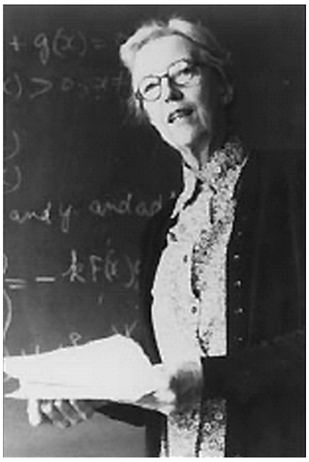
Mary Cartwright

Raphaële Supper

MARY CARTWRIGHT (1900–1998)



Biographie. La mathématicienne britannique Mary Lucy Cartwright naquit le 17 décembre 1900 à Aynho (dans le Northamptonshire) où son père était vicaire. Elle était la troisième dans une famille de cinq enfants. Ses deux frères aînés seront tués pendant la première guerre mondiale.

Dans un premier temps, Mary Lucy reçut son instruction à la maison, par des gouvernantes. Elle ne fut scolarisée qu'à l'âge de onze ans, d'abord à Leamington, puis à Salisbury. Longtemps, sa matière préférée fut l'histoire. Son goût pour les mathématiques s'affirma en dernière année, grâce aux encouragements d'une enseignante autodidacte, Miss Hancock. Ce tournant s'avéra décisif pour le choix de ses études supérieures : désormais, Mary Lucy Cartwright optait pour les mathématiques.

En octobre 1919, elle entra au *St Hugh's College* à Oxford. Il n'y avait alors que cinq femmes qui étudiaient les mathématiques dans cette université. Les conditions de travail étaient difficiles pour tous les étudiants au lendemain de l'armistice : avec le retour des étudiants qui avaient interrompu ou différé leurs études pour partir au front, les amphis étaient bondés. Les étudiants en étaient souvent réduits à recopier des notes de cours où ils n'avaient même pas pu entrer. Les résultats aux examens s'en ressentaient. Mary Lucy Cartwright fut même tentée un moment d'abandonner et de retourner en histoire.

À la fin de sa troisième année à Oxford, autre tournant déterminant pour elle : Morton (alors étudiant, il devait plus tard devenir professeur à Aberystwyth) lui recommanda la lecture de *Modern analysis* de Whittaker et Watson. Elle reçut également la permission d'assister au séminaire de Hardy.

En 1923, ses quatre années d'études furent couronnées par l'obtention du *first class degree*. C'était seulement la deuxième année que les femmes étaient autorisées à passer un *final degree* à Oxford. Mary Cartwright fut la première femme à suivre les cours jusqu'au niveau du *final degree* et la première à réussir cet examen avec la mention *first class*.

Ne souhaitant pas rester plus longtemps à la charge de sa famille financièrement, elle enseigna ensuite les mathématiques dans une école à Worcester puis à Buckinghamshire. Mais quatre ans plus tard elle revint à Oxford pour commencer une thèse sous la direction de Hardy et Titschmarsh. Cette thèse intitulée *The zeros of integral functions of special types* fut soutenue en 1930. Littlewood était examinateur externe.

Après sa thèse, elle continua ses recherches au *Girton College* à Cambridge. En 1935, elle obtint un poste de *University Lecturer* dans cet établissement, puis un poste de *Reader in Theory of Functions* en 1959, poste qu'elle occupa jusqu'à son départ à la retraite en 1968. *Girton College* avait été fondé en 1869 pour l'enseignement supérieur féminin par Emily Davies. En 1948, cet établissement devint membre à part entière de l'université de Cambridge. Il devint mixte en 1977 pour les enseignants–chercheurs et en 1979 pour les étudiants.


Parallèlement à une volumineuse production scientifique (décrite ci–dessous), Mary Lucy Cartwright assuma également des responsabilités administratives importantes :

– elle assura la direction de *Girton College* de 1949 à 1968,
– elle présida la *Mathematical Association* en 1951 et 1952,
– de 1957 à 1960, elle fut présidente de la *Cambridge Association of University Women*,
– au sein de la *London Mathematical Society*, elle fut à plusieurs reprises membre du conseil, vice–présidente et elle fut la première (et jusqu'à présent la seule) femme élue présidente (de 1961 à 1963).

En 1956, elle était membre de la délégation de la *Royal Society* qui visita l'Union Soviétique à l'invitation de l'Académie des Sciences. En 1964, ses travaux furent récompensés par la Médaille Sylvester décernée par la *Royal Society* puis en 1968 par la Médaille DeMorgan de la *London Mathematical Society*. En 1969, elle reçut le titre de *Dame of the British Empire*.

Après son départ à la retraite, elle participa à l'édition des oeuvres complètes de Hardy. Elle voyagea dans de nombreuses universités d'Europe et des États–Unis, continuant longtemps à publier des articles de recherche. Elle s'éteignit le 3 avril 1998.

Travaux mathématiques. Les contributions de Mary Lucy Cartwright (plus de quatre–vingt dix articles publiés dans des journaux mathématiques) recouvrent différents domaines en analyse : fonctions à variable réelle ou complexe et en particulier fonctions entières (holomorphes dans $\mathbb{C}$ tout entier), topologie, équations différentielles, oscillations non–linéaires, systèmes dynamiques, chaos.

Le premier problème résolu par Mary Cartwright avait trait aux séries de Dirichlet et à la méthode de sommation d'Abel. C'était un problème posé par Hardy à son séminaire d'Oxford. Mary Cartwright apporta une solution complète, basée sur des intégrations le long de contours. Après son arrivée à Cambridge, elle s'intégra au séminaire de Littlewood et résolut aussi un problème qu'il y avait soulevé, concernant l'ordre de grandeur du module des fonctions multivalentes :

THÉORÈME DE CARTWRIGHT. Soit D le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série convergente pour $z \in D$, de somme $f(z)$. On suppose que f ne prend aucune valeur plus de p fois dans D.

Soit $M = \max\limits_{0\leq n\leq p} |a_n|$. Alors il existe $A > 0$ ne dépendant que de p tel que :

$$|f(z)| \leq \frac{AM}{(1-|z|)^{2p}} \forall z \in D.$$

Ce travail de Cartwright était le premier résultat significatif sur les fonctions multivalentes. De plus, elle avait mis en oeuvre des techniques originales, en important dans un contexte différent des méthodes de transformations conformes dûes à Ahlfors. Ce théorème pionnier de Cartwright est toujours utilisé en traitement du signal.

Pendant une dizaine d'années, elle continua d'explorer le monde des fonctions entières, fonctions méromorphes, fonctions analytiques à singularités essentielles, étudiant en particulier leur comportement asymptotique et les phénomènes qui peuvent survenir près des frontières fractales. Ses résultats et ceux de Valiron sont les premiers sur les fonctions méromorphes partageant une courbe de niveau. En collaboration avec Bosanquet, elle étudia aussi les moyennes de Cesaro et les moyennes de Hölder de fonctions analytiques.

En janvier 1938, ses recherches prirent une nouvelle orientation, suite à un appel relayé par la *London Mathematical Society* : un comité du *Department of Scientific and Industrial Research* demandait l'expertise de mathématiciens sur des questions surgissant de problèmes de radio et de radar. Les oscillations des ondes radio sont décrites à l'aide d'une équation introduite en 1920 par le physicien Van der Pol. Cette équation différentielle du second ordre non–linéaire décrit un circuit électrique comportant une triode dont la résistance varie avec le courant (des équations similaires modélisent d'autres phénomènes physiques comme par exemple les oscillations d'un bâtiment sous l'effet du vent). Les ingénieurs radio voulaient savoir s'il y avait une solution périodique, si elle était stable, quelles étaient sa période et son amplitude, comment elles variaient avec les paramètres de l'équation...

Ce défi suscita l'intérêt de Mary Cartwright. Intuitivement, elle avait l'impression de reconnaître le cadre topologique du problème. Ce fut le point de départ d'une collaboration d'une dizaine d'années avec Littlewood. Les travaux de Poincaré, Birkhoff, Bendixon et Levinson sur les équations différentielles les inspirèrent sur le plan théorique. Mais concernant le problème concret posé par les ingénieurs, mis à part quelques résultats élémentaires datant des années vingt et quelques données expérimentales, Cartwright et Littlewood partaient dans l'inconnu et découvrirent une grande variété de phénomènes inattendus, obtenant aussi bien des solutions périodiques instables que non périodiques mais stables, selon les valeurs des paramètres.

Pendant la seconde guerre mondiale, la *Royal Air Force* se trouvait confrontée à des dysfonctionnements de radar : poussés à des puissances élevées, les amplificateurs se mettaient à répondre de façon de plus en plus erratique. L'armée incriminait un défaut de fabrication pour ce manque de fiabilité et retournait le matériel pour réparation. Mary Cartwright démontra que ce comportement pathologique des amplificateurs n'était pas dû à une imperfection technique mais était intrinsèque à l'équation de Van der Pol régissant un amplificateur non–linéaire : pour un signal d'entrée périodique, la solution conserve la même période à faible puissance ; mais quand la puissance augmente, la période devient de plus en plus grande, pour finalement aboutir à une solution qui n'est plus périodique du tout.

C'était la première étude d'un phénomène appelé aujourd'hui chaos. Elle fut publiée après guerre mais c'est seulement une quinzaine d'années plus tard qu'elle trouva un écho lorsque Levinson signala cet article à Smale qui travaillait sur les systèmes dynamiques. Les exemples étudiés par Cartwright et Littlewood contredisaient une conjecture de Smale. Leurs travaux précurseurs influencèrent ainsi le développement de la théorie moderne du chaos. Par ailleurs, le travail de Cartwright et Littlewood fut l'un des premiers à combiner méthodes topologiques et analytiques pour l'étude des équations différentielles.

Les recherches de Mary Cartwright à partir des années cinquante renouent avec les fonctions analytiques sans pour autant abandonner le domaine des équations différentielles. En 1956 parut son ouvrage *Integral Functions*. Elle dirigea la thèse de nombreux étudiants. Elle publia également des articles historiques et biographiques.

Notre couverture. Les fonctions de la classe de Cartwright sont les fonctions entières f de type exponentiel telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log^+ |f(x)|}{1+x^2}\, dx < +\infty.$$

Par exemple, la transformée de Fourier d'une distribution à support compact appartient à cette classe. Krein a obtenu une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction entière f appartienne à la classe de Cartwright : que $\log|f(z)|$ puisse être majoré par une fonction harmonique positive dans le demi–plan supérieur, ainsi que dans le demi–plan inférieur.

Un autre théorème dû à Krein :

Si une fonction entière f possède une représentation de la forme suivante : $\dfrac{1}{f(z)} = \sum_n \dfrac{c_n}{z-\lambda_n}$*, où les suites* $(c_n)_n$ *et* $(\lambda_n)_n$ *satisfont la condition* $\sum_n \dfrac{|c_n|}{1+|\lambda_n|} < +\infty$*, alors f appartient à la classe de Cartwright.*

Matsaev a démontré le résultat suivant :

Si une fonction entière f vérifie une estimation de la forme suivante : $|f(z)| \geq exp\left\{-M\dfrac{1+|z|^\rho}{|\Im m\, z|^k}\right\}$ $\forall z \in \mathbb{C}$*, où $M > 0$, $0 \leq \rho < 1$ et $k > 0$ sont des constantes indépendantes de z, alors f appartient à la classe de Cartwright.*

Étant donnée f une fonction de la classe de Cartwright telle que $f(0) \neq 0$, soit $\{a_k\}_k$ l'ensemble de ses zéros (répétés selon leur multiplicité). On note $n_+(r,\alpha)$ et $n_-(r,\alpha)$ le nombre de zéros de f situés respectivement dans les secteurs :

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq r, |\arg\, z| \leq \alpha\}$$

et

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq r, |\pi - \arg\, z| \leq \alpha\}.$$

Le théorème de Cartwright–Levinson établit que :

$$\sum_k \left|\Im m\, \frac{1}{a_k}\right| < +\infty,$$

$$\sum_{|a_k|<R} \Re e\, \frac{1}{a_k} \text{ admet une limite finie quand } R \to +\infty,$$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n_+(r,\alpha)}{r} = \lim_{r\to+\infty} \frac{n_-(r,\alpha)}{r} = \frac{1}{2\pi}\left(\limsup_{y\to+\infty} \frac{\log|f(iy)|}{y} + \limsup_{y\to+\infty} \frac{\log|f(-iy)|}{y}\right)$$

pour tout $\alpha \in]0,\pi[$.

Références bibliographiques.

Mary Lucy Cartwright : *Some exciting mathematical episodes involving John Edenson Littlewood*, Bull. Inst. Math. Appl. 12 (1976) no.7, pp.201–202.

M.L. Cartwright : *Moments in a girl's life*, Bull. Inst. Math. Appl. 25 (1989) no.3–4, pp.63–67.

Freeman Dyson : *Review of "Nature's Numbers" by Ian Stewart*, Mathematical Intelligencer, 19(2), 1997, 65-67.

N.P. Erugin : *Mary Lucy Cartwright*, Differentsialnye Uravneniya 25 (1989) no.9, pp. 1642–1646.

Paul Koosis : *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Université de Montréal, Les Publications CRM, Montréal, PQ, 1996.

B.Y. Levin : *Lectures on entire functions*, (Eds : Y. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko), Translations of mathematical monographs, Providence RI, American Mathematical Society, 1996.

S.L. Mc Murran and J.J. Tattersall : *The Mathematical Collaboration of M.L. Cartwright and J.E. Littlewood*, American Mathematical Monthly, Vol.103, No.10 (December 1996) 833-845.

Shawnee L. Mc Murran and James J. Tattersall : *Cartwright and Littlewood on van der Pol's equation*, Harmonic analysis and nonlinear differential equations (Riverside, CA, 1995), 265–276, Contemp. Math., 208, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

S.L. Mc Murran and J.J. Tattersall : *Mary Cartwright (1900–1998)*, Notices of the AMS, volume 46, Number 2, February 1999, pp.214–220.

Caroline Series : *Obituary : Dame Mary Lucy Cartwright DBE (1900–1998)*, European Mathematical Society Newsletter, December 1998, Issue 30, pp.21–23.

Caroline Series : *Dame Mary Cartwright*, to appear in the Oxford Dictionary of National Biography.

Girton College Register, Volume 2, 1944-1969.

Personalities and Presidents, The Mathematical Gazette, Vol. 80 (March 1996), 22-23.

Obituary, Daily Telegraph, London (April 11, 1998).

Obituary, The Times, London (April 7, 1998).

Quelques sites sur la toile.

http ://www.agnesscott.edu/lriddle/women/cartwght.htm
http ://www.amsta.leeds.ac.uk/Applied/news.dir/issue9.dir/news/news.html #topology
http ://www.cis.ksu.edu/~ab/Miscellany/smale.ps
http ://www.geometry.net/detail/scientists/cartwright_dame_mary.html
http ://www.girton.cam.ac.uk/
http ://www.physics.ucla.edu/~cwp/Phase2/Cartwright,Mary_Lucy@951234567.html
http ://www.siam.org/siamnews/07-98/mlcart.htm
http ://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Cartwright.html

Raphaële Supper
Maître de conférences
U.F.R. de Mathématique et d'Informatique
Université Louis Pasteur, Strasbourg I