

L'UTILISATION DES QUANTIFICATEURS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE TUNISIEN

Faïza CHELLOUGUI

Faculté des Sciences de Bizerte, ISEFC de Tunis, LIRDHIST de Lyon 1

Le texte qui suit s'appuie sur une étude didactique de la quantification menée dans le cadre de notre mémoire de DEA¹. Il nous a paru nécessaire d'introduire le lecteur à ce travail en présentant une analyse succincte des textes du programme officiel des mathématiques dans l'enseignement tunisien et des manuels centrée sur les expressions utilisant des quantificateurs universels et existentiels. Nous proposons de voir comment est introduite la quantification dans notre enseignement secondaire. L'accent est principalement mis sur l'analyse des formulations mises en jeu dans les énoncés mathématiques en référence à la logique naturelle qui intervient comme un ensemble de connaissances implicites que les enseignants supposent présentes chez les apprenants.

Dans le cadre de sa thèse de doctorat en didactique des mathématiques, El Faqih (1991) développe la question de l'enseignement de la logique en déclarant :

« S'il est vrai qu'un enseignement de la logique tel qu'il a été conçu aussi bien dans son contenu que dans sa présentation, a conduit à un échec, il n'est pas du tout évident qu'une absence complète d'un minimum de logique ne soit pas, elle aussi, génératrice d'un certain nombre de difficultés susceptibles d'entraver le déroulement normal de leurs études. » (p.5)

En accord avec El Faqih, nous montrons d'une part que la quantification est un objet présent dans la plupart des activités mathématiques et d'autre part, qu'elle ne fait pratiquement plus l'objet d'un enseignement explicite ; autrement dit il s'agit d'une notion paramathématique au sens de Y.Chevallard (1985)².

Nous commencerons par une étude dans les curricula de l'utilisation des éléments de logique en particulier les quantificateurs dans l'enseignement secondaire. Cette étude sera suivie par l'examen de quelques chapitres des manuels officiels tunisiens, de 1998, de la 6^e et de la 7^e année³ secondaire section : mathématiques. Cet examen sera analysé en suivant des niveaux de catégorisation élaborés en s'appuyant sur les différents types de formulations des énoncés apparus dans les manuels. Nous précisons que, en Tunisie, il y a un seul manuel à la disposition des enseignants et des élèves, c'est le manuel officiel ; il est rédigé par les concepteurs des programmes.

¹ Mémoire de DEA en didactique des mathématiques intitulé : "Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques, à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique", conduit sous la co-direction de V.Durand-Guerrier (Maître de Conférences à l'IUFM de Lyon) et M.Abdeljaouad (Professeur à l'ISEFC Université de Tunis) soutenu en novembre 2000.

² Yves Chevallard, La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné, 1985.

³ Ces niveaux correspondent aux 1^{er} S et terminal S de l'enseignement français.

1. L'utilisation des quantificateurs dans les programmes tunisiens de l'enseignement secondaire :

L'enseignement secondaire tunisien de mathématiques a connu quatre réformes successives des programmes importantes : en 1958, 1969, 1978 et 1991.

1. La réforme de 1958

La première réforme de 1958 a été caractérisée par l'importance accordée à la nécessité de développer l'esprit d'analyse et de synthèse de l'élève et de le faire participer à la construction de son savoir. Jusque là, l'enseignement des mathématiques s'appuyait sur le contenu de manuels français, dans lesquels en seconde un enseignement de logique était absent tandis que pour le programme de première le vocabulaire logique était introduit : implication, équivalence logique, signification des quantificateurs « il existe » et « quel que soit ».

2. La réforme de 1969

La réforme de l'enseignement tunisien de 1969 met l'accent sur l'axiomatique ; la démonstration y apparaît comme un objet privilégié d'enseignement.

Cet objet que l'élève se forge à partir de son expérience sensible et du savoir théorique qu'il acquiert peu à peu, doit être affiné en cours de scolarité pour devenir un instrument efficace. Ainsi, un enseignement sera jugé satisfaisant dans ce domaine si l'élève a acquis une maîtrise suffisante des notions logiques pour mathématiser aisément les situations simples qui lui sont présentées.

L'introduction de certaines notions de mathématiques formalisées se traduit souvent par des contraintes très strictes de notations et des écritures. Les programmes de 1969 sont légèrement adaptés à ces exigences, ils mettent l'accent sur la forme de la démonstration et plus de rigueur en matière de raisonnement, de quantification, de logique. Ainsi, dans les instructions du programme tunisien de 1976 relatives aux classes de 5^e année secondaire⁴, toutes sections confondues, nous pouvons lire :

"A l'occasion de divers énoncés rencontrés, les élèves auront leur attention attirée sur le rôle joué en mathématiques par les principaux "connecteurs" (et, ou, non, si...alors et ses synonymes, équivaut et ses synonymes) et "quantificateurs" (quel que soit, il existe). Ils noteront leurs règles d'emploi, tant pour formuler les énoncés que pour conduire les raisonnements". (p.7)

3. La réforme de 1978

En 1978, une nouvelle réforme a donné lieu à des changements dans les programmes des années suivantes s'appuyant sur d'autres idées-forces (dialectique entre problèmes et outils théoriques, aspects expérimentaux des mathématiques,

⁴ Deuxième année secondaire tunisienne actuelle et équivaut à la classe de seconde française.

progressivité de l'exigence de formalisation en fonction des besoins,...). Aucun changement concernant l'enseignement de la logique n'apparaît dans cette réforme.

4. Les modifications en 1988

A la différence des programmes de mathématiques d'avant 1988, les éléments de logique sont utilisés, à partir de cette même année, avec prudence et sans qu'une référence explicite ne leur soit faite. De plus, la tendance à formaliser l'écriture mathématique est moins nette. En effet, dans le commentaire général des programmes du second cycle pour les sections : Math.-Sciences et Math.-Techniques de 1988, il est recommandé que :

"les éléments de logique seront manipulés au cours des apprentissages, bien qu'aucune référence dans les programmes n'y corresponde. L'enseignant guidera ses élèves à acquérir une bonne compréhension des concepts de logique par un entraînement continu à la justification des démarches et des raisonnements. Dans les écritures, l'emploi des symboles (\Rightarrow , \Leftrightarrow , \forall , \exists) se fera graduellement, avec prudence et économie. Le symbole \Leftrightarrow pourra être utilisé à partir de la 5^e année. Il aura sa pleine utilisation justifiée dans la rédaction des démonstrations faisant intervenir des conditions nécessaires et suffisantes." (p.25)

Nous pouvons attester que l'usage des quantificateurs est moins important dans la dite réforme.

5. La réforme de 1991

La réforme de 1991 vise à faire diminuer la prépondérance de la notion ensembliste et de l'algèbre linéaire dans les programmes. L'étude de la logique formelle disparaît des programmes et l'utilisation des quantificateurs n'est plus autorisée. Dans les programmes officiels de 1993 de la classe de 6^e année secondaire et de la 7^e année secondaire, sections : Sciences-Expérimentales et Techniques⁵, nous pouvons lire :

"On habituera les élèves à intégrer dans leurs expressions orale et écrite, les notions élémentaires de logique et on pourra, dans ce cadre, utiliser avec prudence les symboles de l'implication et de l'équivalence, mais on évitera l'emploi des symboles de quantification qui seront avantageusement remplacés par les expressions écrites correspondantes." (p.30)

2. Étude de quelques chapitres des manuels tunisiens de 6^e et 7^e année secondaire

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier quelques chapitres des deux manuels scolaires tunisiens : 6^e année secondaire (Tome1) et 7^e année secondaire (Tome1) utilisés en section : Mathématiques⁶. En outre l'étude des manuels aide à mieux cerner le rôle de l'écrit ; la variété des formulations, les types de représentations et les exigences de rigueur sur les notions écrites.

⁵ Correspondant à la 1^{ère} année scientifique française

⁶ Le contenu des chapitres choisis est le même pour les sections : Sciences-Expérimentales et Techniques, des niveaux scolaires cités.

1. Parties du manuel analysées

Nous avons choisi d'étudier les chapitres comportant les notions de suites numériques et ceux concernant la continuité et les limites d'une fonction. Dans l'enseignement supérieur, certaines de ces notions sont réintroduites de la même manière qu'au secondaire et enrichies par d'autres notions, comme les suites numériques, les suites extraites, les suites de Cauchy, etc. Ainsi, on rencontre des notions pouvant apparaître comme des généralisations simples d'autres notions déjà introduites dans l'enseignement secondaire et ne nécessitant en particulier aucun formalisme nouveau pour leur introduction comme par exemple le théorème des valeurs intermédiaires.

Le manuel tunisien adopte pour tous les chapitres les rubriques suivantes : "activités", "informations mathématiques" (définitions, théorèmes, corollaires, commentaires, remarques, etc.), "exercices résolus", "exercices de fin de chapitre non résolus", "retenons" et "remarques".

Nous nous intéressons aux types de formulations utilisés dans les manuels, en particulier sous la rubrique "informations mathématiques" et dans celle contenant des "exercices corrigés" (exercices résolus, activités résolues).

Pour notre analyse, nous classons les formulations en quatre caractéristiques différentes :

Formulation portant une quantification explicite.

Par exemple, le théorème du sens de variation d'une fonction : "Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

si f est croissante sur I alors, pour tout x de I , on a : $f'(x) \geq 0$.

si f est décroissante sur I alors, pour tout x de I , on a : $f'(x) \leq 0$.

si f constante sur I alors, pour tous x de I , on a : $f'(x) = 0$."

(Théorème, 6^e année secondaire Tome1, p.125, 1998)

Formulation portant un élément générique.

Par exemple, le théorème de l'unicité d'une limite, lorsqu'elle existe : "Si une fonction f admet une limite l en un point x_0 ou en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors cette limite est unique."

(Théorème, 6^e année secondaire Tome1, p.45, 1998)

Formulation portant une quantification universelle implicite.

Par exemple, une réponse dans un exercice résolu est ainsi formulée : "La fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est croissante, alors si $x \leq 3$ on a : $f(x) \leq f(3)$..."

(Exercice, 7^e année secondaire Tome1, p.39, 1998)

Formulation portant un conditionnel implicitement quantifié, où le conséquent peut être explicitement quantifié.

Par exemple, la définition de limite finie d'une suite réelle est formulée ainsi : "Soit n_0 un entier naturel et U une suite réelle définie sur $I = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ et l un réel. On dit que la suite U admet pour limite l si, pour tout ε strictement positif, il existe un entier naturel p tel que : $(n \in I \text{ et } n > p) \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$."

(Définition, 7^e année secondaire Tome1, p.21, 1998)

Nous constatons, d'une part il y a à la fois langage formalisé et langage naturel et d'autre part il n'y a aucune marque permettant d'énoncer que l'entier naturel "n" est pris universellement.

Les résultats de notre analyse seront synthétisés dans deux tableaux, que nous appelons Tableau 6^e et Tableau 7^e. En effet, dans chacun d'eux nous groupons par ligne et pour tous les chapitres de chaque niveau (6^e et 7^e) les "définitions", les "théorèmes" (théorèmes et corollaires), les "commentaires", les "exercices corrigés" (exercices corrigés, activités résolues, démonstration de théorèmes), les "remarques" et les rubriques intitulées "retenons". Dans les colonnes nous résumons la formulation mathématique utilisée dans chacune des rubriques selon sa caractéristique.

Étude du manuel de 6^e année secondaire (Tome1)

Notre synthèse porte sur les chapitres suivants du manuel : Les suites réelles, Limite d'une fonction, Continuité d'une fonction, Sens de variation – Extréma.

Dans le tableau 6^e suivant, nous résumons les caractéristiques de la formulation mathématique, que nous venons d'identifier, utilisées dans les rubriques mentionnées auparavant. La figure 6^e représente les histogrammes de chaque formulation.

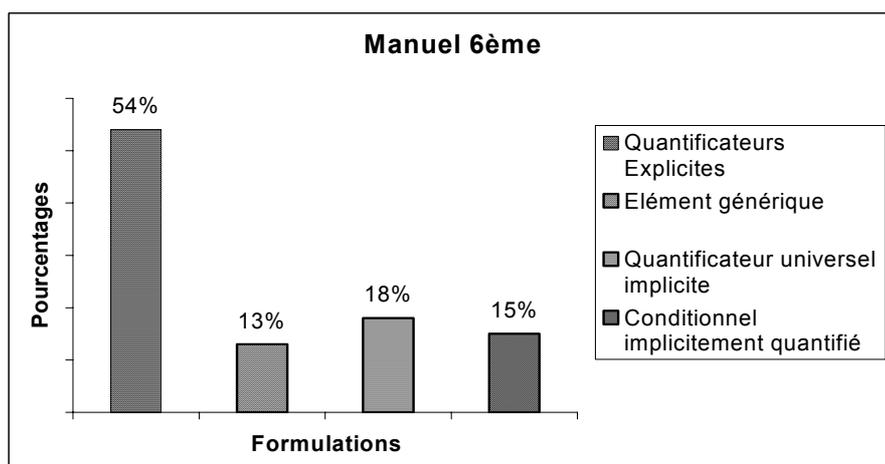
Tableau 6^e :

Récapitulatif du type de formulation mathématique des rubriques de quelques chapitres du manuel.

Rubriques	Présence de quantificateurs explicites	Présence d'un élément générique	Présence d'un quantificateur universel implicite	Conditionne l'implicite quantifié
Définition	9	0	3	0
Théorème	11	6	0	1
Commentaire	11	0	4	4
Exercice corrigé	14	2	4	8
Remarque	6	2	5	0
Retenons	3	3	2	2
Total (t_i)	54	13	18	15
Pourcentage	54%	13%	18%	15%

Histogramme 6^e : Histogramme du pourcentage du nombre associé à chaque type de formulation par rapport au nombre total.

⁷ Le pourcentage, pour chaque type de formulation, est donné par : $(\frac{t_i}{\sum t_i} \times 100)$, avec $\sum t_i = 100$



Étude du manuel de 7^e année secondaire (Tome1)

Notre synthèse porte sur les chapitres suivants du manuel : Les suites réelles – Convergence, Limites, Continuité, Fonction continue et strictement monotone sur un intervalle.

Dans le tableau 7^e suivant, nous reproduisons le même travail effectué pour le manuel de 6^e. La figure 7^e représente les histogrammes de chaque formulation.

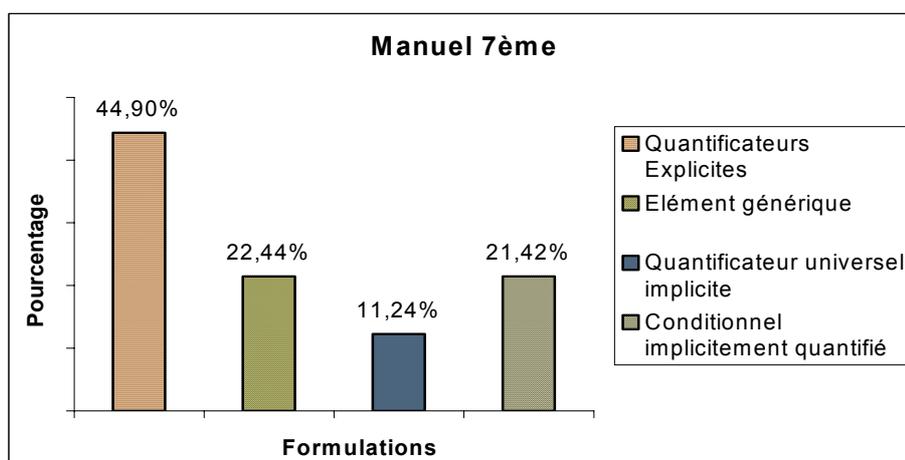
Tableau 7^e:

Récapitulatif du type de formulation mathématique des rubriques de quelques chapitres du manuel.

Rubriques	Présence de quantificateurs explicites	Présence d'un élément générique	Présence d'un quantificateur universel implicite	Conditionnel implicitement quantifié
Définition	6	0	0	2
Théorème	11	12	3	9
Commentaire	4	1	0	0
Exercice corrigé	12	3	7	10
Remarque	5	5	1	0
Retenons	6	1	0	0
Total (t _i)	44	22	11	21
Pourcentage ⁸	44,90%	22,44%	11,24%	21,42%

Histogramme 7^e: Histogramme du pourcentage du nombre associé à chaque type de formulation par rapport au nombre total.

⁸ Le pourcentage, pour chaque type de formulation, est donné par : $(\frac{t_i}{\sum t_i} \times 100)$, avec $\sum t_i = 98$.



2. Analyse des résultats

L'analyse des rubriques de quelques chapitres des manuels de la 6^e année secondaire et de la 7^e année secondaire montre que la majorité d'entre eux est formulée avec des quantificateurs explicites (54% pour la 6^e et 44.9% pour la 7^e), ceci plaide en faveur de la sensibilité des contenus du manuel à une bonne explicitation des quantificateurs. Le reste des formulations des rubriques se répartit, suivant les trois autres types, avec des pourcentages équivalents. Ainsi, dans le cas où les formulations seraient énoncées avec un conditionnel implicitement quantifié, un apprenant peut trouver de difficultés. Par exemple, si les variables d'un antécédent d'une implication ne sont pas prises universellement (pour tout, quel que soit...) une simple justification avec quelques cas particuliers peut ramener l'apprenant au conséquent correspondant à cette implication. Bien que ce type d'énoncé soit apparu avec un pourcentage faible (15% pour la 6^e et 21.42% pour la 7^e) dans les manuels, ceci nous incite à penser qu'il est possible que cette tâche soit utilisée par certains apprenants.

D'autre part, les énoncés utilisant un élément générique sont apparus avec un pourcentage faible (13% pour la 6^e et 22.44% pour la 7^e). Nous pouvons pour ce cas, penser que les auteurs des manuels n'accordent pas assez d'importance à ce type de formalisme et la règle de généralisation universelle devient systématique tant que l'énoncé est défini pour un élément générique. Dans l'énoncé suivant : "Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$ ", *une* joue le rôle d'élément générique, le domaine d'objets est implicitement l'ensemble des suites réelles.

3. Conclusion

L'analyse succincte des programmes a montré l'absence de l'apprentissage explicite de la quantification dans notre enseignement secondaire. Cette analyse a permis de mettre l'accent, d'une part, sur la place attribuée à la logique formelle, dans l'enseignement tunisien, et d'autre part, sur l'emploi des éléments de logique dans le raisonnement mathématique.

L'étude de quelques chapitres des manuels tunisiens de 6^e et 7^e année secondaire, centrée sur l'utilisation dans l'enseignement des quantificateurs, a permis de déterminer que plus de la moitié des formulations sont explicitement quantifiées. Cela traduit un effort remarquable des auteurs des manuels. Pour le reste des rubriques qui concernent les formulations portant un élément générique, une quantification universelle implicite ou un conditionnel implicitement quantifié, si elles semblent claires pour les auteurs des manuels et peut être pour les enseignants, elles peuvent être sources de certaines difficultés dans la compréhension des connaissances mathématiques pour les apprenants.

Bibliographie

Arsac G., Durand-Guerrier V. (1999), Démonstration et quantification existentielle, in *Acte de la dixième école d'été de didactique des mathématiques*.

Chellougui F. (2000), *Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique*, Mémoire de DEA de didactique des mathématiques, Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue, Université de Tunis.

Chevallard Y. (1985), *Transposition didactique du savoir savant au savoir à enseigner*, La Pensée sauvage éditions.

Durand-Guerrier V. (1991), *Les difficultés en logique des étudiants de premier cycle universitaire, Première approche*, Mémoire de DEA de didactique des disciplines scientifiques, Université Lyon 1.

Durand-Guerrier V. (1994), Problèmes de raisonnement et de logique chez les élèves de terminales C et de premier cycle universitaire scientifique ; les difficultés liées à l'implication ; questions méthodologiques, in *Actes du Premier Colloque Jeunes Chercheurs en Sciences Cognitives*, Université Joseph Fourier Grenoble 1, La Motte d'Aveillans.

El Faqih E.M. (1991), *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premiers cycle scientifique*, Thèse de l'université de Strasbourg.

Manuels scolaires et aides pédagogiques pour l'enseignement secondaire tunisien

Manuel Tunisien. (1979), *Mathématiques, 5^e année de l'Enseignement Secondaire, Section : Maths-Sciences et Maths-Technique*, République Tunisienne, Centre National Pédagogique (CNP).

Manuel Tunisien. (1998), *Mathématiques, 6^e année de l'Enseignement Secondaire, Section : Mathématiques, Tome 1*. République Tunisienne, CNP.

Manuel Tunisien. (1998), *Mathématiques, 7^e année de l'Enseignement Secondaire, Section : Mathématiques, Tome 1*. République Tunisienne, CNP.

Programmes Officiels de l'Enseignement du Second Cycle. (1969), Fascicule n°3, Discipline : Mathématiques, République Tunisienne, STD.

Programmes de Mathématiques Enseignement Secondaire. (1976), République Tunisienne, Direction de l'Enseignement secondaire technique et Professionnel.

Programmes Officiels de l'Enseignement Secondaire, Mathématiques. (1978, 1982, 1986, 1988, 1993, 1998), République Tunisienne, CNP.