LE DIX-SEPTIÈME PROBLÈME DE HILBERT ET...
LE GROUPE MATHÉMATIQUE DE SAUMUR

Marc GUINOT

Le groupe mathématique de Saumur a été, à plusieurs reprises déjà, à l'origine d'articles parus dans *L'Ouvert* (parmi lesquels on citera de mémoire une petite étude sur certaines valeurs de la fonction zêta et un pavé de plus de quarante pages sur la géométrie arguésienne, les quaternions et les octonions). A l'occasion d'une nouvelle proposition d'article mentionnant l'existence de ce groupe mystérieux, le comité de rédaction de *L'Ouvert* a souhaité en savoir plus sur cette composante active du monde mathématique qui n'est répertoriée nulle part.

Il est peut-être temps, en effet, de lever le voile sur cette irritante question. Sous le nom pompeux que je lui ai donné, le groupe mathématique de Saumur représente simplement une association informelle de professeurs de mathématiques de Saumur qui avaient pris l'initiative, à la fin des années 1980, de se réunir régulièrement au lycée technique, pour faire des mathématiques pour le plaisir, sous la forme d'exposés traitant chaque année d'un sujet donné. C'est ainsi qu'il a pu être question, au fil du temps, des constructions à la règle et au compas, de géométrie projective ou d'arithmétique. Par suite de changement de poste, le groupe s'est quelque peu délité après 1991, ne subsistant plus que par une réunion annuelle, animée par l'auteur de ces lignes (et se terminant ensuite au restaurant). Abonné à *L'Ouvert*, j'ai pris l'initiative de soumettre à la revue les comptes rendus de certaines de ces réunions, qui ont ainsi été publiés après d'inévitables changements de forme.

Le présent article ne déroge pas à la règle et constitue la substance de l'exposé que j'ai fait, à quelques encablures du Thouet, le 14 mai 2002. Le sujet en était le dix-septième problème de Hilbert et m'avait été inspiré par un article de l'*American Mathematical Monthly* qui traitait d'un des aspects de ce problème (voir [**16**]). On peut faire remonter celui-ci à la seconde moitié du XVIII^e siècle, au moment où Lagrange développa une première théorie générale des formes quadratiques binaires, c'est-à-dire des expressions de la forme $ax^2+bxy+cy^2$. Des considérations algébriques élémentaires permettent de classer ces formes en trois catégories : les formes *définies positives* (dont les valeurs sont toujours des nombres positifs) qui se décomposent en une somme de deux carrés, les formes *définies négatives* (dont les valeurs sont toujours des nombres négatifs) opposées des précédentes et les formes *indéfinies* qui sont différences de deux carrés.

Quelques années après, Gauss (ou Gauß comme préfèrent écrire les Allemands) généralisa une partie de ces résultats en établissant que toute forme quadratique n-aire q (i.e. toute expression de la forme $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_i$) peut se ramener à une combinaison linéaire de n carrés. Dans le cas particulier d'une forme (définie) positive, le résultat de Gauss permet d'écrire $q(x_1,\ldots,x_n)$ sous la forme d'une somme de plusieurs carrés $\big(\ell_1(x_1,\ldots,x_n)\big)^2+\cdots+\big(\ell_n(x_1,\ldots,x_n)\big)^2$ où $\ell_i(x_1,\ldots,x_n)$ est une forme linéaire en $x_1,\ldots,x_n$.

On peut démontrer ce résultat avec un peu d'algèbre en associant à toute forme quadratique n-aire q, considérée comme une application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, une forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\varphi(x,x) = q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et en s'appuyant sur le fait que, pour cette forme, il existe dans $\mathbf{R}^n$ une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$. Si un élément x de $\mathbf{R}^n$ s'écrit en effet $\sum x_i e_i$, on a alors

$$q(x) = \varphi(x,x) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i,j} x_i x_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_i) x_i^2$$

puisque $\varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Comme x_i est une fonction linéaire du vecteur x initial, on en déduit le résultat général de Gauss et, lorsque $q(x)$ est $\geqslant 0$ pour tout x, que $q(x)$ est une somme de n carrés (portant sur des formes linéaires).

En 1885, Minkowski souleva, dans sa thèse [**8**], le problème de savoir si ce résultat pouvait se généraliser aux formes de degré supérieur, tout en doutant[2] que cela soit possible. Hilbert, d'abord peu convaincu, se lança dans l'étude du problème et finit par prouver en 1888 [**7**] que les doutes de Minkowski étaient fondés en démontrant que, sauf exceptions, il existe, pour tout entier n et tout nombre pair d, au moins une forme homogène en n variables, de degré d, dont les valeurs sont toujours positives, mais qui n'est pas pour autant une somme de carrés, les exceptions étant $n = 0, 1, 2$, $d = 0, 2$ et surtout $n = 3, d = 4$. Mais la démonstration de Hilbert est indirecte et repose sur de difficiles considérations de géométrie algébrique.

En particulier, il ne donne aucun exemple et c'est seulement en 1965 qu'un certain Motzkin[3] fournit au monde ébahi le premier exemple de forme positive ne pouvant se décomposer en une somme de carrés [**12**]. Celui-ci (avec $n = 3$ et $d = 6$) est

$$f(x,y,z) = x^4y^2 + x^2y^4 + z^6 - 3x^2y^2z^2.$$

Le fait que toutes les valeurs de f soient positives est une conséquence de l'inégalité de la moyenne géométrique [4] selon laquelle on a toujours

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels positifs. Il suffit en effet d'appliquer ce résultat aux trois nombres x^4y^2, x^2y^4 et z^6 pour avoir le résultat voulu.

Il est plus malaisé de démontrer que ce n'est pas une somme de carrés. En fait, en prenant $z = 1$, il suffit de prouver qu'il est impossible d'avoir

$$x^4y^2 + x^2y^4 + 1 - 3x^2y^2 = g_1^2 + \cdots + g_m^2$$

avec des polynômes $g_1, \ldots, g_m$ quelconques. Il n'est pas trop difficile de voir qu'on

[2] „*Es ist nicht wahrscheinlich daß eine jede positive Form sich als eine Summe von Formenquadraten darstellen läßt*“.

[3] Pas si inconnu que cela en fait car une partie de son œuvre a été jugée suffisamment importante pour être réunie en un volume publié en 1983 ; il y est qualifié de mathématicien particulièrement érudit, ingénieux et talentueux ("versatile" in the english text !).

[4] Outre une démonstration classique s'appuyant sur la "concavité" de la fonction log, il existe de nombreuses démonstrations élémentaires de cette inégalité. L'une, très simple et très convaincante, est due à Cauchy et se trouve reproduite en note (et *in extenso*) dans le célèbre livre de Pólya et Szegő, *Problems and theorems in Analysis*, Vol. 1, Springer-Verlag, 1972, p. 64.

peut supposer que g_i est, pour tout i, un polynôme non nul de degré $\leqslant 3$. Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} g_i(x,y) = a_i x^3 + b_i y^3 + c_i x^2 y + d_i x y^2 + \\ p_i x^2 + q_i y^2 + r_i xy + s_i x + t_i y + u_i \end{aligned}$$

avec des coefficients a_i, b_i, etc. tous réels. Comme

$$\big(g_1(x,0)\big)^2 + \cdots + \big(g_m(x,0)\big)^2 = \big(g_1(0,y)\big)^2 + \cdots + \big(g_m(0,y)\big)^2 = 1$$

on a $|g_i(x,0)| \leqslant 1$ et $|g_i(0,y)| \leqslant 1$, ce qui entraîne que $a_i = p_i = s_i = 0$ et $b_i = q_i = t_i = 0$ (car des polynômes bornés sur $\mathbf{R}$ sont nécessairement constants). Cela montre que

$$g_i(x,y) = c_i x^2 y + d_i x y^2 + r_i xy + u_i.$$

Si on élève ce résultat au carré et si on développe, on obtient 10 termes, parmi lesquels il n'y a qu'un terme en x^2y^2 qui est $r_i^2 x^2 y^2$. Par suite, dans la somme $g_1^2 + \cdots + g_m^2$, le terme en x^2y^2 a pour coefficient $r_1^2 + \cdots + r_m^2$. Comme c'est le terme en x^2y^2 du polynôme initial, on a $r_1^2 + \cdots + r_m^2 = -3$, ce qui est absurde.

D'autres exemples ont été donnés par la suite, dont

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + t^4 - 4xyzt$$

par Man-Duen Choi et Tsit-Yuen Lam [**5**].

Comme on l'a dit, dans son article de 1888, Hilbert s'est aussi penché sur les exceptions à la règle générale, parvenant en particulier à démontrer que toute forme biquadratique ternaire positive (donc de degré 4) est une somme de trois carrés portant sur des formes quadratiques. Malheureusement, sa démonstration semble peu accessible au commun des mortels : la géométrie algébrique, même du temps de Hilbert, est une science quelque peu absconse. Il en est de même, hélas, de la démonstration plus récente, proposée par Walter Rudin (voir [**16**]) : il y est question du théorème de Federer-Sard et de la dimension de Hausdorff...

En fait la démonstration peut-être la plus assimilable est celle que l'on trouve dans la *Géométrie algébrique réelle* de Bochnak, Coste et Roy [**3**], apparemment tirée de l'article de Choi et Lam déjà cité (cf. [**5**]) : elle part du fait élémentaire que dans l'espace vectoriel des formes en n variables et de degré d, les formes positives constituent un cône convexe saillant fermé, qui est donc l'enveloppe convexe de ses génératrices maximales...

Mais dans le domaine qui nous occupe, Hilbert ne s'est pas arrêté là : en 1893 [**9**], il est parvenu à démontrer que malgré ses résultats antérieurs, on pouvait exprimer n'importe quelle forme *ternaire* positive f à l'aide de plusieurs carrés en écrivant

$$f = \frac{\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_r^2}{\psi_1^2 + \ldots + \psi_s^2}$$

donc comme un quotient de deux sommes de carrés (où φ_i et ψ_j sont des formes). Cela veut dire aussi que

$$f = \sum_{i,j} \left(\frac{\varphi_i \psi_j}{\psi_1^2 + \cdots + \psi_s^2} \right)^2$$

donc que f est une somme de carrés de *fractions rationnelles.*

Mais, comme il le reconnaît lui-même[5], la démonstration présente de sérieuses difficultés. De fait, à l'issue de neuf paragraphes dûment numérotés, il démontre que toute forme ternaire positive F de degré pair d peut s'écrire $\dfrac{\varphi^2+\psi^2+\chi^2}{H}$ où φ, ψ et χ sont des formes ternaires de degré $d-2$ et H une forme (ternaire) de degré $d-4$. Comme H est à son tour une forme positive, on peut recommencer l'opération et écrire H sous la forme $\dfrac{\theta^2+\omega^2+\xi^2}{K}$ où K est cette fois de degré $d-8$. On a alors

$$F=\frac{(\varphi^2+\psi^2+\chi^2)K}{\theta^2+\omega^2+\xi^2}\;.$$

On recommence ainsi jusqu'à ce que la forme résiduelle M soit une constante ou une forme quadratique.

Le résultat final pour F est alors une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des sommes de carrés. En outre, grâce à l'identité d'Euler

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)=(aa'-bb'-cc'-dd')^2+\\(ab'+ba'+cd'-dc')^2+(ac'+ca'+db'-bd')^2+(ad'+da'+bc'-cb')^2$$

le nombre de carrés peut être réduit à quatre, en haut et en bas.

Il n'est évidemment pas très facile de trouver des expressions de ce genre pour un cas précis, par exemple pour la forme de Motzkin donnée plus haut. Sans l'aide de Cassels, Ellison et Pfister, je n'aurais jamais deviné que

$$x^4y^2+x^2y^4+z^6-3x^2y^2z^2=\frac{(x^2y^2-z^4)^2+(xyz^2-x^3y)^2+(xz^3-xy^2z)^2}{x^2+z^2}.$$

En multipliant les deux termes de cette fraction par x^2+z^2, on en déduit que $x^4y^2+x^2y^4+z^6-3x^2y^2z^2$ peut s'écrire comme une somme de 6 carrés de fractions rationnelles, ce nombre pouvant se réduire à 4 comme on l'a dit, au moyen de l'identité d'Euler.

Ce problème d'avoir à introduire des sommes de carrés de fractions rationnelles est réapparu enfin, curieusement, à propos d'un obcur problème de construction géométrique à la régle et à l'empan[6] rencontré dans les célèbres travaux de Hilbert, encore, sur les fondements de la géométrie. En fait, si j'en crois la traduction française des *Grundlagen der Geometrie* que je viens de relire, il semble que le théorème d'Artin soit à la base d'un critère commode permettant de savoir dans quel cas ce qui est possible à la règle et au compas est encore possible à la règle et à l'empan (cf. [**10**], théorème 65, p. 165 et rectificatif, p. 171).

Tout cela explique l'énoncé général du 17[e] problème de Hilbert tel que Hilbert lui-même l'a formulé en 1900 à Paris, lors de ce fameux congrès international des mathématiciens où il présenta 23 problèmes susceptibles de faire l'objet de fructueuses

[5] *„Der Beweis dafür bietet erhebliche Schwierigkeiten dar".*

[6] Une sorte de compas rouillé, incapable de faire des cercles, mais qui permet de transporter une longueur fixe sur une droite...

recherches au cours du XX^e siècle : si un polynôme $f(x_1, \ldots, x_n)$ en n variables et à coefficients réels, ne prend que des valeurs positives, est-il possible de le décomposer en une somme de carrés de fractions rationnelles ? La réponse, affirmative, fut apportée par Emil Artin en 1927 après qu'il eut développé, avec son confrère Otto Schreier ([**1**] et [**2**]), une théorie générale des corps ordonnés. Donnons-en les premiers éléments.

On dit qu'une relation d'ordre R sur un corps commutatif K est *compatible* avec la structure de corps de K si on a les deux conditions suivantes :

(KO_1) La relation $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ implique $x + z \mathrel{\mathrm{R}} y + z$ quels que soient $x, y, z \in \mathrm{K}$.

(KO_2) La relation $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ implique $xz \mathrel{\mathrm{R}} yz$ quels que soient $x, y, z \in \mathrm{K}$, si on a en outre $0 \mathrel{\mathrm{R}} z$.

Si on note par le signe $\leqslant$ la relation R et par le signe $\geqslant$ la relation opposée, ces conditions reviennent à dire que l'on a $x + z \leqslant y + z$ si $x \leqslant y$ et que l'on a $xz \leqslant yz$ si $x \leqslant y$ et si $z \geqslant 0$.

Dans la suite, on supposera l'ordre total, ce qui veut dire que l'on a aussi $x \leqslant y$ ou $x \geqslant y$ quels que soient $x, y \in \mathrm{K}$. On appellera alors *corps ordonné* un corps commutatif, muni d'une relation d'ordre total satisfaisant aux conditions précédentes, et *corps ordonnable* tout corps commutatif sur lequel il existe au moins une relation d'ordre total compatible avec la structure de corps de K.

Dans un corps ordonné K, les règles de manipulation habituelles des inégalités sont valables (y compris avec les signes $<$ et $>$). On dit en outre qu'un élément x de ce corps est *positif* (resp. *négatif*) si $x \geqslant 0$ (resp. $x \leqslant 0$) pour la relation d'ordre R fixée dans K. Dans un corps ordonné K, l'ensemble P des éléments positifs satisfait aux conditions suivantes :

(PO_1) $\mathrm{P} + \mathrm{P} \subset \mathrm{P}$.

(PO_2) $\mathrm{PP} \subset \mathrm{P}$.

(PO_3) $\mathrm{P} \cap (-\mathrm{P}) = \{0\}$.

(PO_4) $\mathrm{P} \cup (-\mathrm{P}) = \mathrm{K}$.

Réciproquement, si P est une partie d'un corps K satisfaisant aux conditions précédentes, on peut dire qu'il existe sur K une relation d'ordre total et une seule, compatible avec la structure de corps de K, pour laquelle P est l'ensemble des éléments positifs. Cette relation est en fait donnée par la condition $y - x \in \mathrm{P}$.

Une variante de ce résultat est valable pour un anneau intègre A (sans diviseur de zéro) : si P est une partie de A satisfaisant aux conditions (PO_1) à (PO_4), mais avec A à la place de K, il existe sur le corps des fractions K de A, une relation d'ordre total et une seule, compatible avec la structure de corps de K pour laquelle P est l'ensemble des éléments positifs de K appartenant à A.

Il est facile de voir que l'ensemble des polynômes à une seule indéterminée X et à coefficients réels, dont le coefficient dominant est positif, satisfait aux conditions ci-dessus dans l'anneau $\mathbf{R}[X]$, du moins en convenant d'appeler *coefficient dominant* d'un polynôme $f \in \mathbf{R}[X]$ le coefficient du terme de plus haut degré si $f \neq 0$ et le nombre 0 si $f = 0$. Il existe donc sur le corps des fractions rationnelles $\mathbf{R}(X)$ une relation d'ordre R pour laquelle on a (entre autres) $X > a$ (mod R) pour tout réel

a. Mais les polynômes à *coefficient dominé* positif (i.e. dont le coefficient de plus bas degré est positif) satisfont aussi à ces mêmes conditions (PO_i). D'où une autre relation d'ordre R' dans $\mathbf{R}(X)$ pour laquelle on a cette fois $0 < X < a$ (mod R') pour tout réel a strictement positif. Il n'est pas difficile de modifier cette définition pour avoir $a < X < 0$ pour tout réel strictement négatif : il suffit de considérer comme positifs les polynômes f pour lesquels $f(-X)$ a un coefficient dominé positif.

La possibilité de définir sur un même corps plusieurs relations d'ordre différentes explique la définition suivante : dans un corps ordonnable K, on dit qu'un élément x est *totalement positif* s'il est positif pour toute relation d'ordre total sur K compatible avec la structure de corps de K. Dans le corps $\mathbf{R}(X)$, l'élément X n'est pas totalement positif.

Pour mieux étudier toutes ces propriétés, il peut être commode de dire qu'un sous-ensemble C d'un corps K est un *cône* si on a

(CO_1) $\mathrm{C} + \mathrm{C} \subset \mathrm{C}$.
(CO_2) $\mathrm{CC} \subset \mathrm{C}$.
(CO_3) $\mathrm{C} \cap (-\mathrm{C}) = \{0\}$.
(CO_4) $x^2 \in \mathrm{C}$ pour tout $x \in \mathrm{K}$.

Le lecteur vérifiera que la condition (CO_3) peut être remplacée sans dommage par la condition :

(CO_3') $-1 \notin \mathrm{C}$.

Avec cette définition, l'ensemble des éléments positifs d'un corps ordonné K est un cône ; on dira que c'est le *cône positif* de ce corps ordonné. D'une manière générale, tout cône d'un corps commutatif K qui peut être considéré comme l'ensemble des éléments positifs de K pour une certaine relation d'ordre sur K peut être appelé un *cône d'ordre* dans K.

Il n'y a pas de cône d'ordre dans un corps non ordonnable. Sur un corps quelconque, il n'y a pas nécessairement de cône tout court non plus. En fait, les propriétés suivantes sont équivalentes sur un corps K :

(CR_1) Les sommes de carrés dans K forment un cône de K.
(CR_2) Il existe dans K au moins un cône.
(CR_3) Si $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$, alors $x_1 = \cdots = x_n = 0$ quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{K}$.
(CR_4) L'élément -1 de K n'est pas une somme de carrés dans K.

Un corps ordonnable satisfait à ces conditions. Un des aboutissements fondamentaux de la théorie des corps ordonnés est que la réciproque est vraie : tout corps commutatif qui satisfait à l'une de ces conditions est nécessairement ordonnable. Cela se fait en deux étapes.

La première consiste à remarquer que les cônes d'ordre d'un corps K (s'ils existent) sont les cônes *maximaux* de K (i.e. les cônes C pour lesquels si $\mathrm{C} \subset \mathrm{C}'$ et si C' est un cône de K, alors $\mathrm{C} = \mathrm{C}'$). Comme les cônes d'un corps remplissant l'une des conditions (CR_i) forment un ensemble inductif pour la relation d'inclusion (tout ensemble totalement ordonné de cônes admet un majorant), il résulte du théorème de Zorn (donc de l'axiome de choix dont le théorème de Zorn n'est que l'un des avatars) que tout cône C d'un tel corps est contenu dans un cône maximal, donc dans un cône d'ordre. Appliqué à l'ensemble des sommes de carrés d'un corps K de ce genre, ce raisonnement montre que K est alors ordonnable.

Mais on peut aller plus loin en remarquant que si C est un cône quelconque et si $x \notin \mathrm{C}$, alors l'ensemble $\mathrm{C} - x\mathrm{C}$ des éléments de K de la forme $a - xb$ où $a, b \in \mathrm{C}$ est lui aussi un cône de K. Comme il est contenu dans un cône maximal (i.e. un cône d'ordre), il existe une relation d'ordre sur K pour laquelle les éléments de C sont tous positifs et l'élément x négatif. Appliqué à l'ensemble S des sommes de carrés de K, ce raisonnement fait voir que dans un corps ordonnable les éléments totalement positifs ne sont rien d'autres que les sommes de carrés.

Pour résoudre alors le 17$^{\mathrm{e}}$ problème de Hilbert à la manière d'Artin, il reste à démontrer qu'un polynôme $f \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$ qui ne prend que des valeurs positives est en fait positif pour toutes les relations d'ordre sur le corps $\mathbf{R}(X_1, \ldots, X_n)$. C'est ce que fait Artin par récurrence sur n. Ce polynôme est donc une somme de carrés dans le corps $\mathbf{R}(X_1, \ldots, X_n)$. CQFD.

Mais la compréhension complète du raisonnement d'Artin passe par un approfondissement substantiel de la théorie des corps ordonnés, avec en particulier l'introduction de la notion de clôture "réelle" (qu'il serait plus judicieux d'appeler *clôture ordonnée*), et surtout par la mise en œuvre de deux "lemmes de spécialisation" que l'auteur de ces lignes n'est pas encore parvenu à digérer. Ceux qui ont du mal avec la langue de Goethe (donc celle d'Artin), peuvent consulter le livre d'algèbre, en anglais, de Nathan Jacobson [**11**] ou celui, en français, de Paulo Ribenboim [**15**], mais ce n'est guère plus digeste ! Enfin, l'histoire de ce problème ne s'est pas arrêtée à Artin, ni à la simple théorie des corps ordonnés : voir par exemple [**6**], [**13**] et [**14**]. Tout cela pourrait faire l'objet, après force cuillerées de pepsine, d'un feuilleton, à paraître dans les prochains numéros…

Références

[**1**] Emil Artin. —Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, *Abh. der Hamb. Univ.* V. Band (1927), 100-115.

[**2**] Emil Artin und Otto Schreier. —Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abh. der Hamb. Univ.* V. Band (1927), 85-99.

[**3**] Jacek Bochnak, Michel Coste et Marie-Françoise Roy. —*Géométrie algébrique réelle* (p. 105-106), Springer Verlag, 1987.

[**4**] J.W.S. Cassels, W. J. Ellison and A. Pfister. —On Sums of Squares and on Elliptic Curves over Function Fields, *Journal of Number Theory* **3** (1971), 125-149.

[**5**] Man-Duen Choi and Tsit-Yuen Lam. —Extremal Positive Semidefinite Forms, *Math. Ann.* **231** (1977), 1-18.

[**6**] Danielle Gondard-Cozette. —Le dix-septième problème de Hilbert et ses développements récents, p. 21-49 in *Séminaire sur les structures algébriques ordonnées*, sélection d'exposés 1984-1987, vol. II, Publications mathématiques de l'université de Paris VII.

[7] David HILBERT. —Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten, *Math. Ann.* **32** (1888), 342 - 350 ou *Ges. Abh.*, zweiter Band, Julius Springer, 1933, 154 - 161.

[8] David HILBERT. —Gedächtnisrede auf H. Minkowski, in *Gesammelte Abhandungen von Hermann Minkowski*, erster Band, S. VIII, B.G. Teubner, 1911.

[9] David HILBERT. —Über ternäre definite Formen, *Acta Math.* **17** (1893), 169 - 197 ou *Ges. Abh.*, zweiter Band, Julius Springer, 1933, 345 - 366.

[10] David HILBERT. —*Les fondements de la géométrie* (*Grundlagen der Geometrie*), Dunod, 1971.

[11] Nathan JACOBSON. —*Lectures in Abstract Algebra*, vol. 3, D. van Nostrand Company, 1964, 289 - 294.

[12] Theodor S. MOTZKIN. —The arithmetic-geometric inequality, in *Inequalities*, Oved Shisha, ed., Academic Press, Boston, 1967 ou *Selected Papers*, Birkhäuser, 1983, 203 - 222.

[13] Albrecht PFISTER. —Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten, *Invent. Math.* **4** (1967), 229 - 237.

[14] Albrecht PFISTER. —Hilbert's seventeenth problem and related problems on definite forms, in *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, AMS, XXVIII, 1976, 483 - 489.

[15] Paulo RIBENBOIM. —*L'arithmétique des corps*, Hermann, 1972, 198 - 211.

[16] Walter RUDIN. —Sums of Squares of Polynomials, *Amer. Math. Monthly* **107(9)** (2000), 813 - 821.

Je tiens à remercier ici les responsables de la Bibliothèque de Mathématique de l'Université Louis-Pasteur de Strasbourg qui m'ont permis d'accéder sans contraintes à toutes leurs richesses.