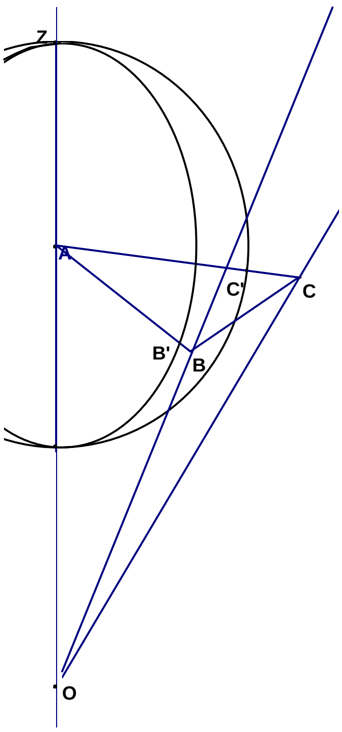
UNE PAGE DE CALCUL DE LA CONDAMINE

Jean LEFORT

Professeur proche de la retraite, ayant fait de nombreuses pages de calcul numérique à la règle ou avec des tables de logarithme lors de mes études, je dédie cet article aux jeunes collègues qui n'ont connu que l'ère de la calculatrice électronique, voire de l'ordinateur. Ils pourront se rendre compte que le calcul numérique n'était pas une sinécure et que d'habiles mathématiciens faisaient aussi des erreurs. D'un autre côté on admirera la propreté et la présentation, malgré les ratures, des notes prises directement.

1. Le principe d'une triangulation au XVIII^e siècle

Pour réaliser une triangulation, on commence par mesurer une base la plus horizontale possible à l'aide de perches de longueur donnée que l'on place bout à bout. Cette opération est très délicate, d'abord parce qu'il faut s'assurer de l'exact alignement des perches, ensuite parce qu'il faut s'assurer de l'exacte jointure des perches les unes à la suite des autres, sans que le placement de la suivante ne modifie la position de la précédente, enfin parce que les perches sont sensibles à la chaleur et qu'il faut donc tenir compte du coefficient de dilatation. Les perches utilisées sont en bois et font environ 4 mètres de long. On les compare régulièrement à des étalons de fer dont on connaît parfaitement le coefficient de dilatation donc la longueur en fonction de la température du moment. L'alignement se fait au cordeau après s'être assuré que la surface est plane. On effectue au moins deux mesures, dans un sens et dans l'autre. Ces mesures sont finalement réduites à l'horizontale en tenant compte de la pente du terrain. Par ailleurs, on détermine la position exacte en latitude de l'origine de la base ainsi que son orientation par rapport au méridien.



On construit ensuite des triangles successifs dont on mesure les angles. Ces triangles sont mesurés dans leur plan et on calcule ensuite les angles sphériques correspondants. La méthode utilisée est la suivante : Considérons le triangle plan *ABC*. Les points *A, B, C* sont à des distances inégales de *O* (centre de la Terre) puisqu'à des altitudes différentes. Les verticales en *A*, *B*, et *C* sont respectivement *OA*, *OB*, *OC*. L'angle sphérique en *A* est l'angle des plans *OAB* et *OAC*. Considérons alors la sphère de centre *A* et de rayon *AZ* (Z pour zénith). Cette sphère est coupée par les plans *OAB* et *OAC* suivant deux méridiens dont l'angle en *Z* est aussi l'angle sphérique en *A* puisque le plan tangent à la sphère en *Z* est perpendiculaire à *OA*. Cette sphère coupe *AB* en *B'* et *AC* en *C'* et l'arc de grand cercle *B'C'* a pour mesure l'angle *B'AC'* = *BAC,* c'est-à-dire l'angle en *A* du triangle plan *ABC.*

Le problème posé revient donc à déterminer l'angle en Z du triangle sphérique $ZB'C'$. Pour cela on détermine les 3 côtés. On connaît déjà le côté $B'C'$ qui est simplement l'angle en A du triangle plan ABC. Il suffit donc de déterminer les angles ZAB' et ZAC' qui ne sont autres que les angles de AB et AC avec la verticale en A.

La mesure des angles se fait à l'aide de deux types d'instruments : les secteurs qui servent à la mesure des hauteurs des étoiles et les quarts de cercle pour la détermination des angles des triangles plan. Dans les deux cas le principe est celui du rapporteur, les alignements étant assurés à l'aide d'une alidade munie d'une lunette, la lecture se faisant sur le limbe à l'aide d'un micromètre. Ces instruments sont grands de façon à assurer une bonne précision de lecture des mesures. Les secteurs ont plus de trois mètres de rayon. Le quart de cercle est un instrument plus petit (environ un mètre de rayon) car il doit pouvoir être transporté en tout lieu, en particulier les clochers des églises souvent les points les plus hauts dans les régions de plaine. On comprend alors que les mesures de distances zénithales soient moins précises que les mesures des angles du triangle.

Les triangles sont choisis en fonction de la nature du terrain, avec des côtés dont la longueur est de l'ordre de 30 km. Bien sûr dans les zones montagneuses les distances peuvent être beaucoup plus grandes que dans les zones de plaine puisque en raison de l'altitude des sommets la vue porte plus loin. La seule exception notable étant les triangles s'appuyant sur la base puisque celle-ci ne fait qu'une dizaine de kilomètres. Certaines zones sont de véritables cauchemars pour les ingénieurs, par exemple les zones marécageuses ou les grandes forêts de plaine qu'ils sont obligés de contourner. Ce fut longtemps le cas de la Sologne en France. On termine la chaîne des triangles par la mesure d'une seconde base ainsi que la mesure de la latitude d'une extrémité de cette deuxième base. Cela permet à la fois de vérifier les calculs et les mesures, ces dernières étant obligatoirement entachées d'erreurs, on obtient ainsi une évaluation de l'erreur totale commise.

2. La bonne formule de trigonométrie sphérique

Dans toute la suite on considère un triangle sphérique dont les angles sont A, B, C et les côtés opposés a, b, c étant entendu que ces trois derniers nombres sont aussi des angles puisque les côtés sont des arcs de grand cercle. Un triangle sphérique est parfaitement déterminé par la donnée de 3 éléments, par exemple les trois côtés (comme en géométrie plane) mais aussi par les trois angles (ce qui n'est pas le cas en géométrie plane). On retrouve bien évidemment des formules qui ressemblent à celles du plan mais avec quelques modifications. Les deux formules essentielles de la trigonométrie sphérique sont d'une part l'analogie des sinus

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

et d'autre part la formule qui permet d'obtenir un côté en fonction de l'angle opposé et des deux autres côtés : $\cos a = \cos b \times \cos c + \sin b \times \sin c \times \cos A$.

Dans la pratique du calcul des siècles passés, on cherchait des formules multiplicatives qui se prêtent aisément au calcul logarithmique. Par exemple de cette dernière formule on peut tirer :

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

et par suite :

$$1 - \cos A = 2\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = 2\,\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\,\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}.$$

En posant $2p = a + b + c$, on en déduit

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin[p-b]\,\sin[p-c]}{\sin b \sin c}}.$$

C'est cette formule qui va être utilisée pour déterminer l'angle A du triangle sphérique en fonction des côtés a, b, c.

3. L'astuce du logarithme décimal

Depuis l'invention des logarithmes par Neper et surtout leur perfectionnement par Briggs au début du XVII[e] siècle, tous les calculs se font à l'aide de tables de logarithmes. On peut alors remplacer les multiplications par des additions, les divisions par des soustractions et les racines carrées par des divisions par 2. En effet, on a :

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)\ ;\ \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)\ ;$$

$$\log(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\log(a)\ ;\ \log(1) = 0.$$

Ainsi, pour calculer le produit $a \times b$, on cherche dans la table le logarithme de a puis celui de b, on les additionne et, par une lecture inverse de la table, on cherche le nombre (qui n'est autre que *a´b)* dont on connaît le logarithme.

Tous les logarithmes sont définis à un facteur multiplicatif près. Le logarithme décimal est caractérisé par le fait que log(10) = 1. Les tables de logarithmes décimaux sont alors très simples puisqu'il suffit de donner les logarithmes des nombres entre 1 et 10 (qui sont des nombres compris entre 0 et 1) pour les avoir tous. Les exemples suivants en montre le principe

$$\log(15{,}3) = \log(10 \times 1{,}53) = \log(10) + \log(1{,}53) = 1 + \log(1{,}53) = 1{,}18469\ldots$$

$$\log(0{,}0153) = \log\left(\frac{1}{100} \times 1{,}53\right) = \log\left(\frac{1}{100}\right) + \log(1{,}53) = -2 + 0{,}18469 = -1{,}81531\ldots$$

Plutôt que d'utiliser une table de logarithmes et une table de trigonométrie, on utilise des tables qui donnent directement les logarithmes des fonctions trigonométriques. Ainsi, la formule de trigonométrie sphérique mise en évidence à l'alinéa précédent, s'écrit

$$\log\left(\sin\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\log(\sin(p-b)) + \log(\sin(p-c)) - \log(\sin(b)) - \log(\sin(c))\right].$$

Il y a un petit problème d'exactitude des calculs. Aussi précises soient les tables, elles ne peuvent donner toutes les décimales des logarithmes de tous les nombres. Selon les exigences de précision on utilise des tables à 5, 6 ou 7 décimales. Les tables à 7 décimales sont indispensables pour les calculs de triangulation et c'est une telle table qui est utilisée par les savants du XVIII^{e} siècle. On imagine le temps nécessaire qu'il a fallu passer pour calculer de telles tables et les éditer sans erreurs.

Si les tables modernes à 6 ou 7 décimales permettent de donner les logarithmes des sinus des angles de 15 secondes en 15 secondes, au XVIII^{e} siècle toutes les tables donnaient les angles de minute en minute. Pour obtenir le logarithme du sinus d'un angle défini à la seconde près, on effectue une interpolation linéaire ce qui est largement suffisant. Par exemple si on veut calculer : log(sin(36°34´18?)) on cherche dans la table log(sin(36°34´), on trouve –1 + 0,7750697.
Puis log(sin(36°35´), on trouve –l + 0,7752399

La différence entre ces deux nombres, à savoir 0,0001702 correspond à 60?. Par conséquent pour 15? on en a le quart soit 0,0000426 et pour 3? le cinquième de ce qui précède (ou le 20^{e} du premier) soit 0,0000085. Pour 18? on doit donc ajouter les nombres correspondant soit 0,0000426 + 0,0000085 = 0,0000511. Finalement log(sin(36°34´18?) = –1 + 0,7750697 + 0,0000511 = –1 + 0,7751208.
On notera que pour calculer avec des nombres positifs, il est préférable de garder le –1 devant les logarithmes. Les tables se présentent d'ailleurs sous une forme très voisine, c'est-à-dire qu'au lieu d'écrire –1 + 0,7750697, elles écrivent aujourd'hui $\overline{1}$,7750697 où le signe moins est placé au dessus du 1 pour signifier qu'il ne porte que sur la partie avant la virgule.

4. Exemple du premier triangle de la mission du Pérou

En 1732 fait rage une controverse sur la forme de la Terre. Newton, à partir de ses travaux théoriques sur l'attraction universelle a montré (plutôt qu'il n'a démontré) que la Terre devrait être un sphéroïde aplati (on dit aujourd'hui un ellipsoïde aplati). Cependant en France, les mesures de Cassini sur le méridien de Paris de Dunkerque à Perpignan tendraient à montrer l'opinion inverse, à savoir que la Terre est un ellipsoïde allongé vers les pôles. Cette controverse ne va pas sans relents de chauvinisme. Cependant petit à petit les savants se rangent à l'opinion de Newton. Afin de trancher définitivement par une expérience, l'académie des Sciences proposa d'aller mesurer le degré de méridien sur l'équateur puis le plus au nord possible. C'est ainsi que furent décidés en 1735 les missions en Laponie et au Pérou.

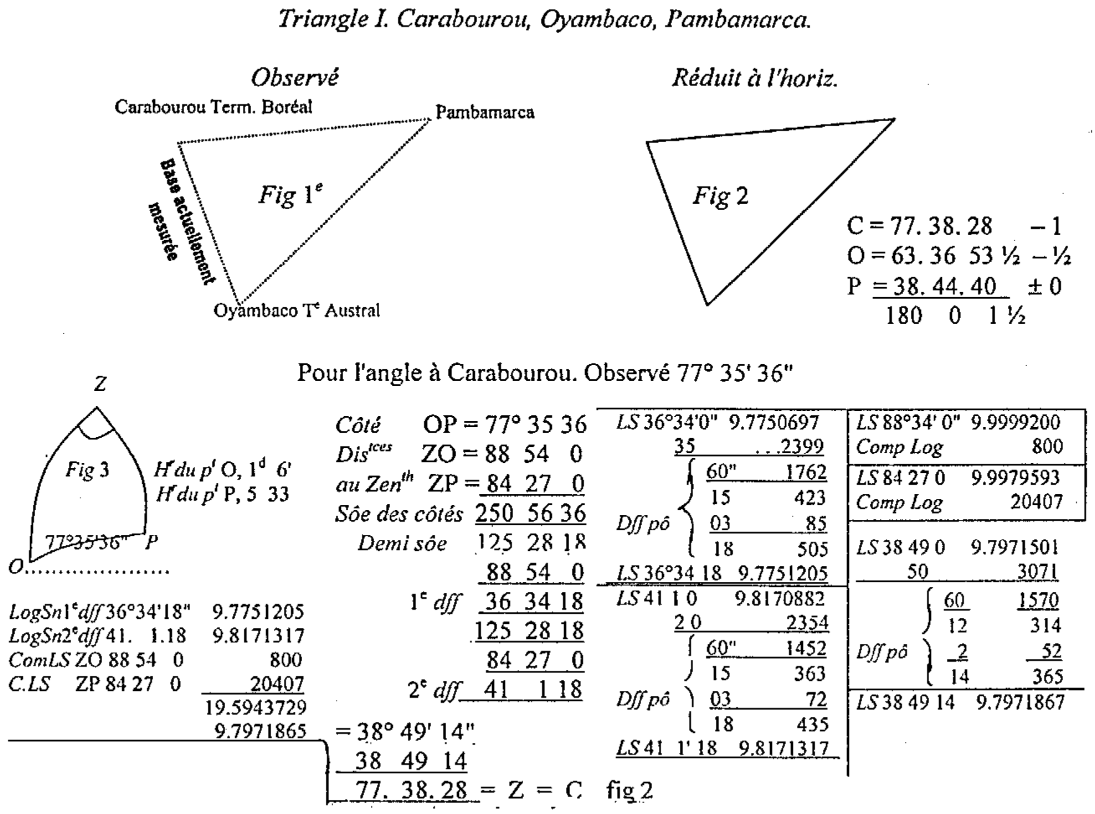
La mission en Laponie fut rondement menée par Maupertuis, Clairaut, Camus et Lemmonier auxquels s'adjoignirent l'abbé Outhier et Celsius. Partie le 2 mai 1736 de Dunkerque, elle fut de retour à Paris le 21 août 1737.

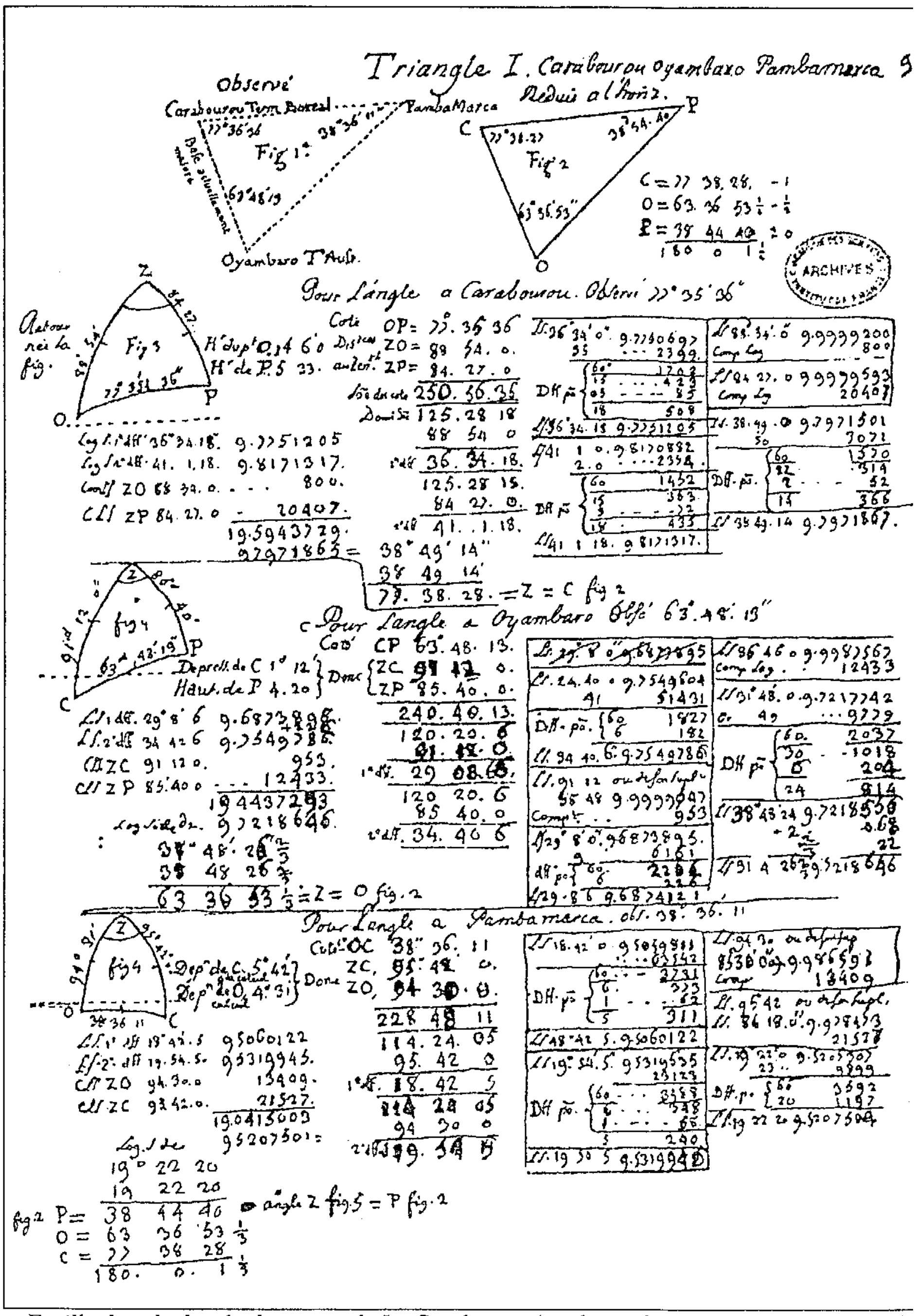
La mission en équateur se heurta, quant à elle, à de nombreuses difficultés dues à la nature du terrain, aux tremblements de terre et à la zizanie qui s'installa dans l'équipe composée des académiciens Godin (qui finalement fit bande à part), Bouguer et La Condamine auxquels étaient adjoints des ingénieurs, un horloger, un chirurgien…

Partie le 16 mai 1735 de La Rochelle elle ne revint qu'en 1744, La Condamine, fin novembre à Amsterdam après avoir descendu l'Amazone et rejoint Cayenne, Bouguer fin juin à Paris en étant passé par Panama. Godin ne rentrera pas en France et finira par s'installer en Espagne. Bien d'autres membres de l'équipe initiale sont morts (accidents, fièvres, assassinats).

La reproduction ci-après correspond à une feuille de calculs tirée du carnet de La Condamine. Il s'agit des calculs correspondant au premier triangle de la chaîne qui doit s'étendre sur 3°. Ce premier triangle a un des côté (Carabourou - Oyambaco) qui est la base dite de Yarouqui, base mesurée non loin de Quito (qui faisait alors partie du Pérou, possession de la couronne d'Espagne et gouverné par un Vice-Roi en poste à Lima) et d'une longueur de 6272 toises 4 pieds et 2 à 5 pouces suivant les mesures (soit environ 12 Km).

La lecture du document original étant un peu délicate, nous avons transcris dans la figure ci-dessous une partie du texte original qui est reproduit page suivante et nous allons la commenter.





Feuille de calcul tirée du carnet de La Condamine (Archives de l'Académie des Sciences).

4.1. Interprétons ces calculs

La figure 1 donne, comme il est précisé, les angles du triangle plan COP (C pour Carabourou, O pour Oyambaco et P pour Pambamarca). La figure 2 donne les angles du triangle sphérique COP réduit à l'horizontal, c'est-à-dire qu'elle donne le résultat des calculs de la feuille. À droite il a été reporté les valeurs des angles et on a vérifié que leur somme est, comme il se doit, supérieure à 180°. L'excès sphérique a été porté à 1" $\frac{1}{2}$.

La figure 3 a été faite à l'envers et l'auteur demande de la retourner. Il s'agit de la figure permettant de calculer l'angle horizontal en C comme il a été vu au premier alinéa ci-dessus. On fait intervenir le point Z correspondant au zénith en C. La ligne pointillée traduit la position de l'horizontale en C par rapport aux points O et P. On a reporté sur cette figure les valeurs des côtés. Et à côté de la figure 3 on trouve marqués *H^r du p^t* O (Hauteur du point O) et *H^r de P* (Hauteur de P). Pour OP on a l'angle en C du triangle plan COP. Pour ZO et ZP on a retranché de 90° les « hauteurs » de O et de P (respectivement les angles mesurés ZCO et ZCP) qui traduisent l'inclinaison des droites CO et CP sur le plan horizontal en C ; pour avoir les angles ZCO et ZCP il suffit de retrancher ces valeurs à 90°. Toutes ces valeurs se retrouvent dans la deuxième colonne avec l'indication côté pour OP et distances au zénith pour ZO et ZP.

Cette deuxième colonne se poursuit par le calcul de la somme des côtés, puis de la demi somme. Cela revient à calculer la quantité p dans la formule de trigonométrie donnée ci-dessus. Puis il calcule la première différence, soit la quantité p – b de la formule et qui vaut ici 36° 34´ 18?et enfin la deuxième différence, c'est-à-dire la quantité p – c qui vaut ici 41° 1´18?.

La troisième colonne contient le calcul du logarithme du sinus de ces deux angles par interpolation linéaire. Nous avons donné le détail de la méthode dans l'alinéa précédent en ce qui concerne le premier angle. Toutefois au lieu d'écrire $\overline{1}$,7750697 il écrit 9,7750697 ce qui revient à ajouter 10 donc à multiplier les valeurs par 10^{10} ce qui se traduit par un simple déplacement de la virgule. On évite alors le recours à des nombres négatifs. Cette astuce a fait fortune puisqu'elle est utilisée sous une forme voisine dans les calculatrices électroniques. On notera au passage une erreur dans la division par 4. La Condamine a écrit 423 au lieu de 426. Cette erreur n'a cependant pas de conséquence sur le résultat final. Dans cette colonne ainsi que dans la suivante, le logarithme du sinus est abrégé en LS.

La quatrième et dernière colonne contient le calcul du complément dit logarithme des sinus des angles ZO et ZP ce qui est une autre façon de calculer l'opposé de ces logarithmes. En effet la formule utilisée impose de diviser par sin(ZO) $\times$ sin(ZP) donc de retrancher log(sin(ZO)) et log(sin(ZP)). Par exemple le deuxième calcul de la colonne indique

log(sin(84° 27´ 0?) = 9,9979593 ce qu'il faut lire $-1 + 0{,}9979593$ dont l'opposé est $1 - 0{,}9979593$. La soustraction est alors aisée à faire; il suffit de compléter les chiffres à 9 sauf le dernier qui est complété à 10. On trouve alors 0,0020407. Seuls les chiffres significatifs ont été écrits, leur position indiquant clairement de quelles décimales il s'agit.

Pour comprendre la fin de la quatrième colonne, il nous faut revenir à la première, dans la partie au dessous de la figure 3. Il y est utilisé la formule :

$$\log(\sin\frac{A}{2}) = \frac{1}{2}[\log(\sin(p - b)) + \log(\sin(p - c)) - \log(\sin(b)) - \log(\sin(c))]$$

sous la forme

$$\log(\sin\frac{A}{2}) = \frac{1}{2}\left[\log(\sin(\mathit{1^{re}\,dff})) + \log(\sin(\mathit{2^{e}\,dff})) - \log(\sin(ZO)) - \log(\sin(ZP))\right]$$

ce qui aboutit au nombre 9,7971865 qui est bien la moitié de 19,5943729. Il faut donc trouver l'angle dont le logarithme du sinus est 9,7971865. Le résultat est donné à côté (dans la deuxième colonne) avec un signe égal très osé d'un point de vue mathématique mais que tout le monde comprend. Comme on n'obtient que la moitié de l'angle Z il faut doubler ce résultat, ce qui est fait en dessous (on notera que La Condamine n'effectue pas une multiplication par 2 mais additionne ce nombre à lui-même).

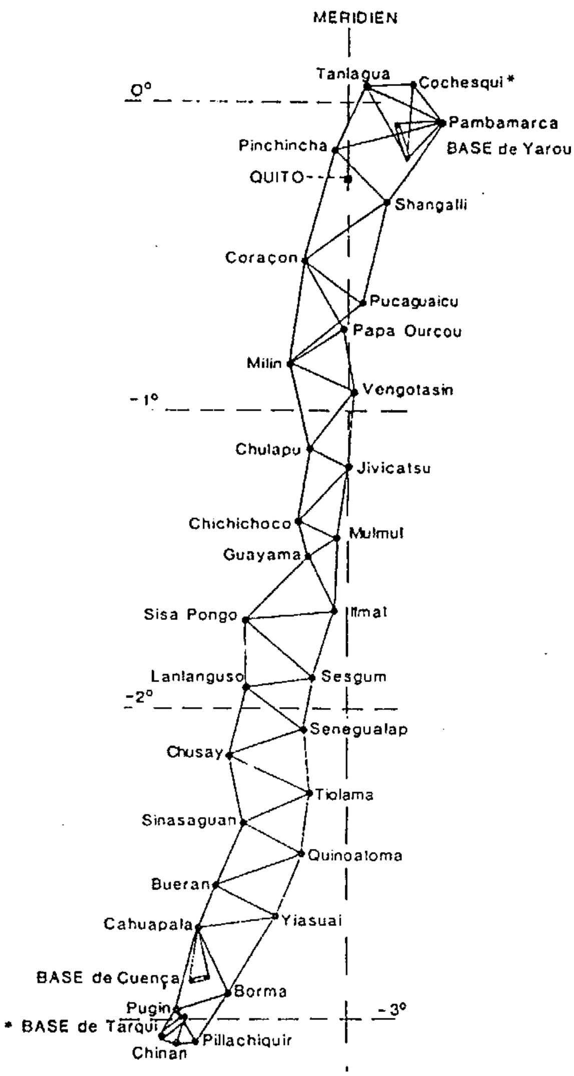
Seulement ce n'est pas une lecture directe dans la table qui permet de trouver l'angle cherché. C'est là qu'intervient le bas de la quatrième colonne :

- on cherche dans la table les deux entrées qui correspondent à des logarithmes qui encadrent 9,7971865 ,
- on trouve 9,7971501 pour l'angle 38°49´0? et 9,7973071 pour l'angle 38°50´ 0?. Il y a une différence de 0,0001570 pour 1´soit 60?,
- or, on ne veut qu'une différence de 0,0000364, ce qui est légèrement plus que le cinquième. Prenons alors le cinquième de 60? qui est 12? pour lequel on aura le cinquième de la différence initiale soit 0,0000314,
- il manque encore 0,0000050. En divisant 0,0000314 par 6 on trouve 0,0000052 ce qui correspond à l'interpolation pour 2?(12?/6),
- finalement pour 14? on a 0,0000356 ce qui donne le meilleur résultat possible à la seconde près.

Le calcul des deux autres angles se fait suivant le même principe même si la disposition n'est pas rigoureusement la même. On notera les ratures et les erreurs corrigées. On remarquera d'autre part que, premièrement, les points qui sont sous l'horizon sont mesurés non pas avec un signe moins mais avec le terme «dépression » (abrégé en *Depress* ou en *Dep*^{n}) ; cela correspond aux figures 4 et 5; d'autre part que lorsque l'angle est supérieur à 90°, par exemple dans la 4^{e} colonne du dernier calcul, l'auteur précise : LS 95°42 ou de son supl. LS 84 18 0? il y a bien égalité des sinus d'un angle et de son supplémentaire ; enfin le terme «degré » est abrégé parfois par un ° comme il est d'usage aujourd'hui, mais aussi par un ? ce qui est assez logique et explique sans doute l'origine du petit zéro actuel.

4.2. La chaîne des triangles

La base étant mesurée très soigneusement en position (azimut par rapport au nord géographique, latitude et longitude des extrémités) et en longueur, il est ainsi possible de calculer la position de chaque sommet de proche en proche et finalement de connaître la distance des deux points extrêmes de la chaîne de triangles. Pour pouvoir évaluer l'erreur sur l'ensemble des mesures, on mesure à nouveau une base à l'autre extrémité et on répartit les erreurs sur l'ensemble des triangles. Il est alors possible de donner une évaluation de la longueur de l'arc de méridien entre les latitudes des deux bouts de la chaîne de triangles.



Si, sur la figure ci-contre donnant la triangulation de l'arc du Pérou, il y a deux bases à l'extrémité sud, c'est en raison des dissensions qui ont fait que rapidement deux équipes ont travaillé indépendamment. La Condamine a utilisé la base de Tarqui.

Pour calculer les longueurs des arcs des côtés, les géomètres utilisent un théorème de Legendre qui dit qu'on peut calculer un petit triangle sphérique de la même façon qu'un triangle plan.

Soit un triangle sphérique d'angles A, B, C, de longueur des côtés a, b, c et d'excès sphérique $e = A+B+C - p$. Alors le triangle plan d'angles $A' = A - \frac{e}{3}$, $B' = B - \frac{e}{3}$, $C' = C - \frac{e}{3}$, dont un des côtés vaut a, aura ses deux autres côtés égaux à b et c au cinquième ordre près en a.

La démonstration de ce théorème est un exercice fastidieux de composition de développements limités.

Or ici l'excès sphérique est très petit, environ une seconde et demi, car les côtés sont eux-mêmes petits. En effet 30 km représentent à peu près un quart de degré soit moins de 5 millièmes de radian. Les erreurs sur les mesures étant bien supérieures, il vaut mieux utiliser les formules de trigonométrie plane qui sont bien plus faciles à mettre en œuvre.

5. Conclusion

Voilà un retour nostalgique à l'ère du calcul manuel. Aujourd'hui d'autres problèmes se posent tant pour le chercheur que pour l'élève de collège ou de lycée. De tout temps le mathématicien a cherché à se faciliter les calculs. La création des logarithmes fut saluée comme un immense progrès. L'avènement des machines à calculer permit à Briggs de mettre en évidence la non continuité uniforme de certaines séries de Fourier. L'ordinateur aujourd'hui nous évite le recours aux fastidieuses tables de logarithme ou au calcul à la main de primitives ou d'intégrales. Mais chaque progrès entraîne des besoins nouveaux et le mathématicien continue à calculer car aucune technique ne peut encore rivaliser avec la puissance imaginative du cerveau.