathématique qui permet de lever la contradiction du **un** pour **deux**. Mais les voies de passage vers cette acception semblent bien étroites (1 élève sur 47 en ce début d'année scolaire.)

L'énoncé et l'illustration de ces cinq modalités (**Transparent Arg 3**) vont nous permettre de dégager une définition didactiquement opérationnelle d'un nombre rationnel à ce stade et de justifier empiriquement la séparation de l'activité de résolution de problème en champs articulables les uns aux autres (Adjiage ; 2001, p. 11.)

3. Un objet et des champs d'activités rationnels

3.1. Un nombre rationnel à ce stade de la scolarité

L'étude qui précède nous permet de dégager les caractéristiques sensibles, soit celles qui rendent compte des démarches et des obstacles relevés, de la transposition didactique d'un nombre rationnel à ce stade de la scolarité. Nous y voyons un objet à double détente (**Transparent Arg 3.1**) :

- **un lien** numérique entre deux entiers, ce qui fait d'un rationnel **un** nombre exprimé par **deux** nombres ;

– un **lien linéaire** entre deux séries de couples d'entiers, ce qui fait d'un rationnel un nombre exprimable par un **ensemble** de couples "réputés" équivalents.

En résumé, dans l'écriture $\frac{3}{4}$ *:*

L'expert voit le lien de 3 à 4 **pouvant exprimer aussi** le lien de 75 à 100 ou de 15 à 20… l'élève ne voit souvent que 3 et 4, ou 3 parmi 4.

Le principal obstacle à dépasser par les élèves pour produire un objet fractionnaire réside dans cette contradiction entre unité (du lien) et pluralité de sa représentation (deux entiers, deux ensembles d'entiers.) D'autant que ce risque continue à être renforcé par un enseignement qui privilégie de manière quasi exclusive la représentation en "parts de tarte", alimentant l'illusion que : "c'est facile, il suffit de compter les parts", et ce malgré les études multiples concluant toutes au faible potentiel de cette illustration à rendre compte du concept : Hart & Sinkinson, 1989 ; Streefland, 1993, p. 114 ; Adjiage, 1999, p. 204…. Nous trouvons un écho de cet obstacle dans les productions de Linda par exemple qui s'exonère d'un composant du mélange, ou de Florian qui, faute de dégager un invariant du mélange, en est réduit à paraphraser sa composition ; nous trouvons un écho de son dépassement auprès des élèves de modalité 4 et 5 qui, en recherchant plus ou moins explicitement un référent commun – tout ramener à un verre de lait – modifient corrélativement la quantité de chocolat initiale, témoignant de leur prise de conscience d'un lien dynamique entre les deux constituants.

A l'inverse (une fraction étant donnée, en fournir une représentation), parmi les 7 compétences nécessaires à la maîtrise de l'expression des rationnels (Adjiage ; 1999, pp.205-211), nous avions placé en premier la capacité à doubler l'information (**transparent Arg4**), c'est à dire la capacité à prendre en compte les deux termes d'une fraction et à leur trouver un équivalent dans un autre registre (par exemple géométrique) qui exprime leur lien d'interdépendance. Nos observations ultérieures, notamment en 6ème, confirment et amplifient le rôle central de cette compétence.

3.2. Cinq types de problèmes rationnels liés aux grandeurs ; les raisons d'un choix (transparent Arg4.1)

Traditionnellement, les didacticiens distinguent diverses acceptions d'une fraction à ce stade de la scolarité, en fonction des problèmes liés aux grandeurs, donc des problèmes physiques qu'ils permettent de résoudre. Brousseau (1986 ; pp. 90-94, pp.98-100 et 1987 ; pp.2-18 et pp. 136-151) distingue ainsi le rationnel-mesure accompagné d'une unité ($\frac{3}{4}km$) du rationnel-dilatation sans unité (agrandir par un coefficient de $\frac{7}{4}$), là où les anglo-saxons (Kieren ; 1980) se réfèrent à cinq sous-constructions (relation partie/tout, quotients, ratios, opérateurs et mesures.) Nous distinguerons, pour notre part, deux grandes catégories de problèmes liés aux grandeurs, dont la deuxième est elle-même subdivisée en quatre sous-catégories :

I. *Problèmes de nombres mesurant ou de rapports d'une grandeur à une grandeur de référence – unité - fixée*

Par exemple, comparer : deux champs de $\frac{3}{5}ha$ et $\frac{2}{3}ha$; la part de chaque invité si dans un cas 7 pizzas sont à partager en 4 invités, et, dans l'autre cas, 9 pizzas sont à partager en 5 invités.

II. *Problèmes de rapports de nombres mesurant*

Nous y rangeons les problèmes pour lesquels, notamment lors d'une comparaison, il n'existe pas de référence fixe (par exemple, pour comparer les deux mélanges de 0, le total des verres est 5 dans un cas et 3 dans l'autre) :

a) rapports de grandeurs homogènes (dilatation, densité…),
b) rapports de grandeurs hétérogènes (vitesse, débit, poids spécifique),
c) ratios ou taux ou fréquences (3 chances sur 5, 3 élèves sur 7 ont réussi cet item…),
d) mélanges (5 parts d'arabica pour 2 de robusta.)

Remarquons que cette classification est faite a priori, à partir d'une analyse de contenus. Nous verrons, lors de l'évaluation finale des élèves observés, si une étude statistique des résultats peut faire apparaître une ventilation de l'échantillon dépendant des catégories ci-dessus.

Nous pouvons à présent justifier le choix d'un problème de mélange, comme "exemple exemplaire", parmi les cinq types de problèmes que nous venons de repérer. Ce choix est stratégique, dans la mesure où nous l'avons retenu à la fois pour éclairer nos hypothèses et à la fois comme premier problème rationnel lié aux grandeurs proposé aux élèves dans notre dispositif d'enseignement.

Nos justifications sont de deux ordres, l'un de nature empirique (transparents **Arg5a et Arg5b**), l'autre de nature théorique. Le premier établit la faisabilité du projet : La rapidité avec laquelle de bons à de très bons résultats ont été obtenus, tant lors des passations logicielles (**Arg5a**) que lors des évaluations papier / crayon (**Arg5b**, passation deux mois après le début de notre enseignement.) Nous y rajouterons deux observations, l'une faite par Jean-Claude Rauscher et moi-même dans une classe de CM1 / CM2[2], l'autre dans la classe expérimentale de 6ème. Ces deux observations convergent à relever la force de l'impact des problèmes de mélange sur les élèves, en termes de production de procédures différentes et d'acharnement à les défendre. Jean-Claude Rauscher propose dans ce même colloque des écrits réflexifs produits par les élèves, comme témoignage de cette richesse et de cette diversité.

La justification de nature théorique renvoie à notre définition d'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ (0) qui valorise le lien de a à b plutôt que le couple (a ; b.) Il convenait donc de trouver, dans l'univers des grandeurs, des problèmes qui, pour être réussis, demandent la prise en compte d'une grandeur relative, aisément identifiable et désignable (le mélange), plutôt que d'une double cardinalité (comme c'est le cas de nombres de problèmes liés aux parts de tartes.)

Notons enfin que ce choix n'est pas le choix fait habituellement, et notamment en France où les deux études qui servent de référence (Brousseau ; 1987) et (Douady & Perrin ; 1986) commencent le processus d'enseignement par une approche du rationnel-mesure, suivant en cela une démarche qui s'intéresse à la mesure des grandeurs avant d'aborder le rapport de ces mesures. On relèvera la cohérence de cette démarche avec le primat "physique" qui la caractérise : une fraction est l'invariant des problèmes rationnels liés aux grandeurs.

3.3. Les champs d'activité

Après avoir caractérisé l'objet d'enseignement en 0, tentons de délimiter les champs d'activités qui lui donnent son statut et sa finalité. Il s'agit en fait de démêler ce qui paraît emmêlé chez les élèves de notre échantillon, qu'ils aient réussi ou échoué au problème de mélange énoncé en 0.Examinons à cet effet un ensemble de conditions suffisantes pour la résolution de ce dernier.

Phase 1. Se représenter l'expérience physique du mélange, c'est à dire être capable d'imaginer les gestes et la succession des gestes qui amènent à la réalisation du mélange ainsi qu'à l'appréciation de son goût ;

Phase 2. Décrire ces gestes au moyen de la langue naturelle ;

Phase 3. Interpréter cette première description jusqu'à la construction de ce que Julo (2000 ; p. 13) appelle "une représentation fonctionnelle du problème, [c'est à dire qui] devra permettre [..] d'élaborer une procédure de résolution". En termes de registres, nous parlerions de traitement, dans le registre de la langue naturelle, destiné à obtenir :

a) soit une formulation congruente à une reformulation dans un registre numérique (conversion congruente vers des écritures

[2] CM1-CM2 de Régine Baltz, école Karine, Strasbourg Hautepierre.

fractionnaires par exemple comme Antoine, ou conversion vers un registre figural comme Marjorie sur qui nous allons revenir plus loin),

b) soit, sans changer de registre, une solution purement rhétorique mobilisant, outre les mots de la langue naturelle, les entiers et des traitements multiplicatifs élémentaires de ces derniers (comme Nathalie, Jennifer ou Éric.)

Phase 4. Dans le cas décrit en Phase 3a) ci-dessus, finir par une comparaison : de fractions comme Antoine (un traitement dans le registre des écritures fractionnaires) ; de quantités représentées comme Marjorie (un traitement dans un registre figural l'amène à rapporter les quantités de chocolat de chaque mélange à un verre de lait et donc, au final, à comparer un verre et demi à deux verres de chocolat.)

Remarquons que, dans le cas de Marjorie, le moment de traitement en langue naturelle du début de la phase Phase 3 peut être plus ou moins shunté, dans la mesure où le registre figural et les traitements (flèches, ligne de partage) qu'elle y applique sont congruents à une représentation mentale de phase Phase 1 et / ou Phase 2. L'avantage de cette représentation, c'est qu'elle à la fois descriptive et opératoire, à l'articulation entre un fonctionnement physique et un fonctionnement sémiotique. Le cas de Marjorie nous semble fondateur de notre démarche car il exhibe la genèse d'une modélisation linéaire à partir d'une conversion langue naturelle / registre figural[3] et / ou d'un traitement dans un registre (ici figural) approprié, spontanément mobilisé. Nous verrons qu'il est possible et, c'est une de nos hypothèse, bénéfique de **provoquer** mobilisation et conversion de registres lorsque cette mobilisation / conversion spontanée ne se produit pas.

Ce que nous voyons apparaître dans cette succession de phases, ce sont des moments d'activité à l'intérieur d'un champ donné (champ de l'expérience physique en phase Phase 1 par exemple, champ sémiotique en phase Phase 3a) ou Phase 4 par exemple) et des moments d'articulation soit entre deux champs (physique / sémiotique en début de phase Phase 3), soit entre deux registres du champ sémiotique (langue naturelle / registre figural ou fractionnaire en phase Phase 3a) mais cela pourrait être aussi registre figural / registre numérique.) Dans le champ sémiotique, nous retrouvons les deux activités cognitives fondamentales, traitements et conversions, décrites par Duval (1995 ; pp.39-44.)

---

[3] Nous n'avons que peu de trace de cette conversion, dans la mesure où les explications de Marjorie ne nous donnent à voir que son dessin et une paraphrase de l'énoncé. On peut néanmoins la subodorer dans la mesure où cette paraphrase précède et semble donc orienter le traitement figural (flèches dédoublées, ligne de partage) qui permettent le traitement de l'énoncé.

Et l'activité mathématique dans tout cela ? L'émergence d'objets et de traitements mathématiques apparaît chez Marjorie et Antoine, alors que nous voyons dans les raisonnements précédents un tout indifférencié de l'univers physique. Nous situerons résolument l'activité mathématique dans la mise au point puis la mise en œuvre d'objets et d'opérations portant sur ces objets ayant au moins quatre caractéristiques :

1. l'accès à ces objets passe par la mobilisation de représentations sémiotiques,
2. ces représentations et les traitements qu'on leur applique forment des systèmes hétérogènes,
3. ces systèmes sont articulables les uns aux autres,
4. la (re)construction de ces systèmes peut être orientée par la modélisation de problèmes physiques.

Nous voyons que nous séparons l'objet mathématique (**un** nombre rationnel dans lequel nous situons l'**unité** de la notion) des objets et expériences physiques (dans lesquels nous situons la **dispersion** de la notion – voir classification 0 – en qui peuvent motiver sa mise au point[4]. Nous ne caractérisons pas un objet mathématique à partir de la diversité des problèmes physiques dont il permet la modélisation (comme c'est le cas des approches rappelées en début de 0), mais à partir des systèmes sémiotiques qui permettent de l'exprimer. Bien entendu, ces systèmes ne sont pas arbitraires. Ils peuvent être engendrés, on le voit dans les reconstructions opérées par des élèves comme Marjorie, à partir de certaines caractéristiques de dispositifs physiques. D'où l'importance de registres de transition, susceptibles à la fois de représenter une expérience physique, mais aussi d'objectiver, dans un jeu de contrôles réciproques avec des registres concurrents et notamment celui de la langue naturelle, d'exprimer et de traiter les objets mathématiques de la modélisation. Cette séparation nette entre univers physique et mathématique, dont on retrouvera l'écho dans notre protocole d'enseignement, permet de ne pas confondre les méthodes (ici je mesure, là je calcule, ici je contrôle avec un instrument, là je prouve et je contrôle par un raisonnement) mais, surtout, elle révèle en creux la nécessité des articulations. La cohésion de notre démarche

---

4 Nous ne pensons pas que l'expérience physique soit la seule source acceptable de motivation à l'activité mathématique, mais, avec Etienne Klein (2000 ; p. 71) que "les mathématiques se nourrissent aussi de processus de création contingents et libres, qui apportent des concepts réellement nouveaux, dont l'origine n'est ni le monde extérieur ni l'entendement pur, mais plutôt la nécessité interne des formalismes eux-mêmes." Nous avons prouvé (Adjiage ; 1999) que cette assertion, triviale à un niveau de scolarité plus élevé, est vraie dès l'école élémentaire.

est assurée par un primat sémiotique : un nombre rationnel est l'invariant de registres sémiotiques hétérogènes.

4. Principes et hypothèses

Résumons-nous autour d'un ensemble formé de principes et d'hypothèses qui déboucheront sur le protocole d'enseignement retenu pour notre expérience en 6ème.

4.1 Principe de séparation[5]

Dans un processus d'acquisition de la notion de rationnel, nous distinguons :

- l'activité physique liée à la réalisation effective ou mentale d'une expérience, de mesurages, de reformulations, d'émissions de conjectures, relatifs à des phénomènes de mesures ou de rapports de grandeurs (voir classification en 0),
- l'activité mathématique liée à la mobilisation de divers registres sémiotiques, aux traitements et conversions de représentations exprimant des nombres, des fonctions (opérateurs), ou des points.
  Il est possible de conjuguer et donc d'orienter cette activité mathématique en fonction de trois points de vue, que nous rappellerons brièvement ici, nous contentant de renvoyer à (Ratsimba-Rajohn ;1982) et (Adjiage ; 1999, pp.181-182) pour plus de détails : le fractionnement de l'unité ($\frac{3}{4}$ vu comme trois fois un quart), le quotient de deux entiers ($\frac{3}{4}$ vu comme un quart de trois ou trois divisé par quatre), la commensuration ($\frac{3}{4}$ vu comme le rapport de u à v tels que $3v = 4u$.)

4.2. Principe d'articulation

Modéliser un problème physique rationnel relève d'une double articulation : articulation entre l'univers physique et l'univers des registres ; articulation entre les registres d'expression rationnels.

4.3 Hypothèses

Il est possible de repérer, sur l'apprentissage, des effets d'un enseignement des nombres rationnels :

---

[5] Nous reformulons de manière substantielle des principes , hypothèses et développements exposés dans : Adjiage ; 2001, pp. 11-14.

1. qui sépare clairement l'activité physique de l'activité mathématique,
2. qui propose des activités systématiques d'articulations entre le champ physique et le champ mathématique d'une part, entre les différents registres sémiotiques exprimant les rationnels d'autre part,
3. qui provoque l'usage d'un registre de transition entre le champ d'activité physique et le champ d'activité mathématique.

5. Le protocole d'enseignement

5.1. Modalités générales

Nous avons opté pour un dispositif de type classe expérimentale (6ème B) / classe témoin ($6^{\text{ème}}$ A.) Ces deux classes sont deux sixièmes du même collège, ayant le même professeur (voir note 1, p. 128.) Elles sont observées depuis septembre 2001 et le seront jusqu'à la fin de la $5^{\text{ème}}$ en juin 2003. L'idée générale est de comparer l'évolution des performances de ces deux classes à l'issue (en fin de $6^{\text{ème}}$ puis en fin de $5^{\text{ème}}$) d'un enseignement des rationnels centré sur les mêmes objectifs mais mené selon des méthodes différentes. Les contenus et objectifs d'enseignement ont été très précisément définis en début d'année avec le professeur de ces deux classes. Les objectifs généraux visés sont énoncés dans le **transparent Arg6**, mais des objectifs opérationnels plus détaillés ont été soigneusement mis au point et seront publiés ultérieurement avec l'ensemble du dispositif d'enseignement. Nous avions convenu que dans la classe témoin l'enseignant ne changerait rien à sa méthode habituelle. Dans la classe expérimentale en revanche, il se plierait à un protocole, présenté ci-dessous, mettant en œuvre les principes et hypothèses énoncés en 0.

Afin de disposer d'un état des lieux initial, chacune des classes a été évaluée en début de $6^{\text{ème}}$ à partir d'exercices portant sur l'ensemble des compétences **à acquérir au cours de l'année scolaire**, notamment en ce qui concerne la résolution des cinq types de problèmes liés aux grandeurs (0.) La plupart des contenus sur les rationnels abordés en $6^{\text{ème}}$ ayant déjà été approchés au cycle 3, aucun item de cette évaluation initiale n'était censé rester totalement étranger au champ de compréhension des élèves. Une évaluation de fin d'année, portant sur les mêmes compétences, est prévue entre mai et juin.

L'évaluation initiale, en particulier les procédures de résolution du problème de mélange, nous ont permis de nous fixer un certain nombre de repères, parmi lesquels la définition des cinq modalités (0) occupe une place de choix. Ces dernières notamment nous permettront d'apprécier et de comparer, au-delà de la réussite brute, les évolutions procédurales et conceptuelles de chacune des deux 6èmes.

Ce dispositif n'aurait guère été possible sans l'existence de la série de logiciels ORATIO[6] (Adjiage & Heideier ; 1998), développée pour la première expérimentation (Adjiage ; 1999.) C'est pourquoi nous rappelons brièvement les caractéristiques principales de ces logiciels et certains choix qui ont guidé leur conception. Pour plus de détail on se rapportera à : Adjiage ; 1999, chapitres III.2 et VI.1.

5.2. La série ORATIO

Composée de vingt logiciels répartis en deux ensembles et d'une base de données. Le premier ensemble est formé de quatorze logiciels dits de traitement. Il donne aux élèves l'occasion d'une **investigation séparée** de trois registres d'expression des rationnels, à savoir en respectant l'ordre de leur introduction en classe : les droites graduées (six logiciels) ; les écritures fractionnaires (cinq logiciels) ; les écritures décimales (trois logiciels.) Conformément aux principes et hypothèses énoncés en 0, lors de l'investigation de chacun de ces systèmes les liens avec les systèmes précédents ne sont l'objet d'aucun travail spécifique, même si nombre d'élèves les évoquent spontanément. Ce n'est qu'avec l'étude du deuxième ensemble (six logiciels dits de conversion) que les élèves sont invités à un travail de mise en correspondance systématique des trois registres pris deux à deux.

Chaque logiciel propose plusieurs tâches, souvent à partir d'une consigne de comparaison de deux rationnels exprimés dans un des trois registres. Les prérequis sont minimes : droite numérique des entiers, fréquentation de fractions usuelles ou d'écritures à virgules. Le logiciel ne cherche pas à expliquer, il ouvre un accès aux objets mathématiques non par une définition formelle et / ou illustrée, mais par des mises à l'épreuve de leur mode d'expression, de traitement, puis de conversion. L'élève est censé agir en testant des hypothèses : 3,14 est-il supérieur à 3,5 puisque 14 est supérieur à 5 ; $\frac{3}{4}$ est-il inférieur à $\frac{7}{10}$ puisque 3 et 4 sont respectivement inférieurs à 7 et 10 ? Le milieu (le logiciel) rétro-agit alors, donne à observer des phénomènes qui invitent à engager une nouvelle action puis à échafauder des règles qu'on remet à l'épreuve. Le questionnement que l'on cherche à provoquer serait : quels objets mathématiques méritent une telle expression, un tel mode de traitement ?

Exemple 1 : transparent Arg5a

[6] Une suite à ORATIO est en cours d'écriture. Elle devrait servir de base de travail l'an prochain pour la suite de l'expérimentation en cinquième. NEW-ORATIO propose des activités systématiques de recherche d'image et d'antécédent, par une opération de dilatation, sur une droite graduée munie d'une double échelle.

Un élève peut penser que B > A parce que les intervalles sont plus longs, ou parce que B est à droite de A. Le corrigé lui dira que c'est faux et l'invitera à tout imaginer à la même échelle, ce qui peut l'amener à situer des tiers sur une droite découpée en dixièmes, soit par resubdivisions, soit par approximations ou toute autre stratégie de son choix.

Exemple 2 : transparent Arg7

5.3. Quatre moments forts de chaque séquence d'enseignement en classe expérimentale (transparents Arg8 et Arg9)

La progression générale suit celle des logiciels ORATIO. Une séquence (de plusieurs séances) type se déroule immuablement selon le protocole suivant :

Moment 1. Passation sur un logiciel de la série ORATIO.

Moment 2. Un problème de type ORATIO est posé aux élèves dans un environnement papier /crayon.

Moment 3. Un problème lié aux grandeurs, structurellement et numériquement analogue à celui du Moment 2, est posé aux élèves. Le professeur n'évoque pas cette analogie. Les élèves résolvent le problème par les moyens de leur choix. A ce stade, certains d'entre eux identifient spontanément dans ce nouvel énoncé une expression différente du même problème que celui du Moment 2. Le professeur se garde bien de trancher et renvoie le débat scientifique (Legrand ; 2000, pp.35-54) à la séance suivante.

Moment 4. La convergence provoquée : le professeur rappelle en début de séance les enjeux du débat, et ses arbitrages tentent de l'orienter vers la question de savoir "en quoi ces deux problèmes sont différents et en quoi ils sont analogues".

On vérifie aisément que ces quatre moments respectent bien les principes et hypothèses de séparation et d'articulation.

Notons pour terminer cette section que les bilans, mises au point, entraînements et institutionnalisations ne suivent pas chaque séquence. Ils s'imposent, par approximations successives, à un moment de maturité (nécessité) repéré par le professeur et / ou l'expérimentateur.

6. Conclusion

Nous avons dans cette communication tenté de repérer des étapes clés de l'acquisition de la notion de rationnel dans la scolarité obligatoire. La séparation de cet ensemble d'étapes en deux champs, physique et mathématique, dotés chacun d'instruments d'investigation (essentiellement matériels pour le premier, sémiotiques pour le deuxième) et de méthodes propres, est une nécessité épistémologique. Nous avons émis l'hypothèse que c'était aussi une nécessité didactique, ce qui pose la question des articulations entre les deux champs, et donc d'outils susceptibles d'accompagner la transition. Cet outil, de par son statut, se doit d'avoir un certain nombre de caractéristiques de synthèse entre les deux champs. En ce qui concerne les rationnels, notre choix s'est porté sur la droite graduée, dans un environnement informatique (**transparent Arg 10**.) Nous pensons que ce type d'outils pourrait être recherché, développé et caractérisé pour d'autres enseignements mathématiques, notamment ceux prolongeant la proportionnalité

En ce qui concerne la conduite des activités dans le champ physique, l'absence d'une réalisation effective de l'expérience de mélanges, et surtout de la mise au point de tests sensibles permettant de comparer ces derniers, nous apparaît a posteriori comme regrettable. Non pas tant à des fins de vérification (« Lequel des mélanges est effectivement le plus chocolaté ? ») entachées de subjectivité qu'à des fins d'orientation du processus de modélisation : pour comparer deux mélanges (type lait / chocolat) réalisés dans deux **grandes** cruches, on peut par exemple goûter un échantillon (une **petite** cuillère) de chacun, ce qui légitime une idée d'invariance du goût sous une opération de fragmentation pouvant favoriser l'ancrage des problèmes de mélanges dans le champ multiplicatif (contre le champ additif.) Dans notre protocole, un travail d'articulation non congruente entre la forme verbale de l'énoncé et sa forme non verbale (dans notre exemple du mélange lait / chocolat, la représentation iconique des verres de lait et de chocolat) se substitue à l'expérience physique effective et augmente la difficulté de la tâche sans lui apporter d'éclairage opératiore.

Notons pour terminer que nous n'avons pas encore, au moment de la rédaction de cet article, dépouillé les résultats de l'évaluation finale. Les cinq modalités définies en 0 devraient permettre de repérer un état de savoir et donc d'apprécier des évolutions, par rapport au début de l'année scolaire et par rapport à la classe témoin.

BIBLIOGRAPHIE

ADJIAGE R. & HEIDEIER A., 1998, *didacticiels de la série Oratio*, éditions Pierron, 57206 Sarreguemines.

ADJIAGE R, 1999., *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial*, thèse, IREM, ULP Strasbourg 1.

ADJIAGE R. ET PLUVINAGE F. , 2000, *Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels*, RDM, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble, Vol.20.1,41-88.

ADJIAGE R., 2001, *Maturations du fonctionnement rationnel. Fractions et décimaux : acquisitions d'une classe, projets de programme 2000 pour l'école élémentaire*, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, Vol 7, 7-48.

ALARCON J., 1982, *L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans : résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4ème et de 5ème*, thèse de 3ème cycle, IRMA, ULP Strasbourg 1.

BROUSSEAU G., 1981, *Problèmes de didactique des décimaux*, RDM, Vol 2.1, 37-128, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

BROUSSEAU G., 1986, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, thèse, Bordeaux.

BROUSSEAU G. ET N., 1987, *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU G., 1998, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage, éditions,Grenoble.

CARRAHER D. W. & DIAS SCHLIEMANN A. L., 1991, *Children's Understanding of Fractions as Expressions of Relative Magnitude*, PME XV, 184-193, Assisi.

DOUADY R. ET PERRIN M.J., 1986, *Nombres décimaux*, liaison école-collège, IREM, Université de Paris VII, Paris.

DUPUIS C. ET PLUVINAGE F., 1981, *La proportionnalité et son utilisation*, RDM Vol. 2, 166-212, La Pensée Sauvage (éd.), Grenoble.

DUVAL R., 1993, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 5, 37-65, IREM de Strasbourg.

DUVAL R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Bern.

DUVAL R., 1996, *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?* RDM, Volume 16-3, 349-382, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

DUVAL R., 1998-1, *Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des* *rapports entre représentation et objet*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, 139-163, IREM de Strasbourg.

DUVAL R., 1998-2, *Signe et objet, questions relatives à l'analyse de la connaissance*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vol. 6, 165-196, IREM de Strasbourg.

FIGUERAS O., FILLOY E., VALDEMOROS M., *Some Difficulties which Obscure the Appropriation of the Fraction Concept*, PME XI, vol..1, 366- , Montréal, 1987.

HART K. & SINKINSON A., 1989, *They're useful - Children's view of Concrete Materials*, PME XIII vol. 2, 60- 66, Paris.

JULO J., 1995, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaire de Rennes.

JULO J., 2000, *Aider à résoudre des problèmes, Pourquoi ? comment ? quand* ? Actes du XXVII[e] Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, 9-28, IREM de Grenoble.

KIEREN T.E., 1980, *The rational number construct - its elements and mechanism*, in T.E. Kieren (ed), Recent Research on Number Learning, ERIC/SMEAC, 125-150, Columbus.

KLEIN ÉTIENNE, 2000, *L'atome au pied du mur*, Éditions Le Pommier-Fayard.

LEGRAND MARC, 2000, *Sciences, Enseignement, Démocratie et Humanisme*, Actes du XXVII[e] Colloque Inter-IREM des formateurs chargés de la formation des maîtres, 9-28, IREM de Grenoble.

NOELTING G., 1980, *The development of proportional reasoning and the ratio concept*, Educational Studies in mathematics, Vol. 11, 217-253, Cambridge.

PITKETHLY A. & HUNTING R., 1996, *A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts*, ESM vol. 30 N° 1, 5-37, Cambridge.

PLUVINAGE F., 1998, *La nature des objets mathématiques dans le raisonnement*, Annales de didactique des mathématiques, volume 6, 125 - 138, IREM de Strasbourg.

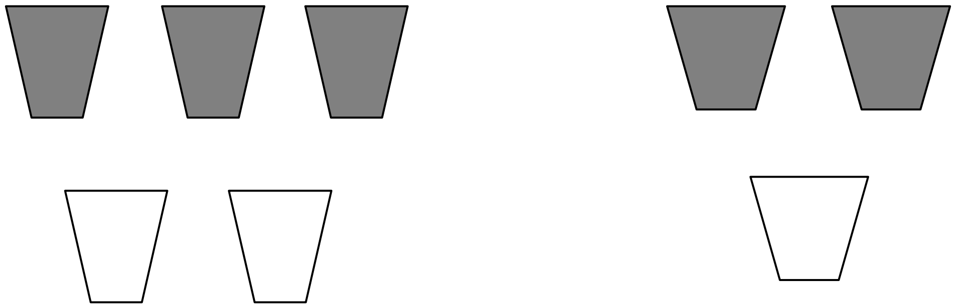
RATSIMBA-RAJOHN H., 1982, *Eléments d'étude de deux méthodes de mesure rationnelle*, RDM vol.3.1., 66 - 113, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.

STREEFLAND L., 1993, *The Design of a Mathematics Course, a Theoretical Reflection*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 25, 109-135, Dordrecht, Holland.

VERGNAUD G. ET LABORDE C., 1994, *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?,* Hachette Education (ed), 57-93, Paris.

Annexe 1 : Arg1

On prépare une boisson chocolatée en mélangeant du chocolat et du lait. La recette A mélange 3 parts de chocolat pour 2 parts de lait. La recette B mélange 2 parts de chocolat pour 1 part de lait.



Mélange A **Mélange B**

Complète par A ou B : le mélange qui a le plus le goût du chocolat est le mélange :
Explique brièvement.

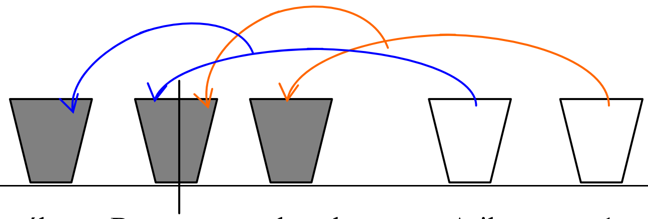
Annexe 2 : Arg2

LINDA : "le mélange A, parce que dans la recette A, il y a 3 parts de chocolat qu'on mélange et dans la recette B, il y a 2 parts de chocolat, alors dans la recette A il y a plus de goût."
GEOFFREY : "le mélange B, la recette B a le plus le goût du chocolat parce qu'il y a moins de lait que dans A."
GUILLAUME : "C'est la recette A, parce que la recette A a plus de verres de chocolat et de verres de lait que la recette B.

FLORIAN : "Recette A, parce que dans la recette A il y a 3 bols de chocolat, 2 bols de lait et dans la recette B il y a 2 bols de chocolat et 1 bol de lait."

LOÏC : "Recette A, [parce que dans la recette A] il y a plus de tasses de chocolat que de tasses de lait. Le B a moins de tasses de chocolat et 1 tasse de lait"
EMMANUEL : "La recette A parce qu'il y aura plus de lait, mais ça laissera plus de goût vu qu'il y a plus de chocolat."
MYLÈNE : "La recette B est la plus chocolatée, car il y a 2 parts de chocolat pour juste 1 part de lait."

NATHALIE : "C'est la B car si le A serait égale, il y aurait 4 parts de chocolat."
JENNIFER : "La recette B. Dans la recette A, il y aura 1 entière et 1 demi part de chocolat dans chaque bol [de lait] et dans la recette B il y aura 2 parts entière dans le bol [de lait]."
ÉRIC : "Recette B, parce qu'on met 1 verre noir dans le blanc et après il reste encore 1 noir. Alors que dans la recette A le dernier verre [après avoir fait le mélange 2 verres de chocolat pour 2 verres de lait, implicitement reconnu équivalent au 1 pour 1], il faut le partager en 2.
MARJORIE : "Recette B, parce qu'il n'y a qu'un verre de lait et deux au chocolat. Parce que dans le A il y a trois verres au chocolat



ANTOINE : "le mélange B, parce que dans la recette A il y a que $1 + \frac{1}{2}$ de chocolat, et dans la recette B il y a 2 parts de chocolat."

CÉLIA : "Les deux ont le même goût. Si pour 2 parts de chocolat, il y a 1 part de lait [recette B] et que pour la recette A on rajoute 1 part de chaque, les deux auront le même goût."

Annexe 3 : Arg3

Les cinq modalités d'appréhension d'un problème rationnel

MODALITÉ 1 **:** prise en compte d'une seule des deux grandeurs en jeu
MODALITÉ 2 : prise en compte purement descriptive des deux grandeurs en jeu
MODALITÉ 3 : prise en compte d'un lien qualitatif entre les deux grandeurs en jeu
MODALITÉ 4 : remplacement des valeurs initiales par des valeurs proportionnelles, (par exemple pour la recherche d'un référent commun dans une comparaison : quelle quantité de chocolat par verre de lait ?)
MODALITÉ 5 : caractériser par une expression numérique les rapports des grandeurs en jeu

	Modalité 1	***Mod 2***	***Mod 3***	***Mod 4***	***Mod 5***	***Add***	***Autres***	***Total***
6A	***8 (3l+ 5c)***	***2***	***3***	***5***	***1***	***2***	***2***	***23***
6A (%)	***35***	***9***	***13***	***21***	***4***	***9***	***9***	***100***
6B	***5 (1l+2c+2l-c)***	***5***	***2***	***7***	***0***	***1***	***4***	***24***
6B (%)	***21***	***21***	***8***	***29***	***0***	***4***	***17***	***100***
6A+B	***13***	***6***	***6***	***12***	***1***	***3***	***6***	***47***
6A+B (%)	***28***	***13***	***13***	***25***	***2***	***6***	***13***	***100***

Tableau 1 : Ventilations comparées et cumulées sur les cinq modalités

Annexe 4 : Arg4.1

Cinq types de problèmes rationnels liés aux grandeurs répartis en deux familles

Problèmes de mesure : problèmes pour lesquels la référence (unité), notamment lors d'une comparaison, est fixe. Par exemple, comparer deux champs de $\frac{3}{5}ha$ et $\frac{2}{3}ha$.

Problèmes de rapports : problèmes pour lesquels, notamment lors d'une comparaison, il n'existe pas de référence fixe. Par exemple, pour comparer deux mélanges, le total des verres de chaque mélange est variable.

1. rapports de grandeurs homogènes (dilatation, densité, démultiplication…),
2. rapports de grandeurs hétérogènes (vitesse, débit, poids spécifique),
3. ratios ou taux ou fréquences (3 chances sur 5, 3 élèves sur 7 ont réussi cet item…),
4. mélanges (5 parts d'arabica pour 2 de robusta.)

Annexe 5 : Arg5a

Passations sur Gradu4

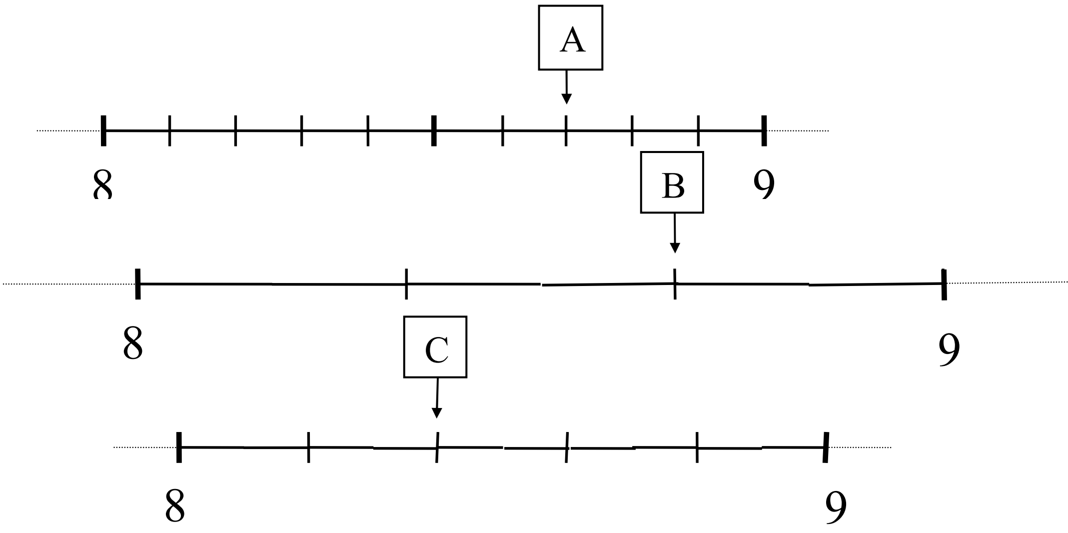


Figure 1 : Range A, B, C du plus petit au plus grand

	Réussite	***Echec***	***Tmoy***	***Tmin***	***Tmax***
Anjusa	39 *(70%)*	17	36”	19”	1’41”
Jedafa	28 *(82%)*	6	1’3”	14”	3’17”
Joguima	48 *(89%)*	6	44”	18”	1’50”
Laechaj	49 *(79%)*	13	36”	16”	1’7”
Nasej	37 *(80%)*	9	48”	16”	1’49”
Nimajub	19 *(95%)*	1	1’13”	34”	2’5”
Olietc	44 *(79%)*	12	40”	17”	1’48”
Vicora	22 *(92%)*	2	1’26”	26”	4’12”

Tableau 2 : Résultat des passations sur Gradu 4 du 26/09/97 (Début du CM2)

Annexe 6 : Arg 6

Les compétences générales visées

1. Exprimer un rationnel dans un des trois registres étudiés (les droites graduées, les écritures fractionnaires et décimales) ; convertir l'expression d'un rationnel, d'un de ces registres vers un autre,

2. interpréter les données numériques d'un problème au moyen de rationnels exprimés dans l'un des trois registres,

3. comparer et encadrer des rationnels, intercaler un rationnel entre deux autres rationnels,

4. utiliser un critère permettant de décider qu'un rationnel est entier,

5. conjecturer et utiliser un critère permettant de décider qu'un rationnel est décimal.

Annexe 7 : Arg 8

Quatre moments forts d'une séquence d'enseignement

Moment 1. Passation sur un logiciel de la série ORATIO.

Moment 2. Un problème de type ORATIO est posé aux élèves dans un environnement papier /crayon.

Moment 3. Un problème lié aux grandeurs, structurellement et numériquement analogue à celui du Moment 2, est posé aux élèves. Les élèves résolvent le problème par les moyens de leur choix. Certains d'entre eux identifient spontanément dans ce nouvel énoncé une expression différente du même problème que celui du Moment 2.

Moment 4. La convergence provoquée : le professeur rappelle en début de séance les enjeux du débat scientifique : "en quoi ces deux problèmes sont-ils différents et en quoi sont-ils analogues".

Annexe 8 : Arg10

Le registre privilégié des droites graduées

1. ***Valorise le lien linéaire : repérage de la position relative, invariante sous changement d'échelle, d'un point entre deux points d'un repère, obtenue à partir de deux entiers, le fractionneur (futur dénominateur) et le pointeur (futur numérateur.)***

2. ***Outil de transition entre un fonctionnement sémiotique : les points, les flèches, les segments, les entiers sont des signes permettant l'expression et le traitement des rationnels ; et un fonctionnement physique : découpage et report de segments permettant de schématiser tout problème de proportion.***

3. ***Outil d'expérimentation et de contrôle***
   - ***l'environnement informatique permet une démarche essai / erreur à moindre coût ;***
   - ***Visualise les opérations fondatrices des rationnels : report et subdivision ;***
   - ***annonce et contrôle les futurs traitements fractionnaires.***

L'étude communiquée par cet article s'inscrit dans les travaux d'un groupe de recherche, coordonné par Jean-Claude RAUSCHER et Alain KUZNIAK, dont le projet s'intitule :
Nouvelles modalités d'action(s) didactique(s)en mathématiques, enjeux d'enseignement et de formation.

Ce groupe est issu de l'opération de recherche de l'IUFM d'Alsace, elle-même rattachée à l'
Équipe d'Accueil EA 2182 – CeRF (Centre de Recherche sur la Formation) de l'IUFM de Toulouse.

Florence FAUVET

TRAITEMENT DE PATHOLOGIES DE L'APPRENTISSAGE*: DEMARCHES ISSUES DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES, ETUDE D'UN CAS

Abstract. Work in collaboration with François Pluvinage in the mathematical field, has led to techniques specifically adapted to the rehabilitation of young patients with neurological pathologies or developmental oral or written language disorders (reading, spelling, writing, arithmetic). Presenting data to be understood in an original way by exaggerating certain features, makes perception and treatment easier. These reeducative techniques initially used in a therapeutic context can also be used to facilitate learnings for standard pupils. Illustrations.

Résumé. Un travail en collaboration avec François Pluvinage a permis l'élaboration, dans le domaine des mathématiques, de démarches spécifiques à la prise en charge de jeunes patients qui présentent des pathologies neurologiques ou des troubles de développement du langage oral et de l'acquisition du langage écrit (lecture, orthographe, graphisme, calcul). Des présentations originales des données mettent en relief des caractéristiques habituellement discrètes, facilitent la perception et le traitement des informations, et permettent les apprentissages. Ces techniques inscrites dans une démarche thérapeutique dégagent des voies d'intervention pédagogique pour l'élève standard. Illustrations.

Mots-clés : Mathématiques – Pathologie – Présentation spécifique – Perception – Traitement des informations – Apprentissage – Elève standard.

En pathologie du langage écrit, au terme de l'identification des déficits fonctionnels par des batteries de tests de plus en plus fins et précis, le clinicien doit prendre des décisions concrètes qui concernent les options stratégiques et tactiques - entraînement de la voie déficitaire ou compensation par les composantes de traitement intactes, facilitations -, les techniques à utiliser, la durée et la fréquence des exercices, leur hiérarchisation etc. Il vérifie si une intervention spécifique modifie ou non un processus cognitif altéré. Il doit préciser les démarches rééducatives à effectuer, puis apprécier leur efficience ou leurs limites à long terme d'une part, leur application dans des situations ou dans des domaines différents d'autre part.

Les principaux acquis de la rééducation cognitive concernent les travaux relatifs aux déficits acquis de la lecture et de l'écriture. L'originalité de notre approche rééducative tient à la matière choisie - les mathématiques -, au manque de références de la littérature dans ce domaine pour la rééducation de pathologies peu fréquentes - avec par exemple un seul article répertorié pour le syndrome de Landau-Kleffner [1] -, aux procédés utilisés [2] et enfin aux résultats obtenus à partir des mathématiques pour la lecture, puis pour l'écriture (voir *Annexe 1*).

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 151 – 165.

Nous nous étions particulièrement intéressés à des enfants atteints de syndromes neurologiques (Landau-Kleffner et Aarskog), et en situation d'échec d'apprentissage de la lecture, de l'écriture et du calcul . En partant d'une idée de François Pluvinage sur la présentation d'énoncés mathématiques, en relation avec la thèse de troisième cycle de Mouloud Abdelli [3] , et en nous référant aux travaux de Raymond Duval sur les registres de représentation et sur les modèles d'architecture cognitive [4], nous avons élaboré une stratégie spécifique de disposition des informations pour surmonter les difficultés d'apprentissage de ces enfants . Ces démarches rééducatives leur ont permis de réaliser des acquisitions malgré la complexité des perturbations des fonctions supérieures, dans chacun des trois domaines d'apprentissage liés à l 'écrit : mathématiques, lecture et écriture . Nous développons et illustrons plus loin les procédés utilisés et les résultats obtenus.

Au vu de ces résultats, nous avons étudié, lors de l'introduction des fractions en situation de classe standard sous la direction de François Pluvinage [5], les réactions de l'un des élèves (J.M.) suivi en orthophonie depuis plusieurs années pour une pathologie développementale du langage oral et de l'acquisition du langage écrit (lecture, écriture, calcul).

1. Brève histoire clinique

J.M. présente un retard global du développement psychomoteur, caractérisé sur le versant de la motricité par une maladresse et par des gestes saccadés, et sur le versant du langage oral par une incitation verbale faible, des troubles d'articulation et un déficit du stock lexical. La prononciation s'améliore après quelques séances de rééducation orthophonique en troisième année de maternelle. Au cours de la petite enfance de J.M. jusqu'à l'âge d'environ 7 ans, de fréquentes otites entravent sa perception du langage oral.

C.P. : lenteur et manque de concentration empêchent la réalisation des tâches dans le temps imparti. L'institutrice alerte le psychologue scolaire pour un blocage à l'apprentissage de la lecture. Puis, l'examen de la vue révèle un astigmatisme et une myopie, bien corrigés par le port de lunettes. Au terme du deuxième trimestre de l'année scolaire, un examen orthophonique met en évidence des difficultés de conversion, d'assemblage et d'adressage en lecture, avec des confusions auditives et visuelles dans un cadre de capacités de reconnaissance des mots faibles (*voir Annexe 1 : Tests et Modèle de lecture)*, des séquelles de retard de parole et des troubles de développement du langage oral en compréhension et en expression. Une rééducation orthophonique hebdomadaire se met en place.

C.E.1 : Les troubles du langage écrit régressent en lecture et en écriture; des difficultés de classement des nombres - au-delà de la dizaine - et d'acquisition de l'addition - avec retenue - persistent. J.M. s'exprime peu d'elle-même et déforme encore la prononciation de mots .Des prises en charge - individuelle et au sein d'un petit groupe - s'effectuent dans une structure spécialisée pour une éducation de la sensorialité, de la latéralité, de la motricité fine et de la logique, jusqu'au C.E.2.

C.M.1 : l'orthographe grammaticale pose problème et le déficit du langage oral subsiste. En mathématiques, des difficultés de mémorisation des tables de multiplication, d'acquisition des mécanismes opératoires, de compréhension des consignes et de résolution des problèmes s'observent et caractérisent la dyscalculie.

1.1. Tableau clinique et évolution des troubles : voir Annexe 2

Les troubles éprouvés par un sujet en langage oral sur le versant de la compréhension et/ou de l'expression entravent le déroulement des acquisitions, en particulier dans le domaine du langage écrit. Or les mathématiques font l'objet d'un traitement direct en relation avec une dimension écrite [6]. Comment J.M. réagit-elle aux séquences d'apprentissages proposées en mathématiques, en classe ?

2. Cadre de travail [5]

Dans les programmes officiels, il est prévu que les fractions s'introduisent à l'école en deuxième année du cycle des approfondissements (C.M.1.). Une recherche, menée par Robert Adjiage pour un doctorat de mathématiques sous la direction de François Pluvinage, comportait une expérience d'introduction des fractions. Celle-ci a été construite à partir d'un schéma de fonctionnement entre plusieurs registres (Fig.1. ci-dessous) [7], et mise en œuvre sur quatre séquences dans un groupe de 17 élèves -dont J.M. -, classe à double niveau C.E.2.- C.M.1. Cet enseignement portait sur les objectifs du manuel « *Le Nouvel Objectif Calcul* » CM1, chapitres 54,55, et 56. Il privilégiait , à côté des registres numériques et géométriques bidimensionnels usuels, un registre unidimensionnel [8].

Illustration de tâches de construction de sens pour un nombre rationnel : exemple de trois quarts.

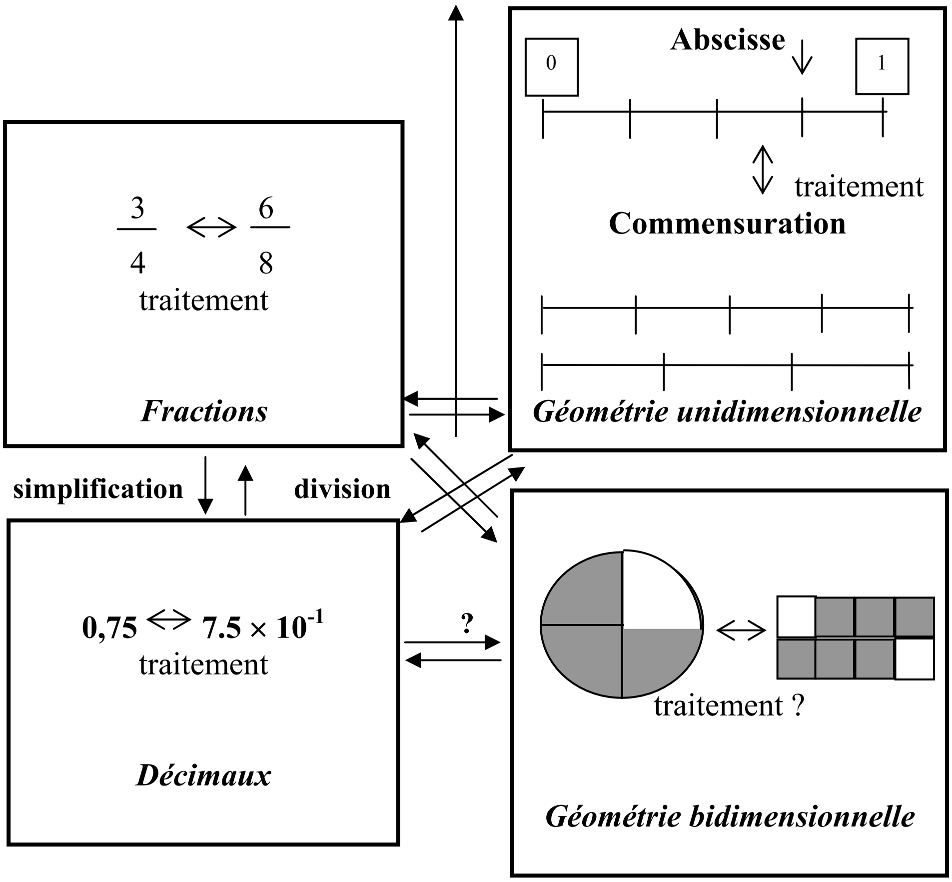
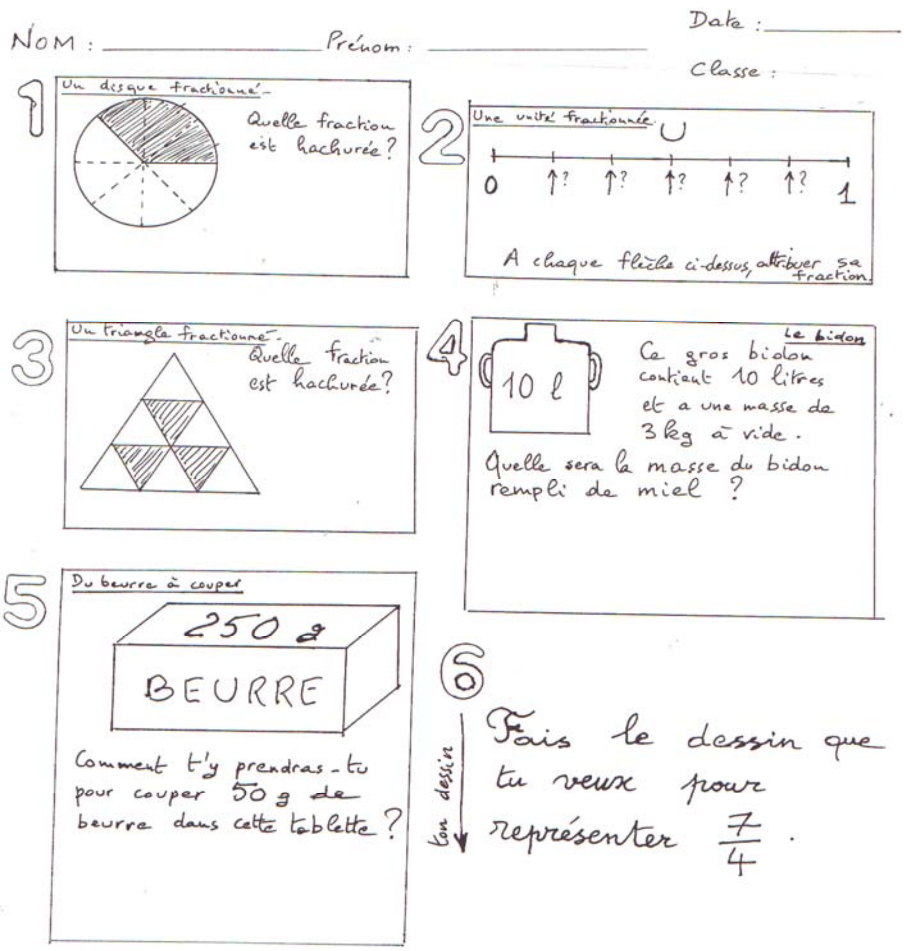


Fig. 1

Le réseau de traitements et de conversions qui joue dans la construction du sens d'un rationnel donné est représenté. L'existence de certaines opérations (traitements ou conversions) entre éléments du tableau n'est pas évidente : un point d'interrogation apparaît.

A l'issue de quatre séances de travail sur les fractions, l'évaluation suivante a été proposée aux élèves de la classe.



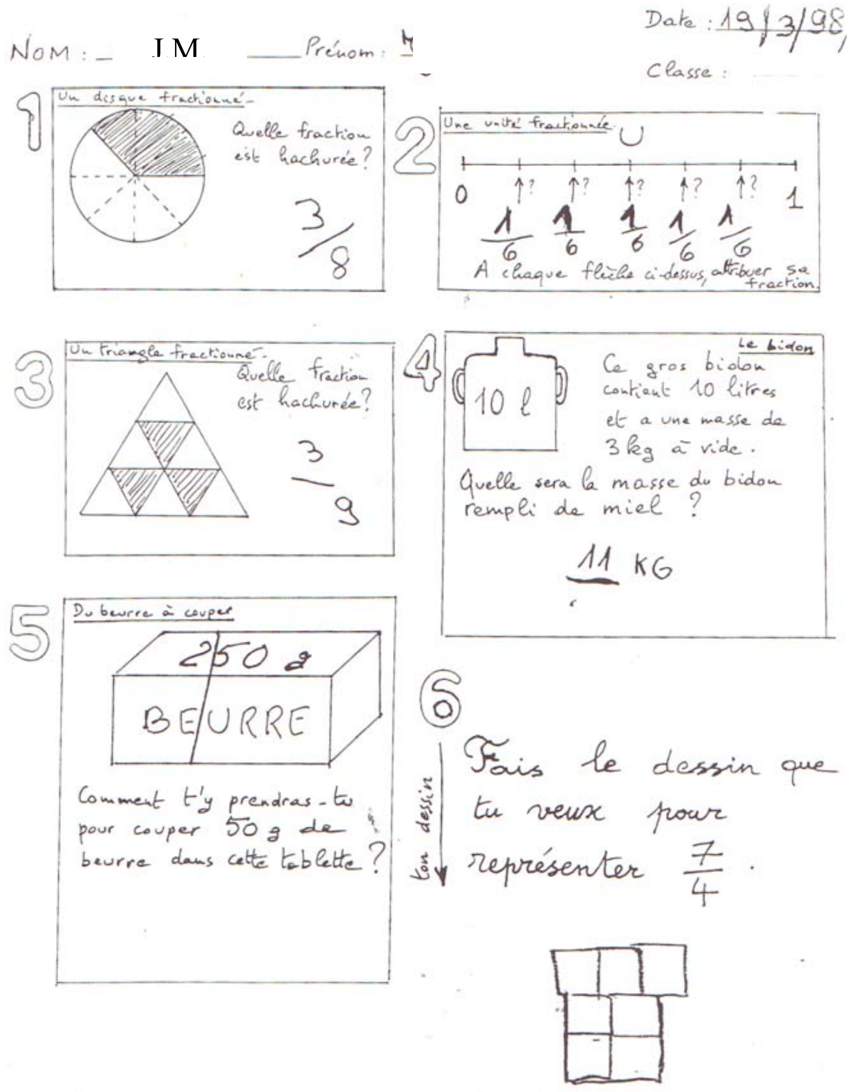
Note pour la question 4 : Il est indiqué aux élèves que 2 l de miel ont une masse de 3 kg.

2.1. Résultats et interprétations

Les résultats d'ensemble font apparaître que l'écriture fractionnaire pour représenter des situations de géométrie bidimensionnelle a été largement acquise (réussite de 14 ou 15 élèves sur les 18 selon la question). Pour R. Adjiage et F.Pluvinage, [8] p. 66 – 67, cela est dû à ce que les déterminations de numérateur et de dénominateur ne supposent que des traitement de groupement et de comptage, déjà accessibles à ceux que les chercheurs britanniques nomment « *adders* ».

Dès que l'on passe à la géométrie unidimensionnelle, qui donne lieu, paradoxalement puisque l'on perd une dimension, à des traitements plus complexes, les résultats atteignent difficilement la moitié des élèves concernés ou sont inférieurs. En particulier, J.M. est en échec sur ces questions, comme on le voit sur sa feuille de réponse reproduite ci-dessous.

Réponse de J.M. :



En ne considérant que les réussites, on situerait J.M. simplement parmi les élèves qui ne maîtrisent que les situations de géométrie bidimensionnelle. Mais l'examen de ses réponses met en évidence d'une manière extrêmement nette que pour traiter une question, J.M. n'utilise jamais qu'une seule procédure, éventuellement répétée. On observe pour les questions 2, 4 et 5, le recours à trois types différents de traitements ainsi réducteurs. Celui de la question 2, effectué par un certain nombre d'élèves, consiste à constater simplement que l'unité est obtenue par la juxtaposition de 6 segments de même longueur ; chacun a ainsi pour longueur 1/6, ce qui est indiqué sous chaque flèche, l'opération d'addition des 1/6 n'étant pas faite. Dans celui de la question 5, le partage est indiqué par un trait droit, alors qu'il faudrait de plus faire intervenir le caractère spatial de la figure pour "casser" ce trait de partage (et il faudrait ensuite tenir aussi compte de la contrainte concernant la masse). Pour la question 4, l'interprétation de la réponse de J.M. est un peu plus délicate. On peut supposer que le résultat a été obtenu en ajoutant 1 à 10, de même que la valeur 3 donnée par l'énoncé est 1 de plus que 2. On serait alors en présence d'une forme poussée du comportement des "*adders*", le passage de 2 à 3 étant vu comme additif au lieu d'avoir un caractère multiplicatif et la masse du récipient à vide étant ignorée.

Ainsi les réponses de J.M. ne présenteraient pas un caractère déviant par rapport aux traitements à effectuer, mais J.M. reste systématiquement à un niveau qui ne lui permet pas le recours à des combinaisons évoluées. Cette limitation très marquée peut expliquer comment certains résultats ont pu être obtenus, non seulement par J.M. mais par une partie des élèves chez qui elle apparaît de manière moins régulière. Des réponses qui pourraient rester incomprises des professeurs en l'absence de telles conduites poussées peuvent de la sorte trouver des explications.

3. Axes et pistes de travail clinique

La mise en évidence des caractéristiques de traitement observées chez J.M. permet aussi de légitimer une option de travail rééducatif clinique, à partir de la question N°2.

3.1. Choix du registre d'expression - Modalités

Dans le cadre d'une pathologie développementale ou acquise, le clinicien détermine le(s) registre(s) d'expression le(s) plus fonctionnel(s) ou le(s) moins déficitaire(s) pour assurer un apprentissage. Depuis environ quinze ans, des travaux en neuropsychologie portent sur le lien entre un modèle cognitif et la rééducation des déficits acquis de la cognition. Ils ont récemment permis l'évolution de la prise en charge rééducative. L'empirisme qui caractérisait la rééducation orthophonique commence à faire place à une nouvelle approche thérapeutique : la rééducation cognitive [10].

L'analyse détaillée des signes pathologiques sur le plan cognitif apporte des précisions sur les composantes déficitaires à entraîner et sur les composantes intactes à solliciter pour suppléer celles qui sont défaillantes. C'est ainsi que nous déterminons une voie de traitement préférentielle. Dans notre cas, si l'on se réfère aux perturbations du développement cognitif observées chez J.M. (voir *Annexes 2 et 3*), le déficit du langage oral se présente sur le versant de la compréhension et sur le versant de l'expression. Il semble préférable de privilégier l'écrit mieux appréhendé que l'oral : les consignes seront présentées par écrit.

Le travail avec François Pluvinage nous permet - et ce pour chaque cas ou chaque situation évoquée - d'aller plus loin: les modèles de fonctionnement cognitif ne donnent pas d'indication sur les techniques de rééducation à utiliser . Dans le cas de J.M., mais aussi pour les pathologies neurologiques mentionnées plus haut (Landau-Kleffner et Aarskog), nous avons mis en évidence la nécessité d'opter pour une voie de traitement sans interférence d'un autre registre d'expression, par exemple la lecture silencieuse, <u>sans oralisation</u>, des consignes (voir *Annexe 1*).

Cette option de tâche à effectuer dans un registre d'expression défini, d'utilisation classique dans une pratique de l'orthophonie en pathologie neurosensorielle avec des sujets déficients auditifs par exemple, *non classique pour des troubles développementaux du langage oral*, *éprouvée par l'expérience*, trouve une référence théorique solide dans les travaux de Raymond Duval sur les systèmes de représentation sémiotique et les difficultés liées à leur coordination [10].

Dans cette optique d'implication théorique dans l'approche d'un processus d'apprentissage, nous avons d'abord cherché, en vue du travail ultérieur thérapeutique avec l'élève, les modalités, traitements et conversions pour traiter la question posée sur le fractionnement en situation unidimensionnelle.

Nous nous sommes appuyés sur la recherche en didactique des mathématiques [3] à propos des différents types de traitement intervenant dans la lecture de texte par des élèves déficients auditifs, avec une mise en relation de mots dans le sens horizontal et dans le sens vertical. Une disposition horizontale combinée à une disposition verticale de figures, de signes, puis de chiffres et de lettres, s'était avérée efficiente dans notre premier cas d'étude (voir *Annexe 3*).

En effet, les méthodes suivantes répertoriées pour la rééducation de la lecture pour le patient présentant le syndrome de Landau-Kleffner s'étaient montrées inefficaces, soient :

- l'association de lettre à un geste avec mise en relief de lettres ou de mots [***méthode phonético-gestuelle Borel-Maisonny***, 1960],
- le codage gestuel phonémique simultané à la parole appliqué à l'écrit [***Cued-Speech***, Cornett, 1966],

- la disposition spatiale verticale des mots et des phrases par groupes de mots [démarche classique en ***aphasiologie***],
- le développement des ***associations objet-mot*** par écrit puis par voie auditive [Worster-Drought, 1971],
- l'***emploi de couleurs*** pour individualiser les mots [Léa, 1979].

L'idée de mettre en relation des capacités de mémorisation auditive verbale réduites à un empan de trois pour la répétition de séries de chiffres, et le nombre maximum d'éléments dans le sens horizontal, avait déclenché la compréhension d'un mécanisme de transformation à l'écrit dans le cadre de l'égalité puis de l'addition.

4. Présentation des consignes, lexique, syntaxe et organisation des mots

4.1. Facilitation du traitement linguistique – Redondance des informations Lisibilité et perception immédiate des informations.

Nous portons d'une part, en raison des troubles de la compréhension du langage éprouvés par J.M., une attention particulière aux éléments constitutifs des énoncés. Pour assurer la compréhension des consignes, *les énoncés doivent comporter des structures grammaticales brèves et simples* (non complexes), ***de deux à trois termes au plus*** (verbe – complément d'objet direct / verbe - complément d'objet direct – complément circonstanciel de manière), en limitant les expansions des noms au minimum:

Exemples : - Prends un papier. - Fais un trait sur le pli. – Répondre oui ou non.

Les *mêmes mots*, choisis dans le lexique *sûrement compris* par J.M., *sont répétés dans les consignes*. ***Les modifications concernent un élément à la fois dans une phrase***. Dans notre exemple, elles se limitent à la variation d'un chiffre

soit : Plie le papier en 2 morceaux pareils.

puis : Plie le papier en 3 morceaux pareils.

…et à l'ajout d'un adjectif.

soit Prends un papier.

puis Prends un autre papier.

D'autre part, nous introduisons des ***variations à l'intérieur d'un système de représentation*** en utilisant le procédé de *présentation hiérarchisée du texte dans le sens horizontal et dans le sens vertical aux niveaux lexical et syntaxique* [3]. *L'information*, nécessairement redondante, *est mise en relief* horizontalement par l'***emploi de couleurs*** [Léa, 1979] ou de surlignage en caractères gras (ou italiques).

Soit : Prends un **papier.**

La phrase suivante est disposée en correspondance dans le sens vertical avec le terme répété.

Soit : Prends un **papier.**

Puis : Plie le **papier** en 2 morceaux pareils.

4.2. Axes de travail linguistique

Un autre axe de travail rééducatif porte sur le lexique mathématique dans le registre de la langue naturelle : La constitution-même des énoncés est importante pour sa compréhension. Sur le thème des fractions, nous avons proposé à J.M. deux questionnaires. Nous avons utilisé l'organisation spécifique du texte décrite en **4.1.** et proposé les deux exercices suivants, sans oralisation.

Prends un stylo ***bleu**.**
Souligne en ***bleu*** les mots qui veulent dire ***fractionner**.**

Fractionner c'est couper
mélanger
ajouter
soustraire
multiplier
additionner
diviser
enlever
partager
découper
prendre
mesurer

* Les mots en italique apparaissent en bleu et sont également soulignés en bleu.
Réponse: J.M. entoure en bleu les verbes couper, additionner, enlever, partager et mesurer.

Prends un stylo ***vert**.**
Souligne en ***vert*** les mots qui veulent dire ***fraction**.**

une ***fraction*** c'est une part
un morceau
tout
un bout
une addition
une soustraction
une multiplication
une division
une partie

Réponse : J.M. sélectionne les quatre opérations en entourant les mots en vert.

Ce type d'exercice doit permettre d'évaluer les connaissances qui portent sur le lexique en lui-même, mais aussi sur la mise en relation des mots entre eux, en repérant sa stabilité. Nous savons les difficultés de compréhension à l'intérieur d'un registre d'expression pour J.M. (voir *Annexes 2 et 3*). L'analyse des réponses de J.M. du point de vue syntaxique fait apparaître que les catégories grammaticales ne correspondent pas nécessairement aux mêmes *conceptions*, entendues dans le sens que Nicolas Balacheff [11] leur assigne, qui émerge des interactions du sujet et du milieu : Par exemple le substantif “fraction” est assimilé aux quatre opérations, ce qui peut signifier que ce sont alors pour J.M. les parentés d'expression et/ou d'écriture qui se sont imposées, alors que le verbe “fractionner” semble déclencher une sélection des verbes en relation avec les activités que J.M. a effectuées dans le domaine fractionnaire. Le changement de nature du mot peut donc impliquer une modification de conceptions pour cet élève : il s'agira ultérieurement en rééducation par exemple, de consolider une représentation fragile et incertaine des termes, en visant l'unification conceptuelle quand celle-ci a lieu d'être. La discussion et la réflexion sur les réponses apportées par le sujet induisent des options de travail.

Le développement de ces démarches de variations opérées dans une dimension écrite a ouvert d'autres voies pour la rééducation de la dyslexie, de la dysorthographie ou de la dysgraphie : elles facilitent la procédure d'assemblage en lecture, la copie sans erreur, la mémorisation de l'orthographe d'usage, et le graphisme par exemple. En référence aux échanges enseignant / thérapeute, ces modalités trouvent une application directe à l'apprentissage de la lecture et de l'écriture, au repérage de difficultés dans ces domaines, à la compréhension des réactions des élèves et à la remédiation des problèmes rencontrés.

En conclusion

La présentation de données ou d'énoncés mathématiques selon une disposition non usuelle, épurée, dont des aspects sont renforcés, facilite le traitement des informations dans une dimension écrite. Nous avons mis en évidence, à partir d'une situation individuelle spécifique et thérapeutique, des caractéristiques qui, habituellement, n'attirent pas l'attention. En situation scolaire standard, un certain nombre d'élèves rencontrera des difficultés inhérentes à la dimension écrite, en relation par exemple avec la structure linguistique même de l'énoncé et sa disposition . Ces voies d'intervention thérapeutiques dégagent des stratégies éducatives susceptibles d'intéresser le plus grand nombre. Elles dépassent le cadre mathématique « au profit de l'enrichissement des moyens d'expression dans la langue usuelle » [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] PAPAGNO C., BASSO A., 1993, Impairment of written language and mathematical skills in a case of Landau-Kleffner Syndrom, *Aphasiology*. Vol. 7.

[2] GUILLERÉ-FAUVET F., 1997, Troubles de la mémoire, troubles du langage et syndrome de Landau-Kleffner, *Entretiens d'orthophonie 1997*, p. 160-166, Paris, Expansion Scientifique Française, Entretiens de Bichat.

[3] ABDELLI M., 1985, *Oralisation et apprentissage arithmétique par des élèves déficients auditifs*, Thèse de troisième cycle en didactique des mathématiques, Strasbourg, IREM.

[4] DUVAL R, 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Berne, Peter Lang.

[5] PLUVINAGE F., 1998, Mathématique et communication, ressources en cas de difficulté. Quand l'écrit se distingue de la reproduction de l'oral dans la situation d'enseignement standard, *Entretiens d'orthophonie 1998*, p. 121-127, Paris, Expansion Scientifique Française, Entretiens de Bichat.

[6] PLUVINAGE F., 1998, La nature des objets mathématiques dans le raisonnement, *Annales de didactique et de Sciences cognitives*, vol.6.

[7] ADJIAGE R., 1999 *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial,* Thèse, Strasbourg Université Louis Pasteur, I.R.E.M.

[8] ADJIAGE R., ET PLUVINAGE F., 2000, Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20 n° 1, p. 41 – 88.

[9] SERON X., 1993, *La neuropsychologie cognitive*, P.U.F., Paris.

[10] DUVAL R., 1998, Un processus central dans le développement des apprentissages intellectuels. La coordination des registres de représentation sémiotique, *Entretiens d'orthophonie 1998*, p. 121-127, Paris, Expansion Scientifique Française, Entretiens de Bichat.

[11] BALACHEFF N., 2002, Cadre, registre et conception, in *Les cahiers du laboratoire Leibniz,* n° 58, Grenoble IMAG.

Florence FAUVET
Orthophoniste, Cabinet d'orthophonie,
24 rue de la Wantzenau, 67720 HOERDT
Chargée d'enseignement à l'IUFM d'Alsace

* Recherche initiée dans le cadre de l'unité INSERM n° 398, Neurobiologie des épilepsies, Hôpitaux Universitaires, Strasbourg, 1996.

Annexe 1 : Résumé de la stratégie développée pour le calcul dans le cadre d'une pathologie neurologique .

Le syndrome de Landau-Kleffner se traduit en particulier par des perturbations des fonctions supérieures, dont des troubles de la compréhension du langage oral, des difficultés d'expression, une inattention auditive, et des difficultés mnésiques. A l'âge de 8 ans 8 mois, malgré l'utilisation des méthodes répertoriées, les travaux de recherche à l'INSERM et les contacts avec les différentes équipes thérapeutiques spécialisées, l'apprentissage de la lecture semble bloqué : la reconnaissance lexicale fonctionne pour quelques mots, la conversion des graphèmes en phonèmes et leur assemblage restent limités. La réduction importante des capacités d'attention et des capacités de mémorisation auditive verbale entrave les apprentissages. L'enfant ne pouvait répéter de mémoire des séries constituées de plus de *trois* chiffres, capacité correspondant à un âge développemental de trois ans.

Nous avons évoqué avec F. Pluvinage les difficultés éprouvées en mathématiques pour l'addition. Les problèmes semblent liés à une question d'écriture et aux informations elles-mêmes, c'est-à-dire leur nombre, leur ordre, leur perception et leur longueur. F. Pluvinage propose de réduire l'information à ce qui peut être perçu, intégré et mémorisé dans le sens horizontal (*3* éléments), puis d'associer les autres éléments avec une présentation verticale [3]. Dans un premier temps, pour éviter l'interférence avec d'autres processus centraux liés à l'oralisation [4], le travail s'effectue sans parler. Nous partons de l'égalité par convention. Puis nous avons proposé les égalités successives en disposant les éléments dans le sens vertical, les uns en dessous des autres. Progressivement, à condition d'une attention permanente à la congruence des opérations et d'une progression lente et minutieuse, avec des réticences à chaque modification (par exemple l'égalité inverse) l'addition a fonctionné.

En établissant un parallèle avec la lecture, nous avons présenté les mots segmentés en deux ou trois lettres au maximum horizontalement –découpage qui peut différer légèrement du découpage syllabique oral-, puis disposé les séquences suivantes verticalement. Une phrase simple segmentée de cette façon, lue avec un débit lent, a permis la conversion, l'assemblage et l'accès rapide aux représentations sémantiques dès sa première présentation. Par la suite, l'acquisition de la lecture a entraîné l'écriture de mots selon les mêmes démarches de présentation [2].

Annexe 2 : tableau clinique – évolution des troubles.

Absence de troubles : - ***Présence de troubles : +***

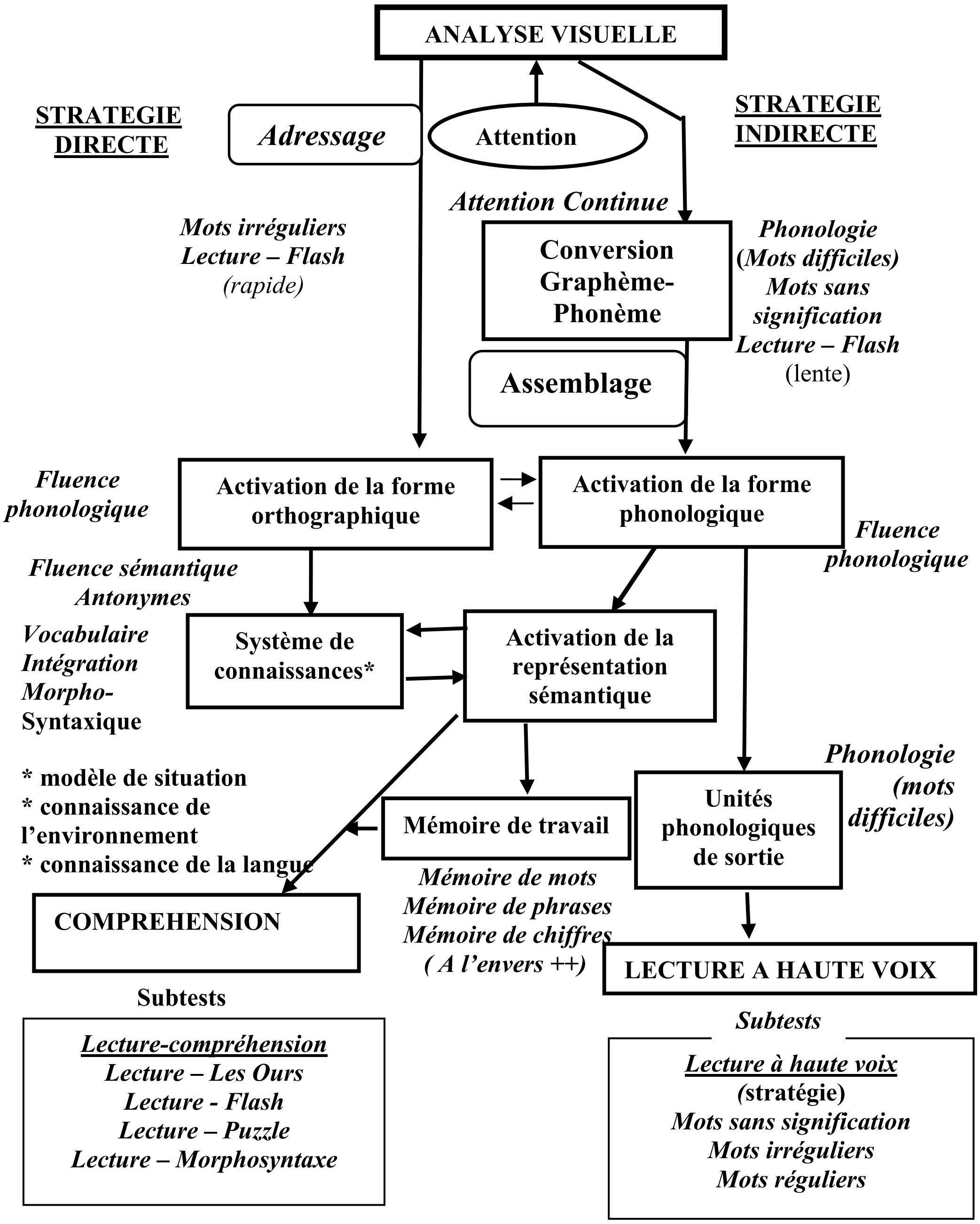
AGE ***CLASSE***	**Troubles de la motricité**	**Troubles de développement du langage oral**	**Troubles de l'acquisition du langage écrit**	**Troubles de la vue et de l'audition**
5 ans 6 mois *Troisième annéede Maternelle* *Cycle II* *Première Année*	+	Incitation Verbale + Articulation + Parole + Langage + (Réception / Emission)		+
6 ans 10 mois *C.P.* *Cycle II* *Deuxième Année*	+	Incitation Verbale + Articulation - Parole + Langage + (Réception / Emission)	Lecture + Ecriture +	+
7 ans 8 mois *C.E.1* *Cycle II* *Troisième Année*	+	Incitation Verbale + Parole + Langage + (Réception / Emission)	Lecture + Ecriture + Calcul +	-
9 ans 9 mois *C.M.1* *Cycle III* *Deuxième Année*	-	Incitation Verbale + Parole - Langage + (Réception / Emission)	Lecture - Ecriture + Calcul +	-

Annexe 3 : *Tests et processus de lecture.*

Le tableau suivant présente, d'après L2MA (Batterie Langage oral Langage écrit Mémoire Attention. Ed. E.C.P.A. 1997) un modèle simplifié par Morton et Patterson (1980), Lecoq (1992) et Morais (1994). On a représenté sur cette figure les deux voies directe et indirecte, qui peuvent être utilisées pour la lecture (la première correspond à une stratégie d'*adressage* directe au lexique orthographique et la seconde à une stratégie d'*assemblage* après conversion des graphèmes en phonèmes).

On trouve également représenté schématiquement le processus de compréhension du langage écrit, ainsi que celui de la lecture à haute voix.

Les épreuves d'évaluation du langage oral, de la mémoire et de l'attention sont représentées sur la figure (en italique) dans la mesure où elles permettent d'éclairer les déficits au sein du processus ; il en est de même pour les épreuves qui apprécient les stratégies lexiques maîtrisées.



PIERRE BELMAS

APPRENTISSAGE DE LA PROPORTIONNALITÉ ET SYMBOLISATIONS CHEZ DES ÉLÈVES EN ÉCHEC SCOLAIRE DE SEGPA

Abstract. Problem solving and symbolisation among students who fail in school.
Directed at students who fail in the school system, the aim of this research is to analyse the impact of interaction between different kinds of symbolisation in relation to concepts in problem solving. There are two sorts of methods for symbolisation: natural language and schematisation. These symbolic accompaniments of thought are in reality a new type of mediation which can allow students to have the perspective and distance necessary to face cognitive obstacles which up until then have been insurmountable. The experience (1999-2001) has been based on the theoretical relationship between psychology (genetic and cognitive), semiotics and mathematical pedagogy. Within this framework, problems known as "4th proportional" were presented to 15-year old students of SEGPA*. The specificity of these mathematical problems is that they engage students in problem solving. Students worked on them during clinical sessions as well as in the classroom, which encouraged pair work interaction. During the classroom work, the clinicians, helped by the teachers, picked opportunities to use symbolisations to, among other things, provoke a rupture in the thought process, so that students could modify their representations of the problems. Individual follow-up of selected students with contrasting results, allowed the measurement of the evolution of their cognitive profile throughout the experimentation period.

Résumé. Pour des élèves en échec scolaire, cette recherche a pour objectif de constater l'impact de l'interactivité entre divers types de symbolisation par rapport à la conceptualisation de la proportionnalité. Les outils de symbolisation utilisés sont principalement de deux sortes : le langage naturel et les schématisations. Ces accompagnements symboliques de la pensée, sont, de fait, de nouvelles médiations qui peuvent permettre de prendre de la distance et le recul nécessaires pour faire face à des obstacles cognitifs jusqu'alors insurmontables. L'expérience (1999-2001) prend principalement appui sur des articulations théoriques entre la psychologie (génétique et cognitive), la sémiologie et la didactique des mathématiques. C'est dans ce cadre de référence qu'il est proposé à une classe de 4e de SEGPA* des problèmes dits de quatrième proportionnelle. Ces problèmes présentent la particularité d'impliquer les élèves dans une mise en œuvre du raisonnement de proportionnalité. Elles sont traitées par les élèves dans le cadre d'entretiens cliniques mais aussi lors de séquences de classe collectives favorisant l'interactivité entre pairs. L'expérimentateur, aidé par le maître lors des moments collectifs, va proposer aux moments estimés opportuns l'utilisation de symbolisations pour, entre autres, provoquer des ruptures cognitives afin que les élèves puissent modifier leur représentation des problèmes. Un suivi individuel d'élèves sélectionnés aux résultats contrastés permet de mesurer l'évolution de leur profil cognitif tout au long de l'expérimentation.

*SEGPA : Section d'enseignement général et professionnel adapté

Mots Clés : Apprentissage, échec scolaire, SEGPA, proportionnalité, médiation, symbolisation, interactivité, schématisation, représentation, profil cognitif.

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 167 – 189.

1. Introduction

Pour des élèves en échec scolaire du second degré, cette expérience a eu pour objectif de constater l'impact de l'interactivité entre divers types de symbolisation par rapport à la conceptualisation de la proportionnalité.

Les outils de symbolisation utilisés sont principalement de deux sortes : le langage naturel et les schématisations. Ces accompagnements symboliques de la pensée, sont, de fait, de nouvelles médiations qui peuvent permettre de prendre de la distance et le recul nécessaires pour faire face à des obstacles cognitifs jusqu'alors insurmontables.

L'expérience (1999-2001) prend principalement appui sur des articulations théoriques entre la psychologie (génétique et cognitive), la sémiologie et la didactique des mathématiques. C'est dans ce cadre de référence qu'il est proposé à une classe de 4^{e} de SEGPA[1] en Seine Saint-Denis des problèmes dits de quatrième proportionnelle. Ces problèmes présentent la particularité d'impliquer les élèves dans une mise en œuvre du raisonnement de proportionnalité. Elles sont traitées par les élèves dans le cadre d'entretiens cliniques mais aussi lors de séquences de classe collectives favorisant l'interactivité entre pairs. L'expérimentateur, aidé par le maître lors des moments collectifs, va proposer aux moments estimés opportuns l'utilisation de symbolisations pour, entre autres, provoquer des ruptures cognitives afin que les élèves puissent modifier leur représentation des problèmes. Un suivi individuel d'élèves sélectionnés aux résultats contrastés permet de mesurer l'évolution de leur profil cognitif tout au long de l'expérimentation.

2. La SEGPA

2.1 Des données chiffrées

Depuis 15 ans environ, la population des élèves relevant des enseignements adaptés du second degré (SEGPA et EREA-LEA[2]) est stable. On compte aujourd'hui en France métropolitaine 117 500 élèves en établissements ou classes d'enseignement adapté. Les filles représentent moins de 40 % des effectifs. À la sortie de l'école primaire, les élèves qui entrent dans l'enseignement adapté sont plus âgés que ceux qui accèdent au collège. Ainsi 56,5 % des élèves sont en retard contre 20,4 % pour l'enseignement ordinaire. La proportion des élèves étrangers dans les SEGPA, bien qu'en baisse, reste beaucoup plus élevée (12,6 %) que dans l'enseignement banal (6 %) ; malgré une forte diminution depuis 1992 (où elle représentait 18,4 % des effectifs), cette population reste encore largement sur représentée.

---

[1] **SEGPA : Section d'Enseignement Général et Professionnel Adapté**

[2] **EREA-LEA** : Établissement régional d'enseignement adapté - Lycée d'enseignement adapté.

2.2. Les finalités

Les sections d'enseignements généraux et professionnels adaptés, intégrés au collège, assurent (aux élèves) " une formation commune qui vise à leur faire acquérir, en fin de 3^e^, une autonomie et les acquisitions suffisantes pour préparer une formation qualifiante ". Les enseignements proposent des parcours individualisés pour que les élèves (de 12 ans à 16 ans) obtiennent au minimum une qualification de niveau V.

2.3. Les élèves

Les textes actuels nous décrivent les élèves des SEGPA comme "présentant des difficultés scolaires graves et persistantes auxquelles n'ont pu remédier les actions de prévention, de soutien, d'aide et l'allongement des cycles dont ils ont pu bénéficier. Ils présentent sur le plan de l'efficience intellectuelle des difficultés et des perturbations qui ne peuvent être surmontées ou atténuées que sur plusieurs années et qui, sans relever du retard mental… se traduisent par des incapacités et désavantages tels qu'ils peuvent être décrits dans la nomenclature des déficiences, incapacités et désavantages" (arrêté du 9-1-1989.) "Les élèves auxquels est proposée une orientation en SEGPA ont connu une scolarité primaire perturbée. Même si l'entrée au collège, qui est perçue comme une promotion personnelle, favorise le développement de nouvelles potentialités, il reste que beaucoup ont conscience de leur échec et ont une image d'eux-mêmes dévalorisée." [3]

Sur un plan général, on peut parler d'élèves présentant une inhibition intellectuelle qui se caractérise par une « rigidification » des fonctions cognitives : des compétences sont établies localement par rapport à des situations précises qui ne permettent pas de déboucher sur des expériences nouvelles susceptibles de provoquer la construction de nouvelles compétences. De fait, les compétences locales ne peuvent se transférer ou s'adapter à un environnement modifié : l'individu ne peut que réutiliser à l'identique les compétences préalablement construites dans un environnement familier.

Plus précisément, certains élèves des SEGPA éprouvent des difficultés à recevoir et utiliser simultanément plusieurs sources d'information. Les liens ne peuvent être établis, la complexité perturbe et provoque une centration sur quelques informations, excluant les autres. C'est ce que l'on peut appeler une approche " épisodique " de la réalité : l'appareil cognitif ne dirige pas suffisamment l'appareil perceptif. C'est plus particulièrement à partir de ces problèmes de sélection de l'information que l'on peut constater chez bon nombre d'élèves de SEGPA des difficultés de compréhension concernant les consignes.

Dans le prolongement de ces premières difficultés, on peut caractériser certains de ces élèves comme ayant une difficulté de prise de distance par rapport à

[3] **Circulaire n°98-129** du 19/6/1998.

l'activité à mener. Ce manque de distance provoque des mises en activité instinctives, impulsives. L'élève est dans « le faire ». La planification des actions n'existe pratiquement pas et donc a fortiori la coordination des schèmes pour atteindre l'objectif fixé.

Ces premières remarques sur l'appareil cognitif des élèves de SEGPA s'accompagnent de caractéristiques affectives particulières. Ces élèves qui vivent leur scolarité en SEGPA ont, pour la plupart, vécu difficilement un échec scolaire avéré dès l'école primaire. Cette expérience douloureuse contribue à développer chez eux une résistance à tout apprentissage nouveau. Un échec, même local, ne peut plus être envisagé. Ces élèves ont à la fois le désir et la peur d'apprendre. Les élèves ont ainsi à se recréer une identité positive pour pouvoir développer des projets, qu'ils soient de vie, d'apprentissage ou professionnels. Le " soi " s'organise à partir du sentiment de continuité, de la préhension et de la maîtrise de l'horizon temporel. Être quelqu'un, c'est avoir un passé, être soi-même, c'est valoriser le temps présent et structurer des projets.

Malgré les processus d'identification au groupe qui se développent à l'adolescence, pour bon nombre des élèves de SEGPA l'échec scolaire peut provoquer un comportement égocentrique à l'intérieur de l'établissement scolaire et plus particulièrement face aux apprentissages. Cela se caractérise par une grande difficulté à communiquer dans le cadre des activités scolaires. On assiste ainsi à un repliement de l'élève sur lui-même, le groupe classe et ses effets bénéfiques (dynamisme, interaction) sont parfois inexistants.

3. L'ingénierie mise en œuvre

3.1. Les élèves de la classe de 4e de SEGPA

3.1.1. Âges et sexes

Seuls deux élèves sont nés en 1984, tous les autres sont nés en 1985. Les âges des élèves de la classe sont donc homogènes. La classe est composée de sept garçons et de neuf filles.

3.1.2. Les redoublements

12 des 16 élèves ont redoublé leur CP. On peut raisonnablement supposer que ces redoublements sont dus à des difficultés d'apprentissage de la langue. Ce constat local pourrait très certainement être généralisé. En effet, bon nombre d'élèves de l'AIS n'ont pas appris à lire quand leurs enseignants le souhaitaient. Quatre des élèves redoublent le CE2, dont deux avaient déjà redoublé le CP. La classe de CE2 représente le seuil de tolérance de l'école primaire, toujours principalement par rapport à la maîtrise de la langue. En effet par la suite, dans

l’échantillonnage considéré, on ne constate plus de redoublement. Au total, dans cette classe, 14 élèves ont redoublé, dont 2 deux fois (le CP et le CE2.)

3.2. Le type de proportionnalité choisi : la quatrième proportionnelle

Si l’on fait référence à la classification des différents problèmes de proportionnalité réalisée par Vergnaud, la quatrième proportionnelle est un problème de « proportionnalité simple » particulière comme le présente le tableau ci-dessous.

3.2.1. Proportionnalités simples

<table>
<tr><th></th><th>Problème de « type classique »</th><th>Problème de quatrième proportionnelle</th></tr>
<tr><td>Énoncés</td><td>1 petite voiture de collection vaut 9 €. Combien valent 7 voitures ?</td><td>3 stylos « encre » coûtent 56,25 €. Combien coûtent 8 stylos</td></tr>
<tr><td>Symbolisations des structures</td><td><table><tr><th>Voiture(s)</th><th>Euro(s)</th></tr><tr><td>1</td><td>9</td></tr><tr><td>7</td><td>x</td></tr></table></td><td><table><tr><th>Stylo(s)</th><th>Euro(s)</th></tr><tr><td>3</td><td>56,25</td></tr><tr><td>8</td><td>x</td></tr></table></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Caractéristiques</td><td colspan="2">• Relation quaternaire (4 termes)
• Quatre quantités dans deux espaces de mesures : les voitures et les € ; les stylos et les €</td></tr>
<tr><td>• Présence de la valeur unitaire : 9 €/voiture</td><td>• Absence de la valeur unitaire : le prix d’1 stylo</td></tr>
<tr><td>Procédures de résolution</td><td>• Procédure horizontale ou « fonction », fondée sur l’utilisation de l’opérateur fonction X 9 €/voiture : 7 voituresX9 €/voiture= 63 €
• Procédure verticale ou « scalaire » fondée sur la mise en évidence de l’opérateur scalaire X 7 soit l’utilisation de la propriété d’isomorphisme multiplicatif :
f(kx)=kf(x) soit 9 eurosX7=63 €
• Procédure additive fondée sur l’addition réitérée :
9 €+9 €…=63 €</td><td>• Procédure de la règle de trois : x=8X56,25/3</td></tr>
</table>

3.3. Les étapes de l'expérience et les problèmes proposés

L'expérience repose sur la mise en œuvre des cinq étapes suivantes :

3.3.1. La programmation de l'expérience

ÉTAPES	MODALITÉS DE TRAVAIL	RESPONSA-BLES	SUPPORTS	ACTIONS/OBJECTIFS
I Position-nement	Collective : toute la classe.	Maître.	Six problèmes de quatrième proportionnelle.	• Évaluer pour définir les difficultés en fonction des variables didactiques • Constituer des groupes d'élèves homogènes et choisir des élèves aux résultats contrastés.
II Entretien clinique	Individuelle : chaque élève de la classe.	Expérimenta-teur.	Trame d'entretien et reprise d'un problème résolu et d'un problème non résolu lors de l'étape I.	• Déterminer ce que chaque élève sait ou ne sait pas. • Utiliser des accompagnements du raisonnement par la symbolisation.
III Interac-tions	Collective : toute la classe.	Maître et expérimenta-teur.	Deux séances de classe par rapport à trois problèmes (possibilité d'utiliser la calculette si besoin est.)	• Utiliser des accompagnements symboliques. • Confronter différents schémas. • Mettre en évidence des démarches.
IV Entretiencli nique	Individuelle : les élèves aux résultats contrastés.	Expérimenta-teur.	Trame d'entretien et un nouveau problème.	• Suivre individuellement chaque élève en proposant des accompagnements symboliques.
V Position-nement	Collective : toute la classe.	Maître.	Trois problèmess dont deux de quatrième proportionnelle.	• Évaluer les effets des accompagnements symboliques.

Les étapes correspondent à la résolution de problèmes de quatrième proportionnelle spécifique.

3.3.2. La programmation des problèmes mathématiques[4]

ÉTAPES	PROBLÈMES	ÉNONCÉS
I	**1.1**	*2 stylos coûtent 8 francs. Combien coûtent 6 stylos ?*
	1.2	*4 gommes coûtent 6 francs. Combien coûtent 6 gommes ?*
	1.3	*15 pinceaux coûtent 45 francs. Combien coûtent 139 pinceaux ?*
	1.4	*15 règles coûtent 139 francs. Combien coûtent 45 règles ?*
	1.5	*J'achète 12 bouteilles de cidre à 49,50F les 3. Combien dois-je payer ?*
	1.6	*3 pelotes de laine pèsent 200 grammes. Il en faut 8 pour faire un pull. Quel est le poids du pull ?*
II	Mêmes problèmes que pour l'étape précédente	
III	**3.1**	*Combien pèsent 120 sacs de terreau, sachant que 25 sacs pèsent 75 kilogrammes ?*
IV	**4.1**	*Quelle distance parcourt un train en 36 minutes, sachant qu'il roule à vitesse constante et qu'il parcourt 40 kilomètres en 16 minutes ?*
V	**5.1**	*Combien coûtent 14 mètres de fil électrique, sachant que 4 mètres coûtent 10 francs ?*
	5.2[5]	*Jacques et Paul ont chacun la même somme d'argent. Jacques donne 23 francs à Paul. Combien Paul a-t-il maintenant de plus que Jacques ?*
	5.3	*La longueur du parcours d'une course automobile est de 247,760 kilomètres. Une voiture consomme en moyenne 6,785 litres au 100 kilomètres. Combien consommera cette voiture pendant la course ?*

4 L'expérience ayant été menée de 1999 à 2001, les prix énoncés utilisent les francs et non pas les €.

5 Le problème 5.2 joue le rôle de l'intrus. En effet, il ne s'agit pas d'un problème de quatrième proportionnelle. Son introduction correspond à la volonté de créer une rupture afin de voir si les élèves reconduisent d'une manière mécaniste un même raisonnement, sans analyser le problème proposée.

3.4. Les accompagnements de symbolisation proposés

3.4.1. La fiche distribuée aux élèves lors de la phase 2

Ensembles

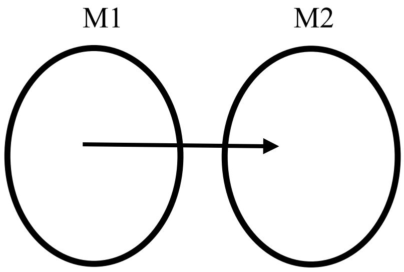
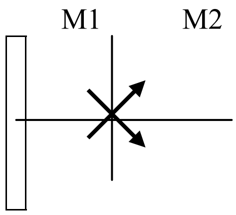


Tableau de proportionnalité

M1	M2

Produit en croix



Graphique

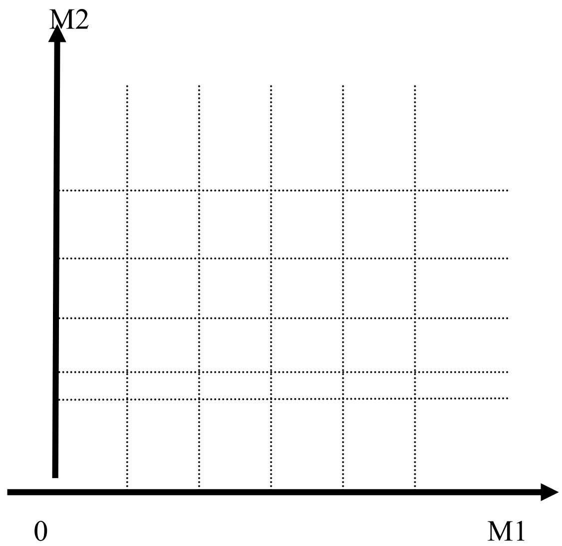
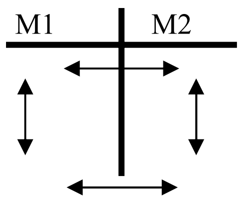


Tableau fléché



Ces différents outils de symbolisation sont des schémas qui ont pour objectif, entre autres, de favoriser la réflexion par la sélection des informations nécessaires et la représentation dans l'espace à deux dimensions des propriétés du problème.

Ces cinq outils présentent des caractéristiques particulières au niveau de leur composition, qui sont en relation directe avec le rôle qu'ils peuvent tenir dans la résolution de problèmes de quatrième proportionnelle. La synthèse de la mise en relation entre les composants et les spécificités de ces outils est proposée dans le tableau suivant.

3.4.2 L'analyse des schémas symboliques proposés

Caractéris-tiques	Composants	Spécificités	Observations
Noms			
Ensembles	• Deux diagrammes de Venn. • Deux symboles (M1 et M2.) • Une (des) flèche (s.)	• Mise en évidence des deux espaces de mesures. Pour ce faire ces deux ensembles sont disjoints. • La flèche symbolise " fortement " la corres-pondance de mesures (deux ensembles appa-rentés par un même système de relation.) L'objectif est d'induire la correspondance terme à terme et de mettre en évidence l'opérateur fonction.	• Il n'y a pas de repères spatiaux pour le positionnement des grandeurs à l'intérieur des ensembles ce qui ne favorise pas la mise en place d'une procédure horizontale ou verticale. • Le niveau d'abstraction est élevé.
Tableau de proportionnalité	• Un tableau constitué de deux colon-nes et d'un nombre im-portant de lignes. • Deux sym-boles : M1 et M2 les deux espa-ces de me-sure.	• L'objectif est d'induire la constitution de couples de mesures pouvant aider à la mise en place du raison-nement linéaire et donc de la mise en évidence de l'opérateur fonction. • En fonction de son nombre de lignes, ce tableau peut induire et favoriser la recherche de la valeur unitaire.	• Il n'y a pas de mise en évidence de l'aspect quaternaire de la relation de proportionnalité. • L'exhaustivité du tableau engendre la mise en œuvre de mécanismes opératoires souvent peu conscientisés.

Produit en croix	• Un quadrillage constitué de 4 carrés. • Deux symboles : M1 et M2 les 2 espaces de mesure. • Deux flèches.	• C'est, d'une manière implicite, l'utilisation de la définition mathématique de la proportionnalité : *a/b=c/d soit ad=bc* • Les deux flèches favorisent le calcul et permettent d'économiser le coût cognitif du raisonnement. • Ce schéma implique les élèves dans l'utilisation de l'algèbre pour la résolution d'une équation.	• Le mécanisme opératoire peut ne pas impliquer l'élève dans le raisonnement de proportionnalité c'est-à-dire la procédure "fonction" ou scalaire. • Le croisement des flèches ne met pas en valeur la relation des couples qui s'établit entre les deux espaces de mesure. • Son utilisation rend la détermination de l'unité difficile.
Graphique	• Deux axes orientés. • Trois symboles : O représentant l'origine, M1 et M2 les 2 espaces de mesure. • Un quadrillage constituant les couples de grandeurs.	• C'est l'expression de la proportionnalité dans le registre graphique des mathématiques qui se caractérise par l'alignement de points avec l'origine (la fonction linéaire $y=ax$). • Ce schéma peut impliquer les élèves dans l'utilisation de l'algèbre pour la résolution d'une équation.	• Le niveau d'abstraction est élevé. Le graphique est en effet une invention des mathématiciens qui, dans l'espace, présente les grandeurs comme indépendantes, ce qui est pertinent dans le cadre de la proportionnalité multiple mais pas nécessairement pour une problème de quatrième proportionnelle (pas de mise en évidence du coefficient de proportionnalité ni des rapports scalaires.)
Tableau fléché	• Deux symboles : M1 et M2 les 2 espaces de mesure. • Quatre flèches.	• L'objectif est de mettre en évidence l'aspect quaternaire de la relation de proportionnalité à partir de deux couples de mesure. • Les quatre flèches favorisent à la fois la procédure horizontale et la procédure verticale. • Les deux colonnes favorisent la procédure verticale. • L'utilisation de l'opérateur fonction permet de déterminer l'unité du résultat trouvé.	• Dans certains cas, en fonction des valeurs numériques lorsque les procédures horizontale et verticale ne sont pas perceptibles, l'aspect " circonstancié ", " ciblé " de la représentation peut perturber la recherche de la valeur unitaire, si celle-ci apparaît nécessaire au sujet.

Il est à souligner que :

1. les élèves de la classe concernée ont été habitués à utiliser, d'une manière relativement mécanique, le tableau en croix?
2. l'expérimentateur utilisera en priorité, lors des entretiens cliniques le tableau fléché.

C'est en ce sens qu'il paraît intéressant de constater que la comparaison de ces deux outils de symbolisation met en évidence :

3. une similitude sémiotique/une même disposition spatiale (tableau 2X2) qui permet la mise en évidence de la relation quaternaire?
4. des différences sémiotiques/pour le tableau fléché, un balayage vertical-horizontal favorisant la perception des opérateurs (fonction, scalaire) et pour le tableau en croix, un balayage croisé qui fait référence au traitement algébrique, à une équation.
5.

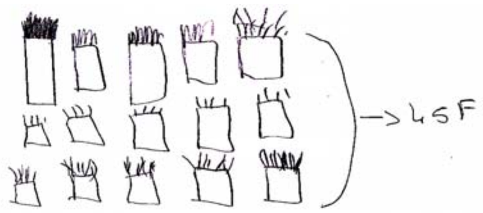
3.5. La classification des schématisations des élèves

Il est à noter que, pour le bon déroulement de l'expérimentation, il a été nécessaire d'opérer des regroupements des schémas produits. Ces regroupements ont été difficiles à réaliser car la majorité des représentations, compte tenu des conditions de l'expérimentation et du niveau conceptuel des élèves, associent bien souvent textes, symboles et dessins figuratifs et narratifs.

La classification des schémas se fonde sur leurs aspects prédominants. Ainsi il est apparu pertinent de créer 3 catégories de schémas :

- **" figuratif/narratif "** qui regroupe les représentations à la fois figuratives et narratives (exemple : BD), la discrimination paraissant particulièrement difficile à réaliser

3.5.1. Le schéma figuratif/narratif de Coralie, problème 1.3

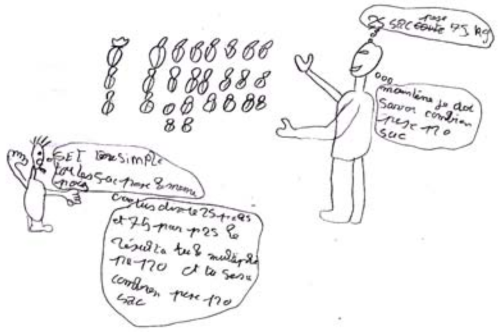


15 pinceaux coûtent 45 francs. Combien coûtent 139 pinceaux ?

Ce schéma est ainsi principalement constitué d'une « image-icône », dessin des pinceaux, qui témoigne de la prise en compte des énoncés : cela correspond à une fonction d'illustration. (L'autre partie abstraite du schéma, très réduite, ➔45F, représente le début du traitement mathématique du problème.

3.5.2. Le schéma figuratif/narratif de Julien, problème 3.1

Combien pèsent 120 sacs de terreau, sachant que 25 sacs pèsent 75 kilos grammes ?

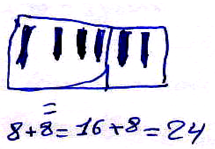


Ce schéma narratif représente une image de BD. Le choix est pris de rendre compte, d'une manière imagée, le problème posé. Julien raconte la situation en y apportant des éléments susceptibles de lui donner encore plus de sens (la situation se déroule sur un lieu de travail : un patron un employé.) Pour Julien, la fonction de communication de la représentation l'emporte sur ses autres fonctions. De plus, l'importante de la place donnée au texte lui permet d'exposer son raisonnement.

1. **" mixte"** qui regroupe des représentations utilisant à la fois des aspects figuratifs et des aspects symboliques.

3.5.3. Le schéma mixte d'Alexis, problème 1.1

2 stylos coûtent 8 francs. Combien coûtent 6 stylos ?



Le schéma est composé de deux partie occupant un espace équivalent. La première partie est une image icône qui a pour fonction de présenter un matériau de comptage. En dessous, la seconde partie, qui fait logiquement suite à la première, présente le traitement mathématique du problème à l'aide d'une équation.

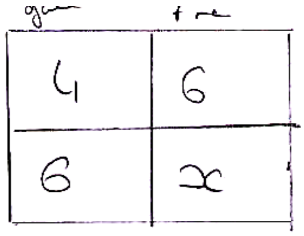
- " symbolique" qui regroupe des représentations qui utilisent majoritairement des symboles qu'ils soient mathématiques ou non.

3.5.4. Le schéma symbolique d'Adiaratou, problème 1.2

4 gommes coûtent 6 francs. Combien coûtent 6 gommes ?

Il s'agit d'un tableau en croix induisant le traitement algébrique du problème.

4. Les résultats



4.1. Les groupes d'élèves suivis

4.1.1. Résultats généraux

Le tableau suivant permet de comparer l'évolution des groupes d'élèves (groupes de niveau) constitués en début d'expérimentation. Cette évolution se constate plus particulièrement à partir des résultats des élèves aux problèmes de quatrième proportionnelle de l'étape III et V qui présentent des caractéristiques communes :

- valeurs numériques de grande taille (problème 3.1 : 25, 75, 120 ; problème 5.3 : 247,760),
- absence de multiple pour les problèmes de l'étape V (5.1 et 5.3) ou multiples difficilement identifiables, pour ces élèves, dans le problème 3.1 (25 et 75),

	RÉPONSES EXACTES			**RÉPONSES INEXACTES**		
GROUPES[6]	**Problème 3.1**	**Problème 5.1**	**Problème 5.3**	**Problème 3.1**	**Problème 5.1**	**Problème 5.3**
Groupe 1 : « Bons » 4 élèves	2	3	3	2	1	1
Groupe 2 : « Moyens » 4 élèves	1	4	3	3	0	1
Groupe 3 : « Faibles » 3 élèves	2	2	1	1	1	2
Groupe 4 : « très faibles » 5 élèves	0	0	0	5	5	5
Total :16 élèves	**5**	**9**	**7**	**11**	**7**	**9**

6 Les groupes ont été constitués en fonction des résultats obtenus lors de l'étape I.

- Les résultats des élèves du groupe 1 évoluent positivement,
- les résultats des élèves du groupe 2 sont ceux qui évoluent le plus. Les élèves de ce groupe semblent donc avoir bénéficié plus que les autres des effets de l'expérimentation. Leurs performances en fin d'expérimentation dépassent celles du groupe 1,
- les résultats des élèves du groupe 3 restent stationnaires ;
- Dans le strict cadre de l'expérience, les résultats des élèves du groupe 4 n'évoluent pas[7].

4.1.2. Six constats

1) Globalement on peut souligner que les erreurs de calcul sont pratiquement inexistantes. La raison première semble être toute naturelle : les élèves n'utilisent pas des techniques opératoires qu'ils ne maîtrisent pas suffisamment, et c'est l'expérimentateur qui procède éventuellement aux calculs numériques. Ils sont ainsi en recherche de sécurité. La conscience qu'ils ne maîtrisent pas telle ou telle technique opératoire peut avoir pour certains élèves un effet sur la représentation qu'ils se sont construits de la structure du problème. Une nouvelle question est ainsi soulevée : quelle interaction y a-t-il entre les techniques de calcul maîtrisées et la perception des relations mathématiques ?

2) C'est dans ce contexte que l'on peut constater, en début d'expérience, la prédominance et l'impact des stratégies fondées sur la décomposition additive " raisonnée ", plus particulièrement dans le cadre du raisonnement par isomorphisme. Ce choix stratégique est souvent fait par rapport à une maîtrise insuffisante des tables de multiplication et de l'algorithme de la multiplicaion. La peur de l'échec conduit ainsi les élèves à adopter une stratégie qu'ils jugent plus économique sur le plan cognitif, mais lourde et répétitive en calculs. Le public scolaire en difficulté ou en échec a peur d'apprendre.

De plus, on remarque que la stratégie additive est très souvent mise en œuvre dans le cadre d'un raisonnement qui n'implique pas toujours la maîtrise du raisonnement de proportionnalité.

En effet, bon nombre d'élèves, une fois l'opérateur scalaire découvert, se cantonnent alors dans un seul espace de mesure. L'unique centration sur un raisonnement vertical peut s'avérer préjudiciable car son transfert est parfois impraticable, par exemple à cause des valeurs des variables numériques.

3) Dans le cadre des différents entretiens, les accompagnements langagiers se sont avérés rentables puisque pratiquement tous les élèves ont résolu les problèmes proposés avec l'aide de l'expérimentateur. Il est important de souligner que plus l'élève rencontre de difficultés et plus ce type d'accompagnement nécessite du temps. Ce temps supplémentaire pour les élèves, les plus en difficulté

---

7 Ce constat ne concerne pas l'évolution cognitive de chaque élève de ce groupe.

correspond à la nécessité de changer de représentation du problème. En effet, plus l'élève rencontre de difficultés, plus il cherche, et plus sa pensée est amenée à produire, dans le meilleur des cas, différentes représentations du problème. Ainsi, bien souvent, le coût cognitif s'accentue tout au long de l'entretien nécessaire pour trouver la représentation opératoire du problème. L'élève demande alors à l'adulte médiateur d'accroître sa prise en charge du pilotage de la réflexion. C'est ainsi que certains élèves, épuisés par le coût cognitif de la recherche, éprouvent des difficultés à mettre en œuvre la technique opératoire qu'ils ont découvert et qui leur permettrait de conclure leur raisonnement. Dans la logique précédente, on peut dire que les élèves de plus bas niveau n'ont pas l'initiative des dialogues, notamment en fin d'entretien.

4) On peut constater que très peu d'élèves utilisent spontanément des accompagnements de symbolisation graphique lors de la résolution de problèmes (étape I.) Il n'y a pas d'habitus scolaire relatif à la schématisation. Seule une minorité d'élèves utilise le tableau en croix d'une manière mécaniste : c'est l'effet maître, le contrat didactique. Lors de l'expérimentation, les schématisations, par rapport aux problèmes de quatrième proportionnelle les plus complexes, ont contribué en particulier à penser la nécessité de rechercher la valeur unitaire. C'est souvent une visualisation qui facilite la prise de conscience de l'existence d'une question intermédiaire : la recherche de la valeur unitaire. Les représentations de type tableau fléché semblent être, en ce sens, les plus performantes. Elles mettent en évidence la possibilité de raisonner verticalement ou horizontalement. Les schémas sont, pour la majorité des élèves, en interaction avec la construction du raisonnement de proportionnalité.

5) Toujours par rapport à l'ensemble du groupe classe, on peut affirmer que les différents types d'accompagnements par la symbolisation aident les élèves à penser la structure des problèmes. D'ailleurs les outils de symbolisation proposés par l'expérimentateur, plus particulièrement lors des entretiens, sont déclencheurs de ruptures, et conduisent chaque élève à changer sa représentation du problème. En ce sens, le changement de registre de représentation, proposé par le médiateur, est source de pensées nouvelles formulées par les élèves. C'est la raison pour laquelle on peut dire qu'il y a bien interactivité entre la production de schémas et les formes langagières de la pensée.

6) En fonction des résultats constatés, le problème de classe correspondant à l'étape III s'est avérée particulièrement " rentable " sur le plan cognitif. Fondée sur la confrontation des schématisations crées par les élèves, elle a favorisé la rencontre des points de vue, les argumentations et donc les décentrations. De plus, l'aspect dynamique du problème a très certainement contribué à développer la motivation des différents élèves composant le groupe classe.

4.2. Les suivis individuels

Ces suivis individuels concernent 7 élèves aux résultats contrastés. L'exemple d'Adiaratou, et celui d'Olivier présentés ci-dessous, mettent en évidence des évolutions cognitives particulières.

Adiaratou

4.2.1. État initial du profil cognitif

Performances, constats

En début d'expérience, lors de la première étape, Adiaratou réussit une problème sur six. Elle fait ainsi partie du groupe d'élève faible. Elle accompagne sa pensée : trois schémas pour six problèmes. Ces schémas sont principalement des tableaux en croix à l'intérieur desquels l'inconnue est symbolisée par x. Or le problème réussi n'est pas accompagné de symbolisation. Adiaratou rencontre quelques difficultés pour effectuer les multiplications et les divisions.

Interprétations

Le contrat didactique imposé par le maître de la classe, en particulier dans le cadre des enseignements mathématiques, est particulièrement prégnant. Sur un plan général, les garçons de la classe tiennent le devant de la scène pédagogique. Ils semblent être vécus par le maître non seulement comme étant les plus performants mais aussi les plus motivés. Dans ce contextee, on peut penser que les filles, et plus particulièrement Adiaratou, ont du mal à trouver leur place. Adiaratou, presque renfermée, adopte une attitude de recul.

Si on analyse plus précisément le contrat didactique véhiculé par le maître, on constate que les aides proposées à la résolution des problèmes mathématiques sont fondées sur l'économie de la pensée : « les trucs pratiques ». c'est dans ce cadre que le maître fait ses propositions (l'utilisation du tableau en croix), ce qui peut parfois avoir pour effet « de passer à côté » du raisonnement de proportionnalité utilisable par l'élève. Aucun autre outil n'est proposé et les élèves l'utilisent de façon pratique en s'aidant de la calculette. L'outil étant ainsi généralisé pour toute la classe, dans ce contexte et à des fins de reconnaissance, Adiaratou utilise presque systématiquement le tableau. La pression du contrat est si forte qu'elle s'ingénie à utiliser ce type de symbolisation même pour des problèmes qu 'elle pourrait pratiquement résoudre mentalement.

On peut s'interroger sur la vision des élèves que véhicule ce type de contrat didactique. On peut aussi s'interroger sur la représentation des savoirs mathématiques (prédominance de l'aspect outil des concepts) véhiculé par un tel contrat. Quoi qu'il en soit Adiaratou ne se retrouve pas dans un tel cadre, lequel s'oppose, dans une certaine mesure, à ses apprentissages.

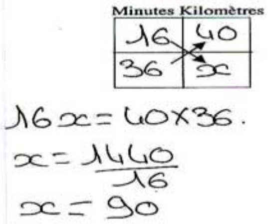
4.2.2. État final du profil cognitif

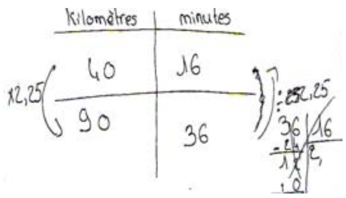
Performances, constats

L'étape V confirme les progrès réalisés par Adiaratou puisque, dès l'étape III, tous les problèmes sont résolus. De plus Adiaratou accompagne toujours sa pensée de schématisation passant presque systématiquement du tableau en croix au tableau fléché.

4.2.3. Problème 4.1

Quelle distance parcourt un train en 36 minutes, sachant qu'il roule à vitesse constante et qu'il parcourt 40 kilomètres en 16 minutes ?





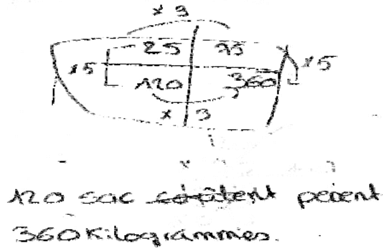
On assiste à une évolution simultanée des réussites et de l'utilisation des représentations visuelles. Lors de l'étape III, elle sait même exposer au groupe classe les deux procédures possibles de résolution du problème proposé.

Interprétations

Le changement de contrat a porté ses fruits. Cette rupture satisfait pleinement Adiaratou qui peut alors prendre le risque de se confronter aux perturbations inhérentes à tout nouvel apprentissage et de s'exprimer. Dans un nouvel espace de pensée, Adiaratou prend de la distance par rapport aux outils qu'elle utilisait. Elle se décentre et constate qu'il existe d'autres outils, peut-être plus adaptés, plus performants. D'une manière générale, on peut dire qu'elle commence à appréhender le caractère objet de la proportionnalité. Dans la même dynamique, elle constate les liens existant entre le tableau en croix et le tableau fléché pour en arriver, grâce à ce dernier, à expliquer au groupe classe le raisonnement vertical « scalaire » et le raisonnement horizontal « fonction », ce qui témoigne d'un niveau élaboré de conceptualisation.

4.2.4. Problème 3.1

Combien pèsent 120 sacs de terreau, sachant que 25 sacs pèsent 75 kilogrammes ?



Olivier

4.2.5. État initial du profil cognitif

Performances, constats

Lors de l'évaluation initiale, Olivier résout deux situations sur six. Ces réponses exactes sont obtenues grâce à la mise en œuvre de stratégies additives. Il n'accompagne pas sa pensée de schéma.

Interprétation

Bien qu'il maîtrise la technique opératoire de la multiplication, Olivier est cantonné dans la mise en œuvre de stratégies additives qui, plutôt que de refléter un raisonnement scalaire, illustrent une démarche de tâtonnement. C'est en fait un raisonnement vertical additif.

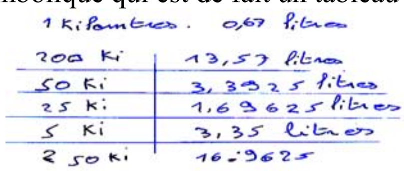
4.2.6. État final du profil cognitif

Performances, constats

En fin d'expérimentation, lors de l'étape V, Olivier résout les deux situations proposées en mettant en œuvre des stratégies fondées sur l'utilisation d'une division et d'une multiplication. Il utilise un schéma pour accompagner son raisonnement dans l'une des deux situations.

Interprétation

On constate donc une évolution positive d'Olivier. Cette évolution se caractérise plus particulièrement par le passage de l'utilisation de stratégies additives à l'utilisation d'une division et d'une multiplication. On remarque aussi l'utilisation d'un schéma de type symbolique qui est de fait un tableau de proportionnalité.



1 Kilomètres. 0,67 litres

200 Ki	13,57 litres
50 Ki	3,3925 litres
25 Ki	1,69625 litres
5 Ki	3,35 litres
250 Ki	16,9625

D'une certaine manière, ce tableau de proportionnalité représente la trace du raisonnement vertical additif fondé sur le tâtonnement constaté en début d'expérimentation. On peut donc faire l'hypothèse qu'Olivier est en train de concrétiser une rupture cognitive qui va lui permettre d'établir, à terme, le raisonnement proportionnel. Dans un premier temps, il a encore besoin de s'appuyer sur sa démarche première, qui tient du " bricolage " . Par la suite, il pourra le dépasser.

Ce comportement témoigne de la prégnance des procédures établies antérieurement qui ont pu s'avérer efficaces face à certaines situations, mais pas pour tous les problèmes de quatrième proportionnelle. Olivier a eu besoin de temps pour se rendre compte que les stratégies additives ne s'appliquent pas aisément à tous les cas.

5. Des réponses

On peut dire que plus les publics sont en échec scolaire et plus leur pensée est conservatrice, peu désireuse de se confronter à de nouveaux obstacles après tant d'années de difficultés scolaires. Cette expérience, par ses résultats, met en évidence que pour les élèves de l'AIS, il paraît important de mettre au travail et de réactiver les différents aspects de ce que Piaget a appelé la fonction symbolique (ceci sans faire référence aux stades piagétiens qui pourraient ramener degré ces élèves du second degré à un âge mental correspondant au premier.) Dans la même logique, on peut établir un lien avec les travaux de Feuerstein qui assimilent ces élèves à des " déprivés culturels ", c'est-à-dire des personnes qui n'ont pas suffisamment bénéficié de médiations dans leur plus jeune âge pour pouvoir appréhender la complexité du monde. Ces médiations reposent de fait sur la construction et l'utilisation d'outils sémiotiques permettant de comprendre les différents signes de l'environnement sociétal et de pouvoir entrer en communication avec lui.

Sur un plan très général, il paraît important, pour ces élèves, de favoriser l'expression symbolique à la fois sur le plan langagier et sur le plan graphique. Bien que le langagier soit transversal à toutes les activités de conceptualisation, on peut aussi souligner que l'association des différents types de symbolisation (langagières et non-langagières), le passage de l'un à l'autre (changement de registre) peuvent provoquer des ruptures de la pensée. Le changement de registre, qui implique une conversion cognitive d'un type de représentation à une autre, déstabilise, ce qui peut contribuer à débloquer les conceptualisations. Cette variation des accompagnements de symbolisation correspond à une multiplication des médiations proposées aux élèves en très grande difficulté scolaire afin de construire une représentation opératoire de la réalité.

Plus précisément, sur le plan graphique, les schématisations de tels ou tels problèmes peuvent, pour certains élèves, jouer un rôle important par rapport aux apprentissages. Pour ce faire, il semble pertinent, dans un premier temps, de mettre les apprenants en position d'étudier leurs propres schémas. L'objectif est de tendre, grâce à une étude comparative, vers l'expression de la pensée la plus abstraite possible, de passer de l'illustration au schéma en travaillant la relation signifié/signifiant. Par la suite, l'activité de schématisation permettra l'extériorisation d'une partie du " langage intérieur " et donc la prise de recul par rapport à la pensée. C'est en ce sens que ce type de démarche peut provoquer une prise de distance qui engendre un contrôle et une planification des actions permettant de dépasser les réactions impulsives fréquentes chez ces élèves. La schématisation induit un travail " métacognitif graphique " particulièrement bénéfique pour des élèves relevant du domaine de l'AIS. C'est en effet grâce à ce travail qu'ils prendront de la distance par rapport à l'aspect outil des concepts, de manière à établir des liens avec leur aspect objet, favorisant l'institutionnalisation du savoir.

Ainsi la schématisation du problème de proportionnalité permet de mettre en évidence les relations entre les divers éléments qui la constituent. C'est donc un travail sur la perception de la structure mathématique que l'élève met en œuvre. De plus, la qualité de sa schématisation va reposer sur la pertinence de la relation signifié/signifiant qu'il aura élaborée.

Toutefois il convient de souligner que ces accompagnements, outils au service de la pensée, ne sont pas généralisables à tout le groupe d'élèves, dont pourtant la caractéristique commune, dans l'expérimentation présente, est l'échec avéré en mathématiques. On s'aperçoit ainsi, à travers cette recherche, que certains n'ont pas besoin de passer par les schémas pour trouver la solution des problèmes proposées.

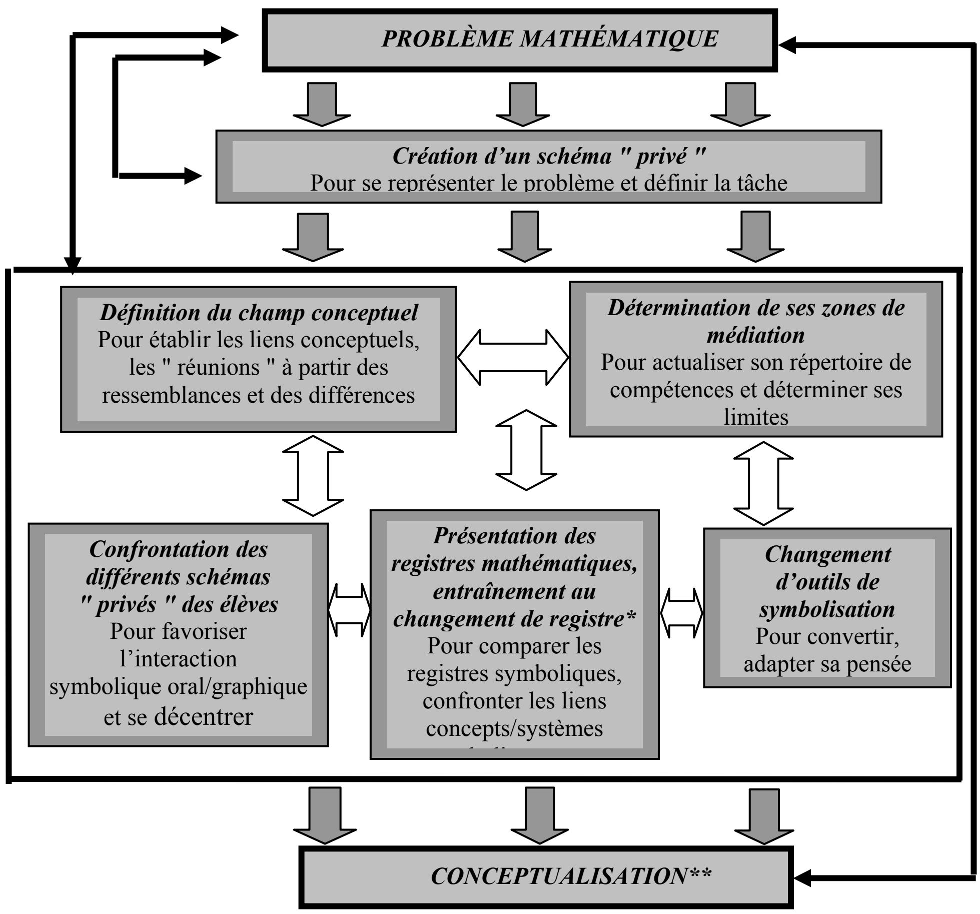
Il est donc nécessaire de garder " la bonne distance " par rapport à de tels outils car l'histoire de la réflexion didactique dans le domaine de l'AIS est caractérisée par des dérives fréquemment renouvelées, qui substituent aux objets d'enseignement des outils de médiation. C'est en ce sens qu'il est essentiel de ne pas faire de ces symbolisations un objet de savoir mais plutôt un objet de réflexion et un objet d'étude sémiologique pour le groupe. En effet, on a pu constater (étape III) combien les élèves ont participé activement à l'exposé des différentes possibilités de représentation visuelle des problèmes mathématiques, véritable support à l'argumentation et à la confrontation des points de vue. Enfin, pour les élèves utilisateurs de tels outils, il est nécessaire de veiller à ne pas créer de dépendance à leur égard.

6. Des perspectives

De ces travaux, on peut extraire un certain nombre d'axes de travail qui pourraient être des supports aux mises en œuvre de pratiques pédagogiques favorisant la réussite scolaire des élèves. Ces axes de travail peuvent servir, par exemple, à la construction d'une démarche spécifique et non linéaire au service de la conceptualisation de la proportionnalité. L'objectif de ces axes est de favoriser, pour chaque élève, la construction de diverses procédures adaptables et transférables à la plus grande variété possible de problèmes de proportionnalité. De plus, il convient de proposer des problèmes qui permettent la construction de concepts et théorèmes en acte qui sont les fondements du développement des procédures.

Un certain nombre des axes présentés dans le schéma ci-dessous correspondent aux transferts, tout à fait volontaires, d'une partie des réflexions de cette recherche à la réalité de la classe. C'est donc une démarche qui a pour objectif de reproduire en classe les réflexions didactiques et psychologiques de la recherche, malgré les difficultés scolaires rencontrées par les élèves de SEGPA.

6.1. Une démarche d'accompagnement par la symbolisation



* Dans le registre arithmétique, utilisation du schéma de type tableau fléché pour établir la relation quaternaire dans deux espaces de mesure.
** La conceptualisation est en jeu tout au long de la démarche ; ici il s'agit d'un état de conceptualisation supérieur à l'état initial.

BIBLIOGRAPHIE

ADAM M., 1999, *Les schémas - Un langage transdisciplinaire,* Paris, L'Harmattan.

BAKHTINE M., 1977, première édition 1929 *Le marxisme et la philosophie du langage,* Paris, Les Éditions de Minuit.

BELMAS P., *Apprentissage de la proportionnalité et symbolisations chez des élèves en échec scolaire,*Thèse de doctorat, Université Paris V.

BELMAS P., HAMEAU C., PLANCHON H., ROUX M.-O., VERGNAUD G., 1997, Symboliser les mathématiques*, Journal des Instituteurs*, n°3, 61-76.

BELMAS P., GILLIG J.-M., LESAIN-DELEBARRE J.-M., MÈGE-COURTEIX M.-G., 1997, Difficulté et handicap : le droit à la différence, *Journal des Instituteurs*, n°4, 62-76.

BROUSSEAU G., 1998, *Théorie des situations didactiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

BRUNER J.S., 1983, Le rôle de l'interaction de tutelle dans la résolution de problème, *in* : *Savoir dire, savoir faire*, Paris, Presses Universitaires de France.

CHEVALLARD Y., 1989, Le concept de rapport au savoir - Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1988-1989, 211-236.

COSSETTE C., 1985, *Les images démaquillées,* Montréal, Riguil.

DENIS M., 1979, *Les images mentales,* Paris, Presses Universitaires de France.

DUPUIS C., PLUVINAGE F., 1981, La proportionnalité et son utilisation*, Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2, 165-212.

DUVAL R., 1999, Conversion et articulation des représentations analogiques, *Séminaires de recherche*, IUFM Nord Pas-de- Calais.

FEHR J., 2000, *Saussure entre linguistique et sémiologie,* Paris, Presses Universitaires de France.

FEUERSTEIN R., 1994, L'expérience d'apprentissage médiatisé, *in* Bentolila A. (Ed.), *Les entretiens Nathan : enseigner, apprendre, comprendre*, Paris, Nathan, 205-219.

KAPUT J., 1985, *Multiplicative word problems and intensive quantities : An integrated software response*, Harvard Graduate School of Education, Educational Technology Center.

LEMOIGNE J.L., 1999, Préface , *in* : Adam M., *Les schémas - un langage transdisciplinaire*, Paris, L'Harmattan.

LEVAIN J.P. 1997, *Faire des maths autrement, développement cognitif et proportionnalité,* Paris, L'Harmattan.

MERRI M., 1995, *L'analyse de la tâche et l'analyse des protocoles : résolution de problèmes multiplicatifs par des stagiaires de la formation professionnelle dans une problème d'entretien,* Thèse de doctorat d'État, Université Paris V.

PLAISANCE E., 1985, *L'échec scolaire, nouveaux débats, nouvelles approches sociologiques,* Paris, Éditions du CNRS.

REVAULT D'ALLONNES G., 1920, Le mécanisme de la pensée : I Les schèmes mentaux, *Revue philosophique*, XC, 161-202.

RICHARD J.F., Pointreau S., 1988, Problématique de l'analyse des protocoles individuels d'observations comportementales, *in* : Caverni J.P., Bastien C., MENDELSON P., TIBERGHIEN G., *Psychologie cognitive : modèles et méthodes*, Presses Universitaires de Grenoble.

VERGNAUD G., 1990, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n°2.3, 133-170.

VERGNAUD, G., 2000, Récopé M., De Revault d'Allonnes à une théorie du schème aujourd'hui, *Psychologie Française*, n°45-1, 35-50.

VYGOTSKI L.S., 1985 deuxième édition, pour la traduction française de F. Sève, *Pensée et langage* , Paris, Éditions Sociales/Messidor.

VYGOTSKI L.S., 1995, Psychisme, conscience, inconscient (1930), *Société française*, n°51, 37-52.

LUIS RADFORD

NARRATIVES, EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES ET CALCUL FORMEL : DE LA CONSTITUTION À LA TRANSFORMATION DU SENS*

Abstract. This article deals with two problems that students encounter when they start learning algebra. The first one is the problem of the constitution of meaning of a symbolic expression. The second one is related to the transformation that the students have to accomplish of this meaning in order to perform syntactic formal operations on the symbolic expressions. Our discussion is based on a classroom observation of three groups of 15-year-old students during video-taped sequences devoted to the teaching of algebra. The semiotic theoretical framework and the analysis of students' interaction draw from Husserl's phenomenology.

Résumé. Le but de cet article est de discuter deux problèmes qui se posent chez les élèves en début d'apprentissage de l'algèbre. Le premier problème est celui de la *constitution* du sens d'une expression symbolique. Le deuxième problème est celui de la *transformation* à laquelle on doit soumettre le sens précédent afin de pouvoir effectuer, sur l'expression symbolique en question, des traitements de type syntactico-formel. Dans ce qui suit nous discutons ces problèmes à partir d'observations en salle de classe portant sur l'activité mathématique de trois groupes d'élèves de 9e année (15 ans.) L'analyse est conduite à l'intérieur d'une perspective sémiotique s'inspirant de la phénoménologie de Husserl.

Mots clés : Sémiotique, sens, symboles, algèbre, mise en équation.

---

1. Introduction et cadre théorique

L'utilisation de symboles en mathématiques pose d'emblée deux problèmes différents. Le premier, celui de la *référence*, concerne la nature de l'objet mathématique lui-même. Le deuxième, celui de la *désignation* des objets, concerne la manière que se donnent les individus pour rendre ces objets des *objets de connaissance*. Alors que le premier problème relève de l'ontologie, le deuxième relève de l'épistémologie.

Les deux problèmes mentionnés sont, bien sûr, interreliés. Une ontologie réaliste munit les objets mathématiques de certains attributs. Elle autorise certaines pre-suppositions (qui restent toutefois souvent implicites) et privilégie certains types de discours pour thématiser les objets du savoir (on y parle, par exemple, de

* Cet article fait partie d'un programme de recherche subventionné par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada/ Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (CRSH/SSHRC.)

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 191 – 208.

"découverte de l'objet".) Du côté épistémologique correspondant, le rôle des symboles y apparaît, en général, comme ce qui permet un accès aux objets. Par exemple, c'était une telle ontologie qui permettait à Frege de comparer l'activité du mathématicien à celle du géographe explorateur. Celui-ci, disait Frege, découvre une rivière qui était déjà *là*. De manière similaire, le mathématicien découvre un théorème qui a toujours été vrai. C'est pourquoi, soutenait-il, les théorèmes de l'arithmétique incarnent des vérités éternelles. « Nous pouvons dire par conséquent que ces objets sont en dehors du temps ». (Frege, 1895/1970, p. 482.) Dans l'épistémologie fregéenne les symboles donnent présence à ces réalités conceptuelles préexistantes à l'activité des individus. Les symboles, disait-il, « donnent présence à ce qui est absent, invisible, et le cas échéant inaccessible aux sens. » (Frege, 1971, p. 63.) Le rôle des symboles est tout à fait autre dans une ontologie formaliste. Ainsi, en parlant au sujet des nombres, Hein disait: « j'appelle nombre certains symboles numériques tangibles. Donc l'existence de ces nombres n'est pas en question. » (Heine, cité dans Frege, 1960, p. 183.) C'est pourquoi les axiomatiques formelles des mathématiques introduisent les objets comme une suite de lettres et réduisent le problème de la désignation des objets à une simple correspondance entre variables et ces objets donnés en soi[1]. Mais dès qu'on se place dans le contexte de l'enseignement, le problème ontologique de la référence et le problème épistémologique de la désignation prennent une allure tout à fait différente. C'est surtout le problème de la désignation qui va nous occuper ici. Nous retiendrons en particulier deux aspects.

(1) Le premier concerne les mécanismes sémiotiques de constitution du sens quand des expressions symboliques sont construites à partir d'un certain contexte.

(2) Le deuxième est celui de la transformation du sens afin de pouvoir mener des opérations sur les symboles désignant les objets. Ces aspects ne sont pas indépendants –du moins ils ne le sont pas pendant certaines phases de l'activité mathématique. Mais ils sont sous-tendus par des exigences sémiotiques et cognitives différentes.

On sait très bien que Duval caractérise ces aspects de l'activité sémiotique comme relevant de la *conversion* et du *traitement* entre registres sémiotiques, respectivement (Duval, 1993.) Bien qu'essentiellement juste, en faisant intervenir *deux* registres dans la conversion et *un* seul registre dans le traitement, cette classification laisse de côté néanmoins le rôle d'autres systèmes sémiotiques dans

[1] Dans ce contexte, la problématique de l'objet disparaît, ainsi que celle de sa désignation. Comme note Nichanian, « la difficulté apparue il y a un instant concernant la détermination originaire de l'objet, et donc l'apparaître de cet objet en tant que tel, a disparu ; mais elle a disparu tout simplement parce qu'on se pose aucune question concernant la constitution du « domaine d'objets » dont on vient de parler. » (Nichanian, 1979, p.17.)

la constitution du sens, notamment le système du langage parlé et celui des gestes. Or, la prise en compte et l'élucidation du rôle des autres systèmes sémiotiques assurant la conversion et le traitement sont des éléments fondamentaux pour une étude de l'ontogenèse des significations mathématiques. Il ne s'agit pas d'affirmer que Duval a minimisé le rôle du langage comme pivot d'articulation entre registres. C'est lui-même qui nous a rappelé que le rôle du langage en tant que pivot d'articulation fût pertinemment souligné par Jakobson. Il s'agit, pour moi, d'insérer le langage au sein de l'activité sémiotique des individus pour retracer la constitution du sens et la transformation de celui-ci. Toutefois, il convient de noter, avant de continuer, qu'en prêtant attention à la « voix » des élèves, je ne me place pas dans la foule de travaux contemporains qui réduisent la construction du savoir au discours ou à l'interaction (pour une critique des approches discursives voir Radford 2002a.) Je me rapproche plutôt du constat que Marx exprimait dans son *Grundrisse* selon lequel les idées n'existent pas séparées du langage.

Puisque ma position théorique vis-à-vis du langage est cruciale pour situer l'analyse que je ferai du sens que les élèves attribuent aux expressions algébriques, il me faut apporter une nuance ici. En soutenant que les idées n'existent pas séparés du langage, je ne prends pas parti pour la position subjectiviste qui voit dans le langage le *véhicule* d'expression des idées. Je ne prends pas parti non plus pour la position (adoptée par plusieurs post-modernistes) qui confère au langage le rang d'un démiurge tout-puissant constructeur de la réalité. Il s'agit plutôt, pour moi, de concevoir le langage (et les autres systèmes sémiotiques) comme des moyens de réflexion (dans les deux sens, celui de reflet et celui de prise de conscience) se mouvant dans un horizon d'objectivation selon des modes de fonctionnement culturellement constitués (Radford, 1998.) Dans cette dernière conception, où la réflexion est une des formes de la praxis sociale, conception proche à plusieurs égards de celle que Marx énonçait dans le *Grundrisse*, le langage apparaît en tant que porteur de significations et des « modes d'action (opérations) socialement élaborés, dans la pratique desquels les hommes modifient et connaissent la réalité objective » (Leontiev, 1984, p. 155.)

Cet article fait suite à d'autres articles, que nous avons publiés précédemment, concernant le problème de la désignation des objets mathématiques. Il se veut une exploration additionnelle et nécessaire d'un des résultats auxquels nous sommes parvenus sur l'apprentissage de l'algèbre symbolique chez des élèves débutants. Ce résultat peut être résumé de la manière suivante. Suite aux travaux de Filloy et Rojano (1984, 1989), dans une vaste partie de la littérature sur l'apprentissage de l'algèbre, on parle des difficultés qu'éprouvent les enfants à opérer sur l'inconnue[2]. Ces travaux mettent en évidence la difficulté qu'ont les élèves pour passer de la résolution d'équations du type ax+b=c à la résolution d'équations du type ax+b=cx+d. Alors que le premier type ne demande pas une opération sur l'inconnue (car la solution se fait en opérant sur les nombres a, b et c), le deuxième type exige bel et bien une opération sur l'inconnue. Or, dans notre programme de recherche longitudinale en salle de classe (Radford 2000a), nous avons trouvé que, sous certaines conditions, l'opération sur l'inconnue dans des problèmes du type ax+b=cx+d ne pose pas de problèmes aux élèves débutants. Ainsi, après un travail sémiotique à partir de la manipulation d'objets concrets, nos élèves ont pu facilement passer au symbolisme et résoudre des équations telles que 14+2e = 2+4e (voir Radford, 2002b.) Par contre, ces mêmes élèves n'ont pas réussi à reconnaître, dans des tâches de généralisation de patrons géométrico-numériques, que les expressions '(n+1) +n', '(n+n)+1' et '2n+1' réfèrent à une même situation ou objet (Radford 2000b ; Radford, sous presse.) Le problème n'est donc pas celui de la possibilité ou impossibilité de l'élève à opérer sur l'inconnue car cette question ne peut pas être tranchée par un oui ou par un non (ou plutôt elle peut être répondue par oui *et* non à la fois, mais alors la question perd tout son intérêt.) La question devient celle-ci : comment se fait-il que dans certains cas l'opération sur l'inconnue est possible alors que, pour les *mêmes* sujets, dans d'autres cas l'opération sur l'inconnue est impossible ? Pour répondre à cette question, nous voulons suggérer, il faut regarder les problèmes de la désignation des objets et de la constitution du sens. Pour ce faire, il faut regarder comment la désignation des objets à travers les expressions symboliques algébriques est reliée aux intentions des individus et à l'évolution de ces intentions au cours de l'activité contextuelle. Il nous faut voir comment, dans les actes donateurs de sens, les intentions se cristallisent en s'exprimant dans les expressions symboliques que les élèves retrouvent au cours de leur immersion dans la pratique de l'algèbre.

L'intention à la base du sens mathématique à laquelle nous faisons référence ici ne doit pas être réduite à la subjectivité de l'individu. S'il est vrai que pour qu'il y ait intention il doit y avoir un individu, il n'est pas moins vrai que pour que l'intention soit accomplie elle doit être *exprimée*. Son expression se trouve ainsi cernée par la parole ou le geste historiquement et culturellement constitué, c'est-à-dire, par un système de significations qui vont au-delà de l'individu lui-même (c'est ce que Merleau-Ponty appelait l'expressivité du langage mais qui vaut bien

---

[2] Voir par exemple le texte de Carragher *et al.* (2001) discuté récemment dans le Forum sur l'algèbre tenu lors de la 25e rencontre du PME aux Pays Bas et les commentaires et réactions à ce texte par Linchevski, Radford, Tall, Teppo, Warren et Cooper, Vol. 1, pp. 141-159.

pour d'autres systèmes sémiotiques également.) Les intentions ont lieu à l'intérieur d'expériences culturelles que Husserl appelait *noesis.* Il appelait *noema* le contenu conceptuel de ces expériences. Ainsi, le noema correspond à la manière selon laquelle les objets sont saisis et deviennent connus par les individus. Noesis correspond aux catégories culturelles qui rendent possible que les objets du savoir soient l'objet d'attention (Husserl, 1931.)

En poursuivant ma recherche au sujet des processus sémiotiques de construction du sens et d'utilisation de signes chez des élèves débutant l'apprentissage de l'algèbre symbolique, la question que cet article tente d'examiner est celle de la manière dont les expressions symboliques sont munies de sens lors de la désignation des objets et de ce qui arrive au sens quand des opérations sur ces expressions sont nécessaires. L'analyse présentée ci-dessous portera sur une tâche concernant la résolution d'un problème en mots. En termes du cadre théorique esquissé précédemment, la question de recherche est d'étudier la manière (la noesis) dans laquelle les élèves utilisent des signes pour exprimer des facettes particulières (les noemata) des objets du discours. Après quelques commentaires sur la méthodologie, je vais proposer une distinction entre problème en mots (story-problem) et *narrative symbolique*. Cette distinction me permettra de fournir des interprétations de certaines expressions algébriques produites par les élèves et qui, à première vue, semblent dépourvues de sens. Je vais en suite discuter le concept de *nominalisation*. L'intérêt théorique de ce concept n'est pas tout simplement d'expliquer comment les inconnues d'un problème sont introduites dans la phase de symbolisation algébrique. Sa fonction est plutôt celle d'un outil théorique pour examiner comment se fait la construction du sens des expressions symboliques dans ces limbes où on n'a pas tout à fait quitté l'histoire originelle (celle du problème en mots) et on n'a pas encore complètement atteint le domaine de la narrative symbolique (c'est-à-dire, la narrative racontée en signes.) La dernière section présente une discussion courte du problème de l'utilisation abstraite ou formelle des signes une fois que l'équation associée avec le problème en mots a été produite.

2. Méthodologie

Les données présentées ci-dessous proviennent d'un programme de recherche longitudinal qui a débuté l'année 1998-1999 et auquel participent 4 classes appartenant à deux écoles différentes. Un des objectifs de ce programme est d'assurer un accompagnement à ces quatre classes pendant plusieurs années. Lors de cet accompagnement, nous participons conjointement avec les professeurs des écoles dans l'élaboration des activités mathématiques reliées à l'algèbre. Les activités de salle de classe sont élaborées de sorte que les élèves travaillent selon une structure de petits groupes (2 à 3 élèves par groupe.) Usuellement, après le travail en petits groupes, le professeur conduit une discussion générale qui permet de discuter les acquis des élèves, de les comparer et de les affiner quand c'est nécessaire. L'objectif et le contenu des activités sont circonscrits par le programme d'études de la province de l'Ontario, Canada. Ces activités s'insèrent dans le fonctionnement normal de la salle de classe et ont lieu selon la programmation des écoles. Nous enregistrons les activités sur vidéo à l'aide de plusieurs caméras. Ensuite, nous procédons aux transcriptions et à l'analyse des activités. L'analyse permet une rétroaction pour les activités à venir. Il ne s'agit donc pas d'une recherche de type « expérimentale classique » (passation de questionnaires, analyse de ceux-ci et obtention des conclusions) mais d'un accompagnement qui nous permet de voir, *de près et sur le terrain*, l'évolution des mécanismes sémiotiques de construction du sens et d'utilisation de signes.

Je me limiterai ici à mentionner quelques extraits provenant de trois petits groupes d'une des activités autour de la mise en équation et de la résolution d'un problème en mots[3]. Ces données ont été recueillies quand les élèves se trouvaient en 9e année. Comme il découle de ce qui a été dit au sujet de la position théorique adoptée ici vis-à-vis du langage, en faisant du dialogue des élèves un point central de notre méthodologie, la question n'est point celle de tenter de voir les jeux de sens que *chaque* individu peut vivre dans sa tête à un moment donné fixé par un problème particulier, mais d'explorer l'accès des élèves à une pratique mathématique qui passe par la construction d'un sens à travers un langage symbolique complexe, historiquement constitué.

L'activité mathématique que je vais discuter était basée sur le scénario suivant : « Kelly a deux bonbons de plus que Manuel. Josée a 5 bonbons de plus que Manuel. Les trois enfants ensemble ont 37 bonbons »[4]. Le même scénario a été

[3] Considérées sous un certain angle, nos observations peuvent être vues comme une micro-étude de cas. Or, l'étude du sens en algèbre est un phénomène nouveau et on peut se poser la question de la validité, l'heure actuelle, d'une approche par questionnaires pour l'explorer méthodologiquement auprès d'une population plus grande. La vaste recherche menée dans le domaine de la didactique de l'algèbre a été occupée, jusqu'à récemment, par un intérêt sur l'acquisition de la syntaxe du langage algébrique (on consultera à ce sujet la critique intéressante de Nemirovsky, 1994.) Le questionnaire semble un outil approprié pour élaborer des catalogues d'erreurs d'élèves, etc. Mais étant donné la nature *contextuelle* de la catégorie sémiotique du sens, il semble difficile que les questions que nous nous posons en ce moment puissent être étudiées et cernées par d'autres moyens que ceux que nous fournissent les observations en direct sur le terrain, c'est-à-dire, la salle de classe (ces observations peuvent toutefois être complétées par des questionnaires ; nous l'avons fait d'ailleurs, mais avec des intentions différentes : voir Radford 2000a.)

[4] Des problèmes de ce type ont été l'objet d'une recherche menée par Bednarz et Janvier (1994) en termes de l'effet qu'ont les relations (par exemple relations additives versus multiplicatives) sur les stratégies suivies par les élèves.

utilisé pour générer *trois* problèmes. Dans le premier problème, on demandait aux élèves de désigner le nombre de bonbons de Manuel par x ; ensuite ils devaient trouver une expression algébrique pour le nombre de bonbons de Kelly et de Josée, produire une équation associée au problème et la résoudre. Les problèmes 2 et 3 comprenaient des questions similaires. La différence se trouve dans le point d'ancrage de la désignation des objets. Alors que dans le problème 2, on a demandé aux élèves de désigner par x le montant de bonbons de Kelly, dans le problème 3 la lettre x devait désigner le nombre de bonbons de Josée.

3. Résultats et discussion

3.1. De Héros aux *Objectités*[5]

Une des difficultés auxquelles les élèves doivent faire face dans des problèmes incluant des phrases comparatives telles que :

(Comp) *« Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel »*

consiste à en dériver des phrases assertives (c'est-à-dire des phrases qui éliminent la relation de comparaison) du type : « A (ou B) a C ».

Si, par exemple, Manuel a 4 bonbons, la phrase assertive dérivée de (Comp) prendra la forme :

(Asser) *« Kelly (sujet) a (verbe) 6 (adjectif) bonbons (nom) ».*

Dans le cas de l'algèbre, l'adjectif n'est pas connu (on ne sait pas combien de bonbons A a.) Comme résultat, l'adjectif doit être désigné *d'une certaine façon*. Il doit devenir « prédicable ». En utilisant une lettre (disons 'x') un nouvel espace sémiotique est ouvert[6]. Dans ce nouvel espace, l'histoire originale doit être racontée à nouveau, débouchant sur ce qu'on appelle souvent (bien que de façon trop simpliste, comme Duval (sous presse) nous le rappelle) la « traduction » en équation du problème donné. À la place de traduction, je préfère parler de *narrative symbolique*. Ce terme cherche à souligner deux éléments essentiels. Le premier élément consiste à remarquer que, dans ce nouvel espace sémiotique, on raconte encore une histoire, mais cette fois-ci en symboles mathématiques. Le deuxième élément met en évidence le fait que, bien qu'il y ait de ressemblances entre l'histoire originale et la narrative symbolique, les personnages changent. Ce changement est caractérisé comme un glissement noématique qui met en avant

---

[5] Pour faire référence non pas seulement à des choses individuelles mais aussi à des choses complexes, à des catégories ou à des états d'affaires, Husserl (1961, 44) utilisait le terme *Gegenständlichkeit (objectité.)* C'est dans ce sense que nous le prenons ici.

[6] Le nouvel espace sémiotique ne doit pas forcément être celui de l'algèbre symbolique. Les abaquistes italiens du 14[e] siècle ont construit des espaces sémiotiques complexes à l'aide de mots dotés d'une technicité très subtile. Voir Radford, 1997.

certains aspects de l'histoire originale et qui place en arrière-plan d'autres aspects. Les « héros », pour ainsi dire, de l'histoire originale ne sont plus Kelly, Manuel ou Josée. Ce sont maintenant les relations numériques entre les montants de bonbons qui constituent les objectités exprimées dans le nouvel espace sémiotique (c'est-à-dire dans celui de l'algèbre symbolique en émergence.)

Les difficultés qu'accompagnent le glissement noématique ou glissement d'attention peuvent devenir un obstacle dans l'apprentissage de l'algèbre. Montrons un exemple dans lequel on voit les élèves du groupe 1 en train de produire une expression symbolique sans pour autant pouvoir accomplir ce changement noématique[7].

3.2. Signes en tant que marques dans des actes narratifs

Dans ce groupe, un calcul (erroné) avec des phrases comparatives a amené les élèves à la situation suivante :

Stacey: Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel. Josée a 5 bonbons de plus que Manuel, ensemble elles [Kelly et Josée] ont 7 bonbons de plus que Manuel.

À la place de transformer les phrases comparatives en phrases assertives, les élèves ont changé le terme comparatif en forme adverbiale. Plus précisément, la formule 'plus que' est remplacée par 'plus', ce qui leur a permis d'établir une hiérarchie chez les héros de l'histoire originale selon le nombre de bonbons:

Stacey: Josée en a 5 [de plus]. Josée en a plus, Kelly est deuxième, Manuel le troisième. Ok so on met x qui représente … non x qui représente 7, Ok ? 12 (en tant que résultat de 7+5), 9 (vu comme résultat de 7+2) mais j'sais pas comment trouver … […]. Il [Manuel] en a 7 moins que ces deux-là mis ensemble (elle écrit) x – 7 […] Il faut que ça (indiquant avec le doigt 37) égale à x-7 (en suggérant 37=x-7 ou x-7=37.)

La transformation des phrases comparatives en phrases assertives est reliée à la possibilité de prendre en compte de façon explicite le nombre inconnu de bonbons. Toutefois, l'introduction claire, dans l'activité mathématique, d'une lettre pour désigner le nombre inconnu n'arrive pas à régler le problème. Ceci est montré dans l'extrait suivant (Ligne 2.) Quand le professeur vient voir le travail des élèves, il se rend compte que ceux-ci n'ont pas pris en compte que x représente le nombre de bonbons de Manuel. Afin d'aider les élèves, il dit :

1. *Professeur: Manuel est x.*
2. *Stacey: Ouin, Josée a 5 bonbons de plus que Manuel et les trois ensemble ont 37 bonbons.*

---

[7] Dans les extraits suivants, on observera que les élèves s'expriment en français, parfois en anglais et parfois dans les deux langues.

3. *Professeur: Ici ils te demandent, là, d'écrire l'expression algébrique pour le nombre de bonbons représentés par Kelly. Donc si lui est x, elle est quoi ? C'est ça [ce qu'il] faut que tu figures.*
4. *Stacey: (en même temps qu'elle regarde le professeur, elle dit) x-2.*

Même si l'intervention du professeur a pris une forme elliptique (il dit: Manuel *est* x), cette intervention vise à faire en sorte que les élèves centrent leur attention sur le nombre de bonbons de Manuel. L'effort du professeur pour produire un glissement noématique chez les élèves se voit, cependant, sans succès : il est accueilli par une phrase qui ne fait que répéter les informations (Ligne 2) et dont l'intonation exprime une réponse du type : « Oui, oui, nous savons tous cela ».

La construction d'une narrative symbolique pour l'histoire donnée exige une nouvelle approche : alors que l'histoire originale se déploie selon une lecture linéaire de gauche à droite (avec des éventuels retours en arrière), le point d'entrée dans la narrative symbolique n'a pas un emplacement permanent. Le point d'entrée reste dans un espace qui est impossible à définir *a priori*. Et même si on arrivait à le détecter, il resterait encore un autre problème : il n'y a pas de congruence (au sens de Duval) entre l'histoire originale et la narrative symbolique. Le langage naturel servant de base à l'activité sémiotique des élèves ne suffit ni à cerner le point d'entrée, ni a offrir un contrôle : c'est que dans la narrative symbolique, *l'ordre du discours* (pour reprendre le terme de Foucault) est différent et ce que ce discours thématise porte sur d'autres choses.

Quel est alors le rôle des signes dans l'expression symbolique produite par les élèves ? Nous verrons maintenant que les signes des élèves constituent des scripts racontant des parties remarquables de l'histoire *originale*. Arrêtons-nous aux expressions "x-7" et "x-2" produites par Stacey. Chacune de ces expressions est faite à partir de trois signes. Dans la deuxième expression, ces signes sont 'x', '-' et '2'. Le sens de ces expressions n'est pas, bien sûr, celui qu'on s'attendrait dans la pratique de l'algèbre. Mais nous ne pouvons pas dire pour autant que ces expressions n'ont pas de sens. L'expression « x-2 », qui fusionne l'intervention du professeur (Ligne 1) et la compréhension que Stacey élabore de celle-ci (Ligne 4), peut être lue comme une expression qui dit que Manuel a un certain nombre de bonbons ('x') et qu'il a deux ('2') bonbons de moins ('-') que Kelly. Ainsi, le signe '-' n'est pas en train d'indiquer une soustraction sur l'inconnue x mais c'est une marque d'orientation d'un court script au sujet de l'histoire originale. De façon similaire, le signe '7' dans l'expression « x-7 » n'exprime pas l'expression « x moins 7 ». Tel qu'indiqué par Stacey dans le dialogue, le nombre 7 vient former part de l'expression symbolique avec un sens importé de sorte que chaque signe dans l'équation nous raconte une partie de l'histoire originale.

Quelques minutes plus tard, le professeur est revenu voir le travail des élèves. Le dialogue a pris alors la tournure suivante :

Professseur: x c'est Manuel, oui ?

Caroline: Oui.

Stacey: (elle interrompt) So, x moins…

Professeur: (en continuant sa phrase) Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel. Supposons que Manuel a 20 bonbons, combien de bonbons est-ce que Kelly aura ?

Stacey: 22 ?

Professeur: 22. (Il regarde Caroline) Si Manuel avait 30 bonbons, combien …

Stacey: (elle interrompt) 32.

Professeur: (Il regarde Jessica.) Donc, euh, comment est-ce qu'ils ont fait pour trouver Kelly ?

Stacey: Tu mets le 2.

Professeur: (il corrige) Tu ajoutes 2.

Stacey: (ayant compris comment exprimer algébriquement les relations, dit, en se référant à Josée) Là tu ajoutes 5. […] Donc c'est x plus 5. (Les élèves écrivent 'x+2' et 'x+5')

Professeur: Pis, ça (il indique la question portant sur l'équation correspondant au problème donné sur la page de l'activité) serait égal à quoi ? Ça c'est une équation donc il faut que ça soit égal à quelque chose (à ce moment-ci, le professeur est appelé par un autre groupe d'élèves. En considérant que le groupe de Stacey est sur la bonne piste il part)

Caroline: (elle ajoute les trois expressions algébriques) Donc si j'ai 3x + 7, (Elle regarde à Stacey) 3x + 7 ? […] Ça veut dire 3, non, 3x + 7 ça égale à 37 ?

Stacey: (elle reconnaît le nombre 7 dont il a été question auparavant et dit) I don't believe that ! 3x + 7 est égale à 37 ! … oh !

Nous voyons comment en utilisant la formule elliptique « x est Manuel » et à travers un calcul sur des nombres (qui fonctionnent ici comme le support de la noésis, c'est-à-dire de l'acte donateur de sens), le professeur déplace l'attention des élèves sur les relations entre les nombres de bonbons. Ce qui est important à souligner n'est pas le fait que les élèves arrivent par-là à écrire l'expression symbolique. Ce qui est important est, en fait, l'émergence de la prise de conscience que, dans les expressions symboliques, les héros, sans être jetés à l'extérieur du champ d'attention, sont placés maintenant dans un deuxième plan et que les prédications que se font dans le nouvel espace sémiotique où gîte la narrative symbolique portent sur d'autres choses : elles se font sur des *objectités*. Il se peut bien que des formules elliptiques basées sur le verbe être du genre « x *est* Manuel » ne soient pas les meilleurs pour forger la distance inévitable entre l'histoire originale et la narrative symbolique. Il se peut que l'utilisation du verbe « avoir » aurait été plus appropriée (nous avons pris conscience de ceci après que les vidéos de l'activité ont été analysés.) Cependant, dans le contexte de la salle de classe, le choix des formules elliptiques a fait possible que les élèves commencent à comprendre le très lourd sens que portent les expressions algébriques, même si elles sont composées à partir d'un nombre incroyablement limité de signes.

3.3. Nominalisation

Les groupes 2 et 3 n'ont pas rencontré les mêmes difficultés que le groupe 1. Voici un extrait du groupe 2 :

Anik : OK. ... Manuel ça va être la variable x (elle montre un endroit sur le page d'activité) comme…comme s'ils veulent…trouve l'équation là ... l'équation pour Kelly c'est ... à cause euh elle en a 2 de plus que Manuel. Manuel il en a ... en a le montant x. So x plus two parce qu'on sait pas, x c'est combien Manuel a. Right. So, elle [Kelly] en a (elle montre un endroit sur le page d'activité) en a comme whatever Manuel a plus two.

Nous voyons comment la phrase comparative a été transformée en une phrase assertive (« elle en a comme whatever Manuel a plus two ».) En introduisant la lettre x (dans « Manuel ça va être la variable x » et « Manuel il en a … en a le montant x »), Anik, en utilisant d'abord le verbe 'être' et ensuite le verbe 'avoir', ouvre la porte qui mène à la narrative symbolique. Nous pouvons voir comment, malgré la reformulation à la fin de l'intervention, les héros commencent à disparaître de la scène principale. Mais essayons de voir les mécanismes sémiotiques qui rendent ceci possible de plus près.

L'insertion de 'x' comme une désignation du nombre de bonbons de Manuel prépare le terrain pour une *nominalisation*. Par nominalisation je veux dire un processus linguistique à travers duquel quelque chose est transformée en sujet ou en objet d'un verbe. En le nommant, on dégage cette « quelque chose » de ce que Hjelmslev appelait la masse amorphe de l'horizon du discours (Hjelmslev, 1969, pp. 51-52) et on la place en avant, devenant ainsi objet d'attention[8].

En disant « whatever Manuel a », l'expression peut maintenant devenir le nom dans la phrase assertive « Kelly a (nom) +2 ». Il est en effet intéressant de noter que, sans aide, le groupe 1 n'aurait pas pu offrir de nominalisation. Les groupes 2 et 3, par contre, ont effectué des nominalisations. Voici un exemple, provenant du groupe 3, au sujet du problème 3 (où x désigne le nombre de bonbons de Kelly.)

1. *Michelle: Kelly...(inaudible.)..Là le x is all moved around. They're trying to trick us. So if Kelly has deux bonbons de plus que Manuel, then Manuel a*

[8] La nominalisation est, de manière plus générale, un des mécanismes d'objectivation sémiotique. Le thème de l'objectivation est traité en détail dans Radford (sous presse) et Radford 2002c.

deux bonbons de moins que Kelly, right ? [...] But now that Kelly is x, moins deux...

2. *Jessy: (il interrompt) Ouain, ouain.*
3. *Michelle: I'm thinking... Josée a cinq bonbons de plus que Manuel. So Manuel a x moins deux puis Josée en a plus cinq que ça, right ? So x moins deux parenthèse... plus cinq.*

La ligne 1 montre un changement de sens, Bien que les phrases « Kelly has deux bonbons de plus que Manuel » et « Manuel a deux bonbons de moins que Kelly » réfèrent au même état d'affaires, le sens n'est pas le même[9]. Le sens change à cause de la manière dans laquelle l'objet est saisi –le contenu noématique n'est pas le même. Dans la dernière partie de la ligne 1 et dans la première partie de la ligne 3, Michelle produit une expression symbolique pour le nombre de bonbons de Manuel. L'insertion du signe 'x' permet une première nominalisation qui rend possible la phrase « Manuel a x moins deux ». Cette phrase est très importante pour notre analyse. Il s'agit, en effet, d'une *phrase hybride* qui illustre clairement comment le sens passe de l'histoire originale à la narrative symbolique par l'entremise du langage naturel. Dans la deuxième partie de la ligne 3, l'attention est portée sur l'expression « x moins deux » seulement. À la place de voir cette expression comme expression d'un des sens contextuels possibles (par exemple, 'le nombre de bonbons de Kelly moins deux' ou encore 'le nombre de bonbons de Manuel'), Michelle produit une suspension subtile et fondamentale de ces sens. Pour ce faire, elle utilise le déictique « ça ». La procédure sémiotique utilisée par Michelle, basée donc sur un recours aux déictiques, rend possible une deuxième nominalisation. Le référent est formellement nominalisé et peut, par là, devenir le nom du verbe « avoir » dans « Josée en *a* plus cinq que *ça* ».

Tel qu'indiqué dans l'introduction, l'intérêt théorique du concept de nominalisation est de nous renseigner au sujet de la manière dans laquelle les expressions symboliques deviennent dotées de sens. La nominalisation nous permet de scruter l'activité sémiotique dans ces limbes où l'on n'a pas tout à fait quitté l'histoire originale et on n'a pas encore atteint la région de la narrative symbolique. En particulier, la nominalisation nous permet d'étudier la constitution des sens d'ordre supérieur nécessaires aux nouvelles prédications requises dans l'élaboration d'expressions symboliques. Il est temps maintenant de discuter le problème didactique des opérations avec les signes menant à l'équation.

3.4. Le collapse des narratives

Voici un extrait du dialogue du groupe 2 portant sur le problème 1.

---

[9] On se rappellera ici du fameux exemple de Frege, discuté également par Husserl : le vainqueur de Jena et le vaincu de Waterloo.

1. Anik: Ouin. Gars bein. (Elle prend les feuilles) ce qu'on essaye de faire c'est de mettre [les expressions symboliques] avec les personnes, Ok ? Kelly en a deux de plus que Manuel, Manuel en a x, plus two c'est ce que Kelly en a [elle] a n'a whatever que lui a plus deux. Ok. Ça va être x plus two, ça c'est entre parenthèse, plus x plus cinq, qui va faire ce que Josée en a, plus x qui va faire ce que Manuel en a [elle vise l'expression '(x+2)+(x+5)+x']

2. Luc: Égale à quoi ? 30, 37 ? (Chantal écrit 2x+5x+x)

3. Anik: (en regardant l'expression symbolique de Chantal, elle dit) 2x, je pense pas

4. Chantal: pourquoi pas ?

5. Anik: (elle pointe à un endroit sur le papier) parce que là t'es t'après faire deux fois x

6. Chantal: Non.

7. Anik: Icite on est après faire deux plus x (Anik écrit (x+2)+(x+5)+x)

8. Luc: (en regardant l'expression écrite par Anik, dit) Tu les regroupes, les regroupes tous les x (Chantal efface ce qu'elle avait écrit)

9. Anik: (En s'adressant à Luc) Non, non !

10. Luc: Ouin ! tu regroupes tous les x

11. Anik: non ! Gars bein, gars bein, (elle pointe encore vers un endroit sur le papier)

12. Luc: Oh my God !

13. Anik: Je veux juste te l'expliquer, gars bein. Lui y'a en a, elle en a x plus deux, right ?

À la ligne 2, Chantal utilise une syntaxe basée sur le critère de juxtaposition de signes. La phrase est structurée à la manière des narratives où les signes sont codés en tant que *termes clés*. Il s'agit d'une stratégie similaire à celle utilisée par les scribes babyloniens dans la construction des tablettes pictographiques de la période proto-littéraire (ca. 3300-2900 Av. J.-C.) précédant l'apparition du cunéiforme où, par exemple, un ensemble de pictogrammes représentant « mouton », « 2 » et « temple » pouvait signifier « deux moutons ont été remis (ou reçus) du Temple » (voir Radford 2001, 28-33.) L'expression 2x ne signifie pas 2 fois x ou deux x. Pour Chantal, 2x exprime l'idée que Kelly a 2 bonbons de plus que Manuel, et c'est pourquoi elle est surprise (ligne 6) qu'Anik ait pu interpréter ceci différemment. Mais le dialogue montre également une autre facette de la lutte que livrent les élèves dans leur essai de signification à travers le langage algébrique : à la ligne 8, Luc regroupe les termes similaires. Anik s'oppose radicalement à cette action. La question est: pourquoi ? La raison en est que le regroupement des termes similaires signifie une rupture avec le sens original. Tous les efforts accomplis lors de la désignation des objets afin de produire la narrative symbolique doivent être mis à l'écart. La narrative symbolique au complet doit maintenant collapser. Il n'y a pas, dans l'histoire originale, de segment possible qui puisse correspondre au résultat du regroupement des termes. Rien, en effet, dans l'histoire originale ne peut être corrélé à l'expression 3x+7. L'effort désespéré d'Anik pour ne pas perdre la piste du sens de la narrative apparaît clairement à la ligne 13.

4. En guise de conclusion

Plusieurs travaux en didactique des mathématiques se sont intéressés aux problèmes de mise en équation. Cordier (1991), par exemple, a étudié le problème de la mise en équation en tant que problème de conversion de registres. Bien qu'elle s'intéresse, comme nous le faisons ici, à la désignation des objets, elle ne le fait pas dans une perspective sémiotique de la signification. De ce compte, les problèmes liés à la microgenèse du sens en algèbre, d'une part, et les problèmes concernant la transformation du sens des objets désignés, d'autre part, n'apparaissent pas au centre de ses préoccupations[10].

En nous situant dans une perspective de la signification qui emprunte certains éléments à la philosophie du langage de Husserl, dans la première partie de cet article nous avons suggéré que le problème de l'opération sur l'inconnue à intérêt à être repensé comme un problème lié aux actes donateurs du sens. C'est dans cette optique que nous avons abordé deux problèmes sémiotiques :

(1) celui de la désignation des objets du discours lors de la construction de narratives symboliques et le sens des expressions symboliques ;

(2) celui des difficultés présentes quand des opérations doivent être menées sur des signes qui racontent une narrative symbolique.

En ce qui concerne le premier point, l'analyse de quelques extraits d'une activité de salle de classe suggère que la réussite des élèves dans la construction de la narrative symbolique dépend de leur possibilité de se déplacer à travers différentes couches de contenu noématique. Nous avons vu, en effet, l'interaction entre les différents sens et la dynamique requise pour enrichir, déplacer et abandonner ces sens. Nous avons également vu comment ceci se fait par des processus de nominalisation où interviennent plusieurs mécanismes sémiotiques, en particulier celui basé sur des déictiques. La nominalisation, en tant que procédure linguistique, permet une objectivation d'objets qui existaient jusqu'alors à l'état potentiel seulement. Elle extrait de l'horizon amorphe sur lequel se meut le discours des

---

[10] Les intérêts de Cordier sont, en effet, plutôt liés aux types d'intervention pédagogique qui pourraient permettre d'éviter certaines erreurs de symbolisation chez les élèves et à aider les élèves à sélectionner les informations contenues dans l'énoncé du problème. Le travail de Damm (1991) se situe dans cette même perspective.

objets qui, de ce fait, deviennent prédicables. Elle assure qu'un « quelque chose » devienne accessible à l'activité intellectuelle des élèves et que ce « quelque chose » soit converti en sujet ou en objet d'un verbe.

En ce qui concerne le deuxième point, en comparant des procédures arithmétiques et algébriques, Vergnaud (1989, p. 37) avait insisté, il y a plusieurs années, sur le changement de sens que les élèves doivent effectuer : « le contrôle du sens des opérations faites ne se fait plus avec les même moyens », disait-il, en se référant aux opérations formelles de l'algèbre. Mais malgré avoir vivement insisté sur le rôle fonctionnel de la représentation et sur le rôle du langage[11] –rôle qu'il a souligné même dans l'apprentissage de l'algèbre (Vergnaud, 1988)–, Vergnaud ne s'est pas arrêté à étudier la genèse du sens et de sa transformation dans l'*action* à travers le *langage*. En étudiant la microgènese du sens et de sa transformation, dévoilées à travers le langage des élèves, nos observations de salle de classe se placent dans l'interaction de plusieurs systèmes sémiotiques (ou « registres ») – dont la parole et l'écriture dans cet article-ci– et nous laissent voir certaines difficultés qui se présentent dès qu'un calcul formel doit être effectué sur des expressions symboliques élaborées préalablement sous forme de narrative symbolique.

Pour que le calcul formel ait lieu, la narrative symbolique doit collapser. Et cela exige que le sens de l'expression symbolique soit transformé. Une deuxième constitution du sens doit être mise en place. La constitution du sens après le collapse mérite encore plus de recherche. Alors que Russell (1976, p. 218) considérait la manipulation formelle de signes comme descriptions vides de la réalité, Husserl soulignait le fait que de telles manipulations de signes requièrent un glissement d'attention, un changement noématique. Sans prétendre réduire la nouvelle attention au signe *qua* signe, Husserl soutenait que le centre d'attention doit se placer sur le signe lui-même. Il disait que la manipulation abstraite de signes est possible grâce à des nouvelles significations résultant de règles qui fonctionnent à la manière des règles d'un jeu (Husserl 1961, p. 79), ce qui l'a amené à parler de signes qui ont une *signification de jeu*. Il me semble que la richesse de la métaphore de Husserl réside dans la manière de nous rappeler le rôle culturel et conventionnel des règles. Mais puisque l'arbitraire et le conventionnel sont deux choses différentes, la faiblesse de la métaphore est qu'elle ne nous aide pas à voir la justification derrière la nature du conventionnel.

[11] C'est-à-dire le langage *parlé* (Vergnaud, 1985, p. 246).

Remarque

Une version abrégée de cet article, dédiée à Raymond Duval, a paru dans : Anne D. Cockburn and Elena Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26,* Vol. 4, pp. 81-88. University of East Anglia, UK.

Luis RADFORD, Ecole des sciences de l'éducation, Université Laurentienne,
935, chemin du lac Ramsey,
Sudbury, Ontario, P3E 2C6, CANADA

e-mail : lradford@laurentienne.ca

BIBLIOGRAPHIE

BEDNARZ N. et JANVIER B., The emergence and development of algebra in a problem solving context. *Proceedings of the 18th Conference of the International group for the psychology of Mathematics Education* (PME 18), Portugal, **2**, 64-71, 1994.

CARRAHER D,. SCHLIEMANN A.& BRIZUELA B., Can young students operate on unknowns ? In: M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utretch University, The Netherlands, Vol. **1**, 130-140, 2001.

CORDIER, N. Les problèmes de mise en équation, en 3ème et en 2nd. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. **5**, 149-176, 1993.

DAMM, W. Compréhension d'un énoncé de problème : le choix de la donnée de téférence. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. **4**, 197-225, 1991.

DUVAL R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, Vol. **5**, 37-65, 1993.

DUVAL R. L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Actes du séminaire Franco-italien sur l'enseignement de l'Algèbre, IREM de Nice,* sous presse.

FREGE G., The whole number. *Mind*, **79** (316), 481-486 (Traduction de l'article: Le nombre entier, publié dans: Revue de métaphysique et de Morale, vol. 3 (1895), 73-78), 1895/1970.

FREGE G., *Translations from Philosophical Writings of Gottlob Frege*, by Peter Geach and Max Black. Oxford: Basil Blackwell, 1960.

FREGE G., *Écrits logiques et philosophiques*, Paris: Éditions du Seuil, 1971.

FILLOY E. et ROJANO T., From an Arithmetical to an Algebraic Thought (A clinical study with 12-13 years old.) *Proceedings of the Sixth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Madison, Wisconsin, 51-56, 1984.

FILLOY E. et ROJANO T., Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, Vol 9, No. 2, 19-25, 1989.

HJELMSLEV L., *Prolegomena to a Theory of Language*. Wisconsin: The University of Wisconsin Press, 1969.

HUSSERL E., *Ideas*. London: The Macmillan Company, 1931.

HUSSERL E., *Recherches Logiques* (Recherches I et II.) Paris: PUF, 1961.

LEONTIEV A. N., *Activité, conscience, personnalité*, Moscou: Éditions du Progrès, 1984.

NEMIROVSKY R., On ways of symbolizing: The case of Laura and the Velocity sign, *Journal of Mathematical Behavior*, **13**, 389-422, 1994.

NICHANIAN M., *La question générale du fondement: Écriture et temporalité*. Thèse de Doctorat de troisième cycle de Philosophie, Université des Lettres et Sciences humaines de Strasbourg, 1979.

RADFORD L., L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre, *Repères* (Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques), juillet, No. 28, 81-96, 1997.

RADFORD L., *On Culture and Mind, a post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought*, paper presented at the 23rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America, Victoria College, University of Toronto, October 15-18, 1998. Consultable sur le site: http://www.laurentian.ca/educ/lradford/, 1998.

RADFORD L.,. Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, **42** (3), 237-268, 2000a.

RADFORD L.,. Students' processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks, in: T. Nakahara and M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education* (PME-24), Hiroshima University, Japan, **4**, 81-88. Consultable sur le site: http://www.laurentian.ca/educ/lradford/, 2000b.

RADFORD L.b. The Historical Origins of Algebraic Thinking. In Sutherland, R. *et al*. (Eds.), *Perspectives in School Algebra*, 13-36. Kluwer, 2001.

RADFORD L., *Des limites épistémologiques du langage. Savoir mathématique et pratique sociale à la Renaissance*. Pre-prints 1/2002, École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne, 2002a.

RADFORD L., Algebra as tekhnē. Artefacts, Symbols and Equations in the Classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **1**(1), 31-56, 2002b.

RADFORD L., *The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge*. Pre-prints 2/2002, École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne, 2002c.

RADFORD, L. On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. Dans M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger et V. V. Cifarelli (éds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing, 2003a.

RADFORD L., Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning,* **5**(1), 37-70, 2003b.

RADFORD, L. On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics.* (accepté).

RUSSELL B., *An Inquiry into Meaning and Truth*. London: G. Allen and Unwin, 1976.

VERGNAUD, G. Concepts et schèmes dans la théorie opératoire de la représentation. *Psychologie française*, **30**(3-4), 245-252, 1985.

VERGNAUD, G. Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. Dans C. Laborde (éd.), *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 189-199). Paris : Éditions de la pensée sauvage, 1988.

VERGNAUD, G. Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. Dans N. Bednarz et C. Garnier (éds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (pp. 33-40). Ottawa : Agence d'ARC, 1989.

YVES GIRMENS, MYRÈNE LARGUIER, SYLVIE PELLEQUER

L'APPRENTISSAGE DE LA DÉMONSTRATION AU COLLÈGE, DES TÂCHES NOUVELLES EN RÉFÉRENCE AUX TRAVAUX DE RAYMOND DUVAL

Abstract. To begin with, from our observation of the difficulties experienced by students learning mathematical proofs, and using the works of Raymond Duval, we have studied the written proofs produced by students of junior high school in order to analyse their validity. Secondly, we have attempted to identify what is at stake in the learning of deductive reasoning and to elaborate teaching proposals adapted to this.

Résumé. Dans un premier temps, en partant du constat des difficultés des élèves dans l'apprentissage de la démonstration et en prenant appui sur les travaux de Raymond Duval, nous avons étudié des écrits de démonstration produits par des élèves de collège pour analyser leur validité. Dans un second temps, nous avons tenté d'identifier les enjeux de l'apprentissage du raisonnement déductif et d'élaborer des propositions d'enseignement adaptées à ces enjeux.

Mots clés : Raisonnement déductif, démonstration, pas déductif, théorème

---

1. Introduction

Nous considérons que la démonstration est un objet mathématique dont la forme finale s'exprime dans le registre de la langue naturelle avec des lois spécifiques de conversion et de traitement, qui la démarquent de l'argumentation. Nous nous sommes intéressés à des écrits de démonstration produits par des élèves pour analyser leur validité, élaborer des critères permettant de décider de cette validité et par-là même, en déduire des travaux appropriés pour l'apprentissage du raisonnement déductif au collège.

Ainsi, selon nous, analyser la validité d'un écrit d'un élève, en différenciant l'analyse du raisonnement déductif en lui-même, de sa complétude et enfin, la qualité linguistique de l'écrit, permet de mieux se positionner sur les exigences à définir et à construire dans l'enseignement de la démonstration.

Notre projet serait d'amener l'élève à une connaissance et à une compréhension des critères d'une démonstration valide afin qu'il prenne en charge et qu'il contrôle le raisonnement à l'aide de son propre travail d'écriture.

2. Analyse de productions d'élèves

Un écrit peut être analysé à deux niveaux :

- Une évaluation objective et rigoureuse de sa validité mathématique en relation avec les seules indications données par l'écrit.

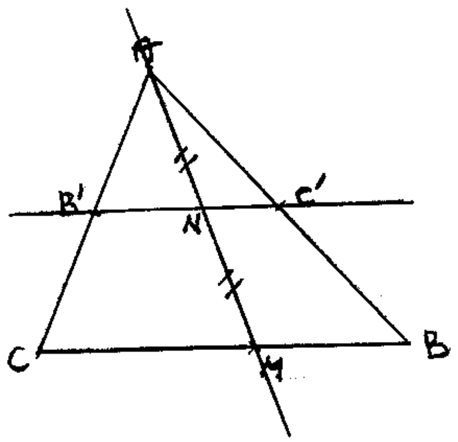
Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 209 – 232.

- Une analyse plus subjective sur la conception actuelle et personnelle de l'élève qui a produit la démonstration et sur son niveau d'apprentissage de la démonstration. Nous ne pouvons qu'élaborer des hypothèses vraisemblables pour rendre compte de ces conceptions. Dans la réalité, pour pouvoir formuler des hypothèses les plus réalistes possibles, il serait nécessaire d'analyser plusieurs productions d'un même élève, à différents moments de l'année, pour vérifier la stabilité de ses conceptions.

Nous avons donné l'exercice suivant en début de troisième. Il n'a pas été noté et il a été réalisé en temps non limité :
« ABC est un triangle. Les points B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB]. M est un point quelconque du côté [BC]. La droite (AM) coupe la droite (B'C') au point N. Démontre que N est le milieu du segment [AM].»

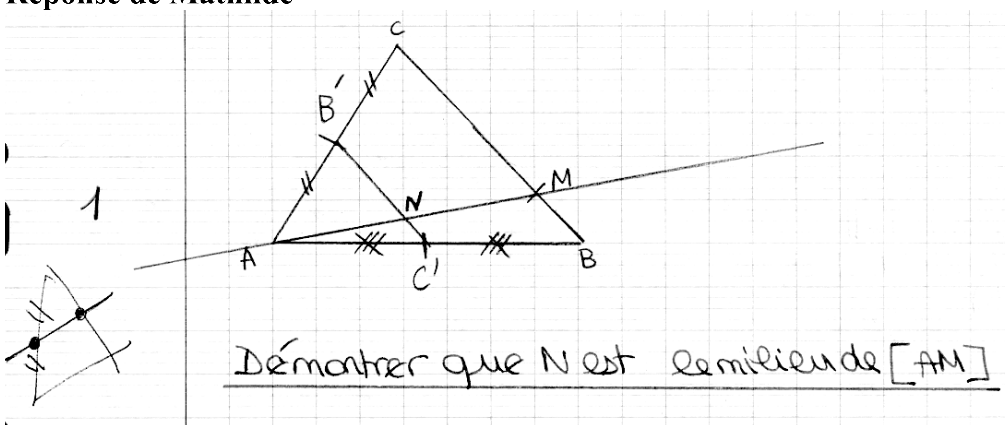
Les réponses des élèves Antoine et Mathilde ont été reproduites en respectant la forme donnée par les élèves concernant l'orthographe, les notations et la mise en page.

Réponse d'Antoine



Dans le triangle ABC, B' coupe [AC] en son milieu et C' coupe [AB] en son milieu donc les droites (B'C') et (CB) sont parallèles. Puisque M est un point de la droite (CB) et N est un point de la droite (B'C') et A est un sommet du triangle, alors les droites (AN) et (NM) sont égaux, donc N est le milieu de [AM].

Réponse de Mathilde



D'après le théorème de la droite et des milieux, vu en 4eme, si dans un triangle ABC une droite passant par le milieu de deux côtés est considérée, elle est alors parallèle à la 3eme droite donc ici :
B' est le milieu de AC
C' est le milieu de AB
alors (B'C')//(CB)
D'après la réciproque de la droite et des milieux, deux droites parallèles (NC') et (BM) (on le voit au-dessus) et une de ces droites parallèles passant par le milieu d'un côté alors la première droite passe par le milieu de la 3eme. N est le milieu de (AM).

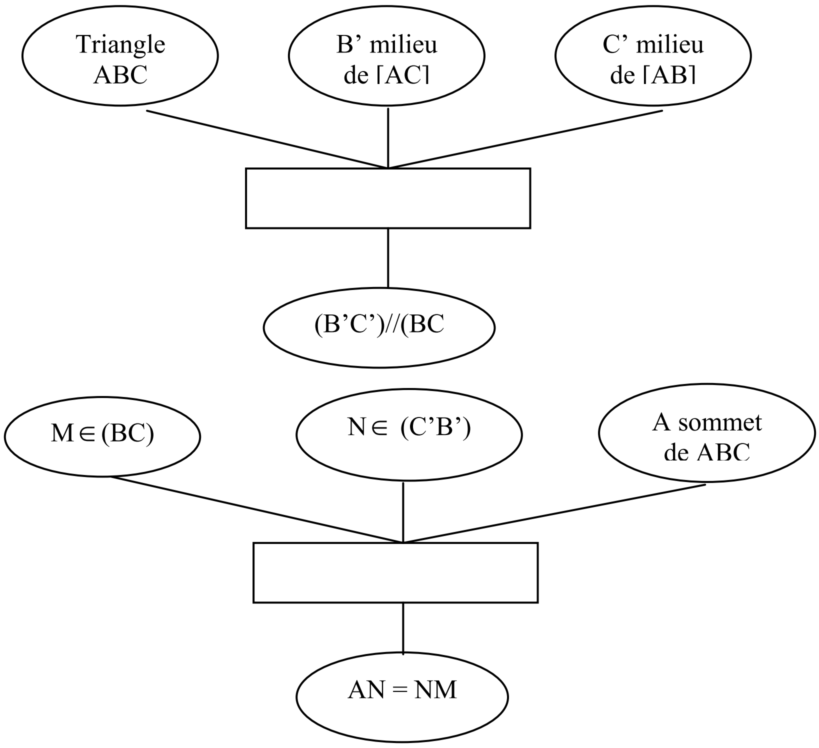
On peut considérer ces deux écrits selon deux points de vue différents et selon deux tâches distinctes :

1) Evaluer chacun de ces deux écrits de démonstration pour répondre à la question :
« Est-ce que cet écrit est celui d'une démonstration valide ou non ? »
2) Analyser chacun de ces deux écrits pour répondre à la question : « Quelles hypothèses pourrait-on faire sur la conception de l'élève concernant la démonstration ? »

Pour l'évaluation de ces deux écrits, il est intéressant d'utiliser un schéma de démonstration pour repérer les éléments de chacun des pas et leur enchaînement. L'évaluation qui va être proposée se veut rigoureuse car elle a pour objectif de mettre en évidence des critères explicites de réalisation pour l'enseignant, comme

pour l'élève. Cependant, le problème de l'évidence est un problème important en mathématiques, et tous les éléments d'un pas de démonstration ne devront pas, et ne pourront pas, être toujours explicitement présents. En conséquence, dans l'hypothèse d'une évaluation, on tiendra compte du niveau de la classe dans laquelle se situe l'enseignement, et du degré de familiarité des élèves avec les théorèmes utilisés.
Par exemple, notre choix d'enseignement au collège, est qu'un théorème qui vient d'être appris doit être cité de manière décontextualisée.

Analyse de la réponse d'Antoine



Il semble intéressant de juxtaposer les deux pas : le premier qui peut apparaître valide mais incomplet (il manque l'énoncé tiers qui est le théorème décontextualisé), le deuxième qui est invalide.

Le premier pas peut laisser penser que l'élève a utilisé un théorème sous sa forme contextualisée, et que la validité du pas est ainsi assurée.

Le deuxième pas semble s'appuyer sur l'évidence du dessin, et comme dans le premier pas, il n'y a pas de théorème décontextualisé. Nous pouvons alors nous demander si le statut des deux écrits n'est pas le même aux yeux de l'élève : à savoir un discours uniquement lié à la vision du dessin et qui serait un commentaire dicté par des indices de perception visuelle. Cet élève pourrait avoir uniquement une appréhension perceptive du dessin.

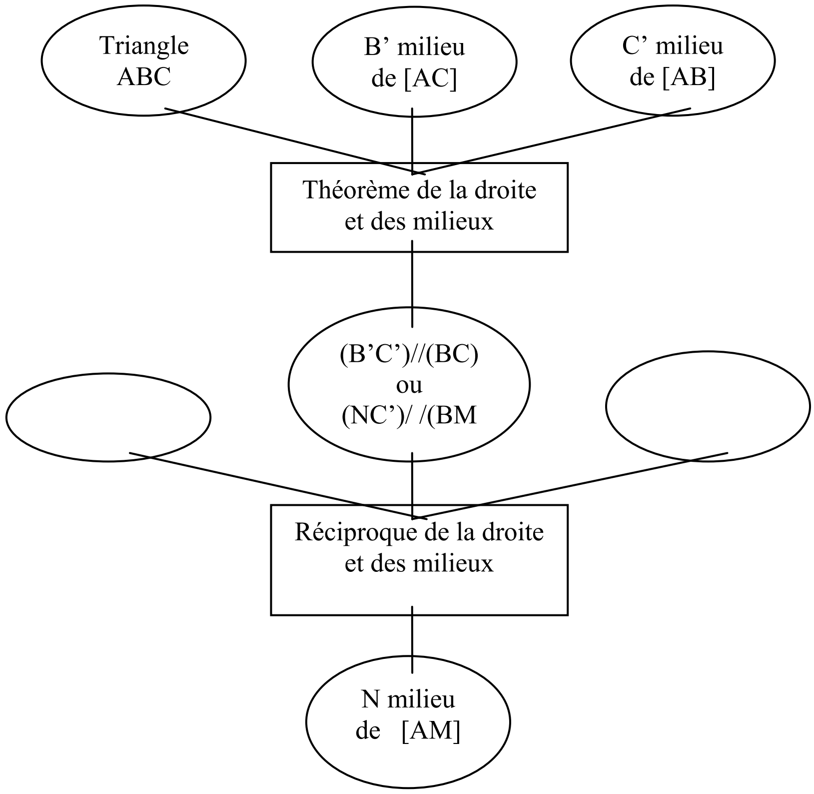
L'écrit objectif ne permet pas de décider que cet élève a compris le fonctionnement d'un pas déductif car, en l'absence du théorème décontextualisé qui est l'énoncé tiers du pas déductif, nous pouvons avoir un doute pour dire si cet élève a construit une conception adéquate de la démonstration et un rapport adéquat à l'objet théorème.

Nous pouvons constater que les deux pas de démonstration sont indépendants et que la conclusion du premier pas n'est pas du tout utilisée dans le deuxième. Le schéma révèle bien l'absence de recyclage de la première conclusion en tant que prémisse pour le deuxième pas.

Il est intéressant de remarquer l'aisance de l'élève dans le maniement de la langue naturelle, le texte est clair et l'utilisation des connecteurs est correcte au niveau de la syntaxe en français (deux fois donc, une fois puisque et une fois alors). Ce maniement correct du langage dans le contexte du français n'est pas une condition suffisante pour que l'élève comprenne les règles de la démonstration. Nous remarquons également que cet élève utilise le codage pour indiquer la conclusion, et qu'il ne code aucune donnée. Nous n'avons pas d'informations sur l'enseignement reçu par cet élève sur le codage des dessins, mais nous soulignons l'intérêt que pourrait représenter un usage pertinent du codage. En particulier, nous pensons que le codage des dessins peut devenir un outil au service de la phase heuristique et de l'appréhension discursive des figures.

Le maniement du vocabulaire mathématique ainsi que des notations est satisfaisant, sauf dans le cas des « droites égales », alors qu'il s'agit de « longueurs égales ». Mais le critère relatif à la justesse du langage mathématique apparaît ici secondaire par rapport à l'étude de la validité de la démonstration.

Analyse de la réponse de Mathilde



La démonstration produite par cette élève est globalement valide, mais elle est incomplète et certaines formulations sont incorrectes.

Nous pouvons observer des expressions qui marquent le statut des éléments du raisonnement.

En effet, elle situe les théorèmes utilisés comme faisant partie du cours de 4ème, elle précise ainsi la nature officielle de ces énoncés. C'est la théorie qui l'autorise à utiliser des énoncés institutionnalisés, et c'est bien là une règle du jeu spécifique de la démonstration. Ces énoncés sont d'ailleurs référencés à l'aide de dénominations particulières : « le théorème de la droite et des milieux » et « la réciproque de la droite et des milieux ». La conjonction « et » n'est pas usuellement employée par les enseignants. Cette élève a vraisemblablement ajouté cette conjonction pour mieux rendre compte de la configuration qui comprend les deux milieux ainsi que la droite qui passe par eux.

D'autre part, elle passe du théorème décontextualisé à sa contextualisation en précisant « ici » ce qui met en évidence qu'elle a conscience de ce passage.

Pour le deuxième pas, elle montre qu'elle utilise la conclusion précédente en tant que prémisse par l'expression : « on le voit au-dessus » et là encore, une règle du jeu de la démonstration qui consiste à recycler une conclusion en prémisse pour un pas suivant semble maîtrisée. Dans ce passage, les dénominations des deux droites parallèles changent, ce qui laisse penser que l'élève a une appréhension opératoire du dessin et qu'elle s'autorise à changer de triangle et à ne considérer qu'une partie de la figure. En effet, dans le premier pas, elle utilise les droites (B'C') et (BC) du triangle ABC, qui deviennent les droites (NC') et (BM) du triangle ABM.

Le codage est utilisé comme un moyen pour visualiser les données, ce qui peut alors être un outil pertinent pour développer une appréhension discursive des figures.

Nous pouvons remarquer l'usage d'un dessin à main levée et faire des hypothèses sur le rôle joué par ce dessin. Est-ce un moyen pour mémoriser un théorème ? Est-ce la conversion dans le registre graphique du théorème dans le registre du langage naturel ? Est-ce le prélèvement de certaines données du problème qui permettent de déclencher l'évocation d'un théorème mémorisé ?

Quelques corrections sont à apporter cependant à cette rédaction : une prémisse du premier pas est insérée dans l'énoncé du théorème (le triangle ABC), et dans le deuxième pas, il manque deux prémisses, à savoir le triangle ABM, le milieu C' de [AB], et l'identification par leurs noms des droites utilisées (au lieu de dire la $1^{ère}$, la $2^{ème}$, la $3^{ème}$ ce qui rend la rédaction très confuse).

Ce texte est intéressant car il montre un exemple d'élève qui écrit avec maladresse si on s'en tient à l'évaluation de son travail du point de vue du français ; mais du point de vue de la validité de la structure logique du raisonnement, ce texte a des qualités certaines.

Le texte produit par Mathilde est un exemple significatif de rédaction personnelle qui est cependant l'expression d'une démonstration valide.

Pour une démonstration donnée, il faut souligner la diversité des rédactions du point de vue des règles de la langue française. La validité de la démonstration est assurée par la structure du raisonnement qui est organisé en un enchaînement de pas déductifs rigoureux du point de vue de la logique mathématique. L'objectif essentiel à atteindre avec les élèves, est de leur donner les moyens d'élaborer et de reconnaître une démonstration valide, la mise en forme du point de vue de la rédaction autorise alors tous les degrés de liberté offerts par les possibilités syntaxiques de la langue naturelle.

R. Duval et M.A. Egret soulignent le rôle joué par les schémas de démonstration, qui permettent l'élaboration de la démonstration dans le registre graphique et dont la structure est conforme à la logique mathématique, avant la tâche d'écriture dans le registre du langage naturel dont la structure est conforme aux règles de syntaxe du français.

3. Première synthèse

Les deux exemples précédents nous amènent à nous poser des questions pour l'enseignement de la démonstration.

- Comment permettre à l'élève de construire un rapport adéquat au dessin ?
- Comment construire la différenciation dessin-figure ?
- Quelles règles mettre en place pour le codage des dessins ?
- Comment permettre à l'élève de construire un apprentissage du théorème en tant qu'objet et en tant qu'outil ?
- Quelles tâches proposer aux élèves pour construire les règles du jeu de la démonstration ?
- Quelles exigences l'enseignant doit-il définir pour lever ses propres doutes quand il veut évaluer la validité d'une démonstration ?
- Quels sont les éléments d'une démonstration qui doivent être nécessairement explicités dans l'écrit pour offrir la garantie que la démonstration est valide au plan mathématique du côté de l'élève ?
    - Remarque à propos des deux questions précédentes : la réponse à la première question semble dépendre de la personnalité de l'enseignant, en fait, les réponses à ces deux questions placent le problème du côté du savoir, ce qui est une position beaucoup plus juste pour permettre la construction d'un rapport adéquat de l'élève aux mathématiques.

4. Nos positions sur l'apprentissage de la démonstration

4.1. Le dessin - la figure

L'enseignement doit permettre à l'élève de modifier son rapport au dessin, et de construire le concept de figure, comme cela est exprimé dans les documents d'accompagnement du programme de sixième dans la phrase suivante : « Entre une géométrie d'observation et une géométrie de déduction, il est nécessaire de développer des apprentissages qui initient les élèves à la démonstration ».

Nous proposons dans notre enseignement des tâches qui permettent aux élèves de développer des compétences au sujet des différentes appréhensions des dessins. Nous faisons l'hypothèse que ces compétences éviteraient certains échecs. Par exemple, dans l'exercice cité auparavant, l'étude d'un nombre significatif de productions d'élèves, révèle que de nombreux élèves ne se sont pas autorisés à utiliser un autre triangle que le triangle ABC. C'est le seul triangle qui est cité dans l'énoncé, et de plus, c'est le contour extérieur du dessin qui peut être le signe prépondérant dans une appréhension perceptive. Ces élèves suivraient alors un critère implicite de congruence entre l'énoncé et leur réponse.

Le codage est un outil dont l'utilisation est souvent laissée à l'initiative des élèves, ce qui nous amène à proposer un enseignement explicite du codage des dessins avec en particulier la règle suivante « le dessin est codé avec toutes les données et elles seules ».

A travers cela, nous visons l'objectif de développer chez l'élève une appréhension discursive de la figure.

4.2. Le pas déductif

Par ailleurs, dans la phase d'apprentissage de la démonstration, nous proposons les critères suivants pour évaluer la validité d'un écrit de démonstration :

- chaque pas comprend explicitement les trois éléments : prémisses, énoncé tiers et conclusion,
- l'enchaînement des pas est explicité.

Le fait de demander l'explicitation de l'énoncé tiers du pas déductif, nous a amené à nous poser des questions sur les formes choisies pour institutionnaliser les théorèmes. Conformément au programme, la forme « si…alors » est la forme qui est la plus opérationnelle et qui exprime le mieux les statuts respectifs de données et de conclusion des deux propositions qui constituent le théorème. Par ailleurs, pour aider l'élève à différencier un théorème dans sa forme de loi universelle, de sa contextualisation dans un problème donné, la forme choisie pour l'institutionnalisation sera indépendante de toute dénomination. Au collège, il est possible d'énoncer tous les théorèmes de cette façon là, exception faite de la réciproque du théorème de Thalès. De même, nous respecterons les programmes du collège en ne citant que quatre théorèmes par des dénominations, à savoir les théorèmes de Thalès et de Pythagore et leurs réciproques. Le théorème dit « des milieux » n'est pas une dénomination officielle, et nous avons fait le choix de ne pas l'employer. De plus, nous avons constaté que selon les livres, cette dénomination repère des théorèmes différents.

4.3. Le sens du théorème

Il y a trois aspects importants.

Le premier consiste à permettre à l'élève de construire la rationalité mathématique de manière à s'approprier les caractères d'universalité et de nécessité du théorème.

Le deuxième consiste à placer l'élève en situation de construction d'un théorème en tant qu'objet selon une démarche scientifique que l'on peut décrire ainsi : expérimentation, conjecture et validation. La validation peut se réaliser soit en faisant une démonstration soit en explicitant clairement l'acceptation définitive de ce théorème. L'aboutissement de cette démarche est la formulation du théorème qui doit être opérationnelle. La phase de formulation du théorème par les élèves est un moment important de leur apprentissage.

Le troisième consiste à proposer des situations aux élèves pour faire comprendre comment le théorème fonctionne en tant qu'outil, et pour le rendre opérationnel dans des problèmes.

4.4. La validité de la démonstration

En premier lieu, la démonstration est analysée pour décider de sa validité ou de sa non-validité mathématique.

Dans le cas d'une démonstration valide, chaque pas est analysé pour décider s'il est ou non complet, et ensuite s'il est correct ou pas du point de vue des règles du registre de la langue naturelle, et du point de vue des règles du registre du langage mathématique.

Ces critères répondent aux exigences du savoir mathématique, et ils permettent une évaluation par le professeur et un contrôle de la part des élèves.

Il faut garder à l'esprit que le niveau d'exigence d'un écrit de démonstration est fonction des connaissances de la communauté scientifique qui doit le valider et par conséquent, il y a une évolution des exigences en fonction du niveau atteint par les élèves dans leur apprentissage de la démonstration. Par exemple, ce n'est pas la même démonstration qui est attendue d'un élève de quatrième et d'un élève de terminale concernant l'utilisation du théorème de Pythagore. En terminale, le théorème ne sera pas cité, seules les prémisses et la conclusion seront attendues. Nous prenons le parti de ne pas laisser dans l'implicite cette évolution des exigences et nous avons décidé de dire clairement aux élèves que nous attendrons une démonstration complète pendant au moins l'année de la découverte du théorème en classe.

Nous pensons qu'il serait d'ailleurs utile que les documents d'accompagnement des programmes évoquent de manière plus explicite ce caractère évolutif de la forme d'un écrit attendu d'une démonstration.

En particulier, la présence explicite des trois éléments de la démonstration pour faciliter la différenciation avec l'argumentation qui est un processus de raisonnement binaire et non ternaire, pourrait être préconisée dans les textes officiels.

5. Propositions d'activités de classe

5.1. Principes

Nous avons essayé de construire des activités de classe en prenant en compte les travaux de R. Duval sur le pas déductif. Ces travaux nous ont permis d'une part d'identifier les moyens de développer un discours démonstratif chez les élèves et d'autre part de comprendre la nécessité de permettre aux élèves de construire un écrit personnel dans lequel les statuts des propositions sont identifiables.

Les élèves ont des difficultés à saisir le sens d'une démonstration et en particulier à comprendre comment se servir d'un théorème pour faire une déduction.

Dans la plupart des travaux proposés aux élèves en début d'apprentissage de la démonstration, il est en général demandé aux élèves de démontrer ou de prouver un résultat et cela, avant même qu'ils aient compris ce qu'est une démonstration, ce qu'est un théorème et comment s'en servir.

Nous considérons comme une priorité d'apprentissage la compréhension d'un théorème dans son statut opératoire, ce qui nous a amené à concevoir des travaux visant à faire saisir l'articulation des propositions dans la mise en œuvre d'un pas déductif.

Il nous est apparu nécessaire de centrer le travail des élèves sur la mise en place du pas déductif, qui est l'unité de discours opératoire d'une démonstration, avant de leur demander l'écriture complète d'une démonstration.

Toutefois, nous avons choisi de ne pas morceler les difficultés et de conserver une certaine complexité dans les situations proposées.

Les cinq situations qui sont présentées ci-dessous, montrent des types de tâches que nous avons ainsi identifiés comme étant pertinents.

5.2. Situation du parallélogramme

5.2.1 Enoncé

ABCD est un parallélogramme ; O est le point d'intersection des diagonales ; K est le milieu de [CD].

1. *Faire une figure.*
2. *Citer au moins 6 triangles de cette figure.*
3. *Voici un théorème : « Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au troisième côté. »*

- *Parmi les triangles cités au 2, indiquer un triangle pour lequel ce théorème peut s'utiliser. Expliquer pourquoi tu peux utiliser ce théorème et dire ce qu'il permet d'affirmer.*
- *Parmi les triangles cités au 2, indiquer un triangle pour lequel tu ne peux pas utiliser ce théorème. Expliquer pourquoi tu ne peux pas utiliser ce théorème dans le triangle que tu as choisi.*

5.2.2 Commentaires

La deuxième question oblige les élèves à dépasser une appréhension perceptive du dessin qui peut être vu comme étant l'assemblage de quatre triangles (AOB, OBC, OCD, AOD). L'identification de six triangles exige une appréhension opératoire du dessin.

C'est une compétence nécessaire au service de la démonstration. Elle peut, et pour nous elle doit, être développée chez les élèves dès la classe de $6^{ème}$.

Dans ce travail, contrairement à des exercices classiques où la question posée est : « Démontrer que… », la tâche consiste à étudier si les conditions d'application d'un théorème sont présentes dans une situation géométrique dont les données sont définies par un texte.

Cette recherche amène l'élève, d'une part, à s'interroger sur ce qu'il doit considérer comme connu à partir des données, d'autre part, à identifier les prémisses du théorème et enfin, à examiner si ces prémisses correspondent bien à des données présentes dans le texte.

Cela lui permet aussi d'identifier le domaine de validité de l'application d'un théorème en repérant des unités de figure présentant des données pour lesquelles le théorème ne s'applique pas.

En effet, le fait que si une prémisse manque, le théorème ne peut pas s'appliquer, est une idée à construire pour les élèves et ne doit pas rester implicite, car pour eux, la présence de toutes les prémisses n'est pas une nécessité absolue.

Cette tâche conduit l'élève à mener l'opération de vérification, étape pour élaborer un pas déductif.

Dans le cas où l'application du théorème est possible, il est demandé à l'élève d'extraire la conclusion qu'elle fournit, c'est à dire de mener l'action de détachement de la conclusion dans le pas déductif.

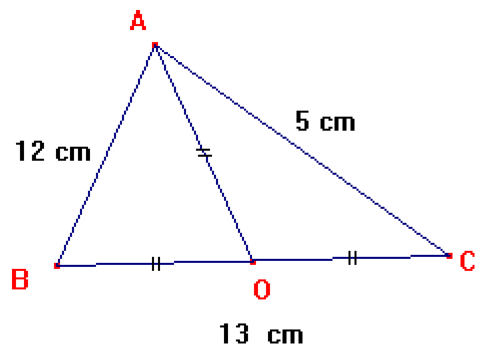
Le travail de l'élève est ainsi centré sur l'appréhension d'un théorème du point de vue des opérations qu'il permet de mener pour construire un pas déductif.

En même temps, l'élève est amené, de façon indirecte, à produire, en la décomposant en deux phases, une unité de discours explicitant un pas déductif.

5.3. Situation triangle rectangle

5.3.1. Enoncé

Voici une figure



Voici une liste de théorèmes :

Théorème 1 : Si un triangle est rectangle alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Théorème 2 : Si, dans un triangle, le carré du côté le plus long est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle et le plus grand côté est l'hypoténuse.

Théorème 3 : Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse.

Théorème 4 : Si on joint les extrémités d'un diamètre d'un cercle à un point de ce cercle alors le triangle est rectangle en ce point.

Théorème 5 : Si, dans un triangle, la médiane relative à un côté est égale à la moitié de ce côté alors le triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce côté.

En utilisant les informations de la figure, choisis un théorème que tu peux utiliser et justifie ton choix.

Dis ce que ce théorème te permet d'obtenir comme nouvelle propriété de la figure.

5.3.2. Commentaires

Cette situation, par le fait qu'elle demande de choisir un théorème dans une liste, nécessite d'analyser les formulations de chacun des théorèmes d'une manière opératoire. Les élèves doivent déterminer a priori, en dehors de tout contexte d'application, les conditions d'application de chacun des théorèmes, puis détacher une conclusion quand l'application est possible, en la formulant dans le contexte de la situation.

Ici, les données de la situation géométrique sont à prélever sur une figure codée.

Nous avons fait le choix de :

- Donner des informations surabondantes, ainsi les élèves prennent conscience que ce ne sont pas toutes les données prises en bloc, qui sont intéressantes mais seulement celles qui « déclenchent » le théorème.
- Faire en sorte qu'il soit possible d'utiliser deux des théorèmes cités. Cela permet de rompre avec le contrat habituel qui consiste très souvent à trouver une seule réponse~~.~~ Par ailleurs, cela donne aux élèves un exemple de figure pour laquelle il existe deux appréhensions discursives différentes.

Là encore, la tâche, lorsque l'application d'un théorème est possible, conduit les élèves à exprimer la conclusion du théorème dans le contexte de la situation et ainsi, les amène à construire un pas déductif en mettant l'accent sur le fait qu'une conclusion constitue une information nouvelle sur la situation géométrique. Les élèves rencontrent ainsi en acte, la différence à faire entre le contenu d'une proposition et son statut dans un pas déductif. Cette différenciation est fondamentale pour comprendre les règles du jeu de la démonstration.

Le processus cognitif en œuvre dans ce type de travail, consiste à prélever dans la figure représentée par le dessin codé, des éléments du registre graphique qui sont des signes permettant l'évocation des conditions d'application d'un théorème.

C'est en référence à ce processus que nous avons parlé de **figure déclenchante.**

5.4. Situation « dessin à main levée »

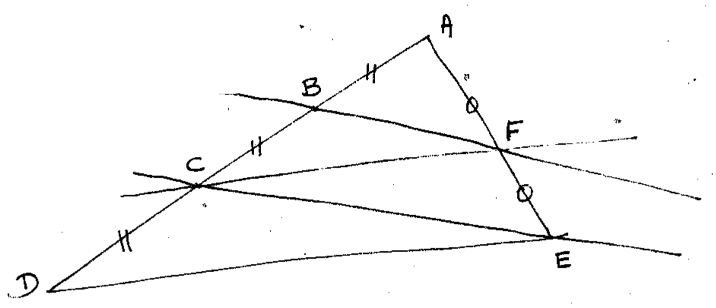
5.4.1. Enoncé

Voici un dessin à main levée, il est demandé de ne pas le refaire avec les instruments.

Jules et Camille ne sont pas d'accord :

- *Camille pense qu'on peut démontrer que les droites (CF) et (DE) sont parallèles*
- *- Jules pense qu'on peut démontrer que les droites (BF) et (CE) sont parallèles.*

Qui a raison ? Prouver votre réponse sous la forme d'un schéma de démonstration puis d'une rédaction.



5.4.2. Commentaires

Ce travail vise tout d'abord à tester chez les élèves, la robustesse de la connaissance des conditions d'application d'un théorème (« Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au troisième côté. ») dont l'apprentissage est bien avancé par la présence d'une figure codée très troublante, qui donne à voir des longueurs égales (signifiées par le codage) et des droites que l'on peut estimer parallèles par la vue.

Cela permet aux élèves de saisir que la mise en action de ce théorème exige la présence de deux conditions : « un triangle » et « les milieux de deux côtés ».

Pour trancher le débat mis en scène entre deux élèves fictifs, il est demandé aux élèves de produire une preuve sous la forme d'un schéma qui explicite le pas de déduction complet, en mettant en évidence le statut des trois éléments (données-énoncé tiers- conclusion). Dans ce travail, le schéma est demandé aux élèves pour qu'ils l'utilisent comme un moyen de recherche et de contrôle de leur réflexion.

Enfin, les élèves doivent traduire ce schéma en un texte, bâti sans injonction de forme : cela les amène à construire un discours opératoire, c'est à dire un discours qui, dans une forme personnelle, exprime une déduction.

5.5. Exercice autour du sens du théorème

5.5.1. Enoncé

Annette finit son exercice en disant :

" Donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme parce que AB = CD et BC = AD."

Voici deux théorèmes :

Théorème 1 : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur.

Théorème 2 : Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur alors c'est un parallélogramme.

Lequel de ces deux théorèmes Annette a-t-elle utilisés ? Explique ton choix.

5.5.2. Commentaires

L'exercice vise à faire associer une phrase qui constitue l'application d'un théorème dans un contexte particulier et le théorème correspondant énoncé dans sa forme générale.

Les élèves ont le choix entre deux théorèmes réciproques l'un de l'autre.

Tout d'abord, pour répondre à la question, l'élève doit faire le lien entre l'énoncé contextualisé et le théorème en repérant l'action de détachement de la conclusion dans le pas déductif.

De plus, l'élève se trouve dans une situation où il y a non congruence entre la réponse d'Annette et le théorème 2, ce qui va l'obliger à rechercher l'articulation des propositions du théorème indépendamment de la place qu'elles occupent. Nous cherchons à éviter que les élèves s'appuient sur le contenu des propositions ou sur des indices perceptifs, de façon à mobiliser vraiment leur compréhension du statut des propositions.

L'objectif de cet exercice est donc, pour l'enseignant, de repérer le niveau d'apprentissage dans la construction du sens d'un théorème et la capacité de savoir-faire la différence entre un théorème et sa réciproque. Pour l'élève l'objectif est de s'engager dans ce que R. Duval appelle le discours opératoire.

5.5.3. Réponses d'élèves

Les réponses d'élèves ont été reproduites intégralement avec leurs mots et leur orthographe.

E_1 « *Oui, c'est le même théorème car sa dit exactement la même chose et comme un para:llèlograme non croisés et un parallèlograme tous cours donc c'est le même théorème.* »

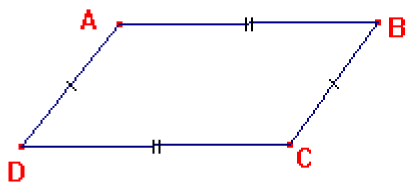
Cette réponse semble liée à la seule prise en compte du contenu des propositions, il n'y a aucune linéarité dans la lecture du théorème, ce qui amène à la confusion entre le théorème et sa réciproque.

Il semble ne pas y avoir de compréhension globale des énoncés des théorèmes c'est à dire de l'articulation du sens des propositions qui le constituent, mais une compréhension en fonction des éléments du discours. Nous pouvons repérer le souci de l'élève de comparer précisément tous les éléments présents dans les deux énoncés, ce qui peut expliquer qu'il justifie la différence entre parallélogramme croisé ou non.

E_2 : « *Théorème 2 car elle dit donc le quadrilatère est un parallelogramme ça veut dire quelle n'était pas sur que c'etait un parallelogramme.* »

Il y a reformulation de la phrase d'Annette et différenciation entre le statut de conclusion et celui de conjecture. Le mot « donc » semble, pour cet élève établir que ce qui est dit après est certain mais aussi faciliter la reconnaissance du théorème adéquat. Cet élève montre qu'il a compris l'aspect opérationnel du théorème, comme étant un outil qui fournit une information qui n'était pas assurée au départ. Il a également compris l'opération de détachement de la partie conclusion.

E_3 : « *Annette a utiliser le théorème 2 car elle affirme que ABCD est un parallélogramme si elle le savait alors elle aurait dit : donc les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux. L'énoncé de l'exercice devrai être : Démontrer que ABCD est un parallelogramme.* »

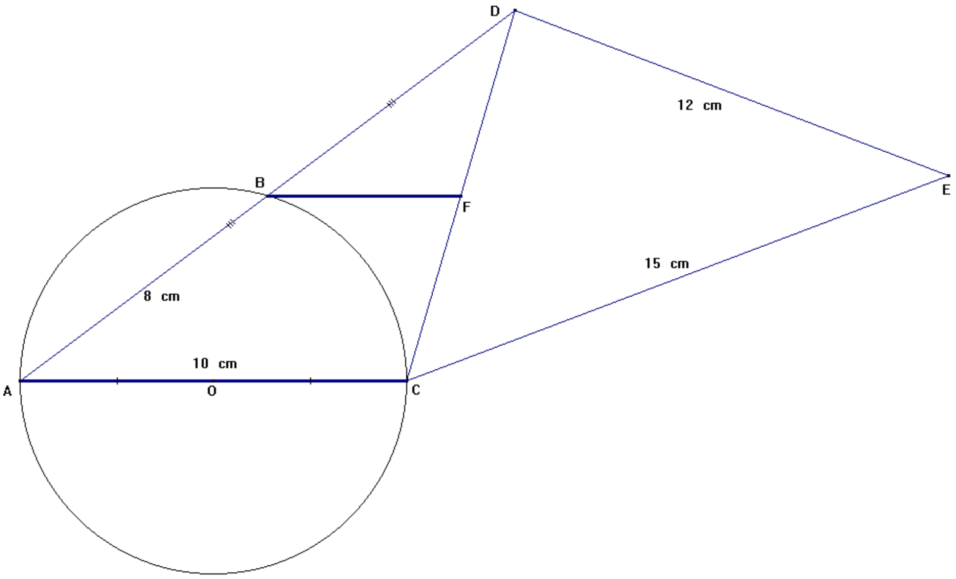


L'élève argumente sa réponse en se fondant sur le statut de la proposition « ABCD est un parallélogramme ». Pour écarter le théorème 1, il raisonne par l'absurde : si cette proposition avait eu une valeur de certitude, il indique que la conclusion aurait été que les côtés opposés sont égaux, ce qui correspondrait à la mise en œuvre du premier théorème. Il accomplit ainsi la tâche de vérification pour ce théorème et réalise l'opération de détachement de la conclusion qu'elle ne reconnaît pas dans ce que dit Annette. Pour cet élève, une phrase introduite par « donc » a clairement un statut de conclusion

Nous pouvons remarquer l'emploi pertinent des verbes qui marquent le statut de certitude : affirmer, savoir. Cet élève a montré qu'il connaît l'aspect opératoire du théorème en associant la réponse donnée à une question. Ainsi, pour lui, le théorème permet de savoir quelque chose qu'on ne savait pas avant. Il a eu besoin de faire une figure à main levée codée qui est porteuse de l'appréhension discursive. Nous pouvons faire l'hypothèse que ce dessin a facilité la différenciation entre données et conclusion.

5.6. Travail de synthèse : activité troisième

5.6.1. Enoncé



Consignes

Phase 1 : Travail individuel

Ecris toutes les informations que la figure te donne et dont tu es sûr ?

Phase 2 : Travail de groupe

A partir des données de cette figure, imagine une question que tu pourrais poser à un autre groupe.

Ecris à l'aide de quel(s) théorème(s) on peut y répondre.

Ecris les informations utiles de la figure pour cette question.

Cherche le plus de questions possibles.

Phase 3 : Travail de groupe

- Premier temps

Résoudre la question reçue et rédiger le plus soigneusement possible la solution choisie par le groupe. Cette solution sera retournée au groupe qui a posé la question pour correction.

- Deuxième temps

Elaborer les critères d'une bonne rédaction.

- Troisième temps

Construire un barème de 10 points en fonction de ces critères.
Corriger la copie qui correspond à la question posée par le groupe.

Phase 4 : Bilan classe entière

5.6.2. Commentaires

Cette activité a plusieurs objectifs concernant l'apprentissage du raisonnement déductif.

Pour le professeur, elle permet de repérer où en sont les élèves sur :

- le sens d'un théorème,
- l'opérationalisation d'un théorème,
- le pas déductif,
- l'enchaînement de pas déductifs,
- le statut du dessin codée.
-

Pour les élèves, elle les amène à :

- Comprendre comment on construit un raisonnement déductif,
- apprendre à utiliser un dessin codé
- apprendre à opérationaliser un théorème,
- rechercher des critères relatifs à une "bonne" démonstration,
- acquérir une exigence de rigueur dans le raisonnement et le vocabulaire,
- s'exercer à construire ce que R.Duval appelle le discours opératoire.

Les moyens pour y parvenir sont présents dans les différentes phases et dans le choix du dessin codé :

Le dessin codé : Il respecte les dimensions des différentes longueurs connues de façon à ce qu'il soit une aide pour la recherche des solutions. Il est codé pour qu'il soit une aide à différencier ce que l'on sait (qui est codé) de ce que l'on voit. De plus, pour que le codage joue vraiment son rôle d'aide à la démonstration, nous avons décidé de convenir d'un codage des droites parallèles (soit elles sont tracées d'une même couleur, soit elles sont tracées en traits gras) de façon à ce que le dessin soit porteur d'un maximum de données sures. Enfin, le dessin a été choisi suffisamment complexe : ainsi il permet de mobiliser tous les théorèmes de la classe de quatrième et ceux des classes antérieures mais il permet aussi de mesurer les différents niveaux d'appréhension d'une figure des élèves (certains groupe, n'ont pas réussi à "voir" autre chose que le cercle et le triangle ABC). Cette richesse du dessin favorise la gestion de l'hétérogénéité des élèves car il peut y avoir des questions très simples pour mettre en confiance des élèves en difficulté (par exemple, quelle est la longueur de OA ?) et des questions nettement plus complexes pour motiver la recherche de bons élèves (par exemple, démontrer que OBFC est un losange).

La phase 1 : On demande l'analyse d'un dessin codé de façon à différencier ce qui est sûr de ce qui relève de la conjecture. Le bilan des données sures est fait avant la phase deux.

La phase 2 : La demande de création d'une question conduit à faire émerger un problème à résoudre à partir du dessin codé. Les différentes questions posées lors de cette phase visent à faire rencontrer aux élèves les éléments d'un pas déductif, les amenant à utiliser en acte un ou plusieurs théorèmes déjà rencontrés dans les classes précédentes. L'enjeu de la dernière question est double, le groupe cherche à poser un problème suffisamment complexe et se préparer à répondre à celui de l'autre groupe. Cet enjeu est rendu possible par la richesse du dessin et par la quantité des théorèmes qu'ils ont à leur disposition avec le répertoire des classes antérieures.

La phase 3 : Il est demandé dans un premier temps, l'élaboration d'un écrit de démonstration qui dans un deuxième temps est utilisé, par une prise de distance, pour essayer d'élaborer des critères généraux concernant un "bon" écrit de démonstration. Il nous semble que la pertinence de ces critères est favorisée par le fait qu'ils viennent de rédiger une démonstration commune au groupe (les élèves ont déjà du se distancier de leur écrit personnel) mais aussi par le fait qu'ils ont comme objectif une correction commune au groupe de la question qu'ils ont posé à un autre groupe (deuxième distanciation, ils ne sont plus producteur d'un écrit mais correcteur d'un écrit). La deuxième partie consiste à mettre à l'épreuve la pertinence de ces critères en corrigeant la démonstration d'un autre groupe.

La phase 4 : C'est un bilan qui permet de mutualiser les différents critères trouvés par les groupes de façon à se mettre d'accord sur des critères communs à la classe, puis de les opérationnaliser en analysant certaines des démonstrations écrites par les groupes.

En conclusion, par l'intermédiaire de ce travail, on centre la tâche d'écriture d'une démonstration non sur la recherche d'une certaine conformité par l'emploi de certains connecteurs ou de certaines formes mais sur la production d'un discours qui se préoccupe du statut des propositions et du sens du théorème.

L'appropriation des critères d'une bonne démonstration par les élèves nous semble plus consistante quand elle résulte d'une réflexion qu'ils ont eux-mêmes menée à partir d'une démonstration qu'ils ont produite avec leur propre discours.

5.6.3. Réponses d'élèves

Voici quelques-unes des questions trouvées par différents groupes :

Calculer l'angle $\widehat{BCA}$
Calculer l'aire de ADC
Calculer l'aire de BFCO
Calculer la longueur de [DC]
Prouver que ABC est rectangle en B
Démontrer que (OF) est parallèle à (AB)
Prouver que ADC est un triangle isocèle
Démonter que BFCO est un losange
Est-ce que le triangle DCE est rectangle ?
Trouver le périmètre de DCE.

Voici les critères relatifs à une démonstration qui ont été produits par quelques groupes d'élèves, en début de classe de troisième. Les réponses ont été recopiées intégralement sans rien changer à la syntaxe ou à l'orthographe.

Groupe 1 :

Pour rédiger une réponse
Il faut :

- *Préciser de quelle figure on parle*
- *Préciser le théorème ou la règle utilisée*
- *Argumenter ce qui nous permet de conclure*
- *Développer les calculs*
- *Se servir des autres figures s'il y a besoin*
- *Toujours prouver ce qu'on affirme*
- *Ecrire au moins une fois la règle ou le théorème qu'on applique*
- *Faire les démonstrations dans un ordre logique*

Il ne faut pas :

- *Arriver au résultat sans rédiger*
- *Inventer une règle même si elle nous semble logique*
- *Faire de conclusion sans être sur de tous les points.*

Groupe 2 :

- *Au début il faut donner des éléments que l'on connaît, la phrase doit commencer par "on sait que"*
- *Ensuite il faut donner un théorème la phrase doit commencer par "Si"*
- *Pour finir, on conclut ce qu'on voulait chercher.*

connaissance → théorème → conclusion

Groupe 3 :

- *Il faut qu'elle soit claire brève et précise*
- *Donner les bonnes propriétés*

Groupe 4 :

- *Marquer les théorèmes de quelles droite ou triangle*
- *Avoir une conclusion*
- *Que ce soit lisible et clair*
- *Marquer les données*
- *Détail de calculs pas de faute d'orthographe pas écrire trop vite la réponse*

6. Conclusion

Le temps d'apprentissage et d'assimilation concernant le raisonnement déductif et la démonstration est très long ; si on se réfère aux programmes des différentes classes, il court et s'enrichit sur toutes les années de collège et de lycée. L'élève est tenu d'assimiler le raisonnement déductif mais aussi d'autres formes de raisonnements comme le raisonnement par l'absurde, par disjonction des cas, la démonstration par récurrence.

Les seules informations objectives dont on dispose sur la manière dont l'élève construit cette pensée sont les productions écrites qu'il fournit. Pour cette raison, il nous semble essentiel de leur redonner une place centrale.

Il peut être tentant pour un enseignant de collège ou de lycée de s'attacher à des critères de forme, ce qui conduit certains enseignants à présenter à l'élève, dans le but de l'aider des écrits souvent stéréotypés dont il doit reproduire la forme, en utilisant des connecteurs logiques bien marqués**.** Si, prenant en compte les travaux de R.Duval, on considère que le discours écrit est le moyen de construire effectivement le raisonnement, n'est-il pas nécessaire de donner aux élèves la responsabilité de ce travail d'écriture, en tant que processus opératoire ? Dans cette hypothèse, l'apprentissage ne doit-il pas être recentré non sur la forme, mais sur le fond, c'est à dire la conduite du raisonnement, par des travaux appropriés ?

Cependant, les propositions que nous avons faites ne constituent qu'un aspect d'un projet d'enseignement plus complet dont l'objectif est le développement de toutes les compétences nécessaires à la réussite des élèves dans le cadre de la géométrie

En effet, les élèves devront parallèlement faire évoluer leurs conceptions concernant les objets que sont le dessin et la figure et construire les règles du jeu de la rationalité mathématique, en la différenciant de la rationalité du quotidien.

YVES GIRMENS, MYRÈNE LARGUIER, SYLVIE PELLEQUER

IREM -Université Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier Cedex 05

e-mail : *irem@math.univ-montp2.fr*

BIBLIOGRAPHIE

Actes de la coopération I.R.E.M. DE MONTPELLIER – I.R.E.M.P.T. DE DAKAR, IREM de Montpellier, 2001.

ARSAC G., CHAPIRON G, COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y., MANTE M, "Initiation au raisonnement déductif au collège", IREM de Lyon, PUL.

ARSAC G., "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France", RDM n°9 (3), 1990.

BALACHEFF N., 1982, "Preuve et démonstration en mathématiques au collège", Recherches en Didactique des Mathématiques, n°3.3.

BARBIN E., DUVAL R., GIORGUTTI I., HOUDEBINE J., LABORDE C., "Produire et lire des textes de démonstration", Ellipses édition Marketing S.A 2001.

BRONNER A., PELLEQUER S.,"Une activité de géométrie, pour démarrer en classe de troisième." Petit X n° 40, 1995.

DUVAL R., "Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence", Annales de didactiques et de sciences cognitives, Vol.1, 1988.

DUVAL R.," Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée", Annales de didactiques et de sciences cognitives, Vol.5, 1993.

DUVAL R, EGRET M.A., "L'organisation déductive du discours", Annales de didactiques et de sciences cognitives Vol. 2, 1989.

DUVAL R., "Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repère n°17, 1994.

GIRMENS Y., PELLEQUER S., SÉCO M. "L'appropriation des théorèmes de géométrie plane et l'apprentissage de leur utilisation" actes du colloque international EM, Grenoble, 2000.

GROUPE DIDACTIQUE, "Le codage : Quand, Comment, Pourquoi ?", IREM de Montpellier, 1998.

LEGRAND M., Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à la communauté scientifique." RDM Vol.9.3, 1990.

LABORDE C., "Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques" Thèse, 1982.

MESQUITA A.L., "L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie", Thèse, 1989.

NOIRFALISE R., " Contribution à l'étude didactique de la démonstration" RDM n°13(3), 1993.

PADILLA V., "L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques" Thèse, 1992.

GUY NOËL

POUR UNE APPROCHE TGF DANS LES LOGICIELS DIDACTIQUES

Abstract. The revelation of the importance of the role of semiotic representation registers has been an educational achievement of recent years. This article reviews some standard usage educational software by examining which registers are employed. It puts forward reflections on what could be a new generation of software, which explicitly takes charge of several registers and the conversions between them.

Résumé. La mise en évidence du rôle des registres de représentation sémiotique est un des acquis de la didactique de ces dernières années. Cet article passe en revue quelques logiciels didactiques d'usage courant en examinant quels registres y sont mis en œuvre. Il émet quelques réflexions sur ce que pourrait être une nouvelle génération de logiciels prenant explicitement en charge plusieurs registres et les conversions entre eux.

Mots-Clés : Registre, représentation sémiotique, logiciel, didacticiel.

---

1. Rappels : les registres de représentation sémiotique

Dans un article fondateur (Duval 1993), Raymond Duval mentionne le rôle fondamental joué par les *représentations sémiotiques*[1] dans l'activité cognitive et notamment dans :

- le développement des représentations mentales,
- la conceptualisation et la mise en œuvre des concepts,
- la production de connaissances.

Chaque concept mathématique peut faire l'objet de plusieurs représentations sémiotiques différentes. Ainsi, outre la description dans la langue naturelle, une fonction de I, R dans I, R peut être représentée notamment

- par une expression symbolique permettant le calcul de la valeur d'une variable dépendante y à partir de celle d'une variable indépendante x,
- par un tableau, c'est-à-dire une liste de couples de nombres,
- par une courbe d'un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé,
- …

[1] Les mots en italique dans ce premier paragraphe sont définis avec précision dans (Duval, 1993.)

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 233 – 254.

On dit selon le cas que la représentation de la fonction est effectuée dans le *registre* des formules, celui des tableaux ou celui des graphiques. Les fonctions ne sont évidemment pas les seuls objets mathématiques à pouvoir être représentés dans ces registres ou dans des registres très proches. Aussi, prendrons-nous ces expressions dans un sens très large, à préciser en fonction de la nature des objets mathématiques que l'on désire manipuler.

Un objet mathématique n'est manipulable qu'à travers une de ses représentations. Comme le précise Duval, si la première fonction d'un registre de représentation sémiotique est de permettre la représentation d'objets, sa seconde fonction est de permettre de leur appliquer des opérations variées, de les manipuler. Duval parle de *traitement*.

Les différentes représentations d'un objet déterminé ne sont pas susceptibles des mêmes traitements. Par exemple calculer la dérivée d'une fonction est relativement aisé dans le registre symbolique, beaucoup plus flou dans le registre graphique et extrêmement hasardeux dans le registre des tableaux.

Une telle constatation amène à considérer comme indispensable de pouvoir non seulement utiliser des représentations différentes d'un concept donné, mais aussi de pouvoir les coordonner en procédant à des *conversions* d'une représentation dans une autre. La coordination de plusieurs registres de représentation est un des facteurs qui permettent la conceptualisation et est donc une condition sine qua non de la *production des connaissances*. Duval estime que tout concept mathématique devrait pouvoir être l'objet de représentations coordonnées dans au moins deux registres différents pour être valablement maîtrisé. Pluvinage (2002) ajoute que tout apprentissage mathématique suppose une interaction de plusieurs programmes de traitement. S'il est nécessaire de coordonner plusieurs registres de représentation, Pluvinage mentionne aussi le principe de séparation d'après lequel il est tout aussi nécessaire, lors d'un apprentissage de proposer des présentations ne mobilisant qu'un seul registre.

On notera que la conversion de la représentation d'une fonction du registre symbolique vers le registre des tableaux soulève de nombreux problèmes. Certes, construire un tableau de valeurs d'une fonction n'est pas très compliqué. Mais une infinité de tableaux de valeurs peuvent être associés à une fonction donnée. Le choix du, ou des, tableau(x) à construire dépend des questions que l'on se pose, des propriétés que l'on veut mettre en évidence, des problèmes que l'on veut résoudre, nous pourrions dire du contexte.

De plus, la tabulation d'une fonction est une discrétisation et entraîne des modifications aux niveaux des images mentales et des méthodes de travail. Ces remarques nous renvoient aux *cadres* introduits et étudiés par Régine Douady. A l'occasion de la tabulation d'une fonction, on passe du cadre des fonctions à celui des suites numériques. Douady, (1986), estime qu'une activité de résolution de problème est facilitée si l'élève-chercheur est à même d'exprimer son problème dans au moins deux cadres différents et de changer de cadre opportunément (voir aussi Bodin et Capponi 1996, Harel et Trgalova 1996, …)

Former des concepts et résoudre des problèmes étant les deux buts principaux, et interdépendants, de tout enseignement de mathématique, on conçoit que les changements de cadres et /ou de registres aient retenu l'attention des chercheurs. Certains ont mis en évidence des situations où on peut vérifier que certaines conversions d'un registre dans un autre sont accompagnées d'un changement de cadre, pas toujours explicité. Il peut alors arriver que la conversion et/ou sa réciproque conduisent à l'apparition *d'obstacles cognitifs*.

M. Bakar et D. Tall (1992) ainsi que F. Hitt-Espinosa (1998) mentionnent les difficultés rencontrées aussi bien dans un groupe d'élèves anglais (pour Bakar et Tall) que dans un groupe d'enseignants mexicains (pour Hitt-Espinoza) à l'occasion d'exercices portant sur la reconnaissance visuelle d'une fonction. Des courbes sont présentées aux personnes testées. Certaines sont les graphes de fonctions, d'autres non. Certaines ont des équations cartésiennes connues, d'autres non.

Pour les courbes dont l'équation est inconnue, le traitement se déroule uniquement dans le registre graphique. Les non-fonctions sont généralement bien reconnues. Par contre, certains graphes fort irréguliers de fonctions sont rejetés : « graphs are usually smooth », « too complicated » (Bakar et Tall, 1992.) L'image mentale associée aux fonctions est en fait celle d'une fonction continue, monotone par morceaux (et encore, avec peu de morceaux !) Les élèves travaillent ainsi dans un sous-cadre de celui des fonctions.

Pour les courbes dont l'équation est connue, des interférences entre les registres symbolique et graphique interviennent, qui induisent des erreurs si la coordination entre les deux registres est faible. Lorsqu'une courbe familière, donnée par une équation cartésienne bien connue, est soumise aux participants à une enquête, un nombre important d'entre eux, n'hésitent pas à affirmer que cette courbe est le graphe d'une fonction alors que ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, dans l'enquête anglaise, 65% des membres d'un groupe d'étudiants universitaires estiment qu'un cercle est le graphe d'une fonction.

Comme l'écrit Hitt-Espinoza, l'existence d'une expression algébrique associée à une courbe remplace la vérification géométrique (ligne verticale) et la définition de fonction.

L'erreur commise révèle ici l'oubli d'une contrainte du cadre d'origine (celui des fonctions.) Celui-ci est remplacé par un « sur-cadre » : celui des courbes ayant une équation de type $f(x,y)=0$. Cette analyse n'explique cependant pas tout. Par exemple il arrive fréquemment que le demi-cercle unité situé dans le demi-plan supérieur ne soit pas accepté comme le graphe d'une fonction car « the graph would continue, not just stop » (Bakar et Tall, 1992.) Cette fois, une contrainte supplémentaire est inopportunément introduite : une fonction doit être définie sur l'intégralité de I, R.

Dans les cas qui viennent d'être examinés, les changements de registres permettent de détecter l'existence chez certains élèves d'images mentales inadéquates par rapport au cadre utilisé. Ils montrent aussi que les cadres utilisés par les élèves ne sont pas stables. Selon les particularités de la situation considérée, des contraintes sont introduites ou au contraire éliminées.

En présence de telles situations, il apparaît qu'il serait utile d'expliciter le plus complètement possible, non seulement les traitements possibles dans un registre donné, et les conversions possibles entre deux registres, mais aussi le domaine de validité de ces traitements et de ces conversions. Duval (1993) mentionne aussi la nécessité d'identifier les *unités signifiantes* (les variables pertinentes) propres à chaque registre.

2. Le T-G-F mathématique

Pluvinage (2002) énumère toute une série de registres, certains étant en quelque sorte emboîtés les uns dans les autres :

- le registre de la langue naturelle, sous forme orale ou sous forme écrite ;
- le registre des nombres entiers et décimaux,
- le registre des nombres fractionnaires,
- le registre numérique généralise les deux précédents,
- le registre de la géométrie euclidienne plane,
- le registre de la géométrie « dynamique », c'est-à-dire celle qui est mise en œuvre par exemple dans Cabri-Géomètre,
- le registre du plan muni d'un repère, qui a des aspects numériques aussi bien que géométriques,
- le registre des tableaux.

Cette énumération n'est en rien limitative. Nous pourrions y adjoindre le registre des arbres ou celui --- plus général --- des graphes sagittaux. Et pourquoi pas des registres symboliques tels que celui défini par l'emploi d'un langage de programmation (Logo ou autre) ?

Dans la suite, nous regrouperons les divers registres en trois « familles » : celle des registres de **tableaux**, celle des registres **graphiques** et celle des registres symboliques ou de **formules**. C'est le T-G-F mathématique[2].

Précisons que par *formule*, nous entendons toute expression écrite dans un langage symbolique formalisé qui permet de définir un objet mathématique avec

[2] L'expression est de Nicolas Rouche.

précision. Ainsi, une équation et une expression algébrique sont des formules, mais aussi une procédure écrite dans un langage informatique.

Nous rangerons dans les *tableaux* les données qui sont strictement numériques : suites de nombres finies ou infinies, à un nombre quelconque d'indices. Un nombre tout seul est aussi un tableau (à une ligne et une colonne.)

Les *graphiques* comprendront les figures de la géométrie plane ou spatiale, mais aussi les diagrammes de toutes espèces : diagrammes sagittaux, arbres, organigrammes, diagrammes de Venn, etc. Les règles de production des graphiques sont souvent moins précises que celles des formules ou des tableaux.

On pourrait discuter à perte de vue sur la validité de ces définitions. Est-il raisonnable de considérer des tableaux de taille infinie ? Peuvent-ils même avoir une infinité d'indices ? Peut-on admettre comme formules des expressions récursives, etc. Partant du principe que les définitions précises viennent après coup, nous considérerons une telle discussion comme prématurée. Au surplus, nous nous placerons bientôt dans le cadre (?) de l'utilisation de logiciels où certaines de ces questions perdent leur pertinence.

Pour étudier l'ensemble des situations susceptibles de se présenter dans l'enseignement secondaire, les trois familles de registres TGF nous semblent constituer un minimum. Par ailleurs, les registres TGF sont suffisamment généraux pour la plupart des situations de l'enseignement secondaire.

Il est clair que, par ses aspects analytique et synthétique, la géométrie fait un usage important du registre des graphiques et de celui des formules. De plus le dessin effectif d'une courbe passe généralement par celui d'une approximation polygonale, donc par une discrétisation. On est là dans le registre des tableaux.

L'algèbre et la trigonométrie sont intimement associés à la géométrie et utilisent donc les mêmes registres. Quant à l'arithmétique, il suffira de citer le triangle de Pascal, la formule donnant le nombre de diviseurs d'un nombre ou la représentation graphique des treillis de diviseurs pour se convaincre qu'elle entre bien dans le schéma « T-G-F ».

Enfin, les probabilités et la statistique font visiblement une consommation intense de ces registres.

3. Du côté des logiciels

Dès l'apparition des micro-ordinateurs vers 1980, nombreux ont été les enseignants qui ont entrepris de rédiger des logiciels didactiques. Dans les premiers temps, il s'agissait de logiciels à objectifs limités, portant sur un point précis de matière. Certains d'entre eux comportaient des séquences d'animation non interactive, se situant dans la ligne des films mathématiques réalisés après 1940, par exemple par Jean-Louis Nicolet (Nicolet 1944.)

Mais ces logiciels étaient très souvent fermés, proposant inlassablement aux élèves les mêmes séquences. Nous ne traiterons ici que de logiciels ouverts, à vocation suffisamment large, c'est-à-dire susceptibles d'être utilisés dans des circonstances variées et avec des élèves d'âges très différents. Notre but n'étant pas de réaliser une étude exhaustive des logiciels existants (un colloque ne suffirait pas), nous nous limiterons aux logiciels les plus répandus en Belgique francophone.

Entre 1970 et 1980 ont commencé à apparaître des logiciels ambitieux, réalisés par des équipes pourvues parfois de moyens importants. Les plus utilisés actuellement sont vraisemblablement les *tableurs*, par exemple *Excel*, les logiciels de *géométrie dynamique*, dont *Cabri-Géomètre* est le prototype, des logiciels permettant le calcul symbolique, par exemple *Derive* ainsi que des langages de programmation : nous retiendrons *Logo.*

Ces quatre types de logiciels mettent à la disposition des élèves des micro-mondes (pour ce concept, voir Papert, 1981, ainsi que Balacheff, 1994 ou Balacheff et Kaput, 1996) susceptibles d'être étendus par l'élaboration de macros ou la définition de fonctions. Une telle possibilité est essentielle sur le plan didactique, en particulier dans le cadre d'une activité de résolution de problème. Elle ne résout cependant pas tous les problèmes.

Mais d'abord, demandons-nous quelle place ces logiciels réservent à d'éventuels changements de registres et/ou de cadres.

Du côté des cadres, la situation semble relativement simple. On peut sans doute munir un ordinateur d'une table établissant des relations entre des théories mathématiques distinctes, de façon à attirer l'attention de l'utilisateur sur des possibilités de transfert. Mais il y a loin de là à ce qu'un ordinateur réalise lui-même le transfert de l'expérience acquise dans un domaine mathématique à un autre, à ce qu'il détecte des raisonnements analogues. Et comment formaliser le concept d'image mentale, dont on connaît l'importance du rôle dans les changements de cadres ? Les logiciels actuels sont essentiellement capables d'aider les utilisateurs à opérer des traitements sur les données, ce qui s'effectue dans un registre fixé, et à procéder à certaines conversions dans des cas où la congruence entre registres est notable.

Nous nous limiterons donc à examiner les possibilités de quelques logiciels actuels en cette matière, tout en précisant qu'il ne nous sera pas possible d'entrer dans de nombreux détails. Une telle entreprise serait d'ailleurs vaine étant donné qu'à chaque mise sur le marché d'une nouvelle version d'un logiciel, ces possibilités peuvent être modifiées.

4. Des performances inégales

4.1. Logo

Conçu par Seymour Papert, *Logo* est un des plus anciens logiciels didactiques à avoir été réalisé. Il en existe de nombreuses versions, certaines disposant même d'un interface adapté à Windows (avec menus déroulants, boutons-poussoirs, etc.) Si *Logo* est avant tout connu par l'usage qui en est fait en *géométrie-tortue,* c'est d'abord un langage de programmation universel, dérivé du *Lisp*, un peu lourd et assez lent, mais qui peut en principe être utilisé à n'importe quelles fins et qui, par certains aspects, se rapproche des langages « orientés objet », un concept bien postérieur au travail de Papert. Cela étant dit, il est surtout raisonnable d'utiliser *Logo* pour son point fort : l'apprentissage de la géométrie. Il s'agit essentiellement d'une géométrie locale. Abelson et di Sessa (1981) exploitent cette propriété pour faire émerger des concepts de géométrie différentielle des surfaces.

Du point de vue des changements de registres, *Logo* nous intéresse en ce qu'il demande à l'enfant de s'identifier parfois à la tortue, parfois au pilote de la tortue. Lorsqu'il mime les mouvements qu'il veut voir réalisés par la tortue, l'enfant établit une connexion directe entre lui-même et le registre graphique dans lequel les dessins sont ensuite réalisés. De cette façon, à travers un « couplage entre une représentation sémiotique et une représentation non sémiotique » (Duval 1993), il construit une véritable géométrie naturelle. (On aimerait connaître le points de vue de spécialistes de la psycho-motricité à ce sujet.) Lorsqu'il pilote la tortue au clavier, éventuellement en rédigeant de petites procédures, l'enfant utilise nécessairement un registre symbolique. La simple pression de la touche Enter lui permet de confronter les deux registres. De plus, la possibilité d'exécuter la même procédure plusieurs fois, en attribuant des valeurs différentes à un paramètre, rend possible d'explorer les propriétés d'une famille de figures.

En enchaînant des procédures simples, *Logo* permet la réalisation de figures assez complexes. Cependant les objets et propriétés accessibles à travers *Logo* relèvent finalement d'un sous-cadre assez particulier du cadre de la géométrie euclidienne plane. C'est sans doute ce qui explique que l'emploi de *Logo* ne soit pas plus important dans les classes.

5. Cabri-Géomètre

A l'inverse de *Logo,* l'emploi de *Cabri*[3] s'est étendu assez rapidement. C'est essentiellement dû à la capacité d'animation de *Cabri* qui permet à peu de frais de réaliser le programme de Nicolet (1944) : *faire voir la vérité avant de rechercher*

---

[3] Nous disposons de *Cabri II Version 1.0 MS-Windows.*

une démonstration. Ici, l'élève interagit en direct avec la représentation graphique sans avoir besoin d'utiliser un registre symbolique. Les possibilités d'animation, manuelle ou automatique, de *Cabri* installent un registre graphique d'une nature nouvelle : celui de la géométrie dynamique. Dans ce registre, un objet donné, par exemple un triangle, représente en réalité la classe de tous les objets en lesquels il peut être déformé, dans notre exemple, tous les triangles. L'idée d'objet « quelconque » prend ainsi son sens véritable. Laborde et Capponi (1994) parlent à ce sujet d'extension du *domaine de fonctionnement* (du registre de la géométrie euclidienne plane.)

Si le registre de la géométrie dynamique est, et de loin, le point fort de *Cabri*, des registres non graphiques sont également présents par l'intermédiaire de la géométrie « en coordonnées » ou de tableaux numériques. Ces aspects restent néanmoins quelque peu marginaux. *Cabri* est également pourvu d'un langage symbolique utilisé pour enregistrer les figures et les macros, mais ce langage n'est pas documenté et n'est pas destiné à l'utilisateur.

6. Excel

Excel[4] permet des manipulations importantes dans le registre des tableaux et utilise à cet effet un langage symbolique. Comme dans *Logo*, la coordination du registre symbolique et du registre des tableaux est immédiate. Cependant les formules ayant servi à construire une feuille ne sont visibles qu'une à la fois, ce qui limite l'emploi du registre symbolique. Dans *Excel,* les cellules jouent le rôle de variables au sens informatique du terme, les unes indépendantes, les autres dépendantes. Les fonctions primitives du langage, ainsi que les macros définies par l'utilisateur sont les éléments utilisés pour définir les variables dépendantes. Par la distinction nette entre variable et fonction, le registre symbolique de *Excel* est assez différent d'un registre algébrique usuel.

Excel permet aussi des représentations graphiques limitées, particulièrement adaptées au cadre statistique, mais qui peuvent également être utilisables en géométrie analytique du plan ou de l'espace. On imaginerait cependant mal un cours de géométrie euclidienne traditionnelle dont les figures seraient toutes réalisées avec *Excel*.

Les points forts de *Excel* sont d'une part la possibilité de réaliser des calculs itératifs par simple recopiage de la formule définissant une cellule vers des cellules voisines, d'autre part la présentation en tableau qui permet d'avoir une vue globale, synthétique, de certaines situations.

Excel est un des logiciels qui mettent en œuvre le plus de registres différents. Il reste néanmoins centré sur le registre numérique. On rêve d'un tableur dans

[4] Notre version est *Excel 97-SR1.*

lequel les cellules pourraient être occupées par des expressions algébriques auxquelles on pourrait appliquer des calculs symboliques tels qu'on en trouve actuellement dans les logiciels scientifiques et qui, de plus, pourraient d'un simple clic être représentées graphiquement.

7. Derive

A priori, Derive[5] est un logiciel à vocation scientifique, plutôt que didactique. Il suffit pour s'en convaincre de parcourir les sujets traités dans la bibliothèque de macros (fichiers .mth) qui accompagne le logiciel. C'est également sensible à travers la conception de l'interface et la présentation des opérations sous la forme d'une liste d'expressions où manquent les expressions introduites par l'utilisateur si celui-ci a immédiatement actionné le bouton Simplify.

On apprécierait également qu'une modification apportée à une ligne soit immédiatement répercutée sur les lignes suivantes. Au lieu de cela, la ligne modifiée, et toutes celles qui en dépendent doivent être recopiées à la fin de la liste.

Ajoutons encore que l'on est parfois agacé par le manque de convivialité dû au nombre de manipulations à effectuer pour obtenir le résultat souhaité. On peut ainsi s'« emmêler les pinceaux » même dans des situations qui devraient être simples. Considérons par exemple la liste suivante :

#1: $\int_0^1 \mathrm{SIN}(x)\ dx$

#2: $1 - \mathrm{COS}(1)$

#3: $\mathrm{APPROX}(1 - \mathrm{COS}(1),\ 6)$

#4: 0.459697

#5: $\mathrm{APPROX}\left(\int_0^1 \mathrm{SIN}(x)\ dx,\ 6\right)$

#6: 0.459697

La ligne #1 est introduite par l'utilisateur qui veut connaître une valeur approchée de l'intégrale. La ligne #2 est obtenue en appliquant Simplify:Basic à #1. C'est logique : on a oublié de mentionner qu'on désire une valeur approchée. Mais en appliquant Simplify Approx à #2, on obtient #3! Enfin, #4 résulte de Simplify :Basic appliqué à #3. Les deux lignes suivantes montrent un chemin plus court : appliquer d'abord Simplify:Approx à #1, puis Simplify:Basic à #5. On continue de se demander pourquoi Simplify:Approx ne passe pas directement de #1 à #6.

[5] Nous nous référons ici à *Derive for Windows*, version 4.04

Autre exemple : pour calculer une valeur particulière d'un polynôme (pour $x=1$ par exemple), on utilise normalement la boîte de dialogue associée au bouton Substitute. Il est à conseiller d'en sortir en utilisant le bouton Simplify au lieu de OK sans quoi $3.x^2$ est remplacé tout simplement par 3.1^2. Pour l'emploi dans une classe, on pourrait souhaiter un procédé plus direct. Cela obligerait les concepteurs du logiciel à distinguer le processus de calcul d'une valeur numérique et celui de substitution d'une variable par une expression.

L'expérience réalisée par Mouradi et Zaki (2001) montre qu'en effet les étudiants sont parfois désorientés par des réponses inattendues du logiciel, et notamment des points d'interrogation dont la signification n'est pas explicitée. Elle a permis aussi --- et c'est plus important car indépendant des particularités techniques du logiciel utilisé --- de mettre en évidence une tendance à utiliser des traitements portant sur une expression algébrique complète (traitement que les auteurs qualifient de « synthétique ») plutôt que sur les composantes de cette expression (auquel cas le traitement serait dit « analytique ».)

Si nous examinons à présent la question des registres de représentation sémiotique utilisés par *Derive*, on constate immédiatement leur variété : les trois familles TGF sont en effet représentées. On pourrait s'attendre à ce que, mis en présence d'une question relative à une fonction d'une variable réelle, les étudiants s'empressent de passer dans le registre graphique en demandant au logiciel de dessiner le graphe de cette fonction. Manquant de l'expérience de l'ordinateur, les étudiants de Mouradi et Zaki n'ont pas eu ce réflexe. Nous ne pouvons en déduire qu'une chose, à savoir que l'utilisation des technologies nouvelles n'entraîne pas immédiatement une modification en profondeur du comportement des étudiants. Dans un premier temps, ceux-ci n'utilisent le nouvel outil que comme une aide pour réaliser les mêmes démarches que dans un environnement papier-crayon. Ajoutons qu'il n'y a aucune raison pour que les enseignants eux-mêmes se comportent différemment. Un temps important est donc nécessaire avant que l'on puisse réellement évaluer l'impact des nouvelles technologies sur la formation des conceptions et sur les procédures des étudiants (de tous âges.)

On remarque aussi que l'utilisation de *Derive* fait intervenir au moins deux registres symboliques différents : un registre linéaire dans lequel toute formule tient sur une ligne (une fraction s'écrit 2/3), et un autre registre multilinéaire (une fraction s'étend sur trois lignes.)

La conversion entre ces deux registres est suffisamment simple pour pouvoir être réalisée par une machine. Elle est suffisamment compliquée pour poser de vrais problèmes aux élèves du début du secondaire. L'enquête (DIDIREM, 1995) menée par une équipe composée de M. Artigue, M. Abboud, J.-P. Drouhard et J.-B. Lagrange, le montre bien.

L'exemple suivant, extrait de (DIDIREM, 1995) est probant: pour obtenir l'affichage ci-contre, qui s'étale sur plusieurs lignes, l'utilisateur doit entrer au clavier l'expression linéaire *(1+2/(3+4/(5+x)))/(6/(7+8/(9+x))+10).*

$$\frac{1 + \dfrac{2}{3 + \dfrac{4}{5 + x}}}{\dfrac{6}{7 + \dfrac{8}{9 + x}} + 10}$$

Les problèmes dus aux règles de priorité des opérations, à l'apparition et à la disparition de parenthèses ont amené les auteurs à analyser la complexité réelle de conversions de ce type, en la distinguant soigneusement de la complexité apparente, basée sur la perception visuelle, et à conseiller un choix d'exercices tenant compte de cette complexité réelle.

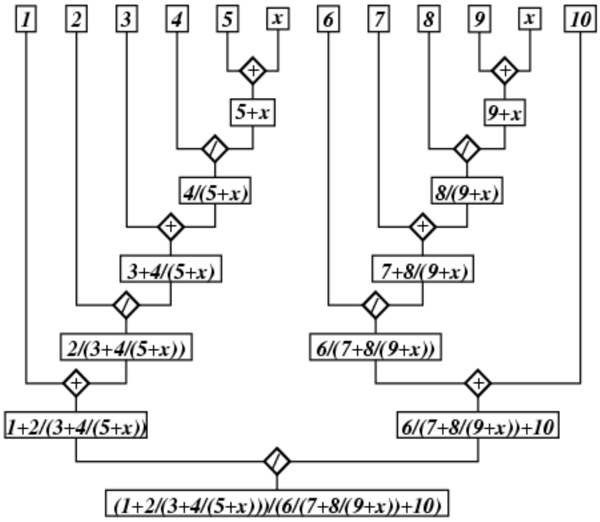
8. Des lacunes

La (trop) brève description que nous venons de faire des logiciels d'usage courant ne saurait être complète si nous ne signalions pas des domaines qui nous semblent y être insuffisamment présents ainsi que des registres pourtant susceptibles d'être utiles, mais qui n'y sont pas mis à la disposition des utilisateurs.

8.1. Le registre des graphes sagittaux

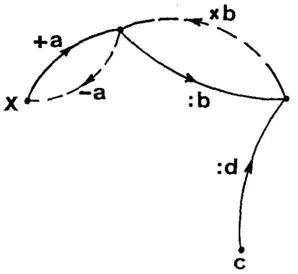
Revenons d'abord sur la conversion entre le registre symbolique linéaire et un registre symbolique multilinéaire dont il a été question à la fin du paragraphe précédent. Le registre (graphique) des arbres pourrait utilement servir d'intermédiaire.

Les expressions mentionnées plus haut peuvent en effet être également représentées par un arbre, lequel peut être lu de bas en haut comme de haut en bas. La lecture de haut en bas indique dans quel ordre les opérations sont effectuées, la lecture de bas en haut correspond à une analyse de l'expression algébrique.



81.

$$\boxed{\frac{a+x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = ?}$$



On part de x | puis | on part de c } pour aboutir en un même point!

On réalise le trajet de c vers x que l'on traduit

$$\Rightarrow \frac{cb}{d} - a = x$$

L'emploi de graphes sagittaux comme support pour le raisonnement n'est pas nouveau. Introduit à l'époque des mathématiques dites « modernes », c'est peut-être un des bébés qui ont été jetés avec l'eau du bain. Le petit fascicule (introuvable aujourd'hui) d'Emile Ridiaux (1969), qui relate des activités réalisées avec des élèves de 12 ans de l'enseignement technique, reste une petite merveille quand on le considère du point de vue de la conversion entre le registre symbolique et celui des graphes. En voici un extrait :

Nous reparlerons des graphes sagittaux à propos des probabilités.

8.2. L'arithmétique

L'arithmétique n'est pas totalement disparue des programmes de l'enseignement secondaire. Elle n'est pas non plus totalement absente de notre échantillon de logiciels. Indirectement elle est présente dans *Logo* et *Cabri* : l'analyse de dessins de polygones réguliers étoilés mène à des calculs de pgcd et ppcm. Dans *Excel,* nous avons trouvé les fonctions Ent (partie entière) et Mod (reste de la division euclidienne.) Dans *Derive*, on trouve ces deux mêmes fonctions (bien que Ent devienne Floor) ainsi que Ceiling (le compagnon obligé de Floor), GCD (calcul du pgcd), LCM (calcul du ppcm) et Prime (test de primalité.) C'est tout, et c'est bien maigre : aucun outil de factorisation d'un nombre, aucune fonction pouvant aider dans des situations du genre de celles qu'on manipule au début du secondaire. Demandons-nous par exemple comment avec *Derive* et *Excel*, calculer la somme des chiffres d'un nombre.

Avec *Excel,* nous plaçons le nombre donné dans la cellule A_1. On définit ensuite la cellule B_n comme $Mod(A_{n-1},10)$, puis A_n comme $(A_{n-1}-B_n)/10$. Il reste à additionner les éléments de la colonne *B*.

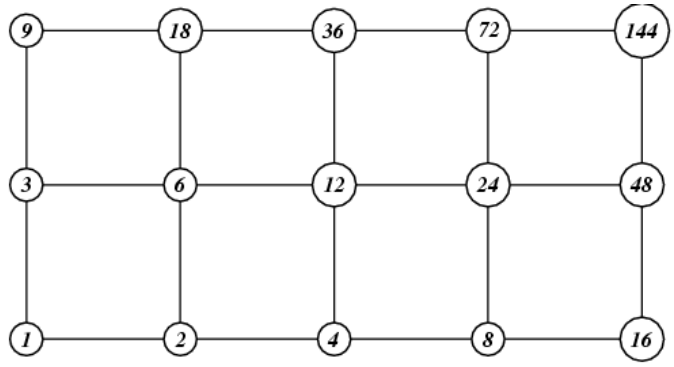
	A	B
1	456789	
2	45678	9
3	4567	8
4	456	7
5	45	6
6	4	5
7	0	4
8		
9		
10		39
11		

Avec *Derive*, nous n'avons pu trouver plus simple que le petit programme que voici :

```
#1:  CHIF(n) := MOD(n, 10)

                  n - CHIF(n)
#2:  QUO10(n) := ───────────
                      10

#3:  SUITEQUO(n) := APPROX(ITERATES(QUO10(x), x, n, LOG(n, 10)))

#4:  SUITECHIF(n) := VECTOR(CHIF(ELEMENT(SUITEQUO(n), i)), i, 1, 1 + LOG(n, 10))

#5:  SOMCHIF(n) := APPROX(SUITECHIF(n)) · APPROX(VECTOR(1, i, 1, 1 + LOG(n, 10)))

#6:  SOMCHIF(657)

#7:  18
```

Vous aurez remarqué que nous utilisons exactement la même méthode dans les deux cas. Pour autant que cette méthode soit réellement la meilleure, l'emploi du registre symbolique de *Derive* semble peu opportun, surtout avec de jeunes élèves. Que dire, sinon que nous trouvons ici la confirmation de ce que *Derive* n'est pas vraiment conçu pour le calcul numérique et que *Excel* est limité à ce calcul. Et qu'aucun des deux ne possède une primitive aussi simple que « somme des chiffres d'un nombre ».

Un sujet capital en arithmétique est la factorisation. La représentation graphique du treillis des diviseurs d'un nombre est possible (et peut être très utile) tant que ce nombre n'admet pas plus de 4 facteurs premiers distincts. Voici par exemple le treillis des diviseurs de 144 :

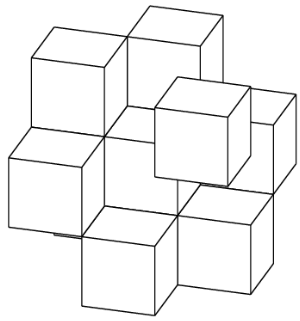


Ce graphique permet de repérer aisément le pgcd et le ppcm de deux éléments du treillis. En assimilant la multiplication par un facteur premier à un déplacement (une translation) sur le treillis, on fait apparaître les règles des exposants. En prolongeant le treillis vers la gauche et/ou vers le bas, on étend l'étude aux nombres rationnels et aux exposants négatifs.

8.3. La géométrie de l'espace

N'importe quel logiciel de dessin géométrique plan permet de réaliser des figures spatiales … à condition de connaître les règles de représentation en

La figure ci-contre montre un ensemble connexe de cubes situés à trois niveaux, ainsi qu'un cube isolé. Pouvez-vous affirmer avec certitude si celui-ci est à un des trois niveaux (et lequel) ou s'il est situé entre deux niveaux ?



perspective. Il existe heureusement des logiciels qui réalisent directement des représentations d'objets spatiaux, notamment de polyèdres. On attend de ces logiciels qu'ils mettent à la disposition de l'utilisateur des registres graphiques dont le domaine de fonctionnement soit particulièrement étendu. Selon les circonstances, on peut en effet souhaiter représenter des objets spatiaux en perspective cavalière, en projection orthogonale sur un plan ou en perspective centrale (ou linéaire.) Il est important aussi de pouvoir faire varier dynamiquement les paramètres de ces représentations, de manière à donner l'impression que l'objet représenté tourne sur lui-même. Comme dans la vie courante, c'est le mouvement qui permet de « voir dans l'espace ».

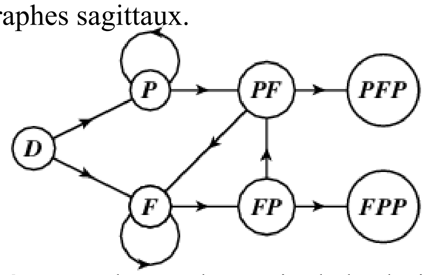
Une représentation statique plane d'un objet spatial est nécessairement ambiguë puisque tout point du plan représente nécessairement une infinité de points de l'espace.

8.4. Les probabilités

Excel et Derive permettent à l'utilisateur de modéliser des situations probabilistes, via l'utilisation de la fonction Random. On peut ainsi simuler différentes expériences aléatoires, généralement, mais pas uniquement, dans le domaine discret, dessiner des distributions d'échantillonnages, et les comparer à des distributions théoriques. Dupuis et Rousset (1998) ont montré que ces activités élémentaires, allant jusqu'à la détermination de probabilités conditionnelles, sont grandement facilitées lorsqu'on traduit les situations dans le registre des arbres, et/ou celui des tableaux. Malheureusement *Excel* et *Derive* ne donnent pas accès au registre des arbres.

Aller plus loin pourrait consister par exemple en l'étude de situations se modélisant en chaînes de Markov finies, comme le préconisait déjà Arthur Engel en 1975. Ces situations sont particulièrement intéressantes car leur maîtrise s'appuie généralement sur le tracé de graphes de flux et fait intervenir des concepts et techniques issus des probabilités, mais aussi de l'algèbre. Elles sont de ce fait riches en changements de cadres et de registres. Nous retrouvons ici l'utilité de disposer de logiciels permettant le tracé de graphes sagittaux.

Deux personnes A et B jouent à pile ou face jusqu'à ce que les résultats de trois lancers consécutifs soient PFP ou FPP. Dans le premier cas, A gagne, dans le second B gagne. Quelle est la probabilité de gain de chacun ?



La modélisation du problème amène à tracer le graphe sagittal de droite. Jouer une partie revient à déplacer un pion sur ce graphe, en démarrant en *D* et en tenant compte de ce que chaque transition, représentée par une flèche, a une probabilité de 0,5 (nous supposons la pièce parfaitement symétrique.) Passer du registre de la langue naturelle au registre des graphes sagittaux est la partie difficile de la modélisation. On effectue ensuite une seconde conversion vers le registre algébrique en introduisant des inconnues : on note *x, y, z, t, u* les probabilités pour que le pion finisse par arriver en *PFP* quand il est respectivement en *D, P, PF, F* ou *FP*. En utilisant alors la formule des probabilités totales, on écrit un système d'équations linéaires en *x, y, z, t, u.* La valeur de l'inconnue *x* est la probabilité de gain de A.

9. Une nouvelle génération de logiciels ?

Il est temps de conclure en explicitant quelques idées qui pourraient sous-tendre la réalisation d'une nouvelle génération de logiciels didactiques.

9.1. Du côté des caractéristiques générales

Souhaitons d'abord que soient harmonisées les différences purement techniques entre les différents logiciels utilisés dans les classes. Le fait que chaque changement de logiciel entraîne l'apprentissage du fonctionnement d'un nouvel interface et de nouvelles conventions est un obstacle important à la diffusion de ces nouvelles méthodes. Un seul logiciel, couvrant tous les besoins, constituerait l'outil « idéal ». C'est sans doute irréalisable. Le minimum que l'on peut demander est que les interfaces soient proches et que chaque logiciel puisse charger les fichiers de résultats constitués à l'aide des autres.

Un logiciel didactique doit mettre un certain nombre d'outils à la disposition des utilisateurs. A l'instar de certains des logiciels que nous avons brièvement évoqués, il devrait être *extensible et rétractile*.

Extensible : L'utilisateur doit pouvoir définir et sauvegarder des « macros » qu'il pourra réutiliser soit séparément soit au sein d'autres procédures. Il peut ainsi constituer progressivement sa propre bibliothèque de procédures. Une macro définie dans un registre donné devra être utilisable dans d'autres registres congruents.

Rétractile : Laborde et Capponi (1994) ont montré l'intérêt pédagogique des situations de « jeux sur les menus » consistant en le retrait (momentané) de certaines fonctions d'un menu en vue de placer l'élève dans une situation d'apprentissage nouvelle. Pour beaucoup d'élèves, il en résulte un enrichissement des images mentales et une meilleure conceptualisation.

La nécessaire rétroaction : Comme dans *Cabri* et *Excel*, il est indispensable de pouvoir à tout moment modifier un des éléments de base introduits antérieurement, le logiciel modifiant en conséquence les éléments qui en dépendent dans les différents registres utilisés. De cette manière, des conjectures peuvent être évaluées expérimentalement. L'importance de cette caractéristique est suffisamment connue pour que nous ne devions pas nous y attarder.

Des modes de fonctionnement différents : Un logiciel didactique pourrait aussi prévoir deux modes de fonctionnement différents selon que l'élève se trouve en situation d'apprentissage ou en situation de résolution de problème (bien que la distinction entre ces deux types de situation soit loin d'être toujours claire.)

En mode « résolution de problème », le logiciel doit avoir un caractère ouvert : l'utilisateur le contrôle entièrement.

Lors d’un apprentissage, il peut parfois être utile que le logiciel perde un peu de son caractère ouvert pour proposer à l’élève une séquence didactique conçue en vue d’introduire un nouveau concept.

> *Lors de l'introduction du concept d'intégrale d'une fonction, une séquence didactique va présenter à l'élève une suite de fonctions en escalier approchant la fonction donnée et calculer la suite correspondante des approximations de l'intégrale. Au cours de cette séquence, l'élève perd un peu de son contrôle de l'ordinateur: il n'a plus que le choix de la fonction à intégrer et du nombre d'approximations à réaliser. On attend de lui qu'il observe le processus de convergence dans les registres graphique et numérique, sans avoir programmé lui-même ce processus, ce travail de programmation risquant de détourner son attention de l'objectif poursuivi.*

On comprend que lors de l’apprentissage du concept d’intégrale, la présence au menu d’un article fournissant directement la valeur de l’intégrale serait au mieux inutile, au pire nuisible (si l’élève considère que cette fonctionnalité le dispense de comprendre ce qu’est une intégrale.) Par contre, dès que le concept est maîtrisé, il serait absurde d’infliger la même séquence didactique à l’élève qui a besoin de la valeur d’une intégrale à l’occasion d’une résolution de problème. Une fonction toute faite est alors bienvenue.

On pourrait donc demander aux logiciels scolaires de pouvoir fonctionner selon deux modes : un mode « apprentissage » et un mode « scientifique ». Dans le mode apprentissage, l’élève n’aurait pas accès à toutes les fonctionnalités relatives aux concepts en cours d’étude. L’idéal serait un logiciel didactique « à géométrie variable » qui, au fil des années, se transforme progressivement (par adjonction de modules) en un logiciel scientifique.

9.2. Du côté des registres

Dans les paragraphes précédents, nous avons rencontré toute une série de registres relevant des trois familles TGF. Il est inutile d’en reprendre l’énumération ici. Notre conviction est que tout, ou presque tout, domaine des mathématiques est susceptible de représentation dans au moins un registre de chacune de ces trois familles. Les logiciels devraient donc systématiquement les prévoir et les mettre à disposition des utilisateurs, en veillant à ce que les conversions et l’indispensable coordination puissent être assurées aisément.

En particulier, afin que les registres soient bien explicités, il semble nécessaire que chacun d’entre eux dispose à l’écran d’une fenêtre propre.

En mode scientifique, ainsi que lors de nombreuses activités d'apprentissage, il est nécessaire que toute modification aux données effectuée dans un registre soit automatiquement répercutée dans les autres. Par exemple, si on considère la coordination entre un registre symbolique-géométrique et un registre graphique en géométrie euclidienne plane, on imagine deux fenêtres voisines. Dans la première, on peut définir un point (par exemple) par une instruction du type « Point A : (3,4) ». Automatiquement le point serait positionné dans la seconde. Si alors, à la souris on déplace le point *A*, les coordonnées affichées dans la fenêtre « symbolique » seraient ajustées. Cette fonctionnalité figure déjà dans *Cabri*, mais dans une seule fenêtre et suivant des principes différents : si dans la fenêtre graphique une droite *d* est définie comme étant la perpendiculaire à une droite *f* passant par le point *A*, ce que nous voulons voir apparaître dans la fenêtre symbolique-géométrique n'est pas l'équation de *d* (où la condition de perpendicularité est disparue), mais une expression du type « Droite *d* : Perp(*A*,*f*) » qui mentionne la dépendance de *d* par rapport à *A* et *f*. Si on veut disposer des équations, une troisième fenêtre pourrait être consacrée à un registre « symbolique-algébrique », mais la conversion du registre symbolique-géométrique vers ce registre est accompagnée d'une perte d'informations.

Bien entendu, si l'activité d'apprentissage soumise aux élèves consiste précisément en la conversion d'un registre dans un autre, l'automatisme de la conversion doit pouvoir être déconnecté.

De même qu'il est utile de pouvoir limiter les articles apparaissant dans un menu, de même il peut être utile de limiter, voire d'interdire, l'accès en entrée à certains registres. Par exemple, pour éviter qu'un élève trace au jugé la tangente en un point à un cercle, pour l'obliger à mettre en œuvre ses connaissances géométriques, on peut par un procédé quelconque (cacher le curseur de la souris dans la fenêtre graphique, masquer les menus de cette fenêtre) obliger l'élève à utiliser le registre symbolique-géométrique.

La détection systématique des modifications induites dans la fenêtre associée à un registre par celles apportées à la fenêtre d'un autre permettrait d'après Duval (1993) de déterminer les unités *signifiantes* des représentations et de coordonner les deux registres.

La séparation systématique des registres en des fenêtres différentes doit aussi faciliter l'apprentissage des traitements spécifiques à chaque registre de représentation et par là la production de tâches dans des registres différents.

Une autre idée qui nous tient à cœur est de multiplier les possibilités d'appliquer des méthodes itératives qui permettent de ramener l'étude de phénomènes complexes à celle de processus simples. Par exemple, on ne voit pas pourquoi les principes d'un tableur ne pourraient être appliqués au registre des fonctions ou des expressions algébriques.

On sait que quels que soient les réels positifs x et x_0, la suite définie par récurrence par $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{x}{x_{n-1}})$ *converge vers* $\sqrt{x}$*. Dans Excel, cette propriété est facile à illustrer pour une valeur numérique de x. Si on pouvait placer non des nombres mais des fonctions dans les cellules d'un tableur, pourquoi ne pourrait-on approcher de la même façon la fonction racine carrée ? Bien entendu, dans chaque cellule du tableur, un bouton permettrait d'obtenir la représentation graphique de la fonction située dans la cellule.*

Voici un autre exemple issu de la géométrie :

Pour surveiller un champ carré de sommets a, b, c, d, un gardien effectue une ronde. Il part du poste de garde situé en un point p à l'intérieur du champ. Il se dirige en ligne droite vers le sommet a. Arrivé aux deux tiers du trajet, il oblique vers le sommet b, en marchant toujours en ligne droite. Il continue de la même façon: aux deux tiers du trajet vers b, il oblique vers c et aux deux tiers du trajet vers c, il oblique vers d. Où faut-il placer le point p pour que le point q, situé aux deux tiers du trajet vers d coïncide avec p et que le gardien soit ainsi revenu à son poste de garde ?

Le point q étant l'image de p par la composée de quatre homothéties de rapport 2/3, il n'est pas difficile avec un logiciel de géométrie dynamique de choisir un point p arbitrairement, de construire q, puis de déplacer p de manière à amener p et q à coïncider.

Si le logiciel permettait, après la construction de q, de redéfinir p comme étant q, un processus itératif serait enclenché qui convergerait (très rapidement) vers la solution du problème.

L'introduction de processus itératifs en géométrie pourrait se révéler une retombée positive importante de l'apparition d'une nouvelle génération de logiciels didactiques, mais il convient évidemment de rester prudent : des études doivent être effectuées en vue de déterminer l'utilité réelle et détecter les effets pervers possibles.

Si la coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique joue un rôle important dans la conceptualisation, il n'est que logique que les logiciels didactiques proposent effectivement aux élèves le choix entre plusieurs registres. Les différences de tempérament des élèves y trouveront également leur compte, certains s'exprimant plus aisément dans un registre que dans un autre. Mais cela pose aussi de nouveaux problèmes aux didacticiens. Par exemple, même dans les cas où la conversion est immédiate, le micro-monde associé à un registre de géométrie dynamique a-t-il les mêmes potentialités, les mêmes caractéristiques, les mêmes domaines d'interprétation et de fonctionnement (Laborde, 1992) que celui qui est associé à un registre géométrique-symbolique ? *A priori*, tout porte à croire que non. Cependant, la meilleure conceptualisation qui résulterait de la possibilité d'effectuer aisément la conversion de l'un à l'autre pourrait modifier fondamentalement la situation. Seul l'usage pourra répondre à des questions de ce genre.

Un dernier mot : le meilleur des logiciels didactiques ne donnera que des résultats médiocres s'il est utilisé de façon inintelligente. Nous souhaitons que les logiciels permettent l'accès à un nombre important de registres différents. Les enseignants et les élèves ne doivent utiliser cette capacité qu'à bon escient et avec parcimonie sous peine de perdre la maîtrise de la situation en étant ensevelis sous une avalanche d'informations qui entraîne une dispersion de l'attention.

Il est clair que les logiciels didactiques continueront d'évoluer dans le futur. Il est tout aussi clair que les quelques idées présentées ci-dessus posent plus de problèmes qu'elles n'en résolvent. En cela, elles méritent d'être discutées, analysées et précisées. Si cela se produit, et même, si aucune de ces idées n'est finalement retenue, nous n'aurons pas perdu notre temps.

BIBLIOGRAPHIE

ABELSON H. and DISESSA A., *Turtle Geometry : The Computer as a Medium for Exploring Mathematics »,* MIT Press, Cambridge, MA, 1981.

BAKAR MdNor and TALL David, « Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs », *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 23, 39-50,* 1992.

BALACHEFF Nicolas, « Didactique et Intelligence artificielle », *Recherches en didactique des mathématiques, 14, (1-2), 9-42,* 1994.

BALACHEFF Nicolas and KAPUT James, « Computer-based Learning Environments in Mathematics », *in (Bishop 1996)*, 469-501, 1996.

BISHOP Alan et al, *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

BODIN Antoine et CAPPONI Bernard, « Junior Secondary School Practices », *in (Bishop 1996),* 565-614, 1996.

DOUADY, Régine, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet », *Recherches en didactique des mathématiques, 7, (2), 5-31,* 1986.

DUPUIS Claire et ROUSSET-BERT Suzette, « De l'influence des représentations disponibles sur la résolution de problèmes élémentaires de probabilité et sur l'acquisition du concept d'indépendance », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6, 67-87,* 1998.

DUVAL Raymond, « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37-65,* 1993.

ENGEL Arthur, « The probabilistic abacus », *Educational Studies in Mathematics, 6, 1-22,* 1975.

ÉQUIPE DIDIREM, « Une recherche sur le logiciel Derive, rapport », *Cahier de DIDIREM*, numéro spécial n°3, 1995.

HAREL Guershon et TRGALOVA Jana, « Higher Mathematics Education », *in (Bishop 1996),* 675-700, 1996.

HITT-ESPINOSA Fernando, « Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6, 7-26,* 1998.

LABORDE Colette, « Enseigner la géométrie : permanence et révolutions *», in Actes du 7^e^ congrès international sur l'enseignement des mathématiques*, Presses de l'Université Laval, Québec, 47-75, 1992.

LABORDE Colette et Capponi Bernard, « Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique », *Recherches en didactique des mathématiques, 14, (1.2), 165-210,* 1994.

MOURADI Mohammed et ZAKI Moncef, « Résolution d'un problème d'analyse à l'aide d'un logiciel de calcul formel », *Recherches en didactique des mathématiques, 21, (3),* p. 355-392*,* 2001.

NICOLET Jean-Louis, *Le dessin animé appliqué à l'enseignement des mathématiques et des sciences*, Scientifilm A. Colomb, Lausanne, 1944.

PAPERT Seymour, *Jaillissement de l'esprit*, Flammarion, Paris, 1981.

PLUVINAGE François, Expression et représentation, leur rôle dans les études sur l'enseignement mathématique, *Didactique des mathématiques, revue du Centre de Recherche en Education*, n° 22-23, p. 235 – 276, Publications de l'Université de Saint - Etienne, 2002.

RIDIAUX Emile *Transformation de formules par la méthode des graphes,* Wesmael-Charlier, Namur-Paris, 1969.

FERNANDO HITT

LE CARACTÈRE FONCTIONNEL DES REPRÉSENTATIONS

Abstract.

The study of mental representations was so important in the past, that it occulted the need for studying the semiotic representations from this perspective as well as the construction of concepts from that of problem solving. The study of the semiotic representations has allowed us a new approach on the construction of mathematical concepts. However, in our opinion, after the major importance given to the study of mental representations, another extreme consists in considering only the study of the role of semiotic representations. We need a balance in order to get satisfactory explanations on general processes of learning and on particular construction of mathematical concepts. In this article, we want to stress the functional character of the representations and especially to understand their role in the process of learning. So we focus our attention to the whole of the semiotic representations produced by an individual in situation of construction of a concept or in a problem solving situation.

Résumé.

Dans le passé, l'étude des représentations mentales avait une telle importance, qu'elle a occulté la nécessité de faire des études sur les représentations sémiotiques tant au point de vue de la construction de concepts que de la résolution de problèmes. L'étude des représentations sémiotiques nous a permis une nouvelle approche de la construction des concepts mathématiques. Cependant, à notre avis, après avoir donné une grande importance à l'étude des représentations mentales, on est passé à l'autre extrême en ne s'occupant plus que des représentations sémiotiques sans arriver à un équilibre qui apporte des explications satisfaisantes sur l'apprentissage en général et la construction de concepts mathématiques en particulier. Dans cet article, nous voulons mettre l'accent sur le caractère fonctionnel des représentations et nous voulons surtout comprendre leur rôle dans l'apprentissage en considérant le caractère indissociable de l'ensemble des représentations sémiotiques produites par un individu en situation de construction d'un concept ou de résolution d'un problème.

Mots clés : représentations, fonctions, variables, limites, connaissances conceptuelles, connaissance procédurales.

---

1. Introduction

L'analyse des recherches en psychologie cognitive des années 1960-1985, nous permet de dire que le domaine de référence pour la modélisation de la construction des concepts était l'organisation de la mémoire sémantique qui rend compte de la compréhension immédiate des discours en langue naturelle. Si nous prenons, par exemple, le travail de Skemp (1960, 1971) et celui de Richard (1998),

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 255 – 271.

ces travaux soulèvent plusieurs questions qui ne peuvent pas être complètement passées sous silence :

1) La construction des concepts mathématiques se fait-elle de la même manière que la construction des concepts scientifiques dans les domaines autres que les mathématiques ?
2) La construction des concepts mathématiques ou scientifiques se fait-elle de la même manière que ce que depuis Vygotski on appelle les « concepts quotidiens » ?
3) Peut-on considérer un codage utilisant une liste de symboles indépendants comme un système de signes qui peuvent remplir les différentes fonctions cognitives fondamentales.

Le matériel d'expérimentation utilisé par Skemp et Richard, ainsi que leurs formulations théoriques laisseraient penser que finalement ce sont les concepts quotidiens qui sont privilégiés dans leurs études et que l'activité sémiotique ne dépasse pas une activité de codage qui utilise une liste de signes ne formant pas entre eux un réel système qui permet des traitements spécifiques. Si tel est le cas, on ne peut pas en espérer grand chose pour la didactique des mathématiques.

Skemp (1978) a signalé l'existence de deux types de compréhension, la compréhension instrumentale (liée aux algorithmes) et la compréhension relationnelle (liée aux concepts). Pendant les années qui suivirent, les chercheurs, pour expliquer la construction des concepts mathématiques, ont cherché à distinguer les différents types de connaissances liés aux différents processus de compréhension.

Resnick et Ford (1981), parlent de la connaissance conceptuelle et de la connaissance procédurale :

> *This process of building new relationships is essential to learning. It means that mathematical knowledge –both the procedural knowledge of how to carry out mathematical manipulations and the conceptual knowledge of mathematical concepts and relationships– is always at least partly « invented » by each individual learner.* (pp. 249-250).

Hiebert et Lefevre (1986) ont aussi suivi cette approche et ils ont donné des précisions sur chacun des types de connaissance (Idem, pp. 3-6). Selon Hiebert et Lefevre, la connaissance conceptuelle donne un sens à la connaissance procédurale qui, à son tour, amplifiera la connaissance conceptuelle. Mais Hiebert et Lefevre n'indiquent jamais comment naît la connaissance conceptuelle de base. C'est-à-dire que pour eux, il y a déjà quelque chose de construit. Là où le problème se complique, c'est lorsque cette connaissance de base, n'est pas adéquate. Que faut-il faire alors ? Nous discuterons de ceci plus avant.

Conne (1992), fait une distinction entre savoir et connaissance et dans sa définition il mentionne que la connaissance permet au sujet d'agir sur la représentation :

Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation. (p. 225)

Un point que nous tenons à soulever ici concerne le peu d'importance que donnent certains auteurs au rôle des représentations sémiotiques, qui pourtant semblent primordiales dans la construction des concepts mathématiques.

Duval, conscient du rôle que jouent les représentations sémiotiques dans la construction des concepts mathématiques, introduit sa théorie de la sémiosis et de la noésis (1993, 1995). Voici comment il définit la sémiosis et la noésis :

Si on appelle sémiosis l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique, et noésis les actes cognitifs comme l'appréhension conceptuelle d'un objet,…L'analyse des problèmes de l'apprentissage des mathématiques et des obstacles auxquels les élèves se heurtent régulièrement conduit à reconnaître derrière la seconde hypothèse une loi fondamentale du fonctionnement cognitif de la pensée : ***il n'y a pas de noésis sans sémiosis****, c'est-à-dire sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même.* (1995, pp. 2-5)

L'approche théorique de Duval nous apporte des éléments qui nous obligent à considérer le rôle important joué par les représentations pour générer un concept. Dans ce cadre théorique, les tâches de conversion entre les diverses représentations sont fondamentales pour la construction d'un concept.

Duval précise clairement qu'il y a des différences dans la construction d'un concept selon que l'on se place dans une perspective liée à la vie quotidienne ou dans une perspective liée aux concepts mathématiques. Il signale en particulier un point important, qui semble trivial une fois énoncé, mais qui est un point capital de sa recherche et qui est le suivant : Les objets mathématiques ne sont accessibles qu'à travers des représentations sémiotiques ce qui les différencie des concepts de la vie quotidienne dans laquelle les représentations d'un concept sont des objets physiques.

En se centrant sur chacun des registres de représentation (voir Duval, 1995, pp. 21-22), Duval analyse les caractéristiques propres au registre qui sont importantes pour comprendre la construction d'un concept. Par exemple, dans le registre graphique, et en relation avec les fonctions linéaires, il introduit la notion de « variable visuelle » et il montre qu'il faut apprendre à discriminer les variables visuelles pertinentes pour l'analyse d'un graphique afin d'être capable de reconnaître ou de « voir » rapidement le type d'expression algébrique correspondant. Ce que nous voulons dire par-là, c'est qu'un étudiant qui est entrain de construire un concept, comme, par exemple, celui de droite, aura de grandes difficultés d'apprentissage si le professeur ne lui demande que de construire des représentations graphiques à partir d'expressions algébriques et en calculant les coordonnées de quelques points seulement. De plus, cette façon de procéder, point par point, sera un obstacle lorsqu'il s'agira de lire un graphique et de trouver l'expression algébrique qui convient. En effet, pour effectuer le processus inverse, il est nécessaire que l'étudiant ait développé une habileté globale à voir le comportement des droites sous leur forme graphique ce qui est justement en lien avec les variables visuelles dont parle Duval (1988).

Pour Duval, les tâches de conversion entre les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont fondamentales pour la construction d'un concept. Le rôle qu'il a donné à ces représentations est d'une grande importance. D'une part, il montre la nécessité d'utiliser des représentations sémiotiques dans l'activité mathématique pour effectuer n'importe quel traitement et, d'autre part, il montre la variété hétérogène des représentations sémiotiques mobilisées dans les démarches mathématiques. Cette hétérogénéité fait à la fois la richesse de la pensée mathématique et la difficulté de son apprentissage. Ces difficultés apparaissent, par exemple, dans les problèmes de conversion de représentation et de coordination de registres. La prise en compte des différents types de représentations sémiotiques caractérise le champ des phénomènes à étudier. Si on se contente de parler simplement de représentations sémiotiques, sans souligner leur hétérogénéité, on manque ce qui est le phénomène essentiel.

Implicitement, dans son travail, il traite de la construction des concepts pour lesquels les représentations institutionnelles (celles qu'utilisent les professeurs, les manuels ou celles qui apparaissent à l'écran d'un ordinateur) sont prépondérantes dans la construction de ce concept. Par contre, nous constatons que lors de la construction des concepts, les représentations produites par les étudiants sont loin d'être celles qui sont attendues par le professeur (représentations institutionnelles). De plus, nous croyons que ces représentations sémiotiques spontanées jouent un rôle crucial dans la construction des connaissances.

Brun (1994), en référence au travail de Vergnaud (1991), a signalé le caractère fonctionnel des représentations :

> *Si l'on suit le fonctionnement des schèmes au fur et à mesure du développement de l'enfant, l'apparition de la fonction sémiotique à un moment de ce développement fournit des éléments nouveaux à ce fonctionnement ; ce sont les représentations du type sémiotique. Les sujets peuvent s'appuyer sur des signifiants qu'ils peuvent distinguer des signifiés. Les représentations sémiotiques jouent donc un rôle éminemment fonctionnel, même si elles restent subordonnées aux opérations.* (p. 75).

Notre approche souligne, elle aussi, le caractère fonctionnel de certaines représentations sémiotiques spontanées qui surgissent lors de la construction d'un concept ou lors de la résolution d'un problème.

2. Le caractère fonctionnel des représentations

Afin de centrer notre propos, nous voudrions montrer plusieurs exemples qui nous permettront de mieux préciser notre position. Le premier sera tiré d'une étude colombienne dans laquelle les mêmes problèmes étaient proposés à des élèves de différents niveaux (Benitez et Santos, 2000.) Ainsi, deux élèves Soath, 11 ans, et Álvaro, 14 ans, répondirent au problème suivant :

> *Dans une course, Manuel a compté 25 véhicules pendant que Carlos comptait 70 roues. Les véhicules étaient soit des taxis soit des motos. Combien de taxis et combien de motos y avait-il dans la course ?*

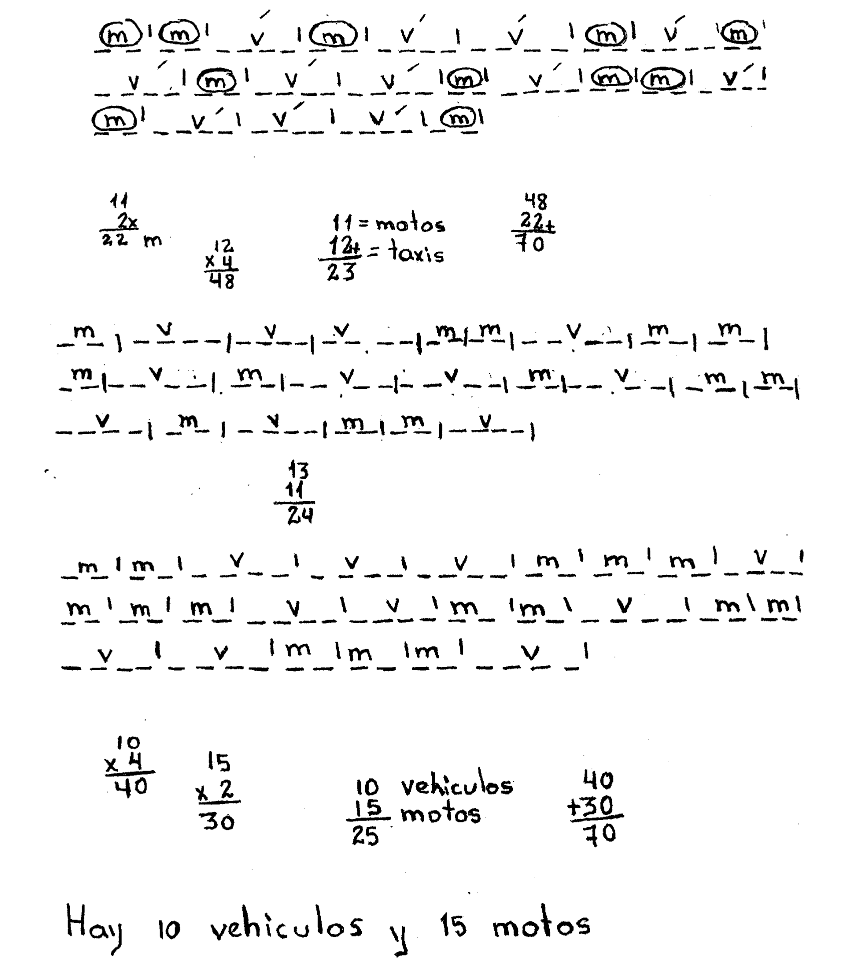


Figure 1: La réponse de Soath.

On peut voir que Soath a fait des productions sémiotiques auxiliaires (figurales) par rapport à l'énoncé. Elle a représenté à la fois les vingt-cinq véhicules (séparation par des traits verticaux) et les soixante-dix roues (traits horizontaux). Ainsi, ses représentations sémiotiques peuvent remplir une fonction particulière : servir d'objet pour effectuer des opérations de comptage comme on compte des objets. En effet, nous pouvons constater qu'elle a cherché à contrôler le nombre total de roues (70) et qu'elle a seulement compté après le nombre de motocyclettes et de taxis. Il y a eu une coordination entre le passage de la représentation figurale à la représentation numérique qui prend en considérations les autres données du problème. Les représentations mobilisées par Soath ont une caractéristique fonctionnelle et sont un élément essentiel pour donner une cohérence à sa production numérique pour atteindre le résultat.

Cet exemple nous montre clairement l'importance que revêt une analyse globale des représentations sémiotiques dans laquelle il nous semble essentiel de ne pas séparer la production de celles-ci de la structure interne qui les a fait naître. Dans la démarche développée par Soath on peut voir une harmonie entre sa connaissance et son adaptation à la nouvelle situation. La lecture de la solution nous montre des étapes auxquelles nous pourrions associer « un sentiment de malaise » qui entraîne une action pour rétablir l'équilibre et pour passer à une autre étape dans laquelle le conflit est dépassé. En fait, Soath éprouve à nouveau, par la suite, une situation de conflit cognitif qui la pousse à nouveau à rétablir l'équilibre et, enfin, à trouver la solution (voir Figure 2).

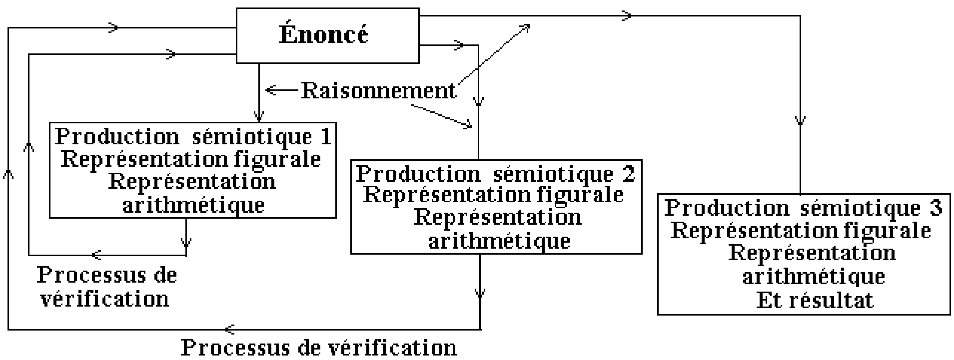


Figure 2

3. Les difficultés rencontrées lors de l'assignation de variables

Analysons maintenant la solution d'Álvaro. (qui termine son premier cours d'algèbre, voir la Figure 3.)

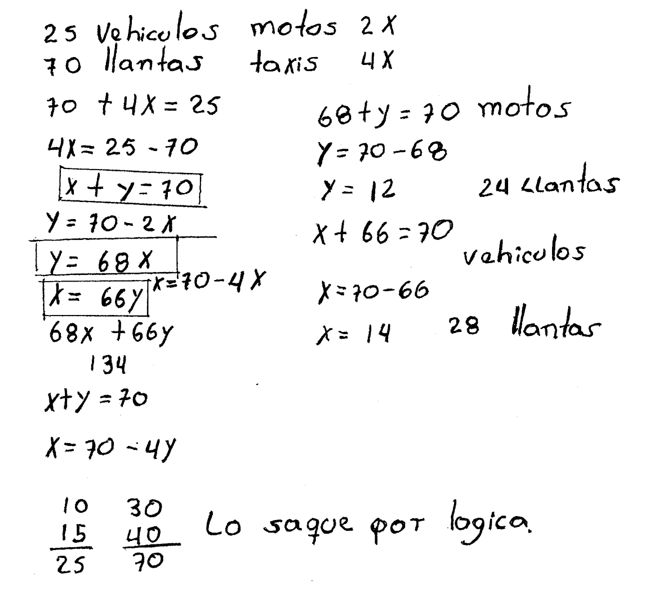


Figure 3: La “solution” d'Àlvaro.

En premier lieu, il est important de faire remarquer que le raisonnement initial fait par Álvaro au début du problème est correct si nous l'analysons de façon isolée. C'est-à-dire qu'il réfléchit sur le nombre de roues des motos et il le représente par 2x. Ici, “x” représente le nombre de motos. Si nous considérons d'autre part le nombre de roues des taxis, la notation adoptée par Álvaro est 4x. Dans ce cas, “x” désigne le nombre de taxis. Le problème survient au moment où, pour poser son équation algébrique, Álvaro mélange les deux inconnues, c'est-à-dire utilise “x” pour désigner à la fois le nombre de taxis et le nombre de motos. Il est probable que l'utilisation exclusive du registre algébrique, et des manipulations peu efficaces des expressions algébriques, ont fait qu'Àlvaro n'a pas trouvé la solution[1]. Àlvaro est revenu plusieurs fois sur sa démarche, mais sa conception de l'« inconnue », qui joue plusieurs rôles dans ses représentations sémiotiques, l'a conduit à commettre des erreurs. Le manque de relations unifiantes entre l'idée et

[1] Dans l'entrevue que les chercheurs ont eu avec Àlvaro, celui-ci a dit qu'il avait copié la réponse.

la désignation des inconnus est bien décrit par plusieurs auteurs (voir, par exemple, Radford, 1996).

Selon Duval, nous pourrions expliquer l'inadéquations de certaines des représentations sémiotiques produites par Álvaro comme un manque de coordination entre les représentations. Nous pourrions même montrer avec précision l'endroit où Álvaro n'a pas pu réaliser un lien cohérent dans le traitement de ses expressions algébriques. Le fait qu'Álvaro recommence plusieurs fois le problème nous amène à penser qu'il éprouve, plusieurs fois au cours de sa démarche, des conflits intérieurs qui l'obligent à reconsidérer son processus. Comme il n'a pas utilisé des représentations sémiotiques figurales (par exemple) et qu'il s'est limité au registre algébrique cela ne lui ont pas permis de développer un processus cohérent menant à la solution de ce problème.

4. Difficultés liées à une conception de l'intégrale et aux processus algébriques

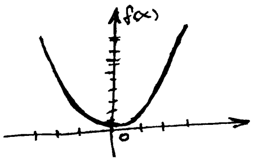
Dans l'exemple que nous allons présenter ci-dessous, il s'agit du cas d'un professeur de terminale à qui l'on avait demandé, lors d'une expérimentation, de choisir un sujet et de le développer comme s'il était entrain de préparer son cours de mathématiques. Il n'avait pas le droit de consulter de manuels ni de notes d'aucune sorte. Le professeur en question proposa l'activité suivante (voir Figure 4.)

L'étudiant devra appliquer le théorème fondamental du calcul (en établissant la relation entre la différentielle et l'intégrale.)
Nous pouvons dire que l'Intégrale est connue comme la primitive d'une Fonction donnée, cette fonction étant la Dérivée.
Par conséquent la Différentielle est une séquence de l'intégrale.
En analysant des exemples qui ont déjà été utilisés antérieurement. En introduisant la relation entre la dérivée et l'intégrale dans des problèmes qui se rapportent au calcul d'Aires d'une parabole, calcul de la vitesse d'un mobile, etc.

Exemple. Soit $f(x) = x^2$

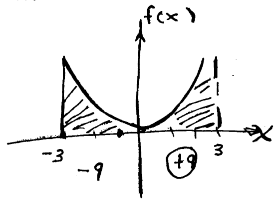
$f'(x) = 2x \qquad dy/dx = 2x \qquad dy = 2x\,dx$

Si nous traçons le graphique de la première fonction pour $-3 \leq x \leq 3$, $[-3, 3]$, nous trouvons que



Nous pouvons observer qu'il s'agit d'une parabole dont le sommet est à l'origine et qui est symétrique, la dérivée de cette fonction est 2x donc l'intégrale sera

$f(x) = \int 2xdx$ on pourra observer que l'Intervalle [-3, 3] pourra se subdiviser en sous-Intervalles de [-3, 0] à [0, 3] ; alors $\int_{-3}^{3} 2x\ dx = \int_{-3}^{0} 2x\ dx + \int_{0}^{3} 2x\ dx$ Pour cette raison, nous trouvons une série d'aires



$\int_{-3}^{3} 2x\ dx\ = x^2]_{-3}^{3} = [3^2] - [-3^2] = 9 - 9 = 0$. Alors

$2\int_{-3}^{3} x\ dx = 2\int_{-3}^{0} x\ dx + 2\int_{0}^{3} x\ dx = x^2]_{-3}^{0} + x^2]_{0}^{3} = 0^2 - (-3)^2 + (3)^2 - (0)^2 = -9 + 9 = 0$

C'est ce que nous voulions Démontrer. En trouvant une méthode pour Déterminer des intégrales plus complexes.

Figure 4 : Transcription fidèle de la préparation du professeur.

L'objectif visé par le professeur était : « la compréhension » du Théorème Fondamental du Calcul, nous ne savons pas pourquoi il l'appela ainsi[2], parce qu'en réalité il voulait illustrer la propriété suivante à l'aide d'un exemple :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + \int_x^b f(x)\,dx; \quad pour\ x \in [a, b].$$

Il est clair que ce professeur a développé une idée intuitive du concept d'intégrale et que cette idée pourrait être résumée par : *« L'intégrale, c'est l'aire sous la courbe. »* Cette idée intuitive est fortement enracinée dans son esprit et tous les processus algébriques et graphiques doivent être en accord avec celle-ci. Pour cette raison, et afin de concilier le processus algébrique avec son idée géométrique, il est « obligé » de considérer que « l'aire sous la courbe du côté gauche de l'axe vertical est négative » (voir Figure 5.) Le professeur ne s'aperçoit pas que la fonction qu'il devrait tracer est la fonction $f(x) = 2x$, à la place de $f(x) = x^2$. Comment ce professeur transmet-il le concept d'intégrale à ses étudiants ? La question reste posée puisque, comme nous l'avons déjà dit, il ne nous fut pas permis de l'interviewer et de filmer quelques-uns de ses cours.

[2] La direction de l'établissement dans lequel l'expérimentation s'est effectuée ne nous autorisa pas à connaître l'identité des professeurs, raison pour laquelle nous n'avons pas pu réaliser les entrevues prévues. Par conséquent, nous ne pouvons présenter que les résultats écrits par ces professeurs.

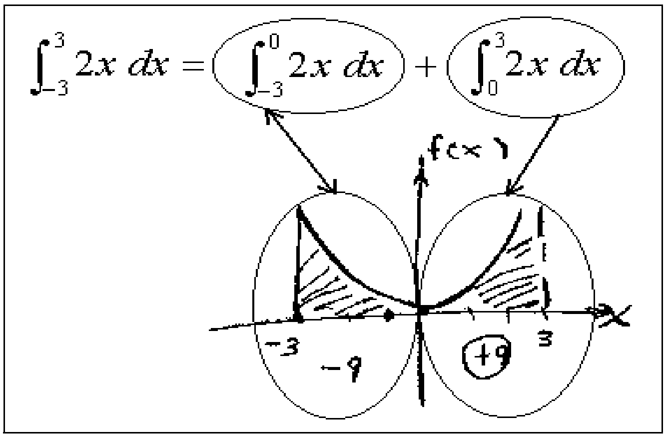


Figure 5

Dans la perspective de Hiebert et Lefevre, nous pouvons dire qu'il y a des connexions entre la connaissance conceptuelle et la connaissance procédurale du professeur. Alors, comment expliquer le raisonnement du professeur dans cette perspective ?

Dans la perspective de Duval, nous éprouvons aussi des difficultés à expliquer ce que le professeur a fait. En effet, il est capable de faire des conversions d'une représentation à une autre, mais sa conception de l'intégrale entraîne des liens erronés entre les représentations.

Ne trouvant de réponse satisfaisante ni dans la perspective de Hiebert et Lefevre, ni dans celle de Duval, nous aimerions essayer de trouver une explication du côté des représentations fonctionnelles. Pour ce faire, nous analyserons une expérience réalisée avec 18 professeurs de Terminale et de 1ère année de Génie, dans une approche coopérative. Nous allons décrire cette expérimentation ci dessous.

5. Les représentations fonctionnelles liées au concept de limite

Notre objectif est donc d'analyser, d'un point de vue fonctionnel, les productions sémiotiques produites par les professeurs de Terminale et de 1ère année de Génie qui suivaient un cours de maîtrise en enseignement des mathématiques. La méthodologie utilisée fut, comme indiqué ci –dessus, un apprentissage coopératif (Hagelgans et al., 1995) dans une approche d'ingénierie didactique (Artigue, 1995). En suivant cette approche méthodologique, six groupes de trois professeurs-étudiants chacun ont été formés, après une épreuve diagnostique.

Ces professeurs-étudiants ayant à enseigner le concept de limite à leurs étudiants, nous étions en droit de penser que ce sujet était connu, qu'ils avaient construit eux-mêmes le concept de limite et que leurs constructions conceptuelles devraient leur permettre de réaliser les 20 tâches que nous avions choisies. Des exemples de ces activités seront donnés plus loin.

Nous verrons par la suite, qu'en fait les professeurs-étudiants n'avaient pas construit le concept de limite et que c'est dans le cadre de l'expérimentation qu'ils l'ont construit et où nous avons pu vérifier notre hypothèse.

Pour construire le concept de limite, il faudra que les professeurs-étudiants construisent les concepts d'infini potentiel et celui d'infini actuel. De nombreuses recherches nous ont montré combien ce dernier concept est difficile à construire (par exemple, Cornu, 1981, 1991 ; Sierpinska, 1987, 1988). L'histoire des mathématiques nous a largement montré que les obstacles rencontrés lors de la construction du concept d'infini actuel sont d'ordre épistémologique (un obstacle épistémologique dans le sens de Bachelard, 1938). On trouvait déjà une idée en lien avec l'infini potentiel dans les paradoxes de Zénon (V^{e} siècle avant J.C.), mais il faudra attendre le travail de Bolzano (1817) sur la continuité d'une fonction pour trouver un changement de paradigme sur le concept d'infini (Grattan-Guinness, 1970). Les étapes importantes de ce changement furent la définition de la continuité d'une fonction en un point (Bolzano, 1817) et son livre « *Les paradoxes de l'infini* » (Bolzano, 1851). Avec Bolzano nous avons deux idées : Une idée intuitive de l'infini qui est celle de l'infini potentiel ; et une idée de voisinage qui est liée à l'infini actuel (pour une version plus large, voir Hitt à paraître).

Les tâches qui ont été choisies peuvent être séparées en deux parties : Les huit premières activités (empruntées à Hauchart et Rouche, 1987) ont été conçues pour faire émerger, de façon naturelle, une idée intuitive de l'infini (infini potentiel[3]). Les onze activités suivantes ont été conçues pour provoquer un conflit cognitif chez les professeurs-étudiants qui ne parvenaient pas à construire l'infini actuel. Les activités qui leur ont été proposées sont des calculs de suites et de séries tant convergentes que divergentes. En résumé, ce que nous voulions faire c'était de proposer des activités qui déséquilibreraient les professeurs-étudiants, ce qui entraînerait des discussions en petits groupes, et par la suite en grand groupe, au cours desquelles ils pourraient confronter leurs idées intuitives avec celles de leurs camarades. En d'autres termes, notre objectif était de créer un conflit cognitif (déséquilibre cognitif) chez les professeurs-étudiants et de provoquer ainsi une discussion riche qui permettrait d'entraîner une évolution de la pensée.

Dans ce qui suit, nous allons rapporter le contenu de certaines séances. Après l'éprouve diagnostique, voici la première activité proposée.

---

[3] « Kant (1790, § 26), dans sa *Critique du jugement*, fait une distinction entre l'infini potentiel (constructible) et l'infini actuel (non-constructible), c'est-à-dire que l'infini potentiel peut se concevoir à travers l'expérience (possibilité d'aller plus loin), par contre, l'infini actuel ne peut se construire qu'à travers la pensée. » (Hitt, à paraître).

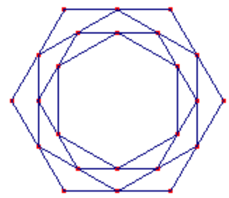
Dans un hexagone régulier, dessinez un autre hexagone régulier en joignant les points milieu de chacun des côtés de l'hexagone de départ (voir figure.) Recommencez la construction à partir du 2e hexagone et ainsi de suite. Que deviennent les aires des hexagones ?	

Figure 6

Cette activité a permis aux professeurs-étudiants de s'exprimer librement sur la question de la limite. Nous avions eu bien soin d'établir, au préalable, une atmosphère propice à la discussion. Nous allons reproduire ci-dessous quelques extraits des échanges qui ont eu lieu.

Ainsi, Also dit :

Also : *Je n'ai jamais pensé que la limite était la valeur, j'ai toujours pensé que ça « s'approche » ou « que ça tend vers»...*

Plus loin, Also poursuit :

Also : *Le symbole d'égalité qui a été placé comme résultat d'une limite ne doit pas exister* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n = L$ *... Je propose* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n \to L$.

Vatin demande alors à Also :

Vito : *Tu n'as jamais demandé à ton professeur pourquoi il plaçait le signe d'égalité à la place de tend vers* [$\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n \to L$] *?*

Also : *Non, parce que c'est probablement un questionnement personnel, quand on est dans cette situation on se pose la question, je le dis, je le dis pas, et parfois tu le gardes pour toi, non ? Et comme ici je peux poser la question alors je le dis.*

Unia intervient :

Unia : *La notation* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n \to L$ *est redondante.*

Je lui proposons alors la notation $Lim\ a_n \underset{n\to\infty}{\to} L$.

Unia : *La notation n'est ni formelle, ni élégante, contrairement à* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n = L$.

Les professeurs-étudiants dont les idées intuitives sur l'infini potentiel étaient très enracinées considéraient que la notation $Lim\ a_n \underset{n\to\infty}{\to} L$ était la notation adéquate.

Devant cette activité, Rado s'exprime ainsi :

Rado : *À la fin, on obtient un tout petit hexagone, dont l'aire est différente de zéro, et qui est tout près du centre de tous les hexagones, qui est un point.*

Ces professeurs-étudiants ont reçu un enseignement formel du concept de limite et, au cours des années, ils se sont lentement éloignés de la définition pour laisser la place à une conception intuitive de la limite. En résumé, nous pourrions dire qu'ils ont interprété la limite comme étant un « rapprochement », ce qui est une idée intuitive liée à l'infini potentiel.

Dans l'équipe d'Ale on note une très forte tendance à penser qu'un processus infini est, comme celui-ci l'exprime: *« un processus qui ne se termine jamais »*. Ainsi, par exemple, au sujet de la 1re activité, les conclusions de l'équipe, émises par Lino sont:

Lino : *L'aire devient aussi petite que l'on veut. Cependant, elle n'arrive jamais à zéro. Si nous supposons que c'est un processus infini il n'a pas de fin alors elle ne va jamais arriver à être nulle.*

Après quelques cours Lino s'interrogeait toujours :

Lino : *…j'ai cette ambivalence dans mon cerveau, je mets égal ou je mets…* [il a été interrompu par une professeure-étudiante].

Tout ceci nous amène à dire que la notation usuelle (institutionnalisée) de la limite ($\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n = L$) n'est pas acceptée par tous parce qu'elle ne représente pas l'image qu'ils se font de la limite.

Dans les discussions en grand groupe, Also et Ale ont commencé à utiliser des représentations graphiques pour communiquer leurs idées sur la convergence des suites. Tian, qui partageait le même type d'idées sur la limite qu'Also et Ale, a produit ce que l'on voit à la Figure 7 pour expliquer la limite à ses coéquipiers.

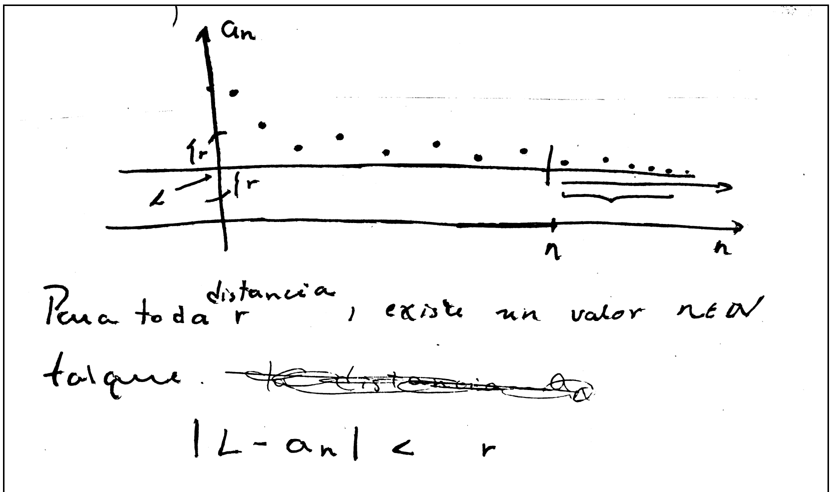


Figure 7

Si nous observons *exclusivement* le schéma ou si nous observons exclusivement ce qu'il a écrit sous le schéma, nous pourrions penser que sa compréhension de la limite est partielle. Par contre, si nous observons l'ensemble de ses différentes représentations et que nous le considérons comme un *tout indissociable*, nous pouvons dire que sa compréhension du concept de limite est cohérente (voir Figure 8).

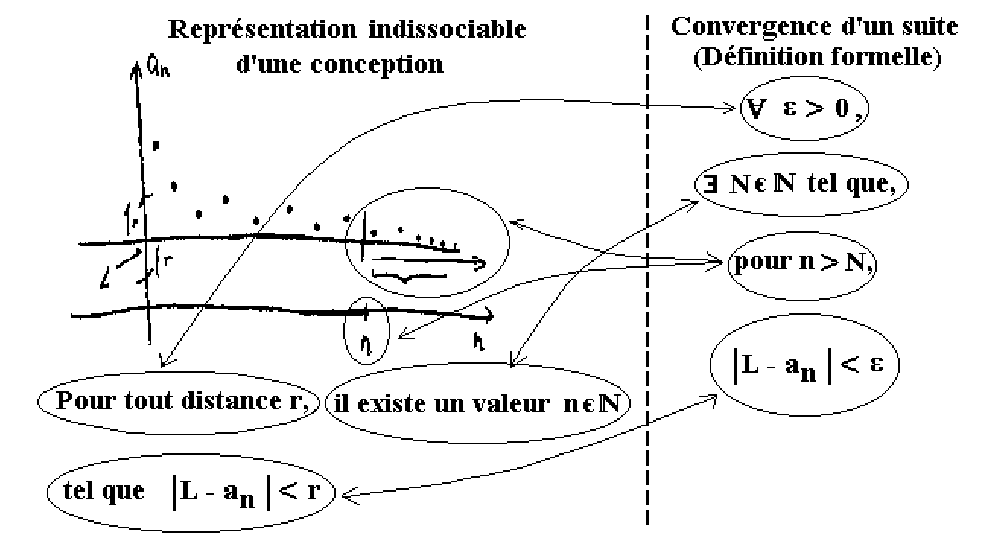


Figure 8

L'analyse de la production de Tian nous permet de voir une évolution entre l'idée de la limite qu'il avait et celle qu'il a exprimée dans la Figure 7. Nous pouvons affirmer que Trian manifeste une très grand cohérence dans sa conception de la limite, bien qu'il ne l'exprime pas de façon formelle (voir notre interprétation dans la Figure 8).

L'exemple que nous venons de vous rapporter pour soutenir notre point de vue montre bien que les représentations jouent un rôle fonctionnel dans la construction d'un concept.

Dans le cadre de notre expérimentation, les idées intuitives et la production de représentations sémiotiques non-institutionnalisées, ainsi que les discussions en équipe et en grand groupe, sont essentielles pour la construction de la connaissance. Les activités ont joué le rôle que nous leur avions attribué, à savoir, provoquer des conflits cognitifs chez les étudiants-professeurs. La Figure 9 ci-dessous, illustre, à notre avis, les étapes de la construction d'un concept.

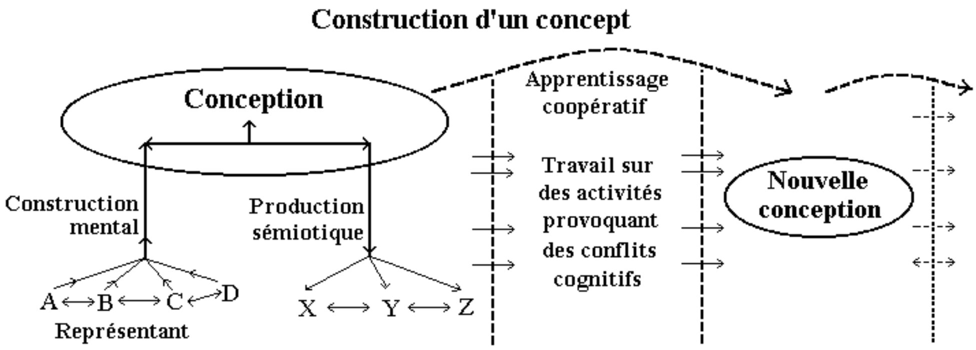


Figure 9

6. Conclusion

Nous avons voulu montrer à l'aide de plusieurs exemples en arithmétique, en algèbre et en calcul, l'importance des représentations sémiotiques et leur caractère fonctionnel.

Tout au long de l'analyse que nous avons faite nous avons cherché à comprendre le lien étroit, « fonctionnel » pourrions-nous dire, des représentations sémiotiques produites par des étudiants et qui permettent la construction d'un concept mathématique. Nous avons aussi voulu montrer combien il est important de considérer l'ensemble des différentes représentations produites par les étudiantes (par exemple celles de Soath ou celles de Tian) et qui montrent bien l'aspect indissociable des représentations pour exprimer une idée mathématique.

Pour obtenir des résultats intéressants, il est nécessaire de travailler dans une ambiance d'enseignement coopératif avec une méthodologie reliée a l'ingénierie didactique. En effet, les activités construites doivent provoquer des conflits cognitifs, engendrer des discussions entre les étudiants, d'abord en équipe et ensuite en grand groupe, pour faire émerger en premier lieu les représentations spontanées des étudiants et, en second lieu, permettre la construction des concepts mathématiques. Bien entendu, chaque étudiant doit aussi fournir un travail individuel entre les cours afin d'harmoniser les résultats du travail en équipe (et en grand groupe) et sa propre démarche.

Bibliographie

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Editor), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachellard, G. (1938). *La Formation de L'Esprit Scientifique.* France : Librairie Philosophique J. Vrin. 10eme édition.

Bolzano B. (1991) *Las Paradojas del Infinito*. Colección MATHEMA, Traducción del original de 1851. México.

Benitez D., y Santos M. (200) El uso espontáneo de representaciones y la importancia de las estrategias metacognitivas para el entendimiento. En Hitt F. (Editor) *Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario* (pp. 151-166). México: Cinvestav-IPN.

Brun J. (1994). Évolution des Rapports entre la Psychologie du Développement Cognitif et la Didactique des Mathématiques. En M. Artigue, R. Grass, C. Laborde et P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 67-83). La Pensée Sauvage Éditions. France.

Conne F. (1992). Savoir et Connaissance dans la Perspective de la Transposition Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12, no. 2.3 pp. 221-270.

Cornu B. (1981). Apprentissage de la notion de limite : modèles spontanés et modèles propres. *Proceedings PME-V*, *I*, 322-326. Grenoble, France.

Cornu B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). Kluwer Academic Publishers.

Duval R. (1988) Graphiques et équations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1,* IREM de Strasbourg, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5*, 37-65.

Duval Raymund (1995) Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Grattan-Guinness I. (1970) *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemmann.* MIT Press.

Hagelgans N., Reynolds B., Schwingendorf K., Vidakovic D., Dubinsky E. Shahin M. and Wimbish J. (1995). A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics. MAA NOTES, Number 37. USA.

Hauchart C., et Rouche N. (1987). *Apprivoiser l'infini. Un enseignement des débuts de l'analyse*. GEM, CIACO Éditeur, Belgique.

Hiebert J. & Lefevre P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge the Case of Mathematics* (pp. 1-28). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hitt F. (À paraître). El concepto de infinito: Obstáculos en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En F. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, A. Rivera, S. Ursini (Editores), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 79-100), Fondo de Cultura Económica, México.

Resnick L. et Ford W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. LEA, Hillsdale, New Jersey.

Skemp R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books.

Skemp R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher,* Vol. 26, no. 3, 9-15.

Sierpinska A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.

Sierpinska A. (1988) Sur la relativité des erreurs. Proceedings of CIEAEM 39. Les Éditions de l'Université de Sherbrooke, Canada, pp. 70-87.

FERNANDO HITT

LE CARACTÈRE FONCTIONNEL DES REPRÉSENTATIONS

Abstract.

The study of mental representations was so important in the past, that it occulted the need for studying the semiotic representations from this perspective as well as the construction of concepts from that of problem solving. The study of the semiotic representations has allowed us a new approach on the construction of mathematical concepts. However, in our opinion, after the major importance given to the study of mental representations, another extreme consists in considering only the study of the role of semiotic representations. We need a balance in order to get satisfactory explanations on general processes of learning and on particular construction of mathematical concepts. In this article, we want to stress the functional character of the representations and especially to understand their role in the process of learning. So we focus our attention to the whole of the semiotic representations produced by an individual in situation of construction of a concept or in a problem solving situation.

Résumé.

Dans le passé, l'étude des représentations mentales avait une telle importance, qu'elle a occulté la nécessité de faire des études sur les représentations sémiotiques tant au point de vue de la construction de concepts que de la résolution de problèmes. L'étude des représentations sémiotiques nous a permis une nouvelle approche de la construction des concepts mathématiques. Cependant, à notre avis, après avoir donné une grande importance à l'étude des représentations mentales, on est passé à l'autre extrême en ne s'occupant plus que des représentations sémiotiques sans arriver à un équilibre qui apporte des explications satisfaisantes sur l'apprentissage en général et la construction de concepts mathématiques en particulier. Dans cet article, nous voulons mettre l'accent sur le caractère fonctionnel des représentations et nous voulons surtout comprendre leur rôle dans l'apprentissage en considérant le caractère indissociable de l'ensemble des représentations sémiotiques produites par un individu en situation de construction d'un concept ou de résolution d'un problème.

Mots clés : représentations, fonctions, variables, limites, connaissances conceptuelles, connaissance procédurales.

---

1. Introduction

L'analyse des recherches en psychologie cognitive des années 1960-1985, nous permet de dire que le domaine de référence pour la modélisation de la construction des concepts était l'organisation de la mémoire sémantique qui rend compte de la compréhension immédiate des discours en langue naturelle. Si nous prenons, par exemple, le travail de Skemp (1960, 1971) et celui de Richard (1998),

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 255 – 271.

ces travaux soulèvent plusieurs questions qui ne peuvent pas être complètement passées sous silence :

1) La construction des concepts mathématiques se fait-elle de la même manière que la construction des concepts scientifiques dans les domaines autres que les mathématiques ?
2) La construction des concepts mathématiques ou scientifiques se fait-elle de la même manière que ce que depuis Vygotski on appelle les « concepts quotidiens » ?
3) Peut-on considérer un codage utilisant une liste de symboles indépendants comme un système de signes qui peuvent remplir les différentes fonctions cognitives fondamentales.

Le matériel d'expérimentation utilisé par Skemp et Richard, ainsi que leurs formulations théoriques laisseraient penser que finalement ce sont les concepts quotidiens qui sont privilégiés dans leurs études et que l'activité sémiotique ne dépasse pas une activité de codage qui utilise une liste de signes ne formant pas entre eux un réel système qui permet des traitements spécifiques. Si tel est le cas, on ne peut pas en espérer grand chose pour la didactique des mathématiques.

Skemp (1978) a signalé l'existence de deux types de compréhension, la compréhension instrumentale (liée aux algorithmes) et la compréhension relationnelle (liée aux concepts). Pendant les années qui suivirent, les chercheurs, pour expliquer la construction des concepts mathématiques, ont cherché à distinguer les différents types de connaissances liés aux différents processus de compréhension.

Resnick et Ford (1981), parlent de la connaissance conceptuelle et de la connaissance procédurale :

This process of building new relationships is essential to learning. It means that mathematical knowledge –both the procedural knowledge of how to carry out mathematical manipulations and the conceptual knowledge of mathematical concepts and relationships– is always at least partly « invented » by each individual learner. (pp. 249-250).

Hiebert et Lefevre (1986) ont aussi suivi cette approche et ils ont donné des précisions sur chacun des types de connaissance (Idem, pp. 3-6). Selon Hiebert et Lefevre, la connaissance conceptuelle donne un sens à la connaissance procédurale qui, à son tour, amplifiera la connaissance conceptuelle. Mais Hiebert et Lefevre n'indiquent jamais comment naît la connaissance conceptuelle de base. C'est-à-dire que pour eux, il y a déjà quelque chose de construit. Là où le problème se complique, c'est lorsque cette connaissance de base, n'est pas adéquate. Que faut-il faire alors ? Nous discuterons de ceci plus avant.

Conne (1992), fait une distinction entre savoir et connaissance et dans sa définition il mentionne que la connaissance permet au sujet d'agir sur la représentation :

> *Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation.* (p. 225)

Un point que nous tenons à soulever ici concerne le peu d'importance que donnent certains auteurs au rôle des représentations sémiotiques, qui pourtant semblent primordiales dans la construction des concepts mathématiques.

Duval, conscient du rôle que jouent les représentations sémiotiques dans la construction des concepts mathématiques, introduit sa théorie de la sémiosis et de la noésis (1993, 1995). Voici comment il définit la sémiosis et la noésis :

> *Si on appelle sémiosis l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique, et noésis les actes cognitifs comme l'appréhension conceptuelle d'un objet,…L'analyse des problèmes de l'apprentissage des mathématiques et des obstacles auxquels les élèves se heurtent régulièrement conduit à reconnaître derrière la seconde hypothèse une loi fondamentale du fonctionnement cognitif de la pensée :* ***il n'y a pas de noésis sans sémiosis****, c'est-à-dire sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même.* (1995, pp. 2-5)

L'approche théorique de Duval nous apporte des éléments qui nous obligent à considérer le rôle important joué par les représentations pour générer un concept. Dans ce cadre théorique, les tâches de conversion entre les diverses représentations sont fondamentales pour la construction d'un concept.

Duval précise clairement qu'il y a des différences dans la construction d'un concept selon que l'on se place dans une perspective liée à la vie quotidienne ou dans une perspective liée aux concepts mathématiques. Il signale en particulier un point important, qui semble trivial une fois énoncé, mais qui est un point capital de sa recherche et qui est le suivant : Les objets mathématiques ne sont accessibles qu'à travers des représentations sémiotiques ce qui les différencie des concepts de la vie quotidienne dans laquelle les représentations d'un concept sont des objets physiques.

En se centrant sur chacun des registres de représentation (voir Duval, 1995, pp. 21-22), Duval analyse les caractéristiques propres au registre qui sont importantes pour comprendre la construction d'un concept. Par exemple, dans le registre graphique, et en relation avec les fonctions linéaires, il introduit la notion de « variable visuelle » et il montre qu'il faut apprendre à discriminer les variables visuelles pertinentes pour l'analyse d'un graphique afin d'être capable de reconnaître ou de « voir » rapidement le type d'expression algébrique correspondant. Ce que nous voulons dire par-là, c'est qu'un étudiant qui est entrain de construire un concept, comme, par exemple, celui de droite, aura de grandes difficultés d'apprentissage si le professeur ne lui demande que de construire des représentations graphiques à partir d'expressions algébriques et en calculant les coordonnées de quelques points seulement. De plus, cette façon de procéder, point par point, sera un obstacle lorsqu'il s'agira de lire un graphique et de trouver l'expression algébrique qui convient. En effet, pour effectuer le processus inverse, il est nécessaire que l'étudiant ait développé une habileté globale à voir le comportement des droites sous leur forme graphique ce qui est justement en lien avec les variables visuelles dont parle Duval (1988).

Pour Duval, les tâches de conversion entre les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont fondamentales pour la construction d'un concept. Le rôle qu'il a donné à ces représentations est d'une grande importance. D'une part, il montre la nécessité d'utiliser des représentations sémiotiques dans l'activité mathématique pour effectuer n'importe quel traitement et, d'autre part, il montre la variété hétérogène des représentations sémiotiques mobilisées dans les démarches mathématiques. Cette hétérogénéité fait à la fois la richesse de la pensée mathématique et la difficulté de son apprentissage. Ces difficultés apparaissent, par exemple, dans les problèmes de conversion de représentation et de coordination de registres. La prise en compte des différents types de représentations sémiotiques caractérise le champ des phénomènes à étudier. Si on se contente de parler simplement de représentations sémiotiques, sans souligner leur hétérogénéité, on manque ce qui est le phénomène essentiel.

Implicitement, dans son travail, il traite de la construction des concepts pour lesquels les représentations institutionnelles (celles qu'utilisent les professeurs, les manuels ou celles qui apparaissent à l'écran d'un ordinateur) sont prépondérantes dans la construction de ce concept. Par contre, nous constatons que lors de la construction des concepts, les représentations produites par les étudiants sont loin d'être celles qui sont attendues par le professeur (représentations institutionnelles). De plus, nous croyons que ces représentations sémiotiques spontanées jouent un rôle crucial dans la construction des connaissances.

Brun (1994), en référence au travail de Vergnaud (1991), a signalé le caractère fonctionnel des représentations :

> *Si l'on suit le fonctionnement des schèmes au fur et à mesure du développement de l'enfant, l'apparition de la fonction sémiotique à un moment de ce développement fournit des éléments nouveaux à ce fonctionnement ; ce sont les représentations du type sémiotique. Les sujets peuvent s'appuyer sur des signifiants qu'ils peuvent distinguer des signifiés. Les représentations sémiotiques jouent donc un rôle éminemment fonctionnel, même si elles restent subordonnées aux opérations.* (p. 75).

Notre approche souligne, elle aussi, le caractère fonctionnel de certaines représentations sémiotiques spontanées qui surgissent lors de la construction d'un concept ou lors de la résolution d'un problème.

2. Le caractère fonctionnel des représentations

Afin de centrer notre propos, nous voudrions montrer plusieurs exemples qui nous permettront de mieux préciser notre position. Le premier sera tiré d'une étude colombienne dans laquelle les mêmes problèmes étaient proposés à des élèves de différents niveaux (Benitez et Santos, 2000.) Ainsi, deux élèves Soath, 11 ans, et Álvaro, 14 ans, répondirent au problème suivant :

> *Dans une course, Manuel a compté 25 véhicules pendant que Carlos comptait 70 roues. Les véhicules étaient soit des taxis soit des motos. Combien de taxis et combien de motos y avait-il dans la course ?*

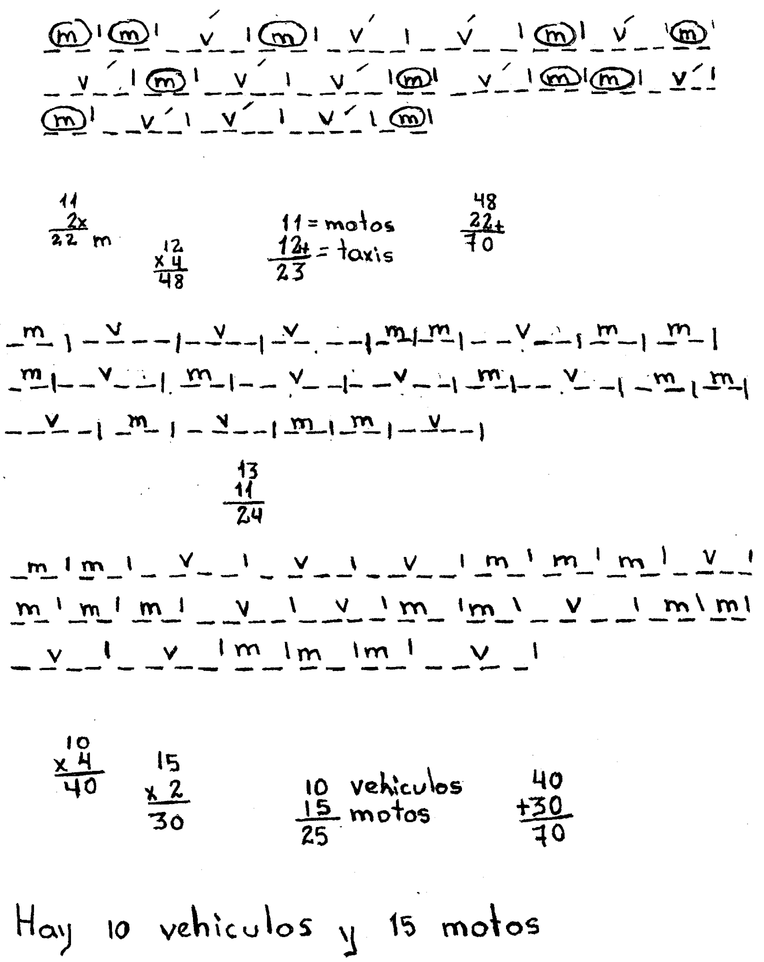


Figure 1: La réponse de Soath.

On peut voir que Soath a fait des productions sémiotiques auxiliaires (figurales) par rapport à l'énoncé. Elle a représenté à la fois les vingt-cinq véhicules (séparation par des traits verticaux) et les soixante-dix roues (traits horizontaux). Ainsi, ses représentations sémiotiques peuvent remplir une fonction particulière : servir d'objet pour effectuer des opérations de comptage comme on compte des objets. En effet, nous pouvons constater qu'elle a cherché à contrôler le nombre total de roues (70) et qu'elle a seulement compté après le nombre de motocyclettes et de taxis. Il y a eu une coordination entre le passage de la représentation figurale à la représentation numérique qui prend en considérations les autres données du problème. Les représentations mobilisées par Soath ont une caractéristique fonctionnelle et sont un élément essentiel pour donner une cohérence à sa production numérique pour atteindre le résultat.

Cet exemple nous montre clairement l'importance que revêt une analyse globale des représentations sémiotiques dans laquelle il nous semble essentiel de ne pas séparer la production de celles-ci de la structure interne qui les a fait naître. Dans la démarche développée par Soath on peut voir une harmonie entre sa connaissance et son adaptation à la nouvelle situation. La lecture de la solution nous montre des étapes auxquelles nous pourrions associer « un sentiment de malaise » qui entraîne une action pour rétablir l'équilibre et pour passer à une autre étape dans laquelle le conflit est dépassé. En fait, Soath éprouve à nouveau, par la suite, une situation de conflit cognitif qui la pousse à nouveau à rétablir l'équilibre et, enfin, à trouver la solution (voir Figure 2).

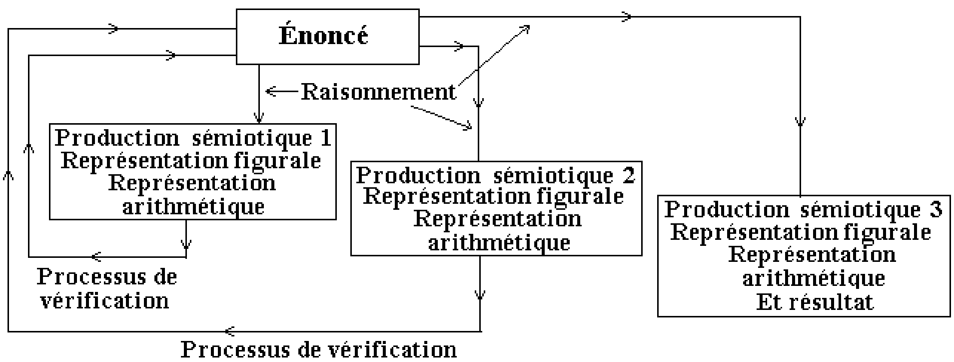


Figure 2

3. Les difficultés rencontrées lors de l'assignation de variables

Analysons maintenant la solution d'Álvaro. (qui termine son premier cours d'algèbre, voir la Figure 3.)

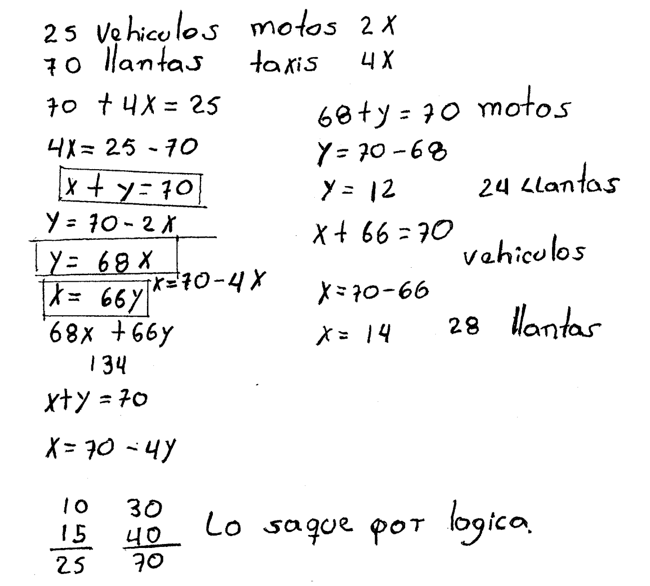


Figure 3: La "solution" d'Àlvaro.

En premier lieu, il est important de faire remarquer que le raisonnement initial fait par Álvaro au début du problème est correct si nous l'analysons de façon isolée. C'est-à-dire qu'il réfléchit sur le nombre de roues des motos et il le représente par 2x. Ici, "x" représente le nombre de motos. Si nous considérons d'autre part le nombre de roues des taxis, la notation adoptée par Álvaro est 4x. Dans ce cas, "x" désigne le nombre de taxis. Le problème survient au moment où, pour poser son équation algébrique, Álvaro mélange les deux inconnues, c'est-à-dire utilise "x" pour désigner à la fois le nombre de taxis et le nombre de motos. Il est probable que l'utilisation exclusive du registre algébrique, et des manipulations peu efficaces des expressions algébriques, ont fait qu'Àlvaro n'a pas trouvé la solution[1]. Àlvaro est revenu plusieurs fois sur sa démarche, mais sa conception de l'« inconnue », qui joue plusieurs rôles dans ses représentations sémiotiques, l'a conduit à commettre des erreurs. Le manque de relations unifiantes entre l'idée et

---

[1] Dans l'entrevue que les chercheurs ont eu avec Àlvaro, celui-ci a dit qu'il avait copié la réponse.

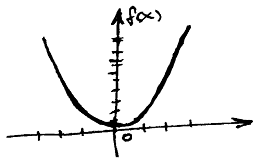
la désignation des inconnus est bien décrit par plusieurs auteurs (voir, par exemple, Radford, 1996).

Selon Duval, nous pourrions expliquer l'inadéquations de certaines des représentations sémiotiques produites par Álvaro comme un manque de coordination entre les représentations. Nous pourrions même montrer avec précision l'endroit où Álvaro n'a pas pu réaliser un lien cohérent dans le traitement de ses expressions algébriques. Le fait qu'Álvaro recommence plusieurs fois le problème nous amène à penser qu'il éprouve, plusieurs fois au cours de sa démarche, des conflits intérieurs qui l'obligent à reconsidérer son processus. Comme il n'a pas utilisé des représentations sémiotiques figurales (par exemple) et qu'il s'est limité au registre algébrique cela ne lui ont pas permis de développer un processus cohérent menant à la solution de ce problème.

4. Difficultés liées à une conception de l'intégrale et aux processus algébriques

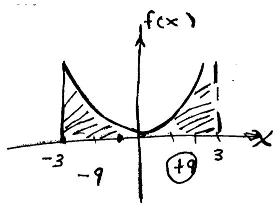
Dans l'exemple que nous allons présenter ci-dessous, il s'agit du cas d'un professeur de terminale à qui l'on avait demandé, lors d'une expérimentation, de choisir un sujet et de le développer comme s'il était entrain de préparer son cours de mathématiques. Il n'avait pas le droit de consulter de manuels ni de notes d'aucune sorte. Le professeur en question proposa l'activité suivante (voir Figure 4.)

L'étudiant devra appliquer le théorème fondamental du calcul (en établissant la relation entre la différentielle et l'intégrale.)
Nous pouvons dire que l'Intégrale est connue comme la primitive d'une Fonction donnée, cette fonction étant la Dérivée.
Par conséquent la Différentielle est une séquence de l'intégrale.
En analysant des exemples qui ont déjà été utilisés antérieurement. En introduisant la relation entre la dérivée et l'intégrale dans des problèmes qui se rapportent au calcul d'Aires d'une parabole, calcul de la vitesse d'un mobile, etc.
Exemple. Soit $f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$ $dy/dx = 2x$ $dy = 2x\,dx$
Si nous traçons le graphique de la première fonction pour $-3 \leq x \leq 3$, $[-3, 3]$, nous trouvons que



Nous pouvons observer qu'il s'agit d'une parabole dont le sommet est à l'origine et qui est symétrique, la dérivée de cette fonction est 2x donc l'intégrale sera

$f(x) = \int 2xdx$ on pourra observer que l'Intervalle [-3, 3] pourra se subdiviser en sous-Intervalles de [-3, 0] à [0, 3] ; alors $\int_{-3}^{3} 2x\,dx = \int_{-3}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{3} 2x\,dx$ Pour cette raison, nous trouvons une série d'aires



$\int_{-3}^{3} 2x\,dx = x^2]_{-3}^{3} = [3^2] - [-3^2] = 9-9 = 0$. Alors

$$2\int_{-3}^{3} x\,dx = 2\int_{-3}^{0} x\,dx + 2\int_{0}^{3} x\,dx = x^2]_{-3}^{0} + x^2]_{0}^{3} = 0^2-(-3)^2+(3)^2-(0)^2 = -9+9 = 0$$

C'est ce que nous voulions Démontrer. En trouvant une méthode pour Déterminer des intégrales plus complexes.

Figure 4 : Transcription fidèle de la préparation du professeur.

L'objectif visé par le professeur était : « la compréhension » du Théorème Fondamental du Calcul, nous ne savons pas pourquoi il l'appela ainsi[2], parce qu'en réalité il voulait illustrer la propriété suivante à l'aide d'un exemple :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx + \int_x^b f(x)\,dx; \quad pour\ x \in [a, b].$$

Il est clair que ce professeur a développé une idée intuitive du concept d'intégrale et que cette idée pourrait être résumée par : *« L'intégrale, c'est l'aire sous la courbe. »* Cette idée intuitive est fortement enracinée dans son esprit et tous les processus algébriques et graphiques doivent être en accord avec celle-ci. Pour cette raison, et afin de concilier le processus algébrique avec son idée géométrique, il est « obligé » de considérer que « l'aire sous la courbe du côté gauche de l'axe vertical est négative » (voir Figure 5.) Le professeur ne s'aperçoit pas que la fonction qu'il devrait tracer est la fonction $f(x) = 2x$, à la place de $f(x) = x^2$. Comment ce professeur transmet-il le concept d'intégrale à ses étudiants ? La question reste posée puisque, comme nous l'avons déjà dit, il ne nous fut pas permis de l'interviewer et de filmer quelques-uns de ses cours.

2 La direction de l'établissement dans lequel l'expérimentation s'est effectuée ne nous autorisa pas à connaître l'identité des professeurs, raison pour laquelle nous n'avons pas pu réaliser les entrevues prévues. Par conséquent, nous ne pouvons présenter que les résultats écrits par ces professeurs.

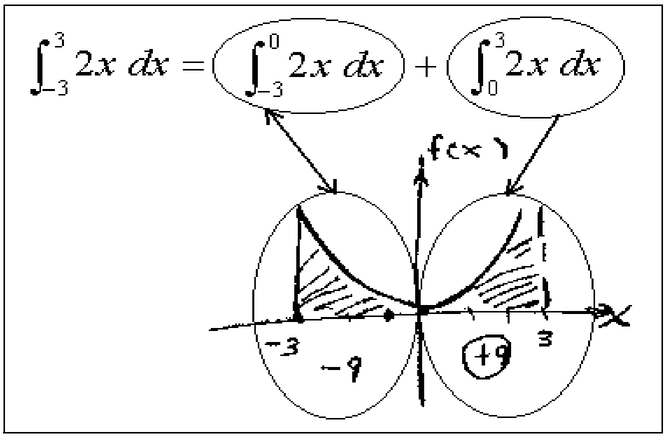


Figure 5

Dans la perspective de Hiebert et Lefevre, nous pouvons dire qu'il y a des connexions entre la connaissance conceptuelle et la connaissance procédurale du professeur. Alors, comment expliquer le raisonnement du professeur dans cette perspective ?

Dans la perspective de Duval, nous éprouvons aussi des difficultés à expliquer ce que le professeur a fait. En effet, il est capable de faire des conversions d'une représentation à une autre, mais sa conception de l'intégrale entraîne des liens erronés entre les représentations.

Ne trouvant de réponse satisfaisante ni dans la perspective de Hiebert et Lefevre, ni dans celle de Duval, nous aimerions essayer de trouver une explication du côté des représentations fonctionnelles. Pour ce faire, nous analyserons une expérience réalisée avec 18 professeurs de Terminale et de 1ère année de Génie, dans une approche coopérative. Nous allons décrire cette expérimentation ci dessous.

5. Les représentations fonctionnelles liées au concept de limite

Notre objectif est donc d'analyser, d'un point de vue fonctionnel, les productions sémiotiques produites par les professeurs de Terminale et de 1ère année de Génie qui suivaient un cours de maîtrise en enseignement des mathématiques. La méthodologie utilisée fut, comme indiqué ci –dessus, un apprentissage coopératif (Hagelgans et al., 1995) dans une approche d'ingénierie didactique (Artigue, 1995). En suivant cette approche méthodologique, six groupes de trois professeurs-étudiants chacun ont été formés, après une épreuve diagnostique.

Ces professeurs-étudiants ayant à enseigner le concept de limite à leurs étudiants, nous étions en droit de penser que ce sujet était connu, qu'ils avaient construit eux-mêmes le concept de limite et que leurs constructions conceptuelles devraient leur permettre de réaliser les 20 tâches que nous avions choisies. Des exemples de ces activités seront donnés plus loin.

Nous verrons par la suite, qu'en fait les professeurs-étudiants n'avaient pas construit le concept de limite et que c'est dans le cadre de l'expérimentation qu'ils l'ont construit et où nous avons pu vérifier notre hypothèse.

Pour construire le concept de limite, il faudra que les professeurs-étudiants construisent les concepts d'infini potentiel et celui d'infini actuel. De nombreuses recherches nous ont montré combien ce dernier concept est difficile à construire (par exemple, Cornu, 1981, 1991 ; Sierpinska, 1987, 1988). L'histoire des mathématiques nous a largement montré que les obstacles rencontrés lors de la construction du concept d'infini actuel sont d'ordre épistémologique (un obstacle épistémologique dans le sens de Bachelard, 1938). On trouvait déjà une idée en lien avec l'infini potentiel dans les paradoxes de Zénon (V^{e} siècle avant J.C.), mais il faudra attendre le travail de Bolzano (1817) sur la continuité d'une fonction pour trouver un changement de paradigme sur le concept d'infini (Grattan-Guinness, 1970). Les étapes importantes de ce changement furent la définition de la continuité d'une fonction en un point (Bolzano, 1817) et son livre « *Les paradoxes de l'infini* » (Bolzano, 1851). Avec Bolzano nous avons deux idées : Une idée intuitive de l'infini qui est celle de l'infini potentiel ; et une idée de voisinage qui est liée à l'infini actuel (pour une version plus large, voir Hitt à paraître).

Les tâches qui ont été choisies peuvent être séparées en deux parties : Les huit premières activités (empruntées à Hauchart et Rouche, 1987) ont été conçues pour faire émerger, de façon naturelle, une idée intuitive de l'infini (infini potentiel[3]). Les onze activités suivantes ont été conçues pour provoquer un conflit cognitif chez les professeurs-étudiants qui ne parvenaient pas à construire l'infini actuel. Les activités qui leur ont été proposées sont des calculs de suites et de séries tant convergentes que divergentes. En résumé, ce que nous voulions faire c'était de proposer des activités qui déséquilibreraient les professeurs-étudiants, ce qui entraînerait des discussions en petits groupes, et par la suite en grand groupe, au cours desquelles ils pourraient confronter leurs idées intuitives avec celles de leurs camarades. En d'autres termes, notre objectif était de créer un conflit cognitif (déséquilibre cognitif) chez les professeurs-étudiants et de provoquer ainsi une discussion riche qui permettrait d'entraîner une évolution de la pensée.

Dans ce qui suit, nous allons rapporter le contenu de certaines séances. Après l'éprouve diagnostique, voici la première activité proposée.

[3] « Kant (1790, § 26), dans sa *Critique du jugement*, fait une distinction entre l'infini potentiel (constructible) et l'infini actuel (non-constructible), c'est-à-dire que l'infini potentiel peut se concevoir à travers l'expérience (possibilité d'aller plus loin), par contre, l'infini actuel ne peut se construire qu'à travers la pensée. » (Hitt, à paraître).

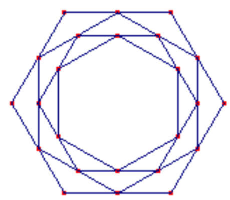
Dans un hexagone régulier, dessinez un autre hexagone régulier en joignant les points milieu de chacun des côtés de l'hexagone de départ (voir figure.) Recommencez la construction à partir du 2^e^ hexagone et ainsi de suite. Que deviennent les aires des hexagones ?	

Figure 6

Cette activité a permis aux professeurs-étudiants de s'exprimer librement sur la question de la limite. Nous avions eu bien soin d'établir, au préalable, une atmosphère propice à la discussion. Nous allons reproduire ci-dessous quelques extraits des échanges qui ont eu lieu.

Ainsi, Also dit :

Also : *Je n'ai jamais pensé que la limite était la valeur, j'ai toujours pensé que ça « s'approche » ou « que ça tend vers»...*

Plus loin, Also poursuit :

Also : *Le symbole d'égalité qui a été placé comme résultat d'une limite ne doit pas exister* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n = L$ *... Je propose* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n \to L$.

Vatin demande alors à Also :

Vito : *Tu n'as jamais demandé à ton professeur pourquoi il plaçait le signe d'égalité à la place de tend vers* [$\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n \to L$] *?*

Also : *Non, parce que c'est probablement un questionnement personnel, quand on est dans cette situation on se pose la question, je le dis, je le dis pas, et parfois tu le gardes pour toi, non ? Et comme ici je peux poser la question alors je le dis.*

Unia intervient :

Unia : *La notation* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n \to L$ *est redondante.*

Je lui proposons alors la notation $Lim\ a_n \underset{n\to\infty}{\to} L$.

Unia : *La notation n'est ni formelle, ni élégante, contrairement à* $\underset{n\to\infty}{Lim}\ a_n = L$.

Les professeurs-étudiants dont les idées intuitives sur l'infini potentiel étaient très enracinées considéraient que la notation $Lim\ a_n \underset{n\to\infty}{\to} L$ était la notation adéquate.

Devant cette activité, Rado s'exprime ainsi :

Rado : *À la fin, on obtient un tout petit hexagone, dont l'aire est différente de zéro, et qui est tout près du centre de tous les hexagones, qui est un point.*

Ces professeurs-étudiants ont reçu un enseignement formel du concept de limite et, au cours des années, ils se sont lentement éloignés de la définition pour laisser la place à une conception intuitive de la limite. En résumé, nous pourrions dire qu'ils ont interprété la limite comme étant un « rapprochement », ce qui est une idée intuitive liée à l'infini potentiel.

Dans l'équipe d'Ale on note une très forte tendance à penser qu'un processus infini est, comme celui-ci l'exprime: *« un processus qui ne se termine jamais »*. Ainsi, par exemple, au sujet de la 1re activité, les conclusions de l'équipe, émises par Lino sont:

Lino : *L'aire devient aussi petite que l'on veut. Cependant, elle n'arrive jamais à zéro. Si nous supposons que c'est un processus infini il n'a pas de fin alors elle ne va jamais arriver à être nulle.*

Après quelques cours Lino s'interrogeait toujours :

Lino : *…j'ai cette ambivalence dans mon cerveau, je mets égal ou je mets…* [il a été interrompu par une professeure-étudiante].

Tout ceci nous amène à dire que la notation usuelle (institutionnalisée) de la limite ($\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$) n'est pas acceptée par tous parce qu'elle ne représente pas l'image qu'ils se font de la limite.

Dans les discussions en grand groupe, Also et Ale ont commencé à utiliser des représentations graphiques pour communiquer leurs idées sur la convergence des suites. Tian, qui partageait le même type d'idées sur la limite qu'Also et Ale, a produit ce que l'on voit à la Figure 7 pour expliquer la limite à ses coéquipiers.

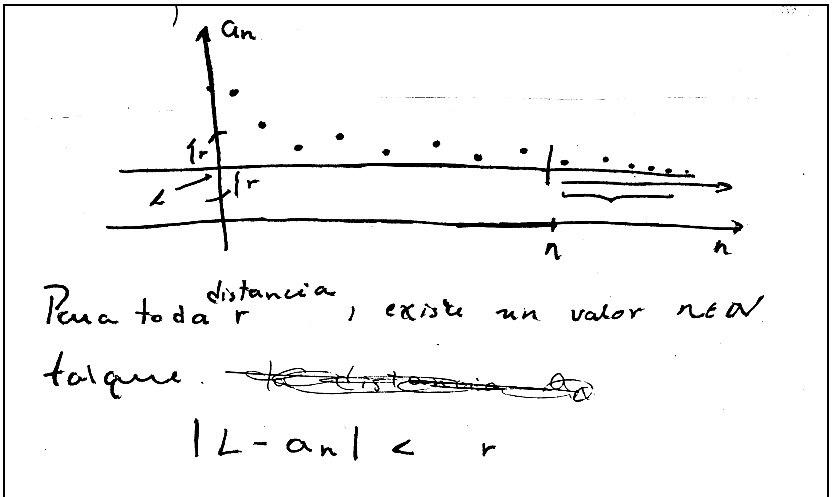


Figure 7

Si nous observons *exclusivement* le schéma ou si nous observons exclusivement ce qu'il a écrit sous le schéma, nous pourrions penser que sa compréhension de la limite est partielle. Par contre, si nous observons l'ensemble de ses différentes représentations et que nous le considérons comme un *tout indissociable*, nous pouvons dire que sa compréhension du concept de limite est cohérente (voir Figure 8).

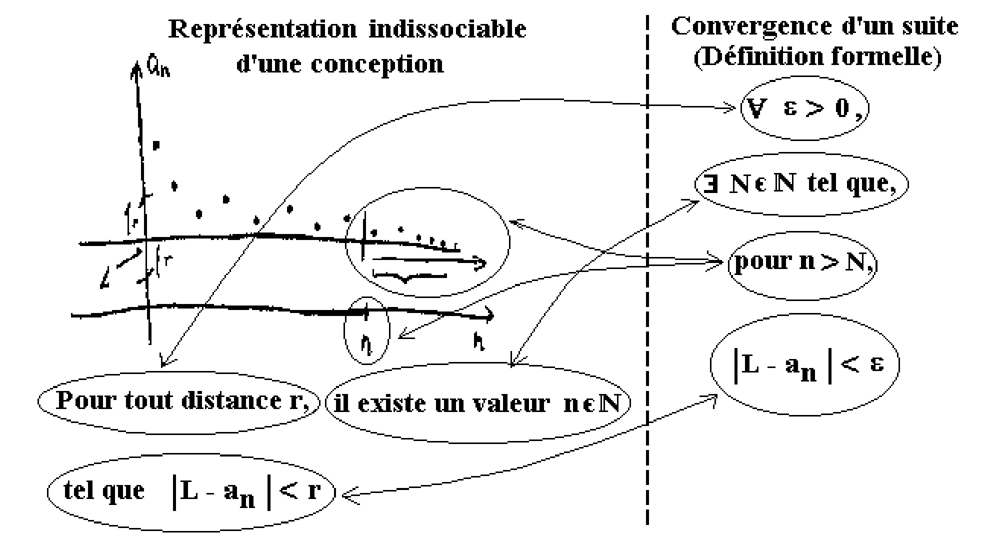


Figure 8

L'analyse de la production de Tian nous permet de voir une évolution entre l'idée de la limite qu'il avait et celle qu'il a exprimée dans la Figure 7. Nous pouvons affirmer que Trian manifeste une très grand cohérence dans sa conception de la limite, bien qu'il ne l'exprime pas de façon formelle (voir notre interprétation dans la Figure 8).

L'exemple que nous venons de vous rapporter pour soutenir notre point de vue montre bien que les représentations jouent un rôle fonctionnel dans la construction d'un concept.

Dans le cadre de notre expérimentation, les idées intuitives et la production de représentations sémiotiques non-institutionnalisées, ainsi que les discussions en équipe et en grand groupe, sont essentielles pour la construction de la connaissance. Les activités ont joué le rôle que nous leur avions attribué, à savoir, provoquer des conflits cognitifs chez les étudiants-professeurs. La Figure 9 ci-dessous, illustre, à notre avis, les étapes de la construction d'un concept.

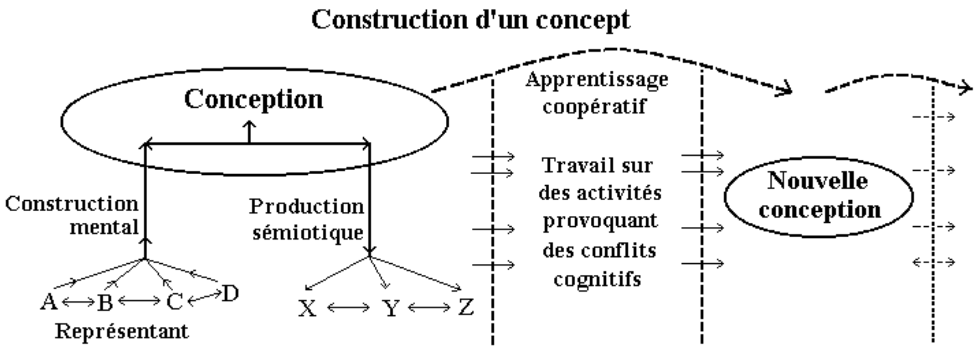


Figure 9

6. Conclusion

Nous avons voulu montrer à l'aide de plusieurs exemples en arithmétique, en algèbre et en calcul, l'importance des représentations sémiotiques et leur caractère fonctionnel.

Tout au long de l'analyse que nous avons faite nous avons cherché à comprendre le lien étroit, « fonctionnel » pourrions-nous dire, des représentations sémiotiques produites par des étudiants et qui permettent la construction d'un concept mathématique. Nous avons aussi voulu montrer combien il est important de considérer l'ensemble des différentes représentations produites par les étudiantes (par exemple celles de Soath ou celles de Tian) et qui montrent bien l'aspect indissociable des représentations pour exprimer une idée mathématique.

Pour obtenir des résultats intéressants, il est nécessaire de travailler dans une ambiance d'enseignement coopératif avec une méthodologie reliée a l'ingénierie didactique. En effet, les activités construites doivent provoquer des conflits cognitifs, engendrer des discussions entre les étudiants, d'abord en équipe et ensuite en grand groupe, pour faire émerger en premier lieu les représentations spontanées des étudiants et, en second lieu, permettre la construction des concepts mathématiques. Bien entendu, chaque étudiant doit aussi fournir un travail individuel entre les cours afin d'harmoniser les résultats du travail en équipe (et en grand groupe) et sa propre démarche.

Bibliographie

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Editor), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachellard, G. (1938). *La Formation de L'Esprit Scientifique.* France : Librairie Philosophique J. Vrin. 10eme édition.

Bolzano B. (1991) *Las Paradojas del Infinito*. Colección MATHEMA, Traducción del original de 1851. México.

Benitez D., y Santos M. (200) El uso espontáneo de representaciones y la importancia de las estrategias metacognitivas para el entendimiento. En Hitt F. (Editor) *Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario* (pp. 151-166). México: Cinvestav-IPN.

Brun J. (1994). Évolution des Rapports entre la Psychologie du Développement Cognitif et la Didactique des Mathématiques. En M. Artigue, R. Grass, C. Laborde et P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 67-83). La Pensée Sauvage Éditions. France.

Conne F. (1992). Savoir et Connaissance dans la Perspective de la Transposition Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12, no. 2.3 pp. 221-270.

Cornu B. (1981). Apprentissage de la notion de limite : modèles spontanés et modèles propres. *Proceedings PME-V*, *I*, 322-326. Grenoble, France.

Cornu B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). Kluwer Academic Publishers.

Duval R. (1988) Graphiques et équations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1,* IREM de Strasbourg, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5*, 37-65.

Duval Raymund (1995) Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Grattan-Guinness I. (1970) *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemmann.* MIT Press.

Hagelgans N., Reynolds B., Schwingendorf K., Vidakovic D., Dubinsky E. Shahin M. and Wimbish J. (1995). A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics. MAA NOTES, Number 37. USA.

Hauchart C., et Rouche N. (1987). *Apprivoiser l'infini. Un enseignement des débuts de l'analyse*. GEM, CIACO Éditeur, Belgique.

Hiebert J. & Lefevre P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge the Case of Mathematics* (pp. 1-28). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hitt F. (À paraître). El concepto de infinito: Obstáculos en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En F. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, A. Rivera, S. Ursini (Editores), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 79-100), Fondo de Cultura Económica, México.

Resnick L. et Ford W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. LEA, Hillsdale, New Jersey.

Skemp R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Penguin Books.

Skemp R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher,* Vol. 26, no. 3, 9-15.

Sierpinska A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.

Sierpinska A. (1988) Sur la relativité des erreurs. Proceedings of CIEAEM 39. Les Éditions de l'Université de Sherbrooke, Canada, pp. 70-87.

Carlos Armando Cuevas Vallejo et François Pluvinage

Les projets d'action pratique, eléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques

Abstract. In this article we consider the basic elements of an enginery for the mathematics education at a post-elementary level (secondary and undergraduate.) Students activity referenced psychology, which we find in Piaget's studies, and theoretical formulations asserted by Dewey, Aebli, Claparède, Brousseau, Duval, lead to a didactical model directed toward a participative learning. We illustrate its feasibility by presenting examples of *practical action projects* which were actually experimented: staircases for studying slope in the Cartesian plane, design of a chair for introducing core concepts of descriptive statistics.

Résumé. Cet article envisage les fondements d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques applicable à un niveau post-élémentaire (niveaux de l'enseignement du second degré et début de l'enseignement supérieur.) Les références à l'activité des élèves, empruntées notamment à la psychologie de l'intelligence de Jean Piaget et aux assertions théoriques énoncées par Dewey, Aebli, Claparède, Brousseau, Duval, conduisent à un modèle didactique orienté vers un enseignement à forme participative. Pour en montrer la faisabilité, nous envisageons des *projets d'action pratique* qui ont été effectivement expérimentés : les escaliers, pour l'acquisition du concept de pente d'une droite dans le plan repéré, la conception et la fabrication d'un siège, pour l'acquisition de concepts statistiques.

Mots clés : enseignement mathématique, action, participation, ingénierie éducative, modèle, tutoriel, registre d'expression, plan repéré, pente, statistique descriptive.

---

1. Introduction

Le débat entre les méthodes traditionnelles et les méthodes actives tend à laisser dans l'ombre une importante question : la parcellisation des tâches accomplies par les élèves. Qu'une atomisation du savoir et des savoir-faire puisse permettre à une forte proportion d'élèves d'acquérir de réelles compétences semble devoir être exclu. Nous verrons que la mise en pratique d'une forme *participative* d'enseignement oblige à s'interroger explicitement sur ce sujet. Dans cet article, après un bref rappel des méthodes qui ont principalement cours dans l'enseignement mathématique, en situant notamment l'*enseignement participatif*, nous dégageons quelques principes sur lesquels s'appuie l'élaboration de *projets d'action pratique* au service d'un tel enseignement. A cette fin, nous avons pu nous appuyer sur des références théoriques que nous indiquerons, ainsi que sur des expérimentations qui ont été réalisées au niveau de l'enseignement du second degré et au début de l'enseignement supérieur (dans le système éducatif mexicain : nivel medio superior et nivel superior.)

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 273 – 292.

2. Méthodes, traditionnelles et actives, enseignement participatif

« La didactique est l'art d'enseigner quelque chose à quelqu'un qui ne désire pas l'apprendre. »Phrase extraite d'une conférence de Guy Brousseau (CINVESTAV Mexico, 2000)

Pour nous permettre de situer notre ingénierie et avant d'entreprendre un examen plus fin, commençons par rappeler les grandes lignes des pratiques d'enseignement usuelles, à savoir les méthodes dites traditionnelles, qui relèvent de la pédagogie de l'exposition, et les méthodes dites actives. Le maître mot de l'enseignement dit traditionnel est l'imitation. L'élève y tente en effet de reproduire les traitements mathématiques qu'en préalable il voit exposer et mettre en œuvre par le professeur. Le maître explicite les principes et les résultats régissant ces traitements en les présentant et il veille ensuite à leur bonne application par ses élèves. Trois types de difficultés auxquelles ce type d'enseignement se heurte sont couramment signalés : les difficultés d'extension des traitements à des situations qui s'écartent de celles présentées lors de l'enseignement, les difficultés à parvenir à des acquisitions conceptuelles et le caractère souvent très volatile des connaissances ainsi apprises. En réaction, l'enseignement actif vise à fournir les moyens de surmonter les unes et les autres. Sa ligne de force est la motivation, à entendre dans un sens qui transparaît dans la citation volontairement provocante mise en exergue de ce paragraphe : *a priori*, l'élève ne voit pas nécessairement à quoi correspond un apprentissage donné et il s'agit en tout premier lieu qu'il fasse siennes les questions qui justifient un apprentissage. Il faut ensuite qu'il éprouve par lui-même qu'il a bien acquis les concepts et instruments adéquats. C'est pourquoi une pratique d'enseignement rapportée au seul critère de l'activité des élèves se heurte à deux écueils principaux : d'une part l'existence de lacunes qui peuvent être importantes, sur les concepts ou résultats que les activités pratiquées n'auront pas ou guère amené les élèves à utiliser, et d'autre part, de même que dans l'enseignement traditionnel mais pas aux mêmes endroits, un défaut d'adéquation entre le bon accomplissement de certaines activités et les compétences que l'on cherche à faire acquérir. On se souviendra de l'exemple caricatural, qui courait à l'époque dite des mathématiques modernes : *« Pour faire un ensemble, on pose des objets par terre et on les entoure d'une corde »*.

C'est pourquoi des réflexions de didacticiens ont porté sur les choix d'activités, le suivi des démarches des élèves et la gestion des différentes phases d'un apprentissage dans la durée. Entre autres retombées pédagogiques, il importe que le professeur évite de s'enfermer dans une programmation trop rigide (le "saucissonnage" des activités), qui ne tiendrait compte ni de la diversité des élèves dans un groupe ni de la nécessité d'une perception d'ensemble des enjeux d'apprentissage, mais se donne néanmoins les moyens d'impulser une dynamique de progression. Une certaine souplesse dans cette progression est indispensable à la *participation* des élèves, autrement dit à leur implication en tant qu'acteurs dans le processus d'apprentissage. L'octroi réfléchi aux élèves d'un rôle décisionnel s'inscrit ainsi dans une démarche d'enseignement qui peut à juste titre être qualifiée de *participative*.

3. Détermination d'un cahier de charges

"Une leçon doit être une réponse". Edouard Claparède

De manière précise nous souhaitons, en nous appuyant notamment sur l'outil informatique, mettre à disposition du professeur un équipement d'enseignement (outils accompagnés de leur guide d'utilisation pédagogique) qui se conforme à un certain nombre de critères, afin de faciliter la pratique d'un enseignement participatif dans de bonnes conditions d'efficacité. Ce sont les critères retenus que nous allons maintenant énoncer. Si, reconnaissons le, notre propre expérience de l'enseignement n'est bien sûr pas totalement étrangère à notre sélection de critères, celle-ci résulte fondamentalement de principes pédagogiques et didactiques que nous allons à présent expliciter.

Les précurseurs de l'école active : Lay, J. Dewey, E. Claparède, G. Kerschensteiner, nous font noter l'importance que revêt, pour l'acquisition des concepts et notions que l'on prétend enseigner, le fait que l'individu effectue des actions concrètes (reprises par Piaget sous la désignation d'*actions effectives*.) Seulement, l'absence d'une conception de la pensée comme schémas d'action leur interdisait d'expliquer bien des processus du fonctionnement intellectuel. Néanmoins, les apports de cette école ont été d'une très grande importance pour le développement de la psychologie que Piaget concrétisa et énonça ultérieurement. Des principes qu'elle a adoptés, nous en retiendrons trois qui tiennent un rôle majeur :

- Amener constamment l'élève à résoudre ou tenter de résoudre des problèmes. Il est essentiel que l'apprenant soit toujours en train d'effectuer une action. C'est en effet lui-même qui, moyennant la résolution de problèmes spécifiques dosés graduellement, construit ou atteint le concept visé.

Le second principe, qui reprend l'apport le plus important de l'enseignement sensoriel – empiriste, se décrit comme suit.

- Pour chaque introduction d'un concept ou d'une notion mathématique, partir d'un problème général qui se pose dans un contexte susceptible de présenter de l'intérêt pour l'apprenant. Proposer des exercices engendrés par ce problème ou des sous-problèmes dont la résolution, sous une forme structurée et coordonnée, amène à exprimer ou désigner le concept mathématique souhaité.

Évidemment, cela n'est pas faisable pour chacun des concepts intrinsèques à un thème donné et il est alors de la décision du professeur de choisir lequel ou lesquels paraissent décisifs. En tout cas, ne jamais introduire un concept par sa définition formelle[1].

Le troisième principe accompagne le précédent.

– Amener l'étudiant, une fois résolu le problème posé, à valider ses résultats, en vérifiant qu'ils aient un sens logique et qu'ils soient en accord avec le problème.

Ainsi dit, cela peut paraître simple, mais une mise en application dans l'enseignement ne va pas sans soulever des questions. Par exemple, à quels indices est-il possible de reconnaître, au vu d'une réponse donnée, qu'une validation a effectivement été mise en œuvre par des étudiants ? Sans aller jusqu'à la validation complète, des pratiques de vérification peuvent être préconisées. Pour une résolution d'équation ou de système, il n'y a pas de difficulté : la pratique d'un rite du genre "*je vérifie que la (les) solution(s) trouvée(s) convien(nen)t bien*" peut être préconisée (voire exigée, si l'on est d'un tempérament professoral plus strict) ; cela ne mange pas beaucoup de pain et ne peut pas faire de mal, mais son équivalent pour une question géométrique ou un problème d'analyse n'est nullement évident. Il s'agit pour ce faire d'introduire dans l'enseignement des apprentissages spécifiques, qui sont souvent, ce qui est heureux, d'un grand intérêt théorique et pratique : Nous songeons aux invariants, dont une exploitation simple prend la forme de déplacements lors de l'utilisation de logiciels de constructions géométriques, ou aux équations aux dimensions lorsque des grandeurs sont en jeu. Quoi qu'il en soit, relevons que la validation ne s'ajoute pas à l'enseignement, mais s'y inscrit pleinement, au point que dans la théorie des situations de G. Brousseau, l'une des dialectiques des processus d'enseignement est bien celle de la validation.

Revenons à des considérations sur le rôle à impartir à l'action. Pour Piaget (1967, p. 23), *les opérations intellectuelles dont la forme supérieure est logique et mathématique constituent des actions réelles, sous le double aspect d'une production propre au sujet et d'une expérience possible sur la réalité*. Situer parmi les actions la résolution de problèmes conduit à inclure dans les caractéristiques fondamentales de notre programme didactique, celle de proposer aux apprenants la résolution de problèmes adéquats. Mais l'action matérielle n'engendre pas nécessairement en elle-même les opérations intellectuelles dont la coordination mène à la compréhension d'un concept. De quelle manière les opérations intellectuelles peuvent-elles s'organiser ? Ou encore : Sur la base de quelle méthodologie, le ou les concepts implicites dans un problème s'intériorisent-ils chez l'étudiant ? Mentionnons à ce sujet qu'une des particularités de l'opération est qu'elle se compose d'opérations partielles, lesquelles, coordonnées selon une

[1] La définition formelle correspond au niveau d'études de l'apprenant.

forme continue, constituent un système cohérent et mobile. C'est ainsi qu'il est possible d'appliquer la dite opération dans des situations similaires.

Ce point nous amène à deux questionnements. Comment déterminer les opérations partielles propres à une opération donnée ? Comment doter une opération de mobilité ? Commençons par répondre à la première question.

Aebli (1995, p. 159) mentionne qu'avant d'entreprendre l'étude d'un thème donné, le professeur doit élaborer un *plan* ou "*déroulement d'actions*", dans lequel apparaissent clairement toutes les activités que l'étudiant devra réaliser pour résoudre un problème posé. Dans notre cas, quand l'objectif est d'enseigner un certain concept mathématique complexe, il faut procéder à son examen détaillé, afin de pointer ce dont l'étudiant a besoin pour pouvoir aboutir au concept. Ce fait ajoute le principe suivant à ceux déjà énoncés pour notre programme didactique.

- Quand il s'agit d'enseigner un certain thème ou un concept mathématique complexe, moyennant la résolution d'un problème fixé, décomposer ou diviser le problème en sous-problèmes qui représentent les opérations partielles constitutives ; noter toutes les opérations et/ou concepts qui résultent de cette analyse et qui sont nécessaires à l'étudiant pour résoudre le problème initial. Constituer à partir de là un *plan d'action*, lequel, moyennant des exercices dosés graduellement, amène de manière coordonnée et cohérente à atteindre l'objectif.

Apportons à présent une réponse à la question relative à la mobilité d'une opération. Piaget (1967, pp. 48-49) éclaircit notre second questionnement en mentionnant que la mobilité d'une opération est définie par la réversibilité et l'associativité. Cela détermine une différence fondamentale par rapport à une habitude, par nature irréversible en raison de son caractère stéréotypé et rigide.

Ainsi, bien que la caractérisation antérieure n'indique pas comment enseigner, elle nous définit clairement comment fonder une didactique qui se démarque de la création d'habitudes chez l'individu. C'est à dire que si elle ne nous dit pas que faire, elle nous indique ce qu'il ne faut pas faire. Complétons notre didactique par deux éléments supplémentaires.

- Chaque fois que sont réalisées des opérations qui nous amènent à des concepts mathématiques, mettre en place dans la mesure du possible les opérations inverses.
- Quand une forme ou une méthode de résolution de problème est montrée, tenter de donner une forme de solution alternative. En aucun cas n'imposer une forme de solution.

Une des parties les plus importantes dans la théorie de l'intelligence de Piaget est celle qui concerne l'équilibre. Brièvement résumée, cette théorie soutient qu'il existe chez l'être humain deux processus jumeaux qui opèrent simultanément : l'assimilation et l'accommodation. Comme tous deux s'opposent d'une certaine façon, ils rendent nécessaire une compensation, qui conduit de manière progressive à des niveaux de compréhension supérieurs. *Piaget appelle équilibre cette compensation intellectuelle active avec le milieu ambiant* (Labinowicz, 1998, p. 36.) Tout niveau supérieur de compréhension produit une structure plus vaste ou des formes de pensée plus complexes. *Quand les possibilités d'interaction avec le milieu ambiant s'accroissent, l'enfant peut assimiler avec plus de facilité le profit de l'information externe dans un cadre de référence qui non seulement s'est agrandi, mais s'est également davantage intégré* (Labinowicz, 1998, p. 41.) On le voit, il s'agit ici d'être prudent : D'une part, Piaget n'avait pas un objectif didactique, car il s'agissait pour lui d'expliquer la construction chez l'enfant et l'adolescent des structures constitutives de l'intelligence, d'autre part nous ne pouvons pas affirmer que tous les concepts mathématiques qui sont les enjeux de l'enseignement sont d'une portée telle qu'ils touchent à la représentation du monde environnant. Nous retiendrons néanmoins de la vision du développement que nous avons rappelée, le rôle que peut jouer une perturbation externe à l'individu, comme peut l'être la présentation d'un nouveau concept mathématique.

Nous considérerons en conséquence que l'acquisition d'un concept sera en conséquence complète pour un individu seulement après une telle perturbation. Cela nous conduit à adjoindre à notre cahier de charges :

- Bâtir des problèmes où le concept récemment acquis soit un élément d'analyse pour un thème plus avancé ou plus complexe ou bâtir des problèmes qui requièrent le concept en dehors du contexte didactique dans lequel il a été enseigné. Cela signifie penser à des problèmes où le concept enseigné fasse partie de la structure avec laquelle l'élève doit analyser et résoudre la question posée.

Jusqu'ici, nous n'avons pas jusqu'ici envisagé les questions liées à l'expression, principalement sous des formes écrites pour le cas de l'enseignement des mathématiques. Or de telles questions font apparaître toute l'importance que tiennent les représentations dans l'analyse qu'un élève fait d'un problème ; ce sujet a été abordé par de nombreux chercheurs (J. Kaput, C. Janvier, R. Duval, F. Pluvinage, etc.) Davantage même, des recherches ont pu repérer qu'un étudiant soit capable de résoudre un problème donné dans un registre déterminé et se trompe dans un autre (Duval, 1998, p. 125.)

Il convient de signaler que le terme "*représentation*" a de nombreuses connotations. Le présent travail ne souhaite pas ouvrir une discussion autour de la signification du terme *représentation*, qui constitue pour beaucoup un sujet d'étude menant à la construction d'une théorie sémiotico-mathématique. Mais simplement, nous nous rapporterons à une représentation dans le même sens que Duval se référant à ce qu'il nomme registre de représentation sémiotique (Duval, 1998, p. 175.)

Plus spécifiquement, nous faisons usage des registres de représentation sémiotique avec l'intention d'identifier les éléments qui participent d'un registre de représentation donné, en raison de la nécessité qu'un concept mathématique soit instancié et travaillé dans les divers registres où il est représenté. Par ailleurs, nous adhérons complètement à ce qu'avance Duval sur la nécessité d'une pluralité de registres de représentation et le caractère central de l'activité de conversion pour le fonctionnement cognitif de la pensée (Duval, 1998, p. 199.) En effet, comme il l'affirme, chaque registre de représentation sémiotique apporte certains aspects cognitifs qu'un autre registre ne recouvre pas, c'est à dire que *toute représentation est cognitivement partielle relativement à ce qu'elle représente* (Duval, 1998, p. 185.) En d'autres termes, les registres se complètent.

Mais il nous signale aussi que l'existence des registres n'est pas suffisante et que la conversion d'un registre dans un autre est nécessaire, affirmant que pour l'appréhension conceptuelle des objets, la coordination des divers registres est nécessaire (Duval, 1998, pp. 176, 181, 185, 189.)

> *On peut observer à tous les niveaux un compartimentage des registres de représentation chez la grande majorité des élèves. Ils ne reconnaissent pas le même objet au travers des représentations données par des systèmes sémiotiques différents.* (Duval, 1998, p.191.)

Janvier (1987) mentionne aussi à ce sujet que l'un des problèmes majeurs est de pouvoir articuler deux registres de représentation sémiotique ou de passer de l'un à l'autre, signalant l'importance de pouvoir offrir différents registres à une notion ou un concept.

De même il subsiste, outre le problème signalé, celui de la manière d'attribuer une signification à un concept mathématique dans un registre donné de représentation sémiotique. Et il est clair que ces deux problèmes son liés puisque, comme nous l'avons déjà mentionné et redit, l'éducation traditionnelle tend à la création d'habitudes chez l'individu, d'où il résulte que le sens d'une notion ou un concept enseigné disparaît ou fait défaut dans un registre de représentation distinct de ceux de l'enseignement.

Comme on le sait, pouvoir piloter dans une classe traditionnelle les divers registres sémiotiques associés à un concept mathématique déterminé n'est pas une tâche simple ; une aide appréciable peut résulter de l'emploi de l'informatique. Dans l'exemple de la pente présenté ci-après, nous pouvons reconnaître au moins quatre registres sémiotiques : l'arithmétique (variations proportionnelles), l'algébrique (coefficients d'équations linéaires), le géométrique (quotient de segments orientés), le figural (inclinaison d'escaliers.)

Dès lors, comment promouvoir l'articulation des différents registres de représentation sémiotiques pour introduire un concept donné ? Notre programme suit sur ce point le schéma que Piaget propose pour l'acquisition d'un concept : il s'agit de la réalisation d'opérations concrètes conduisant d'un registre de représentation sémiotique à un autre et vice versa. Tout ce qui précède doit être réalisé avec soin, en sélectionnant ce que le concept a de pertinent dans l'autre registre, puisqu'il n'y a évidemment pas transfert dans tous les registres de représentation et qu'il est encore moins possible de transférer tous les pas de solution d'un problème d'un registre fixé à un autre.

La synthèse de ce qui précède nous conduit à compléter pour conclure notre cahier de charges par les deux éléments suivants :

- Chaque fois qu'un concept mathématique est présenté dans un registre fixé de représentation sémiotique, le travailler (si le concept le permet) dans les autres registres appropriés.
- Si un concept mathématique est présent dans plus d'un registre de représentation sémiotique, mettre en place des opérations directes et inverses qui favorisent l'articulation (le transfert) entre les différents registres.

4. Application : des projets d'action pratique

4.1. Premier exemple : l'enseignement du concept de pente

Pour introduire le concept de pente d'une droite à partir d'un projet d'action pratique, on se propose de poser un problème tel que la construction d'un escalier, dont la figure 3 montre une vue de profil, connaissant sa portée, sa hauteur et son nombre de marches ou bien le nombre de marches et les mesures caractéristiques d'une de ses marches, à savoir le giron et la contremarche (note : à ces termes spécialisés, on peut préférer les expressions de largeur et hauteur d'une marche, qui sont certes familières mais ambiguës.) En envisageant des variations sur les données du problème envisagé, l'étudiant peut “voir” la variation de l'inclinaison d'un escalier ainsi que la possibilité de le construire.

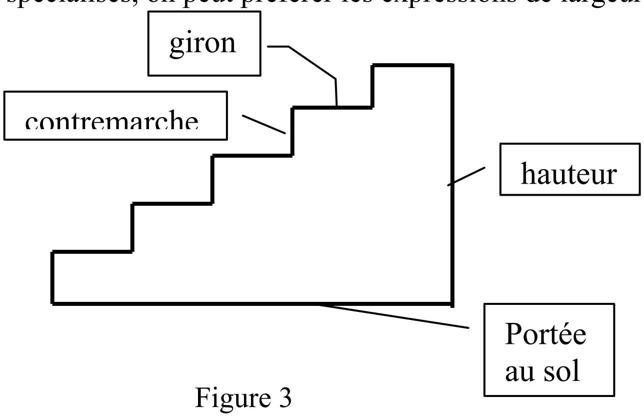


Figure 3

Une étude en forme d'enquête introductive au sujet envisagé (voir scénario en annexe 1) peut permettre aux élèves de se familiariser avec le vocabulaire à utiliser et les conduire à se poser eux-mêmes des questions. Il s'agit aussi que soit ensuite évitée l'atomisation de leur activité, par la possibilité d'une certaine prise de distance au moment de traiter d'énoncés précis, tels que ceux qui suivent, pris parmi les exercices que nous avons effectivement proposés à des élèves.

a.1. Dessine un escalier de hauteur h = 168 cm, de portée au sol s = 168 cm, ayant n = 4 marches.
a.2. Quelle est la mesure en cm de la contremarche de chaque marche ?
a.3. Quelle est la mesure en cm du giron de chaque marche ?
a.4. Quelle inclinaison va-t-il avoir ?

2.1 Dessine à présent un escalier de hauteur ***h***/2 et de portée au sol ***s***.
2.2 Est-il plus ou moins incliné (raide, pentu) que le précédent ?
2.3 Comment ont été modifiées les dimensions d'une marche ?
2.4 Est-ce possible ou as-tu été confronté à des difficultés ?

3.1. Dessine à présent un escalier de hauteur ***h***/2, de portée au sol ***s*** et de ***n*** marches.
3.2. Est-il plus ou moins incliné (raide, pentu) que le premier escalier ?
3.3. Comment comparer leurs inclinaisons ?
3.4. Quelles vont être les dimensions d'une marche ?

4.1. Dessine à présent un escalier de hauteur ***h***, de portée au sol ***s***/2 et de ***n*** marches.
4.2. Quelle va être à présent l'inclinaison ?
4.3. Comment comparer son inclinaison avec celle du premier escalier ?
4.4. Comment comparer son inclinaison avec celle de l'escalier précédent ?
4.5. Quelles vont être les dimensions d'une marche ?

5 Dans les exercices précédents, quel escalier est celui dont l'inclinaison est la plus grande ? La moins grande ?

Au terme de tels exercices, il s'agit d'aboutir à exprimer l'inclinaison d'un escalier sous la forme du rapport entre hauteur atteinte et distance horizontale, ce qui suppose une coordination du type de celle indiquée notamment dans le chap. XI du livre de Piaget, Grize, Szeminska, Vinh Bang, 1968, sur la notion de fonction. Nous pouvons élaborer des questions comme les suivantes sur cette inclinaison.

6 Etant donnée une inclinaison ***x*** = 0,8, indique une valeur pour la hauteur et la portée d'un escalier ayant cette inclinaison. Pour un escalier de cette inclinaison, pourrais-tu donner les dimensions d'une marche ? Ces valeurs sont-elles uniques ou peux-tu construire plusieurs escaliers ayant cette inclinaison ?

7 Pour une inclinaison ***Z*** = 0,30, construire un escalier de 20 marches en donnant des mesures pour le giron et la contremarche, sachant que marche et escalier sont dans la même proportion.

8 Est-il possible de construire un escalier ayant cette inclinaison, mais de contremarche $\boldsymbol{W} = 34$ et de giron $\boldsymbol{Y} = 60$?

Après réalisation de ce programme, on en vient à la définition de pente. Un didacticiel peut permettre à chaque étudiant de travailler à son propre rythme, selon une démarche que nous nous contentons ici de décrire succinctement. Le didacticiel, comportant un générateur aléatoire, fait apparaître une droite dans un repère cartésien du plan. Un point est placé sur la droite et on demande à l'étudiant de réaliser des déplacements du point sur la droite, qui déterminent des segments orientés portés par chacun des axes de coordonnées. A nouveau la pente est définie comme un rapport, celui entre les déplacements verticaux et horizontaux. A cela près que l'orientation des segments fait apparaître un signe, ce qui peut produire des pentes négatives. On poursuit par des problèmes amenant l'étudiant à confronter la pente de la droite avec les valeurs obtenues pour le quotient. Une fois l'étudiant familiarisé avec cette manière de voir la pente, le même problème peut être posé en donnant les coordonnées sans référence explicite à une échelle déterminée, de telle sorte que les déplacements restent définis en termes de différences des coordonnées respectives, invariance qui conduit à la formule mathématique complète de la pente.

4.2. Deuxième exemple : introduction des concepts de statistique descriptive

L'objectif d'enseignement est l'acquisition des concepts usuels en statistique descriptive, à savoir : populations, échantillons, variables, types de variables, regroupement de données et mesures de tendance centrale. Nous proposons dans ce cas comme *projet d'action pratique* la conception et la construction d'une chaise ou plus généralement d'un siège, en s'appuyant sur une enquête à élaborer. Le problème étant de concevoir et réaliser un siège, une première phase a consisté en une discussion orientée vers la recherche des facteurs importants pour la conception. Cela amena les élèves à considérer des variables relevant d'aspects différents : taille, poids, âge et revenus des clients potentiels, matériaux, couleurs et coût du produit, etc.

Dans une deuxième phase, on sélectionna les données à retenir et on fut amené à catégoriser les variables associées, en variables nominales, ordinales ou d'intervalles. Une troisième phase consista à discuter de la manière d'obtenir des données en quantité suffisante pour constituer des représentants valables pour les tailles, revenus, couleurs, etc. Cela conduisit naturellement au concept d'échantillon, puis au regroupement de données. C'est la nécessité du choix d'une donnée représentative de la population et des variables qui a alors fait directement aboutir aux diverses mesures de tendance centrale.

Il y a lieu de noter que tout au long de ce processus, on élabora des exercices proposant des problèmes inverses et qu'on laissa toute liberté de méthode et d'emploi de techniques pour obtenir les valeurs visées. Par exemple on proposait un ensemble de données en demandant de quelle catégorie elles relevaient, puis on inversait en demandant des données qui soient de type nominal, ordinal, etc.

On demandait aussi, lors du calcul des diverses mesures de tendance centrale, de voir le problème qualitativement et quantitativement. Indiquons que furent mises au point des séances spécialement consacrées à des concepts tels que variable, variable aléatoire, etc. issus des analyses des concepts antérieurs et nécessaires pour le thème en étude. Il en fut de même pour la moyenne, en raison de sa place particulièrement importante.

En parallèle à la construction de tables de distributions de fréquences apparaissait aussi un histogramme dont la représentation était demandée à partir des données de la table et, inversement, des exercices demandant de remplir une table à partir d'un histogrammeétaient proposés. De plus, on identifiait sur des histogrammes les mesures de tendance centrale. Signalons l'utilisation d'un tableur, rendant attractif un ensemble de tâches à effectuer, qui serait apparu horriblement lourd et fastidieux sans cet instrument.

5. Vers une généralisation, à la lumière de quelques observations

En l'absence d'outil spécifique, il pourrait se faire que ce qui vient d'être présenté pose au professeur un sérieux problème, dans la mesure où le fait de mener à bien une méthodologie telle qu'indiquée requiert un effort supplémentaire de sa part. En contrepartie, les avantages sont énormes :

- Premièrement, il s'agit d'une opportunité pour tous les élèves, même s'ils n'ont pas parfaitement assimilé les notions antérieures pour diverses raisons, d'être à même de suivre le nouveau développement qui leur est présenté.
- En second lieu, il nous permet d'éviter au départ le symbolisme particulier requis pour la résolution du problème. De plus, si l'on réussit à éveiller l'intérêt de l'élève pour le problème présenté ou pour le projet d'action pratique, la connaissance à enseigner surgit comme une nécessité et non comme quelque chose d'imposé par le professeur.
- Troisièmement, une association est établie entre l'opération que l'on désire enseigner et ses domaines d'application dans la vie quotidienne. Autrement dit, l'énoncé du problème doit se situer dans les possibilités de la structure cognitive de l'apprenant, aboutissant ainsi à la mise en relation significative de la nouvelle connaissance avec les connaissances antérieurement acquises, ce qui produit d'emblée un ancrage plus ferme des nouvelles idées (Ausubel et al. 1998, p. 111.)

Pour favoriser de telles pratiques, il vaut alors la peine de promouvoir l'usage par les professeurs d'une panoplie d'instruments pédagogiques propres à faciliter leur tâche, à leur permettre aussi de concentrer leur attention sur les apprentissages de leurs élèves. Certains de ces instruments sont de plus équipés de modules d'enregistrement pour le suivi des travaux d'élèves.

Au service du premier exemple cité, un logiciel spécifique (LIREC, Cuevas 1994) a été élaboré. Il s'est avéré convivial et a effectivement permis aux élèves non seulement d'avancer à leur rythme, mais de choisir leur progression parmi les activités proposées. Il nous a aussi permis, grâce aux enregistrements des travaux d'élèves, de repérer certaines difficultés que des élèves ont pu rencontrer. Des changements de registres sont apparus parmi ces difficultés, comme le fait d'exprimer la longueur orientée d'un segment sous la forme qui était demandée, c'est à dire en employant des variables. Nous avons pu aussi observer que, dans le registre algébrique, les traitements à effectuer sont coûteux pour beaucoup d'élèves, chaque pas représentant pour eux un travail important.

A propos du second exemple cité (concepts statistiques), nous avons déjà mentionné l'utilisation de cet outil qu'est le tableur-grapheur. Toutefois, si un tel instrument s'avère extrêmement efficace pour les traitements, ce n'est pas en soi un didacticiel, auquel seraient associés des enregistrements des résultats au cours du temps, donnant au professeur la possibilité de suivre l'évolution de ses élèves. Nous pourrions signaler de la même manière les possibilités qu'offrent, pour diverses études, les logiciels de calcul formel et ceux de construction géométrique. Pour tous ces outils, il revient au professeur de se doter des instruments complémentaires lui permettant le suivi de la progression de ses élèves.

Par ailleurs, la mutualisation des pratiques des enseignants, grâce au réseau Internet, ouvre des perspectives véritablement séduisantes : elle peut éviter que chacun ait tout à construire chaque fois en passant par les mêmes errements ou en se heurtant aux mêmes obstacles, enrichir considérablement les idées, amener à des confrontations de points de vue, conduire à renouveler les sujets d'évaluation.

Tout cela est toutefois trop beau ; nous ne serions pas les premiers à mettre en garde contre une illusion extrêmement tentante : celle de croire que les nouveaux outils sont transparents pour leurs utilisateurs et n'exigent aucune compétence particulière. Un travail d'investigation didactique considérable reste à conduire, ne nous le cachons pas. L'un de ses objectifs les plus importants sera de préciser des *scénarios d'application* de l'ingénierie proposée et d'en mesurer les effets. En annexe 1 est présentée l'ébauche d'un scénario pour l'étude des escaliers, à titre d'exemple d'étude exploratoire. Un tel scénario sera achevé lorsque toutes les phases de l'enseignement, de l'introduction à des évaluations terminales (voir à titre d'exemple en annexe 2 un sujet proposé en France pour le recrutement d'élèves-professeurs), seront prises en compte, avec leurs constituants (références au contenu enseigné, prérequis, découpage en séquences et objectifs propres à chacune, résultats attendus) et des effets auprès de la population étudiante, repérés et mesurés. On pourra se rapporter dans un tel but à l'ingénierie de recherche exposée par Michèle Artigue et abondamment utilisée depuis lors.

6. Conclusions

On a proposé une ingénierie didactique pour l'enseignement des mathématiques. Le modèle retenu extrait ses éléments théoriques de l'école active, de la psychologie de l'intelligence de Jean Piaget et du programme didactique élaboré par Hans Aebli, des études didactiques récentes sur les représentations. Insistons sur le fait qu'il s'agit d'un modèle qui est particulièrement destiné à l'enseignement des mathématiques et qui s'applique à l'éducation post-élémentaire.

Les difficultés les plus grandes que nous avons rencontrées en essayant d'appliquer notre ingénierie didactique, ou seulement certains de ses principes, à l'enseignement d'un concept mathématique sont au nombre de trois.

La première est de trouver un problème approprié à l'élaboration d'un plan d'action pratique, ayant à satisfaire aux caractéristiques suivantes :

b) Etre suffisamment explicite et simple pour être bien compris, sans forcément que sa solution soit simple.
c) Etre attractif pour la majorité des élèves ou étudiants.
d) Etre suffisamment riche pour contenir dans sa résolution le(s) concept(s) mathématique(s) à enseigner.

C'est un défi à relever par le professeur, qui doit être sensible aux préoccupations de ses élèves et qui doit être en mesure de poser des problèmes touchant au sport, à l'économie, la physique, l'astronomie, l'administration, etc. et non pas justifier d'emblée la mathématique par la mathématique.

La seconde grande difficulté est de procéder à une inspection afin de chercher quels concepts et quelles capacités sont requises pour que l'élève atteigne la compréhension du concept à enseigner. Pour le professeur, cette recherche représente un travail complexe et fastidieux, parce que communément l'enseignant suppose de manière implicite une série de connaissances et de capacités que l'élève ne possède souvent pas. On peut recommander à cette fin de dessiner une sorte de *carte conceptuelle*, mettant en évidence les familles de concepts mathématiques nécessaires à l'acquisition souhaitée.

En dernier lieu, il convient de disposer de facilités pour pouvoir présenter un concept mathématique dans les divers registres sémiotiques qui lui sont propres. Avec l'ordinateur, nous avons rencontré un outil inestimable pour pouvoir représenter, moyennant modélisation, les divers registres associés.

Quelques résultats : Nos réalisations les plus importantes ont été faites sous forme de logiciels, permettant des apprentissages tutorés avec l'ordinateur. L'architecture des systèmes y reste conditionnée au schéma didactique. Une telle proposition didactique a été éprouvée avec succès lors d'expérimentations, au cours desquelles a pu être vérifiée l'efficacité en termes d'apprentissage, par une sensible élévation des notes scolaires moyennes obtenues (Cuevas, 1994 ; Manriquez, 1995 ; Moreno, 1997 ; Bueno, 2001.)

Nous avons la ferme conviction qu'on peut élever ou améliorer l'éducation mathématique, ou l'enseignement des concepts mathématiques, à quelque niveau de profondeur que ce soit, au moyen d'une ingénierie didactique appropriée, notamment celle que nous présentons. Nous considérons qu'on peut au contraire lui faire obstruction par des méthodes d'enseignement produisant chez l'individu une conception de la mathématique comme quelque chose de purement composé de formules et de techniques incompréhensibles, laborieuses et inutilisables. Malheureusement, que ce soit de manière consciente ou inconsciente, c'est une telle conception qui apparaît de nos jours comme un cas fréquent dans notre système éducatif, du moins au niveau de l'enseignement du second degré.

> *Pour la grande majorité des étudiants, le calcul n'est pas un corps de connaissances, mais un répertoire de modèles à imiter.* (E. E. Moise cité par Tall, 1996, p. 290.)

Dans cet article, nous avons seulement évoqué ce que peut être un programme de travail et de recherches s'intéressant à l'environnement professionnel du professeur aujourd'hui. Le traditionnel manuel scolaire, aussi bien fait soit-il, accompagné de son livre du maître, la salle de classe et son tableau, les cahiers et les copies, ne suffisent plus à introduire les élèves dans le monde où ils auront à trouver leur place et à œuvrer. Et c'est bien là que réside un enjeu auquel l'enseignement mathématique doit apporter une contribution essentielle.

BIBLIOGRAPHIE

ADJIAGE Robert, 2001, Maturation du fonctionnement rationnel, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, volume 7, 7 – 48, IREM de Strasbourg.

AEBLI Hans, 1966, *Didactique psychologique*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

AEBLI Hans, 1995, *12 formas básicas de enseñar*, NARCEA, España.

ARNOLD V.I., 1996, *Sur l'enseignement des mathématiques*, Palais de la Découverte, Paris.

ARTIGUE Michèle, 1988, *Ingénierie didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques volume 9/3, 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage.

AUSUBEL D., HANESISIAN, H., NOVAK J., 1999, *Psicología educativa*, Ed. Trillas. México.

BUENO G, 1999, *TUTOREST, un tutor computacional para la enseñanza de la estadística descriptiva*, Tesis de doctorado, CINVESTAV-IPN, México.

CUEVAS Armando, 1994, *Sistema Tutorial Inteligente LIREC,* Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

DUVAL Raymond, 1988, Graphiques et Equations : L'Articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg.

DUVAL R., 1998, Didáctica, *Investigaciones en Matemática Educativa II,* Editor F. Hitt, Gpo. Edit. Iberoamérica, México.

DUBINSKY Ed., 1991, Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking, *Advanced Mathematical Thinking*, Edited by David Tall, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

HALMOS Paul R., 1994, What is teaching? *American Mathematical Monthly*, n° de novembre.

IREM de Strasbourg, 1989, *Mathématiques classe de 3e*, Istra – Casteilla, Paris.

JANVIER Claude, 1987a, Conceptions and representations : The circle as an Example*, Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, USA.

JANVIER Claude, 1987b, Translation Processes in Mathematics Education *; Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* Lawrence Erlbaum Associates, USA.

LABINOWICZ Ed., 1998, *Introducción a Piaget, Pensamiento, Aprendizaje Enseñanza*, Addison Weley Longman. México.

MANRIQUEZ P., 1995, *Diseño de las experiencias de aprendizaje para el desarrollo de un curso de Geometría Analítica con el auxilio del Sistema Tutorial Inteligente LIREC*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo. México.

MORENO S., 1997, *Experimentación educativa en el aula: Uso del Sistema Tutorial Inteligente LIREC versus la enseñanza tradicional en Matemáticas III del sistema CCH-UNAM*, Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

PIAGET Jean, 1974, *El Estructuralismo*, Oikos-tau, S. A. Ediciones, España.

PIAGET Jean, 1983, *Seis estudios de psicología*, Ariel, México.

PIAGET Jean, 1967, *La Psychologie de l'Intelligence,* Armand Colin, Paris.

PIAGET Jean, 1968, GRIZE Jean-Blaise, SZEMINSKA Alina, VINH Bang, *Epistémologie et psychologie de la fonction*, P.U.F. Paris.

TALL David, 1996, "Functions and Calculus", *International Handbook of Mathematics Education*, chapter 8, Kluwer Academic Publishers, Pays-Bas.

TALL D. & VINNER S, 1981, Concept Image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125-147.

VERGNAUD, Gérard, 1987, Conclusion*, Problems of Representation in theTeaching and Learning of Mathematics*, C. Janvier ed., Lawrence Erbaum Associates, Canada.

VINNER S., 1983, Concept definition, concept image and the notion of function, *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Ciencas de la computación CIMAT et
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV – IPN, México
<ccuevas@mail.cinvestav.mx>

IREM de Strasbourg
France
<pluvin@math.u-strasbg.fr>

Annexe 1 : Ebauche de scénario pour les escaliers

Phase exploratoire : Le professeur a intérêt à se placer lui-même dans les conditions que rencontreront ses élèves. Pour cela, on peut prendre dans son proche environnement des mesures relatives à divers escaliers rencontrés. Voici un exemple de données réelles recueillies dans une maison, rassemblées en un tableau.

Localisation	Matériau	Giron en cm	Contremarche en cm	Impression
Entrée	Pierre	32	17,5	Confortable
Accès aux étages	Bois	27	17	Confortable
Accès au sous-sol	Ciment	24	18	Etroit et raide
Jardin	Pierre	29,5	21	Marches hautes
Véranda	Ciment	25	18,5	Raide

Faire un tel tableau conduit à fixer le vocabulaire, à se rendre compte de l'incidence des mesures sur l'utilisation (d'où la colonne où sont consignées des impressions.) On est aussi amené à choisir et donc à délimiter le sujet traité ; la question de la volée et des formes d'un escalier est par exemple apparue, mais elle n'a pas été retenue pour le tableau. Pour cette raison, les nombres de marches n'y sont par exemple pas mentionnés.

Notons au passage que ce même sujet pourrait être intéressant pour un recueil de données statistiques. A envisager pour une autre étude, moyennant une réflexion supplémentaire…

Phase de réalisations (modèles, maquettes, représentations) : Un choix possible est de faire des escaliers en pliant du papier. Une feuille de format A4 coupée en deux dans la longueur fournit deux bandes d'une trentaine de centimètres (29,7 cm exactement) chacune. Elles seront pliées, superposées et assemblées par collage à leurs extrémités : l'une n'aura qu'un pli unique et servira à faire le sol et un mur, l'autre sera pliée pour former l'escalier proprement dit. Il est facile, en faisant du pliage accordéon, d'obtenir un escalier dont les mesures des marches sont les mêmes en hauteur et en largeur. Plus difficile, nécessitant des calculs qui mobilisent la proportionnalité est l'obtention d'un escalier à marches ayant un profil rectangulaire autre que carré.

Constat, amusant : l'ensemble assemblé sol-mur et escalier est parfaitement pliable. Un travail rapide sur CabriII (un programme, non présenté ici, a été élaboré) conduit à énoncer un résultat élémentaire de géométrie, en rapport avec les parallélogrammes articulés : *Tout escalier est complètement repliable*. On rencontre d'ailleurs réellement çà et là des escaliers pliables, par exemple pour accéder à des combles. On s'écarte là quelque peu des questions de pente, mais les déplacements effectués font notamment observer des alignements, qui sont bel et bien au cœur du sujet à étudier.

Cela est inhérent à la phase de réalisations : l'un ou l'autre détour surgit immanquablement des problèmes rencontrés. Certains peuvent s'avérer très intéressants pour l'étude d'un thème du programme mathématique autre que celui qui est dans le collimateur ; ils peuvent alors être mis en réserve, en quelque sorte au sein d'une "banque" de la classe, pour être exploités le moment venu. D'autres peuvent donner lieu à une présentation additionnelle, séparée du traitement du sujet proprement dit à l'étude. Le savoir-faire du professeur comme animateur ou directeur de recherches est bien évidemment sollicité pour ces mises en valeur des découvertes dénichées par ses élèves.

Phases de traitement mathématique de la notion : On retrouvera à cette occasion ses classiques de didactique, à commencer par la nécessité de sortir du seul sujet des escaliers, ce qui empêche de continuer à se mettre dans la situation de l'élève. Celle-ci est désormais conditionnée par des décisions qui incombent au professeur envisageant un panorama des mises en œuvre et applications de la notion de pente. Ici c'est clairement l'apparition de signes pour les droites du plan repéré qui demande une approche que les escaliers ne permettent pas (on est amené aussi bien à y monter qu'à en descendre.) Pour cette approche générale, il vaut la peine d'envisager une pratique prenant en compte la distinction des trois champs ou domaines d'apprentissage, que Robert Adjiage propose (voir Adjiage, 2001) : *l'expérience physique*, *le modèle mathématique sous-jacent* et *les moyens d'expression sollicitables pour développer le modèle*. Le modèle mathématique est ici le plan cartésien avec ses droites.

Les phénomènes d'évolution sont, entre autres, de bons "candidats" à intervenir dans l'élargissement nécessaire des points de vue : croissances ou allongements d'une part, érosions ou évaporations ou usures (exemple : épaisseur des gommes d'un pneu, si l'on pense à des pentes faiblement négatives) d'autre part, pour ne pas s'en tenir aux sempiternelles données d'évolution de marchés ou de populations, qu'il ne faut pas néanmoins manquer d'examiner. En effet, ce sont notamment des besoins d'extrapolation pour des prévisions qui conduisent à des mobilisations dans des calculs des notions présentées à propos des droites du plan cartésien. Mais une distinction fondamentale apparaît à l'occasion de la représentation de données hétérogènes, comme durée et prix, par rapport aux situations purement géométriques, comme celle de l'escalier : celle entre *pente* et *coefficient directeur*. Dans le second cas, la considération d'une tangente d'angle n'a pas de sens effectif, puisque les choix d'unités sur les axes ne peuvent qu'être arbitraires. Mais un coefficient directeur se trouvera en contrepartie affublé d'une dimension. Ce pourra être par exemple un allongement en cm par kg pour un ressort, ou encore un prix en Euro par km si l'on souhaite comparer des prix à payer selon le nombre de kilomètres parcourus auprès de deux sociétés de location de véhicules (problème de brevet 1987 de l'Académie de Bordeaux, repris dans un manuel scolaire, voir : IREM de Strasbourg, 1989.)

Bref, une question de choix du *cadre mathématique* se pose : géométrie euclidienne ou géométrie affine ? Pour le professeur ce choix dépend des instructions officielles accompagnant les programmes scolaires, ce qui ne va évidemment pas à l'encontre de son propre examen personnel. Pour l'institution, un véritable débat se trouve instauré, à propos duquel les didacticiens ont leur mot à dire. D'une part, le plan affine est plus malléable, plus général, donc mieux propre à des traitements de données de toute sorte, d'autre part les instruments de dessin ou les outils informatiques (après réglage toutefois des proportions largeur – hauteur) opèrent dans un plan homogène, donc euclidien.

Ce choix mathématique arrêté, la route du professeur est en principe libre pour l'exploitation pédagogique. Celle ci sera fonction des principes didactiques auquel il souhaite se conformer et de leur mise œuvre précise (voir par exemple Raymond Duval, 1988), elle dépendra aussi des instruments auxquels il a accès et de son savoir-enseigner auprès du public qu'il accueille, encadre et cherche à faire progresser.

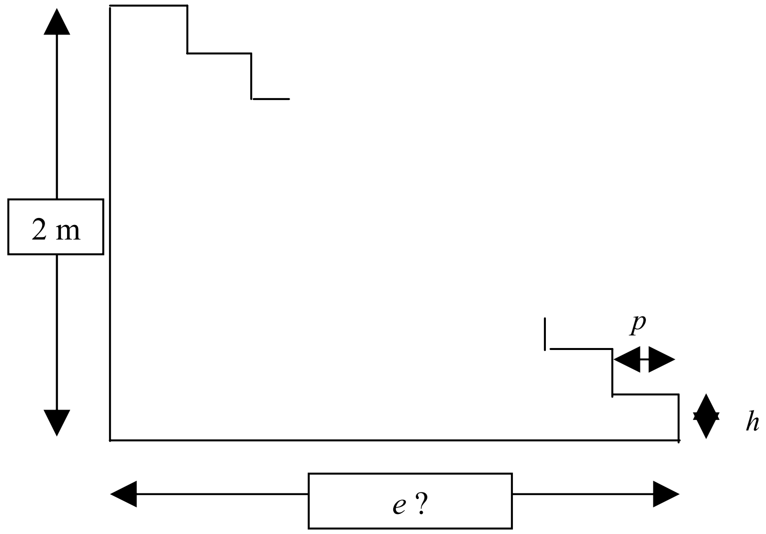
Nous ne ferons qu'évoquer dans cette annexe le sujet de l'évaluation. En effet, le lecteur pourra lui-même trouver de nombreuses références sur ce sujet, en raison de son importance pédagogique évidente. Simplement à titre d'illustration, l'annexe 2 présente un extrait d'épreuve de concours pour le recrutement d'élèves professeurs.

Annexe 2 : Un exercice extrait d'une épreuve d'accès à la première année d'IUFM (Alsace, session 2001)

Un escalier de 10 marches a un dénivelé de 2 m. Les normes en vigueur indiquent que la hauteur h d'une marche doit être liée à sa profondeur p par la relation (en cm) :

$$60 \leq 2h + p \leq 63.$$

Parmi les nombres suivants, lesquels sont des valeurs acceptables pour l'encombrement au sol e exprimé en mètres ?



A 6,1 B 5,8 C 2,2 D 2,1 E 1,8

A	B	C	D	E

<u>Note 1 :</u> *On remarquera dans ce sujet le recours à un vocabulaire non spécialisé, mais choisi de manière à éviter des confusions (le mot profondeur d'une marche notamment.)Pour ce qui est des « normes en vigueur », sont–elles réelles ? (Les marches acceptées semblent étroites)*

<u>Note 2</u> *: Le tableau à remplir pour répondre soulève une question classique d'évaluation. On demandait de mettre des croix dans les cases convenables. Or il faudrait que chaque valeur donne lieu à acceptation ou rejet, afin qu'il soit clair pour les candidats qu'une absence de réponse pour une valeur ne va pas être prise pour un rejet. Avoir à choisir entre une case OUI et une case NON sous chacune des lettres A, B, C, D, E ne compliquerait pas sensiblement la tâche de réponse et éviterait l'ambiguïté. Ce serait donc préférable.*