Corrigé du Rallye Mathématique d'Alsace Terminale
Cru 2003

Exercice 1

On supprime une case d'un échiquier carré qui en comporte 64.

Est-il possible de recouvrir les cases restantes à l'aide de triminos ?

Solution

(d'après un message de notre correspondant Pierre Renfer)

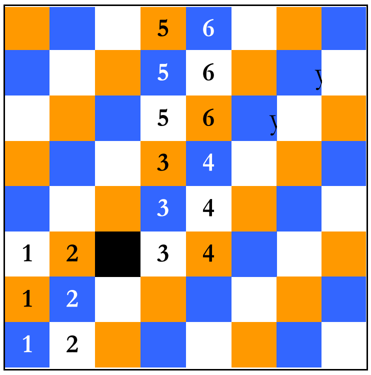
Au lieu du coloriage habituel de l'échiquier en noir et blanc, procédons à un coloriage tricolore de la manière représentée sur la figure : depuis la case inférieure gauche (la case A1 selon la désignation usuelle aux échecs) affectée de la couleur notée **a**, les couleurs se succèdent horizontalement dans l'ordre **a**, **b** et **c** et verticalement dans l'ordre **a**, **c** et **b.** Ainsi, un trimino placé sur l'échiquier recouvre toujours les trois couleurs.

Nous remarquons que la couleur **a** apparaît sur 22 cases, soit une de plus que les deux autres couleurs, qui apparaissent chacune sur 21 cases. Ce ne peut donc être qu'en supprimant une case de cette couleur que l'on peut espérer qu'un recouvrement par les triminos soit possible.

c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	$\underline{a}$	b	c	$\underline{a}$	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b
b	c	$\underline{a}$	b	c	$\underline{a}$	b	c
c	a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a	b

Mais si un tel recouvrement est réalisé, on peut le faire pivoter d'un quart de tour pour obtenir un nouveau recouvrement de l'échiquier privé d'une case, laquelle aura elle aussi pivoté d'un quart de tour. Et ce n'est possible que si cette case est aussi de la couleur **a**. Il nous faut donc chercher sur l'échiquier s'il y a une case de couleur **a** qui reste de couleur **a** quand on fait pivoter l'échiquier d'un quart de tour. Cela revient à rechercher si l'on peut trouver sur l'échiquier quatre cases de la couleur **a** disposées en carré. C'est bien le cas : sur la figure du haut, les couleurs dans ces cases sont désignées par des lettres soulignées.

Et la figure ci-contre indique un recouvrement de l'échiquier privé d'une telle case (C3 est noircie) : on a représenté six triminos placés verticalement, tous les autres pouvant être placés horizontalement.



Complément. En ligne avait été d'abord indiquée la solution ci-après, convenant pour un échiquier privé d'une case de bord (un cas qui est souvent considéré dans de tels problèmes consiste à retirer de l'échiquier une case de coin), mais susceptible d'être en défaut pour la suppression d'une case intérieure. Nous avons choisi de la laisser en ligne en précisant l'argument (*) qui peut être discuté. D'une part il est toujours intéressant de procéder à l'examen critique d'un raisonnement, d'autre part l'extension qui est proposée pour un nombre arbitraire de cases mérite d'être conservée.

Considérons la couverture par des triminos d'un carrelage ayant huit colonnes, mais dont le nombre de rangées peut être illimité. Chaque trimino peut être placé soit horizontalement, auquel cas il apparaît dans trois colonnes successives, soit verticalement. Fixons notre attention sur les triminos verticaux. Il y en a au moins 2 qui apparaissent dans la rangée 1 et qui vont alors jusqu'à la rangée 3. D'autres triminos verticaux peuvent intervenir dans la couverture des rangées 2 et 3 ; il est important de noter que si c'est le cas, leur nombre est un multiple de trois[1].

…								
9								
8								
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								

[1] Cet argument est valable sous l'hypothèse que l'on recouvre complètement les rangées considérées. Dans le cas du recouvrement qui a été indiqué pour l'échiquier privé d'une case sur la rangée 3, cette hypothèse n'est pas vérifiée.

Ainsi, il y aura de nouveau au moins 2 triminos verticaux qui apparaîtront dans la rangée 4 et iront jusqu'à la rangée 6. Et de même au moins 2 triminos verticaux allant de la rangée 7 à la rangée 9. Ôter une case *de la rangée 8* ne permettra donc pas le recouvrement souhaité. Par conséquent, ôter une case *du bord* d'un échiquier 8 × 8 ne conduit pas à une surface recouvrable par les triminos considérés.

Remarque et généralisation : *Le même problème pour un échiquier 7 × 7 peut aboutir à une possibilité de le recouvrir. En effet, des triminos verticaux apparaissant aux rangées 1, 4 et 7 seraient dans ce cas en nombre au moins égal à 1. Ôter une case à la rangée 7 fait alors disparaître l'objection à un recouvrement. Et il est facile de préciser une façon d'obtenir ce recouvrement si la case ôtée est une case de coin : on place des triminos verticaux sur la colonne qui est privée de la case de coin et des triminos horizontaux partout ailleurs.*

D'une manière générale, un échiquier n × n privé d'une case de coin peut être recouvert par des triminos horizontaux et verticaux si et seulement si n est de la forme n = 3p + 1, c'est à dire si n est égal à 4 ou 7 ou 10 etc.

Exercice 2

On considère la somme : S = 1+2+…..+30.

Dans cette somme on supprime un certain nombre de signes "+". Par exemple 2+3 est remplacé par 23 ou 2+3+4 par 234, pour obtenir une nouvelle somme S'.

Quel est le nombre minimal de signes "'+" à supprimer pour obtenir une somme S' valant 3030 ?

Solution

Remarquons tout d'abord qu'en vertu d'une formule qu'aucun candidat au rallye n'ignore,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465.$$

Dans la somme

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 28 + 29 + 30,$$

faire disparaître un signe « + » situé devant un nombre à 1 chiffre (ainsi remplacer 8 + 9 par 89) revient à multiplier par 10 la valeur du nombre précédent, et faire disparaître un signe « + » situé devant un nombre à 2 chiffres (par exemple, remplacer 9 + 10 par 910) revient à multiplier par 100 la valeur du nombre précédent. Notons a l'entier qui précède le signe « + » que l'on fait disparaître. On change S en $S' = S + 9a$ dans le premier cas et en $S' = S + 99a$ dans le second.

Il est clair que $S + 9a$, avec $a < 9$, est plus petit que la valeur demandée 3 030, donc ne peut pas convenir. Considérons alors la possibilité que $S + 99a = 3\,030$, d'où $99a = 3\,030 - 465$ et donc $99a = 2\,565$. Comme 2 565 est divisible par 9 mais n'est pas divisible par 11, il n'y a pas de solution.

Essayons alors de faire disparaître deux signes « + » dans S. Si ces deux signes ne sont pas voisins, on est ramené à deux études du même type que précédemment et nous allons y revenir. Auparavant, on peut exclure la disparition de deux signes « + » voisins, car alors le résultat atteint serait ou bien nettement trop petit, comme c'est le cas si l'on remplace 7 + 8 + 9 par 789, ou nettement trop grand, comme c'est le cas si l'on remplace 8 + 9 + 10 par 8910. Pour deux signes « + » non voisins, il suffit de considérer

$$S + 9a + 99b, \text{ avec } a < 9 \text{ et } b > 8.$$

En effet, pour $S + 9a + 9b$, avec a et b inférieurs à 9, la valeur atteinte serait trop petite et pour $S + 99a + 99b$, avec a et b au moins égaux à 9, on retomberait sur l'objection précédente de non-divisibilité par 11.

L'égalité

$$S + 9a + 99b = 3\,030$$

revient à $9a + 99b = 2565$. Or la division euclidienne de 2 565 par 99 s'écrit

$$2\,565 = 25 \times 99 + 90.$$

Même si l'on prend la plus grande valeur possible pour b, soit $b = 25$, la valeur qu'il faudrait affecter à a serait égale à 10, qui dépasse la plus grande valeur autorisée, à savoir 8.

Reste à considérer la disparition de 3 signes « + ». L'étude précédente fournit une réponse, en remplaçant simplement a par $a_1 + a_2$, avec a_1 et a_2 inférieurs à 9 et $a_1 + a_2 = 10$. Et cette fois-ci, on aboutit à des solutions acceptables.

Prolongement possible : *Les curieux se demanderont si l'on peut atteindre 3 030 en supprimant plus de 3 signes « + » dans S…*

Exercice 3

Les cent membres d'une association reviennent du casino et s'asseyent autour d'une table ronde pour faire le bilan. Au cours de la soirée, l'association a gagné mille Euros. Le président en a gagné soixante. Il désire connaître les gains et les pertes de chacun des membres et constate que six personnes assises l'une à côté de l'autre autour de la table n'ont, à elles six, jamais gagné davantage que lui.

Pouvez-vous aider le président dans sa tâche ?

Solution

D'humeur généreuse, les 100 membres de l'association décident de placer chacun 10 euros sur la table pour les utiliser au bénéfice de l'association. Ainsi les 1 000 euros gagnés au casino se retrouvent-ils mis dans un circuit honorable et l'énoncé gagne pour sa part en simplicité. Les conditions de ce nouvel énoncé sont en effet :

- gain du président égal à 50 euros,
- bilan global nul (ce que les uns ont donné, les autres l'ont reçu),
- pour tout ensemble constitué de six voisins de table, bilan négatif ou nul.

En fait, le bilan ne peut être que 0 pour tout ensemble de six voisins de table, car si un bilan était strictement négatif pour un groupe donné de six voisins de table, les conditions énoncées empêcheraient de le compenser pour aboutir à un bilan global nul[2]. On peut ensuite considérer la réunion de 16 groupes successifs de 6 voisins, tous à bilan nul, qui laisse échapper un ensemble de 4 voisins ; le bilan d'ensemble étant nul, il en est donc de même pour celui de ces quatre voisins. Leur complémentaire dans un ensemble de 6 est constitué de deux voisins, pour lesquels on obtient encore un bilan nul. Ainsi toutes les paires de voisins donnent-elles lieu à un bilan nul : ce que l'un a reçu a été donné par l'autre. Le président ayant reçu 50 euros, il en sera donc de même pour tous les membres de numéro pair, alors que chacun des membres de numéro impair aura au contraire donné 50 euros. En ajoutant 10 euros à chacune de ces sommes pour revenir à l'énoncé initial, on obtient la réponse qui a été indiquée.

---

[2] Dans un aimable message électronique, une correspondante, Fabienne K., exprime le souhait que nous développions cet argument. *Car,* nous écrit-elle*, si l'on considère des ensembles disjoints de 6 voisins, il reste pour arriver à 100 un ensemble de 4 voisins. Pourquoi faut-il écarter la possibilité qu'un bilan positif pour ces 4 voisins équilibre le bilan strictement négatif envisagé ?* Vous avez raison Fabienne, ce point doit être précisé. Pour ce faire, considérons un recouvrement de l'ensemble des 100 membres par des ensembles disjoints, chacun constitué de 4 voisins, l'un de ces ensembles étant précisément celui dont le bilan est supposé strictement positif. Pour annuler ce bilan strictement positif, l'un au moins des autres ensembles de 4 voisins doit, lui, donner lieu à un bilan strictement négatif. Et c'est là qu'il apparaît une impossibilité, puisque le complémentaire de ces 4 voisins, constitué de 96 membres, se partitionne en seize ensembles disjoints de 6 voisins, donnant lieu chacun par hypothèse à un bilan négatif ou nul.

CORRIGÉ DU RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE PREMIERE CRU 2003

Exercice 1

Quelle est l'aire maximale d'un triangle dont les trois sommets appartiennent aux côtés d'un carré de côté 1 ?

Solution

Partons de trois points distincts K, L et M, quelconques sur les côtés du carré considéré. Soit A le sommet du carré le plus éloigné de la droite LM. La distance de A à la droite LM est évidemment supérieure (au sens large) à celle de K à cette même droite, de telle sorte que l'aire du triangle ALM est supérieure à celle du triangle KLM. Soit alors B le sommet du carré le plus éloigné de la droite AL. On remarque que nécessairement AB est un côté du carré. L'aire du triangle ABM est supérieure à celle du triangle ALM. Quel que soit alors le choix de M sur le côté parallèle à AB, l'aire du triangle ABM est égale à 1/2. Et sinon cette aire est inférieure à 1/2.

Récapitulons : On peut agrandir l'aire de tout triangle dont deux sommets ne sont pas deux sommets voisins du carré ; un triangle dont deux sommets sont des sommets voisins du carré a une aire au plus égale à 1/2. La valeur 1/2 représente donc le maximum de l'aire, maximum atteint pour une infinité de triangles.

Exercice 2

Claudine possède un chandelier contenant n bougies de même taille. Elle allume ce chandelier pendant n dimanches de la manière suivante : le premier dimanche, elle fait brûler une bougie pendant une heure ; le deuxième dimanche, elle fait brûler deux bougies convenablement choisies pendant une heure, et ainsi de suite jusqu'au n-ième dimanche où elle fait brûler les n bougies pendant une heure.

Pour quelles valeurs de n est-il possible que toutes les bougies soient entièrement consumées à l'issue du n-ième dimanche ?

Dans ce cas, donner une marche à suivre.

Solution

Prenons pour unité l'*heure×bougie*. Par exemple, deux bougies qui brûlent toutes les deux pendant une heure consomment 2 *heures×bougies*. Au bout des n dimanches, le nombre d'*heures×bougies* consommées est, d'après l'énoncé :

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n,$$

somme qui est égale à n(n+1)/2 selon une formule bien connue. Ce nombre sera un multiple de n à la condition que (n+1) soit divisible par 2, c'est à dire que n soit impair.

Réciproquement si n est impair, une combustion des bougies respectant les conditions de l'énoncé peut être organisée par exemple grâce à un tableau comme celui présenté pour 9 bougies.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	1
3	4	5	6	7	8	9	1	2
4	5	6	7	8	9	1	2	3
5	6	7	8	9	1	2	3	4
6	7	8	9	1	2	3	4	5
7	8	9	1	2	3	4	5	6
8	9	1	2	3	4	5	6	7
9	1	2	3	4	5	6	7	8

Un tableau de marche pour 9 bougies

Les bougies ont été numérotées de 1 à n (dans l'exemple, n = 9). On voit comment le tableau est rempli, en passant d'une ligne à la suivante par une permutation circulaire. Lorsque les cases au-dessus de la diagonale (les cases colorées) ont été éliminées, les bougies à utiliser un dimanche de numéro donné sont celles de la ligne commençant par ce numéro : par exemple pour nos 9 bougies, on fera brûler le 6-ième dimanche les bougies numérotées 6, 7, 8, 9, 1, 2. Le tableau est symétrique par rapport à la diagonale ; sur la diagonale, les numéros évoluent de deux en deux (1, 3, 5, etc.) de telle sorte que pour n impair, c'est à dire n = 2p + 1, tout numéro apparaît une fois sur la diagonale. Par conséquent, toutes les bougies seront bien utilisées le même nombre de dimanches, à savoir p + 1 (dans l'exemple avec 9 bougies, chacune est utilisée 5 dimanches sur les 9).

Il n'y a pas qu'une seule procédure possible. Ainsi, pour 5 bougies, voici deux présentations dimanche après dimanche des bougies à utiliser, toutes deux acceptables :

1-23-345-4512-51234 (méthode précédemment indiquée), 1-12-345-2345-12345.

Exercice 3

Grains de riz

Tout le monde connaît l'anecdote de ce roi qui s'engagea à récompenser l'inventeur du jeu d'échec selon ses souhaits, alors que celui-ci demandait à ce qu'on lui donne un grain de riz pour la première case de l'échiquier, deux grains de riz pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de riz à chaque case, jusqu'à la 64$^{\text{ème}}$.

On connaît moins la façon dont le roi se tira de cette situation : il exigea de ses sept seigneurs qu'ils fournissent chacun une part égale de la récompense arrondie au grain de riz inférieure. Lui-même se contenterait de fournir les grains de riz nécessaires pour faire le compte exact.

Combien le roi dut-il fournir de grains de riz ?

Solution

La somme de trois puissances consécutives de 2 est un multiple de 7. En effet, une telle somme s'écrit

$$2^a(1 + 2 + 4) = 7 \times 2^a.$$

Or $64 = 21 \times 3 + 1$. Ainsi, dans la somme des 64 puissances de 2 depuis $2^0 = 1$ jusqu'à 2^{63}, on peut former 21 groupes distincts de trois puissances de 2 consécutives, dont la somme est un multiple de 7, et il en reste alors une isolée. Le plus simple est de procéder à ces groupements en remontant de la fin (2^{63}) vers le début, ce qui amène à prendre en compte toutes les puissances de 2 en jeu sauf la première, à savoir $2^0 = 1$. Le reste dans la division par 7 de $1 + 2 + \cdots + 2^{63}$ est ainsi mis en évidence : il est égal à 1. Le nombre de grains de riz fournis par les seigneurs étant le multiple de 7 immédiatement inférieur à la somme considérée, il ne manque donc qu'un unique grain de riz que le roi doit fournir.