

POUR ENSEIGNER LA PHILOSOPHIE DES MATHEMATIQUES

Eléments de réflexion sur

le raisonnement de validation,
les géométries non-euclidiennes,
les nombres,
l'algèbre,
les notions "statiques" et leurs transformations,
les fonctions continues et les fonctions discontinues,
les structures,
le calcul vectoriel.

Par le groupe Philo-Math de l'IREM de Strasbourg
avec le soutien de l'I.U.F.M. d'Alsace de l'Association des Professeurs de Philosophie
(APPEP) et de l'Association des Professeurs de Mathématiques (APMEP).

Table des matières

LES AUTEURS	7
REMERCIEMENTS	8
I. INTRODUCTION GENERALE	9
II. LE RAISONNEMENT DE VALIDATION	13
1. Introduction au thème raisonnement de validation	14
2. Démarches de validation en philosophie et en mathématiques.....	16
2.1. Un exemple philosophique.....	16
2.1.1. Gorgias de Platon	16
2.1.2. Types de raisonnements de validation.....	18
2.2. Exemples de démonstrations mathématiques.....	19
2.2.1. Types de raisonnements	19
2.2.2. Exemples de déduction simple et déduction composée	20
2.2.3. Exemple de démonstration par l'absurde.....	21
2.2.4. Exemple de raisonnement par récurrence ou induction : du particulier au général	21
2.2.5. Exemple de raisonnement par disjonction des cas	23
2.2.6. Quelques réflexions sur les types de démonstration.....	23
2.3. Exemples de séances réalisées en classe	24
2.3.1. Séance autour de la question : qu'est-ce que le raisonnement ?.....	24
2.3.2. Séance autour de la question : le bon sens obstacle à la rigueur ?	24
3. Le raisonnement et le jugement d'existence	27
3.1. La démonstration de SAINT ANSELME DE CANTERBURY	27
3.1.1. Analyse de la procédure de validation dans la raisonnement.....	27
3.1.2. Réflexions sur l'intention philosophique ou théologique de SAINT ANSELME.....	29
3.1.3. La critique de la preuve ontologique par KANT	32
3.2. Réflexions sur les démarches de la philosophie d'aujourd'hui	37
3.3. La démonstration d'existence en mathématique.....	38
3.3.1. Exemples de démonstration d'existence	38
3.3.2. Le constructivisme et l'axiome de choix	40
4. Présentation d'un exemple de démonstration mathématique.....	41
4.1. Exemples de démarches de découvertes d'une démonstration	41
4.1.1. Démarche par enrichissement de la figure (exploitant les hypothèses)	42
4.1.2. Démarche par appauvrissement de l'énoncé (construction omettant certaines des hypothèses)	43
4.2. La rédaction de la démonstration	44
4.3. Observations.....	45
4.3.1. Distinguer entre la fonction heuristique du premier texte et la fonction validation du second texte	45

4.3.2. Réflexion sur la place de la figure dans le raisonnement	48
4.3.3. Compte rendu de séances réalisées en classe sur la place de la figure dans le raisonnement	48
4.3.4. Comparaison d'une heuristique géométrique et d'une heuristique basée sur le calcul.....	49
5. Le problème de la pensée mathématique	52
5.1. L'heuristique et la pensée mathématique.....	52
5.1.1. HEGEL et la pensée mathématique	53
5.1.2. BADIOU et la pensée mathématique comme ontologie.....	56
5.2. Calculer et penser	63
5.2.1. La "nouvelle caractéristique" de LEIBNIZ.....	63
5.2.2. La pensée mathématique plus large que le calcul ?.....	64
5.3. Intuition et conception.....	65
5.3.1. Reprise des exemples du paragraphe 4.....	65
5.3.2. La conception Kantienne des mathématiques	65
5.3.3. Exemple de développement algébrique à partir d'un théorème de géométrie	74
III. LES GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES	77
1. Intérêt philosophique de l'approche des géométries non-euclidiennes	78
2. Des théorèmes de géométrie plane non vérifiés sur la sphère ou la pseudosphère.....	79
2.1. Théorème sur la somme des angles d'un triangle.....	79
2.2. Réflexions sur les cas présentés.....	80
2.2.1. Observations	80
2.2.2. Problématisation philosophique	81
3. Droites dans le plan et lignes géodésiques : axiomes ou évidences différant selon l'espace envisagé	82
3.1. Chemin joignant deux points	82
3.2. Réflexions sur le cas présenté.....	82
3.2.1. Observation.....	82
3.2.2. Problématisation philosophique	82
4. Mise en question de l'axiome euclidien des parallèles dans la mise en perspective.....	83
4.1. Axiome d'EUCLIDE	83
4.2. Réflexions sur le cas présenté.....	84
4.2.1. Observations	84
4.2.2. Problématisation philosophique	84
4.3. La 5e demande (ou postulat) d'EUCLIDE.....	84
4.3.1. Précisions lexicales.....	84
4.3.2. Histoire de la demande (ou postulat) d'EUCLIDE	85
IV. LES NOMBRES.....	87
1. Intérêt philosophique de la réflexion sur les nombres	88
1.1. Eclairage de la notion de mathématisation	88
1.2. Réflexion sur les développements des mathématiques.....	89
2. Qu'est-ce qu'un nombre ?	90
2.1. Etude des applications et applications particulières	90
2.1.1. Notion d'application d'un ensemble S nommé "source" vers un ensemble B nommé "but" .	90

2.1.2. Propriétés de quelques applications.....	91
2.1.3. Définition du nombre	92
2.1.4. La bijection en pratique	93
2.2. Opérations sur les ensembles.....	94
2.2.1. Réunion de deux ensembles disjoints.....	94
2.2.2. Partition d'un ensemble	95
2.3. Les ensembles de nombres	95
V. L'ALGÈBRE	97
1. Intérêt philosophique de la réflexion sur l'algèbre.....	98
2. La démarche algébrique	99
2.1. D'un problème au problème inverse	99
2.2. Résoudre d'abord un problème inverse plus facile	100
2.3. Démarche de résolution en passant par un problème inverse.....	100
3. Les équations de DIOPHANTE d'Alexandrie.....	101
3.1. Exemple 1 : (Arithmétique, Livre I).....	101
3.2. Exemple 2 : (Arithmétique, Livre IV)	102
4. Géométrie et algèbre	103
4.1. L'équation $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ et son image géométrique.....	103
4.2. Développement algébrique à partir d'un théorème de géométrie (égalité d'aire entre deux rectangles)	103
VI. LES NOTIONS "STATIQUES" ET LEURS TRANSFORMATIONS	105
1. Intérêt philosophique de la réflexion sur les transformations.....	106
2. Vers la notion de transformation	106
2.1. Exemple 1	107
2.2. Exemple 2	108
2.3. Propriétés des transformations.....	108
3. Exemples de transformations	109
3.1. Les projections.....	110
3.1.1. Projection du plan sur une droite parallèlement à une direction donnée.....	110
3.1.2. Projection d'une droite d_1 sur une droite d	111
3.2. Les symétries	112
3.2.1. Symétrie par rapport à une droite	112
3.2.2. Définition et vocabulaire	112
3.2.3. Propriétés générales.....	112
3.2.4. Propriétés géométriques de S	113
3.3. Symétrie centrale	113
3.3.1. Définition.....	113
3.3.2. Propriétés générales de s	113
3.3.3. Propriétés géométriques de s	113
4. Exemples de composition de transformations.....	114
4.1. Exemples de situations concrètes où la succession des actions n'est pas commutative	114

4.2. Composition des applications (ou de transformations)	114
4.2.1. Remarque importante	114
4.2.2. Définition de la composition de deux applications (ou transformations) f et g	115
4.3. Composition de symétries.....	115
4.3.1. Composition de symétries d'axes sécants	115
4.3.2. Composée de deux symétries d'axes parallèles	115
VII. FONCTIONS CONTINUES ET FONCTIONS DISCONTINUES.....	117
1. Intérêt philosophique de la présentation de ces fonctions	118
1.1. Statut et rôle du principe du déterminisme dans les sciences de la nature	119
1.2. La question des grands effets de petites causes	120
2. Les fonctions continues et des contre-exemples.....	121
2.1. Introduction.....	121
2.2. Continuité d'une fonction en un point.....	121
2.3. Fonctions continues ; exemple et contre-exemple.....	121
2.4. Exemple de limite d'une suite de fonctions continues	122
VIII. LES STRUCTURES	125
1. Intérêt philosophique de l'examen de la notion de structure	126
1.1. Le concept philosophique et le concept mathématique	126
1.1.1. Petit historique.....	126
1.1.2. Sens général de la notion.....	126
1.1.3. La notion de structure dans le "Structuralisme"	127
1.1.4. Le structuralisme philosophique et l'usage des structures mathématiques.....	128
1.2. De l'intuitif au formel, et de l'étude des "êtres" à celle des relations.....	128
1.3. Faire (re)naître la passion de la pensée mathématique	129
1.3.1. La méprise concernant le caractère abstrait des mathématiques.....	129
1.3.2. L'amour pour la pensée mathématique.....	129
2. Approche de la notion de structure.....	130
2.1. Situations de découvertes de structures	130
2.1.1. Exemples élémentaires	130
2.1.2. Les logarithmes : un exemple d'isomorphisme	132
2.2. Premier bilan des situations de découvertes de structures.....	132
2.3. La nouvelle caractéristique de LEIBNIZ	132
3. Exemples de structures algébriques.....	134
3.1. Quelques rappels.....	134
3.1.1. Rappels concernant la théorie des ensembles.....	134
3.1.2. Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Z}$. Observation sur la règle des signes	135
3.2. Structure de groupe.....	139
3.3. Structure d'anneau.....	139
3.3.1. $(2\mathbb{Z}, +, \times)$	139
3.3.2. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	140
3.3.3. Anneau de polynômes à une indéterminée.....	140
3.4. Structure de corps	141
4. L'exemple du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.....	141
4.1. Vers les nombres "sophistiqués" de BOMBELLI	142

4.2. Des nombres sophistiques de Bombelli aux nombres complexes	143
4.3. Une axiomatique des nombres complexes.....	144
4.4. Retour des nombres complexes aux nombres de BOMBELLI	144
4.4.1. Etude des nombres complexes de la forme $(a;0)$	145
4.4.2. Etude des nombres complexes de la forme $(0;a)$	145
IX. LE CALCUL VECTORIEL	147
1. Intérêt philosophique de la réflexion sur le calcul vectoriel	148
2. Le calcul vectoriel : expose élémentaire	149
2.1. Notion de vecteur.....	149
2.2. Remarques épistémologiques sur l'introduction de la règle du parallélogramme	151
3. Le théorème d'ARCHIMEDE relatif à la loi d'équilibre du levier (composition de forces parallèles)	152
3.1. Le théorème d'ARCHIMEDE.....	152
3.2. Le vrai, le vraisemblable, l'improbable et l'impossible.....	154
4. Le calcul vectoriel : survol historique.....	155
5. Digression sur l'analyse infinitésimale et sur ses deux chapitres : le calcul différentiel et le calcul intégral.....	157
5.1. Propriétés locales	158
5.2. Notion de dérivée.....	159
BIBLIOGRAPHIE	162

Les Auteurs

Les auteurs de cette brochure sont des professeurs de mathématiques ou de philosophie, de l'Académie de Strasbourg, qui ont participé au groupe philosophie-mathématiques de l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Ont participé aux discussions ayant conduit à l'élaboration de cette brochure les collègues suivants :

BELLILI Jeanne
 BENEVENT Raymond
 CABASSUT Richard
 CHIROLLET Jean-Claude
 CNOCKAERT Juliette
 COLLE Yves
 DE SOLERE Bruno
 FRIEDELMEYER Jean-Pierre
 GLAESER Georges
 MEYER Jean-Claude
 MINTSA Colette
 PELLERIN Olivier
 PLUVINAGE François
 ROHRBACH Philippe
 RUSCHER Frédéric
 SAMSON Jean
 STOLL André
 STONESCU Mihaï
 STRAUSSER Joëlle
 THOUVENOT Marie-France
 VOGEL Nicole
 WILLIEME Françoise

DEDICACE

Georges GLAESER,
 membre éminent de notre groupe, nous a quittés en 2002.
 Cette brochure lui est dédiée.

Remerciements

Le groupe philosophie-mathématiques souhaite remercier les différentes institutions et personnes qui ont permis la réalisation de cette brochure.

D'abord les régionales des associations de professeurs de philosophie (A.P.P.E.P.) et de professeurs de mathématiques (A.P.M.E.P.) qui sont à l'origine de la formation de ce groupe, et qui ont constamment soutenu les projets et les actions de ce groupe.

Ensuite l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg. Cet institut a accueilli notre groupe dans tous les sens du terme. L'IREM a permis que nos réunions se tiennent au sein de sa riche bibliothèque, et nous voulons particulièrement remercier M. Roland BIECHEL qui a facilité l'accès à cette bibliothèque notamment le samedi après-midi. L'IREM nous a donné les moyens matériels (par exemple en terme de photocopies, de remboursements de frais de déplacements pour les conférenciers) pour mener notre travail dans de bonnes conditions. Mais il nous a surtout reconnu comme groupe IREM à part entière.

Enfin l'I.U.F.M. d'Alsace nous a institué comme groupe recherche-formation pour les années 2000 à 2002 ce qui a facilité nos conditions de travail. Nous tenons particulièrement à remercier Mme Marie José HERRBACH qui a suivi notre travail avec attention.

Au niveau de la conception de la brochure nous tenons à remercier Frédéric RUSCHER et Richard CABASSUT qui ont rassemblé les textes et les ont mis en forme pour présenter la brochure, ainsi que François PLUVINAGE et Marie-Agnès EGRET qui ont été des lecteurs attentifs et critiques des versions successives de la brochure jusqu'à son état final.

Enfin Alexandra CARMINATI qui a pris en charge le travail de composition finale de la brochure.

I. Introduction générale

Objectifs de la brochure

La pédagogie de l'allusion appuie ses explications sur des connaissances familières à l'auditoire. Elle évite ainsi de longues explications inutiles. Mais cette pédagogie est désastreuse si les références des élèves (et parfois des maîtres) ne font qu'ajouter de l'obscurité à l'incompréhensible.

Pour contribuer à éviter ces risques, l'objectif de cette brochure est triple :

- apporter aux collègues professeurs de philosophie les éléments d'une réflexion sur les mathématiques en leur permettant de disposer de bases mathématiques qui soient à la fois simples, rigoureuses et éclairantes,
- apporter aux collègues professeurs de mathématiques une information d'une part sur les démarches de la philosophie et d'autre part sur l'approche philosophique des mathématiques,
- proposer un matériel susceptible d'être utilisé dans des collaborations entre philosophes et mathématiciens. Cet objectif prend toute son actualité dans la perspective de travaux personnels encadrés (T.P.E.) associant les deux disciplines mathématiques et philosophie.

Genèse de la brochure

La brochure que vous avez entre les mains est le fruit du travail du groupe Philosophie-Mathématiques de l'IREM de Strasbourg, qui s'est constitué à partir de l'année 1997, à l'initiative des régionales de l'Association des Professeurs de Philosophie (A.P.P.E.P.) et de l'Association des Professeurs de Mathématiques (A.P.M.E.P.).

Deux types de rencontres de travail se sont imposés :

- un premier type de travaux était destiné à examiner des notions à la fois philosophiques et mathématiques, successivement l'infini (1997-1998), l'espace (1998-1999) et le raisonnement de validation (1999 à 2001). Dans cette brochure nous ne rendons compte que des travaux autour du thème du raisonnement de validation, travaux qui ont pu être développés dans le cadre d'un groupe recherche-formation de l'I.U.F.M. d'Alsace. Dans cette partie consacrée au raisonnement, nous avons voulu restituer le caractère vivant des échanges ; c'est ainsi qu'on peut noter la présence d'exemples philosophiques et mathématiques, de comptes-rendus de séances dans une classe de terminale L, de comptes-rendus de nos débats – débats que nous laissons ouverts sans prétention à l'exhaustivité, sachant que l'exposé d'un débat vaut mieux que des conclusions hâtives.
- un second type de travaux a réuni des professeurs de mathématiques et des professeurs de philosophie autour de différents thèmes mathématiques exposés dans cette brochure : les géométries non-euclidiennes, les nombres, l'algèbre, les notions "statiques" et leurs transformations, les fonctions continues et les fonctions discontinues, les structures, le calcul vectoriel. Il s'agissait de présenter des contenus mathématiques de façon à la fois rigoureuse, claire et abordable, à l'usage des professeurs de philosophie. C'était également l'occasion de discuter des notions abordées ainsi que de l'intérêt qu'elles pouvaient présenter pour la réflexion philosophique.

Pour compléter les travaux présentés – qui ne peuvent être qu’une contribution parmi beaucoup d’autres, et sans aucune prétention à l’exhaustivité – nous indiquerons lors de la présentation de certains thèmes quelques références bibliographiques. Citons, par exemple, deux contributions générales à une réflexion commune à la philosophie et aux mathématiques. L’ouvrage, sous la direction de Evelyne BARBIN et de Maurice CAVEING, *Les Philosophes et les mathématiques*, Ellipses, 1996, propose un panorama de seize philosophes, de PLATON à CAVAILLES, dont les mathématiques ont inspiré la réflexion. Le livre *Penser les mathématiques*, Seuil, 1982, offre différents débats issus du séminaire de philosophie et de mathématiques de l’Ecole Normale Supérieure.

II. Le raisonnement de validation

1. Introduction au thème raisonnement de validation

Travaux extérieurs au groupe

La réflexion sur le raisonnement de validation, et notamment sur l'argumentation et la démonstration, est abondante.

Déjà plusieurs IREM ont proposé des réflexions croisées, philosophie et mathématiques. Par exemple l'IREM de Lille avec les actes des journées académiques de Lille, *Mathématique et Philosophie : la démonstration*, édité en 1997, propose plusieurs contributions, avec notamment celle de SALANSKIS sur *Sens et nouveautés de la Démonstration* ou la question de CRAMPE-CASNABET : *Peut-il y avoir des démonstrations en philosophie ?*

Notons également l'approche historique de l'IREM de Poitiers avec la brochure de Jacqueline GUICHARD, *Statuts et fonctions de la démonstration en mathématiques: quelques repères*, édité en 1993. Cette brochure offre une interrogation sur les origines et l'histoire de la démonstration, à partir de textes issus des mathématiques, de la philosophie et propose différentes fonctions de la preuve en mathématiques. On retrouve également cette approche historique dans les actes du 7^{ème} colloque inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, *La démonstration mathématiques dans l'histoire*, IREM de Besançon, 1989.

La communauté des didacticiens des mathématiques a également contribué au débat.

Il existe un site internet, <http://www-didactique.imag.fr/preuve/>, fondé par Nicolas BALACHEFF, qui rend compte des travaux de didactique des mathématiques dans le domaine de la preuve.

Du point de vue philosophique, les contributions de TOULMIN [*Les usages de l'argumentation*, (traduction), Presses universitaires de France, Paris, 1993]] ou de PERELMAN [PERELMAN Chaïm, OLBRECHTS-TYTECA Lucie, *Traité de l'argumentation, la nouvelle rhétorique* Editions de l'Université de Bruxelles, 1976] ouvrent la voie à différentes typologies de raisonnements et d'argumentations très discutées actuellement.

Mais nous ne saurions terminer ce rapide panorama sans évoquer les travaux de l'IREM de Strasbourg sur la démonstration.

Travaux de l'IREM de Strasbourg

Les travaux de l'équipe de Strasbourg concernent notamment les aspects cognitifs et langagiers du raisonnement de validation. Raymond DUVAL les expose dans son ouvrage fondamental *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter LANG, 1995. DUVAL précise notamment les différences entre argumentation et démonstration. L'argumentation s'exprime en langue naturelle, s'adresse à un interlocuteur et vise la modification de la valeur de fiabilité de la conclusion pour l'interlocuteur. La démonstration peut s'exprimer dans un langage formalisé avec une conclusion explicitement formulée dont on vise à établir la vérité, indépendamment de tout auditoire. Dans un pas d'argumentation c'est le contenu des propositions, constituant le discours, qui est pris en compte alors que dans un pas de démonstration c'est le statut (hypothèse, théorème, définition, axiome, conclusion,...) des propositions qui est pris en compte. Dans une argumentation, la continuité entre pas successifs, n'est assurée que globalement par une référence commune thématique alors que dans la démonstration la continuité de deux pas successifs est assurée par le recyclage de la conclusion du pas

précédent en hypothèse du pas suivant, ce qui fait qu'une démonstration est valide si le recyclage est correct alors que la notion de validité n'existe pas pour une argumentation : à partir des mêmes prémisses, des argumentations différentes peuvent conduire à des conclusions différentes. Les travaux de DUVAL et de son équipe débouchent sur des propositions concernant l'apprentissage de la démonstration et le rôle fondamental de l'écrit et de la visualisation dans cet apprentissage.

Travaux du groupe

Les travaux de notre groupe n'ont pas l'ambition des précédentes productions dont certaines se placent au niveau de la recherche.

Notre intention est de proposer sur le thème du raisonnement de validation des échanges entre professeurs de mathématiques et professeurs de philosophie, échanges qui constitueront autant de matériaux susceptibles d'alimenter une réflexion ou une activité en classe sur ce thème.

D'abord nous proposons à partir d'un exemple philosophique, le Gorgias de PLATON, et d'exemples mathématiques, des typologies de validation en philosophie et en mathématique.

Ensuite nous étudions le problème particulier des raisonnements et du jugement d'existence, à travers un exemple philosophique, la preuve de l'existence de Dieu par ST ANSELME, et des exemples mathématiques.

Après nous abordons un exemple mathématique pour illustrer différents problèmes particuliers aux démonstrations mathématiques : la démarche de découverte, le rôle de la figure, la rédaction de la démonstration.

Enfin nous terminons par le problème de la pensée mathématique dans son rapport à l'heuristique, au calcul et à l'intuition.

2. Démarches de validation en philosophie et en mathématiques

2.1. Un exemple philosophique

2.1.1. Gorgias de PLATON

A titre d'exemple de démarche de validation par un philosophe, on peut proposer la démonstration du Gorgias de PLATON¹ qu'il vaut mieux subir l'injustice que de la commettre.

« Calliclès : Ici encore, Socrate, sous prétexte de rechercher la vérité, tu te comportes comme un vulgaire déclamateur en ergotant sur ce qui est laid du point de vue de la nature et beau selon les lois de la société.

Or dans la plupart des cas, la nature et la loi se contredisent. C'est pourquoi on ne peut pas éviter de se contredire soi-même si, par timidité, on hésite à dire ce qu'on pense. Toi aussi, tu as prouvé le truc et tu t'en sers pour piéger le débat. Quand on te parle du point de vue de la loi, tu poses tes questions en prenant le point de vue de la nature ; et si on te répond sur ce qui appartient à l'ordre naturel des choses, tu enchaînes en posant des questions sur ce qui est de l'ordre de la loi.

Par exemple, au sujet de l'injustice qu'on commet ou qu'on subit, Polos parlait de ce qui est plus laid selon la loi et toi tu as poursuivi la discussion en te référant à la nature.

Du point de vue de la nature, tout ce qui est plus mauvais est également plus laid, comme de subir l'injustice ; tandis que du point de vue de la loi le plus laid est de la commettre. D'ailleurs on ne peut même pas dire qu'un homme subit l'injustice : c'est à l'esclave que cela arrive, lui pour qui la mort est plus avantageuse que la vie parce qu'il est lésé, bafoué, hors d'état de se défendre et de défendre ceux qu'il aime. La loi au contraire est bonne pour les faibles et elle est faite par la masse. C'est du point de vue de ces gens-là et dans leur intérêt que la loi est faite et qu'on décide de ce qui est louable ou blâmable. Pour intimider les plus forts, c'est-à-dire ceux qui sont susceptibles de les dominer, pour les empêcher de l'emporter, ils racontent que toute supériorité est laide et injuste et que l'injustice consiste essentiellement à vouloir l'emporter sur les autres. Quant à eux, j'imagine qu'ils se contentent d'être traités à égalité avec ceux qui valent mieux qu'eux-mêmes.

Voilà pourquoi la loi déclare que toute tentative pour s'élever au-dessus de la masse est chose injuste et laide. Mais la nature, à mon sens, nous montre qu'en bonne justice celui qui a le plus de valeur doit dominer celui qui en a le moins, que les plus doués doivent passer avant les incapables. Elle nous prouve que partout, chez les animaux comme chez les hommes, dans les cités et dans les familles, la justice se manifeste par la domination des puissants sur les faibles et par la reconnaissance de leur supériorité. De quel droit par exemple Xerxès est-il venu porter la guerre dans toute la Grèce et son père chez les Scythes ? Et combien d'autres exemples on pourrait citer. Ces hommes-là agissent, à mon sens, selon la véritable nature du droit et, Zeus le sait, selon la loi de la nature. Ces hommes sont sans doute en infraction avec les lois que nous établissons, ces lois qui nous ordonnent d'asservir les meilleurs et les plus vigoureux d'entre nous, en les dressant dès leur plus jeune âge comme des lionceaux. Nous leur faisons croire, à force de sermons et de fables à l'eau de rose, qu'il ne faut pas avoir plus que les autres et que c'est là tout ce qui est juste et beau.

¹ Traduction assurée par Bruno DE SOLERE.

Mais qu'un homme bien doué surgisse pour secouer, briser et rejeter toutes ces chaînes, et je suis certain qu'il foulera aux pieds nos textes sacrés, nos incantations, nos mythes, nos lois contre-nature. Et lui qui était notre esclave, il se révoltera et se présentera comme notre maître, et alors brillera de tout son éclat le droit de la nature.

Cette pensée a été exprimée, je crois, par Pindare dans l'ode où il proclame :

« La loi, reine du monde

Des hommes et des dieux... »

Et tu dis ce qu'il dit au sujet de cette loi ?

« Justifie la force qui dirige toute chose

De sa main souveraine ; je n'en veux pour preuve

Que les exploits d'Héraklès, puisque sans payer... »

Je ne connais pas ce poème par cœur, mais j'ai cité l'essentiel. L'idée générale est celle-ci : Héraklès, sans avoir payé ni reçu en dons les bœufs de Geryas, les emporta, estimant que selon, le droit de la nature, le bétail et tous les autres biens des plus faibles et des plus lâches appartiennent au plus puissant... »

Dans le Gorgias, SOCRATE veut démontrer qu'il vaut mieux subir l'injustice que de la commettre. Il apparaît que Socrate peut mettre ses interlocuteurs en difficulté en montrant qu'ils se contredisent ; ni POLOS, ni CALLICLES, les deux interlocuteurs de SOCRATE, ne seraient en difficulté s'ils allaient logiquement jusqu'au bout de leur thèse : il est plus avantageux d'agir selon son intérêt (y compris au détriment des autres) que d'y renoncer pour être juste. Polos introduit dans ses réponses des éléments qui viennent de l'opinion générale, par exemple qu'il est plus laid de subir l'injustice que de la commettre ; il se met ainsi, pour ne pas heurter l'opinion générale, en contradiction avec le fond de sa thèse. Quand à CALLICLES, quand il dit « mais la nature... nous montre qu'en bonne justice celui qui a plus de valeur doit dominer celui qui en a le moins » il introduit la notion de justice là où fondamentalement elle n'a pas de place puisque l'action selon la nature à laquelle il aspire ne contient pas en elle-même la question du juste : d'un côté il prétend tenir un discours purement empirique (décrivant ce qui est) et d'un autre côté il tient un discours axiologique (disant ce qui doit être).

En complément on pourrait proposer également l'examen de l'extrait suivant du Discours de la méthode où DESCARTES veut montrer que « le bon sens est la chose du monde la mieux partagée. » DESCARTES commence par l'argument d'observation que chacun pense en effet avoir suffisamment de puissance de bien juger et de distinguer le vrai d'avec le faux. Pour le reste, la démarche de DESCARTES repose sur ce que malgré les diversités entre les hommes ceux-ci sont capables de suivre ensemble un droit chemin qui conduit à un savoir probant : si tous les hommes sont capables de se rencontrer en un même savoir, valable pour tous, c'est bien que le bon sens doit être partagé par tous.

«Le bon sens est la chose du monde la mieux partagée : car chacun pense en être si bien pourvu que ceux même qui sont les plus difficiles à contenter en toute autre chose n'ont point coutume d'en désirer plus qu'ils en ont. En quoi il n'est pas vraisemblable que tous se trompent mais plutôt cela témoigne que la puissance de bien juger, et distinguer le vrai d'avec le faux, qui est proprement ce qu'on nomme le bon sens, ou la raison, est naturellement égale en tous les hommes; et ainsi que la diversité de nos opinions ne vient pas de ce que les uns sont plus raisonnables que les autres, mais seulement de ce que nous conduisons nos pensées par diverses voies, et ne considérons pas les mêmes choses. Car ce n'est pas assez d'avoir l'esprit bon, mais le principal est de l'appliquer bien. Les plus grandes âmes sont capables des plus grands vices aussi bien que des plus grandes vertus; et ceux qui

ne marchent que fort lentement peuvent avancer beaucoup davantage, s'ils suivent toujours le droit chemin, que ne font ceux qui courent, et qui s'en éloignent.

Pour moi je n'ai jamais présumé que mon esprit fût en rien plus parfait que ceux du commun : même j'ai souvent souhaité d'avoir la pensée aussi prompte, ou l'imagination aussi nette et distincte, ou la mémoire aussi ample ou aussi présente, que quelques autres. Et je ne sache point de qualités que celles-ci qui servent à la perfection de l'esprit: car pour la raison, ou le sens, d'autant qu'elle est la seule chose qui nous rend hommes, et qui nous distingue des bêtes, je veux croire qu'elle est tout entière en un chacun et suivre en ceci l'opinion commune des philosophes, qui disent qu'il n'y a du plus et du moins qu'entre les accidents et non point entre les formes ou natures des individus d'une même espèce. »

2.1.2. Types de raisonnements de validation

A ce stade de la réflexion il paraît utile d'apporter quelques précisions de terminologie.

Pour certains, **démontrer** et **prouver** signifie la même chose : donner des raisons, des arguments, des justifications qui suffisent pour considérer une affirmation comme vraie.

En mathématiques, l'affirmation "l'équation $2x+4=0$ a pour unique solution réelle -2" se démontre facilement. Par contre si on ne précise pas qu'on travaille dans l'ensemble des nombres réels, l'affirmation peut devenir fausse.

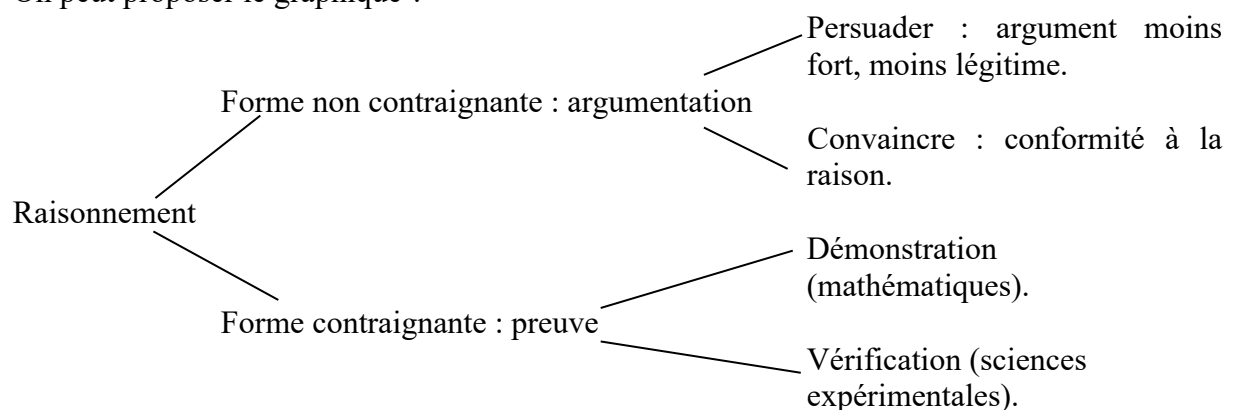
Pour l'homme de la rue, considérons l'affirmation "de 1997 à 1998 on peut considérer que les salariés français sont devenus plus riches". Si on suppose que de 1997 à 1998, le salaire moyen a augmenté plus que l'inflation, on peut considérer qu'on a prouvé que l'affirmation est vraie. Si on suppose que de 1997 à 1998, le salaire médian a augmenté moins que l'inflation, on peut considérer qu'on a prouvé que l'affirmation est fausse. Donc deux démonstrations prouvant des résultats contraires peuvent coexister.

De même **argumenter** signifie la même chose que **justifier** : donner une partie des raisons de la démonstration *sans que ces raisons soient suffisantes* pour établir la démonstration.

Enfin **convaincre**, c'est amener dans son camp, séduire, que ce soit en mathématiques ou pour l'homme de la rue, sans pour autant avoir démontré, par exemple avec l'argument d'autorité (référence à l'autorité d'un livre, d'une personne, de la perception d'un objet (figure mathématique,...)).

Les affirmations précédentes peuvent être contestées: il faut différencier démontrer et prouver, convaincre et persuader, argument et raison.

On peut proposer le graphique².



² Graphique proposé par Bruno DE SOLERE.

On fait remarquer que la précision du discours en mathématiques crée un appauvrissement : il n'y a plus d'interprétation possible du vocabulaire ou des situations. Cependant des situations simples dans une situation courante comme "constater" peuvent être d'une complexité redoutable en mathématiques.

La démonstration fait appel à un exposé déductif. En philosophie, elle est très utilisée en métaphysique, notamment dans les problèmes d'existence, comme pour la démonstration de l'existence de Dieu par SAINT ANSELME³. Ce dernier exemple est controversé : KANT critique la démonstration de SAINT ANSELME. Ces controverses existent également en mathématiques. Pour certains la validation de la vérité est en mathématiques de type anthropologique ou sociologique : c'est une communauté d'experts qui décide ce qui est vrai et ce qui est une démonstration. Une démonstration mathématique est vivante, comme le montre l'exemple de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires avec la critique de BOLZANO⁴. Pourquoi dans l'histoire d'une démonstration y a-t-il une rupture à un moment donné ? Pourquoi un support n'est plus accepté ? Pourquoi une évidence ne l'est plus ?

On donne également l'exemple de la démonstration de l'aire du disque par la méthode des indivisibles en opposition à la méthode d'exhaustion d'ARCHIMEDE.⁵

2.2. Exemples de démonstrations mathématiques

2.2.1. Types de raisonnements

Démontrer signifie montrer que la proposition est vraie :

- en utilisant des définitions et propriétés que l'on suppose vraies dans le cadre de la théorie où l'on se situe,
- en utilisant des hypothèses, connues en début d'énoncé ou obtenues comme conclusion intermédiaire par un précédent raisonnement, on produit un raisonnement basé sur la logique traditionnelle qui aboutit à une conclusion intermédiaire ou finale. Le raisonnement peut s'appuyer sur l'application d'un théorème ou d'une définition.

L'inférence est un pas élémentaire de déduction tandis que le raisonnement fait le lien entre toutes les inférences pour constituer une démonstration. Le raisonnement peut également utiliser d'autres types de démonstrations : disjonction des cas, récurrence ou induction, raisonnement par l'absurde.

Dans une démonstration le plus difficile n'est pas la rédaction de la démonstration, mais la phase heuristique, c'est-à-dire trouver un chemin qui mène des hypothèses à la conclusion.

Distinctions entre raisonnements élémentaires, différents types de raisonnement

Un raisonnement élémentaire est un raisonnement qu'on ne peut pas décomposer en pas de raisonnements plus simples : un seul pas de déduction, une disjonction de deux cas, un raisonnement par récurrence. On peut considérer qu'un raisonnement par l'absurde est un cas de disjonction de deux cas combiné avec un raisonnement déductif. En effet si H désigne l'hypothèse et C la conclusion, on envisage deux cas : d'une part H et non C et d'autre part H et C. Par un raisonnement déductif on montre que H et non C entraîne non H ce qui est

³ Cette démonstration sera étudiée au paragraphe 3.

⁴ "BOLZANO et la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires" par Michel GUILLEMOT, pages 99 à 115, in : *La démonstration mathématique dans l'histoire*, actes du colloque inter-irem histoire et épistémologie des mathématiques de Besançon des 12 et 13 mai 1989, édition : IREM de Lyon, mai 1990.

⁵ *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles*, par Evelyne BARBIN, dans "Fragments d'histoire des mathématiques II", brochure A.P.M.E.P. n°65, 1987.

contradictoire. Donc le cas H et non C est impossible. Par disjonction des cas seul le cas H et C est possible.

Un raisonnement complexe est un raisonnement composé de plusieurs raisonnements élémentaires (plusieurs pas de déduction ou bien combinaisons de disjonction de cas et de déductions). Parmi ces démonstrations complexes certaines structures reviennent souvent; on les appellera **types de raisonnements**. Parmi ces types de raisonnements on peut notamment distinguer les suivants.

Généralisation

On essaie de généraliser un cas particulier : par exemple les algébristes italiens ont généralisé formellement les calculs sur les nombres réels avec la notation $\sqrt{-1}$ ce qui a permis de résoudre des équations du troisième degré et de jeter les bases des nombres complexes.

Le raisonnement par récurrence est aussi un exemple de généralisation; on l'appelle parfois induction car il fait passer du particulier (la fondation de la récurrence) au général (la propriété à l'ordre quelconque).

Induction, réflexion ou conditions suffisantes

On part de la conclusion et on essaie de remonter vers les hypothèses par des conditions suffisantes ou des équivalences successives.

On peut considérer que ce type d'heuristique est basé sur le raisonnement par déduction : H entraîne C. Simplement au niveau heuristique on remonte la déduction.

Déductions ou conditions nécessaires

On déduit des conséquences des conditions initiales. Dans ce cas le plus difficile est de trouver les moyens termes qui permettent les déductions.

2.2.2. Exemples de déduction simple et déduction composée

Déduction simple ou inférence : du général au particulier

Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Démonstration

On a $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$. Comme $4n^2$ et $4n$ sont pairs, $4n^2+4n+1$ est impair.

Commentaire

Dans cette démonstration, on vérifie seulement que la définition de "nombre impair" est vérifiée (un nombre impair est un nombre de la forme $2n+1$ où n est un nombre entier).

De même on montrerait que *le carré d'un nombre pair est pair* car on a

$$(2n)^2=4n^2=2 \times 2n.$$

Toute démonstration qui est l'application d'un théorème général à un cas particulier est une inférence simple.

Déduction composée

Un exemple de déduction composée de plusieurs inférences simples est la démonstration de la page 41 : *tout triangle dont une médiane est bissectrice est isocèle*.

2.2.3. Exemple de démonstration par l'absurde

Montrons que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (c'est-à-dire qui n'est pas égal à une fraction de deux nombres entiers).

Démonstration

On suppose $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On peut supposer de plus que la fraction a été simplifiée le plus possible et qu'elle est irréductible.

En élevant au carré on obtient :

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \text{ donc } p^2 = 2 q^2.$$

Donc p^2 est pair. Or pour p , il y a deux cas (**disjonction des cas**) :

- soit p est impair mais alors on a vu précédemment que le carré d'un impair est impair, donc p^2 est impair, ce qui est impossible (car on a p^2 pair),
- soit p est pair, ce qui est le seul cas possible. Donc $p = 2p'$ où p' entier.

On remplace dans $p^2 = 2 q^2$ et on obtient $p^2 = (2p')^2 = 4 p'^2 = 2 q^2$ soit $2 p'^2 = q^2$.

Donc q^2 est pair donc q est pair.

Ceci contredit le fait que la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible puisque p et q sont pairs et qu'on peut donc simplifier encore par 2.

L'hypothèse $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ était donc absurde : $\sqrt{2}$ n'est pas égal à une fraction d'entiers donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.2.4. Exemple de raisonnement par récurrence ou induction : du particulier au général

La somme des n premiers entiers non nuls vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration

C'est vrai pour $n=2$ pour lequel la somme des deux premiers entiers non nuls vaut $1+2=3$.

Et

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2 \times 3}{2} = 3.$$

On dit que la propriété est fondée pour $n=2$.

Si on suppose la propriété vraie à l'ordre n (avec $n \geq 2$) (on dit qu'on fait l'hypothèse de récurrence), alors à l'ordre $(n+1)$, la somme des $(n+1)$ premiers entiers vaut la somme des n premiers entiers plus le $(n+1)$ ième, soit

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

(somme des n premiers entiers d'après l'hypothèse de récurrence) plus $n+1$ soit :

$$\frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Commentaire

On vient de montrer que la propriété est vraie à l'ordre $(n+1)$. Lorsqu'on suppose que la propriété est vraie à l'ordre n et que l'on montre qu'elle est alors vraie à l'ordre $(n+1)$ on dit que la propriété est héréditaire.

Lorsque la propriété est fondée pour un entier N et qu'elle est héréditaire pour les nombres entiers supérieurs ou égaux à N , alors la propriété est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à N (théorème de récurrence).

Remarque

Il existe une démonstration de GAUSS proposant de faire calculer deux fois $1+2+\dots+n$ en l'écrivant une fois dans cet ordre et une fois dans l'ordre inverse, et en additionnant colonne par colonne les deux sommes, comme illustré ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots + & 1 \end{array}$$

Somme :

$$\begin{aligned} (1+n) &+ (2+n-1) + (3+n-2) + \dots + (n+1) = 2 \times (1+2+\dots+n) \\ &= (1+n) + (1+n) + (1+n) + \dots + (1+n) \\ &= n \times (n+1) \end{aligned}$$

Donc

$$n \times (n+1) = 2 \times (1+2+\dots+n)$$

Donc

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dans cette démonstration les pointillés utilisés cachent le raisonnement par récurrence et posent le problème de l'implicite.

Un exemple faux

n points distincts du plan sont toujours alignés.

Démonstration fausse

La propriété est fondée pour deux points.

Si on suppose que n points sont alignés (hypothèse de récurrence), alors considérons $(n+1)$ points (qui sont numérotés $1, 2, 3, \dots, n, n+1$). On peut les répartir en deux ensembles :

- les n premiers points (numérotés $1, 2, 3, \dots, n-1, n$) qui sont, par hypothèse de récurrence, alignés sur une droite D ,
- les n derniers points (numérotés $2, 3, 4, \dots, n-1, n, n+1$) qui sont, par hypothèse de récurrence, alignés sur une droite D' .

Or les deux droites D et D' ont deux points en commun : le $(n-1)$ ième point et le n ième point. Ces deux points sont à la fois parmi les n premiers points (qui sont numérotés $1, 2, 3, \dots, n-1, n$) et parmi les n derniers points qui sont numérotés $2, 3, 4, \dots, n-1, n, n+1$.

Lorsque deux droites D et D' ont deux points en commun elles sont confondues. Donc les $n+1$ points sont alignés sur une même droite.

La propriété est vraie à l'ordre $n+1$.

D'après le théorème de récurrence elle est toujours vraie.

Commentaire

Cet exemple est manifestement faux. L'erreur se situe lorsqu'on décompose les $n+1$ points en deux sous-ensembles et qu'on affirme que ces deux sous-ensembles ont en commun deux

points : le $(n-1)$ ième point et le n ième point. Ceci est faux lorsque $n+1=3$. En effet le premier sous-ensemble ne contient que deux points, le numéro 1 et le numéro 2 ; le second sous-ensemble contient deux points, le numéro 2 et le numéro 3. Ils n'ont donc en commun qu'un seul point, le numéro 2, et deux droites qui n'ont qu'un seul point en commun ne sont pas confondues. En conséquence le raisonnement précédent n'était pas correct pour $n+1=3$.

2.2.5. Exemple de raisonnement par disjonction des cas

Exemple de disjonction en 3 cas

Une équation du second degré à coefficients réels a au plus deux solutions réelles.

Démonstration

Notons $ax^2+bx+c=0$

On note le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

D'après un théorème de cours on sait qu'il y a trois cas :

- si $\Delta > 0$ alors il y a deux solutions distinctes $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$ alors il y a une unique solution $\frac{-b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de solutions réelles.

Exemple de disjonction en 2 cas

Dans la démonstration précédente par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ on a envisagé à un moment une disjonction des cas : p impair ou p est pair.

2.2.6. Quelques réflexions sur les types de démonstration

- Les démonstrations sont souvent complexes et renferment les différents types de démonstrations (l'exemple de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ montre que cohabitent des inférences simples, une disjonction des cas, et une démonstration par l'absurde).
- Le type de démonstration "raisonnement par l'absurde" ou "disjonction des cas" est souvent un type de démonstration adopté dans les problèmes d'existence sans construction. On démontre en quelque sorte l'existence "par défaut". Avec par exemple un disjonction en cinq cas, on peut démontrer que les quatre premiers cas sont impossibles. Donc nécessairement (par défaut) ce ne peut être que le cinquième qui est possible. Dans ces types de validation on remarque l'importance du principe du tiers exclu, qui est un principe de disjonction des cas à deux cas (vrai ou faux) et qui permet de démontrer l'existence par défaut ; on pourrait s'intéresser à d'autres logiques (à plus de deux valeurs, par exemple vrai, faux, indéterminé).

2.3. Exemples de séances réalisées en classe

2.3.1. Séance autour de la question : qu'est-ce que le raisonnement ?

Au cours de la séance avec les élèves les remarques suivantes ont été proposées.

- 1) Pour raisonner, on part d'une hypothèse pour arriver à une conclusion, en appliquant des règles logiques et une série de déductions.
- 2) En mathématiques, les *règles logiques* sont indépendantes du contenu des propositions.
Exemples de règles logiques :
Règle de non-contradiction : on ne peut pas avoir A et son contraire ;
Règle de disjonction des cas : soit on a A, soit son contraire ;
Règle de transitivité de l'égalité : si $A=B$ et si $B=C$ alors $A=C$.
- 3) Notion d'inférence ou déduction : dans un raisonnement passer d'une étape à l'autre c'est faire une inférence ou déduction.
- 4) Dès qu'on raisonne on est dans l'univers du langage. Il y a donc un moment où l'on doit faire confiance au langage.

5) Les règles de logique sont communes à la philosophie et aux mathématiques.

Par contre les définitions et les axiomes peuvent varier entre la philosophie et les mathématiques ou bien même au sein des mathématiques. En mathématiques on donne des définitions strictes et rigoureuses. Par contre en philosophie pas de définition immédiate. Par exemple, comment définir le langage ?

2.3.2. Séance autour de la question : le bon sens obstacle à la rigueur ?

Le jeu des trois portes

Règle du jeu

On demande à un joueur de choisir entre trois portes dont l'une d'entre elles cache un trésor.

Le joueur choisit une porte sans l'ouvrir.

Puis le présentateur du jeu regarde derrière les portes et ouvre, parmi les deux portes restantes que le joueur n'a pas choisies, une porte qui ne cache pas le trésor. (Le trésor est donc soit derrière la dernière porte restante, soit derrière la première porte choisie par le joueur).

Le présentateur demande alors au joueur s'il veut changer son choix précédent. Que doit décider le joueur pour avoir le plus de chances de découvrir le trésor ?

Débat dans la classe

Aucun élève ne produit de raisonnement rigoureux.

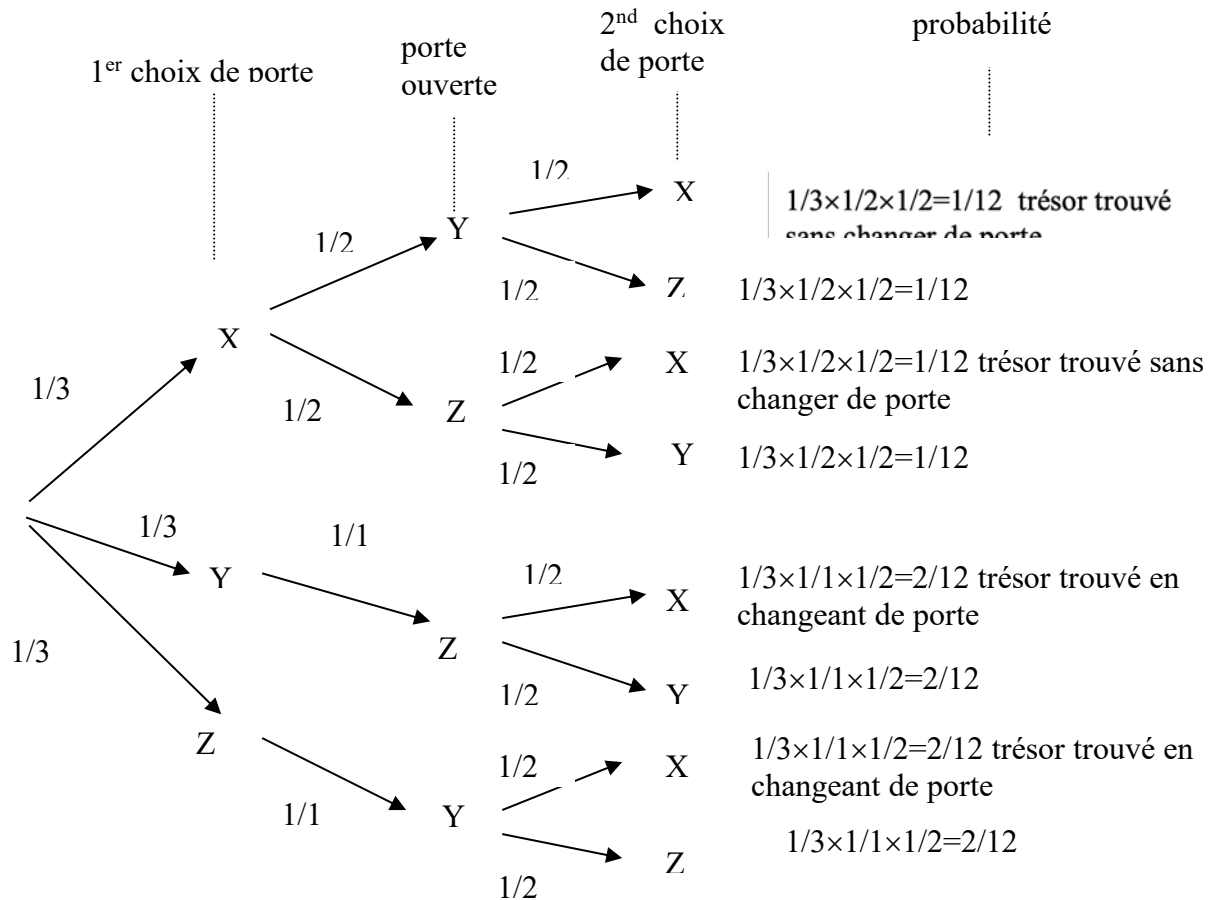
Certains affirment que dans tous les cas on a une chance sur deux de trouver la bonne porte car il reste seulement deux portes parmi lesquelles une seule porte cachant un trésor. Les élèves donnant cette réponse ne répondent pas à la question posée. Ils répondent à la question « quand le joueur a ouvert une porte, si on choisit une porte parmi les deux portes fermées,

combien a-t-on de chances d'ouvrir la bonne porte ? » Cette erreur est assez fréquente dans un raisonnement : on ne comprend pas la question posée ou on répond à une autre question. Cette erreur est souvent liée une formulation ambiguë de la question.

Réponse rigoureuse

On note X, Y, Z les trois portes et on suppose que le trésor est caché derrière X.

On modélise le problème avec un arbre : illustrant trois choix successifs : le 1^{er} choix de porte par le joueur (sans qu'il ouvre la porte), puis la porte ouverte par le présentateur et enfin le 2nd choix de porte. Dans l'arbre ci-dessous on a supposé que le joueur ouvre l'une des portes restantes "au hasard" c'est-à-dire avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour chacune d'elles.



Le joueur trouve le trésor sans changer de porte avec $1/12 + 1/12 = 2/12$ de chances.

Il trouve le trésor en changeant de porte avec $2/12 + 2/12 = 4/12$ de chances.

Il vaut mieux changer de porte, on a deux fois plus de chances de gagner.

NB : Pour comparer les deux stratégies, il suffit de regarder les deux premières séries de branches de l'arbre. La stratégie de changement fait gagner chaque fois qu'au départ le joueur n'avait pas désigné la bonne porte, soit une probabilité de $2/3$. La stratégie de maintien du choix fait au contraire gagner quand c'est la bonne porte que le joueur avait choisie au départ, soit une probabilité de $1/3$.

Questionnement

- Qu'est-ce que le bon sens ? L'évidence ? La logique ?
- Qu'est-ce que la rigueur ?

Commentaires

Dans le Jeu des trois portes examiné ci-dessus, il paraît de "bon sens" de répondre que dans tous les cas, pour le deuxième choix, on a une chance sur deux de trouver la bonne porte : si une des deux possibilités est la bonne, et qu'il n'y a que deux possibilités, on a une chance sur deux de "tomber juste".

Par "bon sens", on entend en général la capacité de bien juger dans les questions concrètes. Souvent cette expression est plus particulièrement utilisée pour désigner la capacité de bien juger dans les questions qui ne comportent pas une évidence logique simple : il s'agit alors de savoir apprécier et décider sans que l'appréciation et la décision puissent être logiquement déduites de données claires, parfaitement repérables - comme ce serait le cas dans une démonstration mathématique. En ce sens, le bon sens s'oppose soit à la folie et aux états analogues (passion, colère ; on dit alors des personnes concernées qu'elles n'ont plus leur bon sens), soit au manque de jugement (caractère d'esprits dits "légers" ou faux ; on dit de ces personnes qu'elles n'ont pas de bon sens).

Dans le cas du "Jeu des trois portes", la question paraît cependant comporter une évidence logique simple : deux possibilités, donc une probabilité de $1/2$ sur chaque possible. Le cas est intéressant, en ce que le "bon sens" fondant la réponse donnée par les élèves n'est pas celui de la conception générale rappelée ci-dessus (capacité de bien juger dans les questions qui ne comportent pas une évidence logique simple), mais plutôt celui d'une conception plus spécifique : capacité de bien juger et de distinguer le vrai du faux de façon rationnelle, avec logique ; le "bon sens" correspond ici à ce qu'on appelle la raison ou aussi l'esprit logique.

La question est alors de savoir si la raison, l'esprit logique peuvent être source d'erreur, et en l'occurrence, comme cela paraît être le cas pour la solution donnée par les élèves au "Jeu des trois portes", constituer un obstacle à la rigueur. Cela serait certes paradoxal, pour la simple raison que logique et rigueur vont, par essence, de pair. Le cas étudié permet d'apercevoir qu'il peut y avoir des degrés dans la rigueur : un niveau d'analyse qui peut être suffisant dans une situation donnée (par exemple, j'ai à choisir entre deux billets de loterie, et en effet il y a autant de chance pour l'un que pour l'autre qu'il soit gagnant ... ou perdant) peut ne plus l'être dans une situation plus complexe, dont j'omettrais de prendre la complexité en compte. L'erreur viendrait alors de ce que je transfère une recette ou un algorithme, d'une situation problème dans une autre, en négligeant, faute justement du niveau de rigueur requis, d'analyser avec précision la différence entre les situations. Dans le cas du jeu, on a négligé la donnée qu'il y a deux choix successifs et, plongé dans la situation du choix final (comme s'il était le tout du problème, avec en plus la dimension affective de l'envie de gagner), on reproduit la conduite habituelle du choix devant deux possibilités indifférenciées. Ce faisant, on est d'ailleurs amené à remplacer la question exacte par une autre ; la question : "que doit décider le joueur pour avoir le plus de chance de gagner dans une procédure en deux temps" est réduite à : "quand il n'y a que deux portes, combien a-t-on de chances d'ouvrir la bonne porte ?"

Ainsi, une démarche dite de "bon sens" peut obtenir sa qualification par les succès qu'elle permet dans des situations types de la vie quotidienne ; les exigences d'analyse, de problématisation et de résolution, requises par ces situations sont alors réunies. Mais le niveau d'exigences suffisant pour telles situations peut s'avérer insuffisant pour telles autres, et le transfert inattentif des algorithmes de résolution sera source d'erreurs, et d'abord obstacle à la recherche de l'algorithme pertinent.

3. Le raisonnement et le jugement d'existence

Pour préciser la réflexion sur les fonctions, procédures et possibilités du raisonnement dans le domaine de la philosophie, on pourra partir d'un exemple "extrême" issu de la philosophie scolastique : la démonstration de l'existence de Dieu par SAINT ANSELME DE CANTERBURY dans son *Proslogion*, *Allocution sur l'existence de Dieu*. Cet exemple conduit :

- 1) à examiner les procédures et surtout les possibilités du raisonnement dans le domaine de la philosophie,
- 2) à partir de là, dans un second temps, à s'interroger sur les démarches de la réflexion philosophique,
- 3) et finalement à aborder la question de la démonstration d'existence en mathématique.

3.1. La démonstration de SAINT ANSELME DE CANTERBURY

Proslogion, Chapitre 2 : "Que Dieu est vraiment".

« Donc, Seigneur, toi qui donnes intellect à la foi, donne-moi, autant que tu sais faire, de comprendre que tu es, comme nous croyons, et que tu es ce que nous croyons. Et certes, nous croyons que tu es quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand. N'y a-t-il pas une nature telle parce que l'insensé a dit dans son cœur : « Dieu n'est pas ». Mais il est bien certain que ce même insensé, quand il entend cela même que je dis : « quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand », comprend ce qu'il entend, et que ce qu'il comprend est dans son intellect, même s'il ne comprend pas que ce quelque chose est. Car c'est une chose que d'avoir quelque chose dans l'intellect, et autre chose que de comprendre que ce quelque chose est. En effet, quand le peintre prémédite ce qu'il va faire, il a certes dans l'intellect ce qu'il n'a pas encore fait, mais il comprend que cette chose n'est pas encore. Et une fois qu'il l'a peinte, d'une part il a dans l'intellect ce qu'il a fait, et d'autre part il comprend que ça est. Donc l'insensé aussi, il lui faut convenir qu'il y a bien dans l'intellect quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand, puisqu'il comprend ce qu'il entend, et que tout ce qui est compris est dans l'intellect. Et il est bien certain que ce qui est tel que rien ne se peut penser de plus grand ne peut être seulement dans l'intellect. Car si c'est seulement dans l'intellect, on peut penser que ce soit aussi dans la réalité, ce qui est plus grand. Si donc ce qui est tel que rien ne se peut penser de plus grand est seulement dans l'intellect, cela même qui est tel que rien ne se peut penser de plus grand est tel qu'on peut penser quelque chose de plus grand; mais cela est à coup sûr impossible. Il est donc hors de doute qu'existe quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand, et cela tant dans l'intellect que dans la réalité... »

I Psaume 14 :1 ; 53 :1.

3.1.1. Analyse de la procédure de validation dans le raisonnement

On pourra utiliser la réflexion suivante⁶, qui a recherché quels éléments logiques et mathématiques pouvaient être repérés dans la démarche démonstrative de SAINT ANSELME.

Notions premières

Ce que l'on peut penser = les pensées ?

Les objets de pensée.

⁶ Réflexion proposée par Nicole VOGEL.

Postulat

Les pensées peuvent être classées par ordre de grandeur.

Remarques et questions

Dans la phrase « Quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand » on peut se demander si ce sont les pensées qui sont classées ou les objets de la pensée (les choses pensées).

D'après la suite du texte, ANSELME semble plutôt avoir choisi les pensées, du moins dans les premières lignes. Comme tout postulat, celui-ci est bien sûr tout à fait acceptable, bien qu'il pose des questions :

Beaucoup d'ensembles ne peuvent pas être ordonnés de façon satisfaisante, par exemple l'ensemble des points d'un plan ou de l'espace.

Imaginer un classement dans les pensées n'est pas simple. Comment pourrais-je par exemple définir le plus grand d'une collection aussi banale que les objets de ma maison ? Le plus long, le plus volumineux, le plus lourd, celui que j'utilise le plus, celui que je préfère ?

Définition

« Quelque chose de tel que rien ne se peut penser de plus grand ». Le problème, c'est que cette phrase ne définit peut-être rien du tout.

« Un nombre entier tel qu'il n'y en a pas de plus grand » n'existe pas, pas plus qu'« un point du plan plus loin de l'origine que tous les autres » et je ne me prononcerais pas sur « une étoile plus loin de nous que toutes les autres ».

ANSELME s'appuie sur le postulat suivant :

Postulat

Le « quelque chose » que nous venons de définir existe bien. En effet le texte admet l'existence de ce plus grand là.

Dans la 3^{ème} ligne, il dit « nous croyons que tu es quelque chose de tel... ».

Au milieu du texte, il dit de l'insensé « il lui faut convenir qu'il y a bien dans l'intellect... ».

Ce postulat aussi est tout à fait légitime, mais il ne semblerait probablement pas très naturel à un Japonais ou à un Africain animiste.

Il reste une autre question qui n'est pas évoquée par ANSELME (sans doute parce que sa réponse est évidente) : ce quelque chose est-il unique ?

Amusons-nous un peu avec la notion d'ordre en mathématique :

Si l'ordre est total (entre deux éléments, on peut toujours décider lequel est le plus grand) et s'il existe un plus grand élément, il est unique...

Donc si l'ordre sur les pensées est total et si Dieu existe, il est unique...

Par contre, si l'ordre n'est pas total, il peut y avoir une infinité d'éléments plus grands que tous ceux auxquels on peut les comparer et il peut y avoir une infinité de « dieux »...

De plus, des ensembles aussi « naturels » que l'ensemble des entiers par exemple, n'ont pas de plus grand élément.

Et si l'on veut contourner l'obstacle avec la notion d'infini, on sait depuis CANTOR que l'infini n'est pas unique non plus...

On passe ensuite à une démonstration par l'absurde.

Postulat

La réalité d'une chose (ou la pensée de la réalité d'une chose ?) est supérieure à la pensée de la chose.

Démonstration

Ce qu'il y a de plus grand dans les pensées existe aussi dans la réalité, car la réalité d'une chose (ou la pensée de la réalité d'une chose ?) est supérieure à la pensée de la chose donc on pourrait trouver quelque chose de plus grand que la plus grande des pensées, ce qui est une contradiction.

Du point de vue logique, cette démonstration est fausse, car nous avons considéré au départ l'ensemble ordonné des pensées et le plus grand élément de cet ensemble.

Si on parle de réalité, il s'agit d'objets extérieurs à cet ensemble de référence.

En supposant qu'on puisse comparer (dire lequel est le plus grand) ceux-là aux pensées, il n'est pas contradictoire de trouver parmi eux des éléments plus grands que dans l'ensemble des pensées.

Par exemple, en mathématiques, l'intervalle $]0,1[$ n'a pas de plus grand élément, mais 2 est plus grand que tous les éléments de $]0,1[$. Ou bien $[0 ; 1]$ a un plus grand élément qui est 1, et 2 est plus grand.

Mais on ne sait pas très bien non plus si ANSELME parle de la réalité correspondant à la chose pensée ou de la pensée que la chose pensée est réelle.

Dans le premier cas, cela voudrait dire que tout ce qu'on peut penser existe dans la réalité, ce qui est un postulat plutôt étonnant...

Dans le second cas, la pensée de la chose ne pouvait pas être ce qu'on pouvait penser de plus grand dès le début du raisonnement, puisque dans l'ensemble de référence, le plus grand élément serait « la pensée de la réalité de la plus grande pensée ».

Mais alors pourquoi s'arrêter là ? On pourrait poursuivre les emboîtements « la pensée de la réalité de la pensée de la plus grande des pensées... » et ainsi de suite ?

On peut observer que, dans une théorie mathématique construite à partir d'un système d'axiomes, une propriété que l'on démontre est déjà inscrite dans les axiomes que l'on suppose, en ce sens que si l'on supprime un ou plusieurs axiomes, la propriété ne sera plus vraie. Faut-il pour autant dire qu'en admettant les axiomes on effectue une pétition de principe pour ce qui concerne la propriété ? (Rappel : pétition de principe = raisonnement qui consiste à supposer vrai ce qui est en question).

On peut interpréter⁷ mathématiquement le texte d'ANSELME comme supposant qu'on construit dans l'ensemble des pensées un ordre total et qu'on suppose qu'il existe dans cet ensemble un plus grand élément qu'on appelle Dieu ; or en mathématiques, tout ensemble ayant un ordre total n'admet pas toujours un plus grand élément. Il est alors précisé qu'il ne faut pas être "mathématiquocentriste". On peut⁸ insister sur le fait qu'il ne faut pas vouloir chercher dans ce raisonnement une comparaison directe avec des raisonnements mathématiques. Il doit, bien plutôt, servir à comprendre ce qui distingue ces raisonnements d'autres types de raisonnements, également logiques.

3.1.2. Réflexions sur l'intention philosophique ou théologique de SAINT ANSELME

La réflexion critique technique (que l'on peut faire d'un point de vue mathématique) de la démonstration anselmienne conduit à s'interroger sur l'intention exacte de SAINT ANSELME, et sur le statut de sa démonstration. Cette problématique a donné lieu à un exposé⁹ suivi de débat ; le compte rendu de ce débat pourra être utilisé pour nourrir les réflexions sur la fameuse "preuve".

⁷ Interprétation de Georges GLAESER.

⁸ Souhait de Jean-Pierre FRIEDELMEYER.

⁹ L'exposé a été pris en charge par Philippe ROHRBACH.

Sur la démonstration de ST ANSELME de l'existence de Dieu ¹⁰

Quelle est l'ambition de ST ANSELME ?

Une ambition explicite formulée dans le préambule du Proslogion : " Je me mis à chercher à part moi s'il n'était pas possible de découvrir un argument unique qui, pour être probant, n'eût besoin d'aucun autre que lui, et qui, à lui tout seul, suffit à garantir que Dieu est vraiment... " Pautrat. Gf. P. 35.

C'est un argument *a priori*. *Hors-contexte historique, empirique.*

A qui s'adresse cette démonstration ?

Le dialogue avec l'autre : celui qui dit "il n'y a pas de Dieu".

Point commun minimal : il entend ce que je dis. Il reconnaît mes éléments signifiants de mon discours.

Comment sont définis les termes de la démonstration ?

Définition de Dieu : Aliquid quo nihil majus cogitari possit (AQNMCP). Quelque chose par rapport à quoi on ne peut rien penser de plus grand.

Que veut-on démontrer à partir de là ? L'existence de Dieu (ainsi défini).

Que veut dire existence ? Qui n'est pas seulement dans la pensée mais qui *en outre* existe réellement, véritablement, en dehors de la pensée.

Donc penser un être comme existant est plus grand que de le penser sans qu'il existe en dehors de la pensée, c'est à dire comme simple concept.

Que veut dire plus grand ? La discussion devrait porter sur ce point délicat. Il est certain que chez ANSELME "plus grand" ne désigne pas une relation d'ordre totale (où les éléments sont comparables suivant cet ordre). Par exemple : on ne peut pas dire "dans l'ordre des sentiments" que le courage est plus grand que la bonté. Ce que veut dire ANSELME ici : penser quelque chose comme existant en dehors de la pensée, et pas seulement comme un pur concept, c'est penser "plus", c'est une pensée qui a "plus de poids". Je peux, en effet, penser le tableau avant de l'avoir fait. Je peux en outre, penser au tableau, une fois qu'il est réalisé. Cette dernière pensée contient davantage que la première.

Quels sont les arguments de ST ANSELME ?

Puisque j'ai défini Dieu comme AQNMCP, je ne peux pas le définir comme un simple concept, sinon je pourrais penser quelque chose de plus grand que lui, c'est à dire cet être avec, en outre, l'idée qu'il existe en dehors de ma pensée. Ce qui serait contraire à la définition de départ. Je suis donc dans la nécessité de penser Dieu comme existant en dehors de ma pensée, par définition, sinon, ce n'est plus Dieu que je pense.

La clé de la démonstration se trouve dans l'avant-dernière phrase : si AQNMCP est seulement dans l'intellect, il n'est pas AQNMCP, puisque je peux alors penser quelque chose de plus à son sujet qui est : il n'est pas seulement dans l'intellect, ce qui est en contradiction avec le fait qu'il est AQNMCP. Le mathématicien appelle cela une démonstration par l'absurde. Ce qui est frustrant ici, c'est que l'existence est démontrée par défaut. Le contraire de l'existence de Dieu aboutit à une contradiction en vertu de ce que nous avons admis au départ. Les matheux auraient sans doute aimé que je leur démontre positivement, par construction de l'objet, l'existence de Dieu, quelle déception !

ANSELME dit-il qu'exister est plus que penser ? Certes, il accorde à l'être une priorité sur le connaître. Mais l'intérêt de ce texte, me semble-t-il, c'est qu'il se place entièrement du point de vue de la pensée : il est plus grand de penser qu'un être n'est pas seulement dans la pensée que de le penser seulement. Donc ce "plus grand" fait signe de l'intérieur même de la pensée. C'est la pensée elle-même, en elle-même, qui doit reconnaître l'impossibilité d'une existence seulement dans l'intellect de AQNMCP.

¹⁰ Compte rendu de Philippe ROHRBACH avec des intertitres de Richard CABASSUT.

Nous avons ici une démarche formellement correcte : il y a une définition, il y a des axiomes (Penser que la chose existe est plus grand que penser la chose comme simple concept).

Discussion sur la critique du mathématicien :

Les mathématiciens, lorsqu'ils parlent d'existence d'un objet, soit, ils construisent l'objet, soit ils assurent l'existence de l'objet, sans le construire, par défaut (par exemple en montrant dans une disjonction des cas que le seul cas restant possible est en cohérence avec les axiomes).

Sur quoi porte alors la discussion à propos de cet exemple ?

Une question fondamentale : l'argument d'ANSELME tombe-t-il sous le coup de la critique technique d'un mathématicien qui consiste à dire : dans un ensemble ordonné il n'y a pas toujours de plus grand élément (par exemple comme pour les nombres entiers).

On peut répondre à cela qu'ANSELME ne dit pas que AQNMCP est le plus grand élément que l'on puisse penser. Il dit : Il est tel que rien ne se peut penser de plus grand. ANSELME ne part pas d'une comparaison qui permettrait de dire : Dieu est le plus grand des éléments de l'ensemble E.

- 1) MOREAU, dans Pour ou contre l'insensé ? “ Il ne faut pas dire : plus grand que toute chose existante, plus grand que tout ce qui existe, un objet désigné ainsi peut être une réalité contingente. Le aliquid quo... est conçu absolument comme l'être auprès de qui rien de plus grand ne peut être pensé. L'expression majus omnibus est une détermination objective, relative au donné empirique. Aliquid quo majus... est une notion réflexive où est impliqué l'absolu.

Cette formule traduit donc une exigence absolue de la pensée où se révèle la transcendance de l'être, sans laquelle notre pensée n'aurait aucun sens. ”

MOREAU montre qu'il faut distinguer entre la grandeur quantitative pour laquelle “ il peut toujours y avoir de plus grand ” et une grandeur de valeur, comme le bien absolu. cf. la discussion sur la juste mesure dans le Politique 283 d sq. Le bien suprême a une valeur propre en dehors de tout accroissement. cf. Eth. Nic. II 6 1107a 6-8, 20-21 “ C'est pourquoi dans l'ordre de la substance et de la définition exprimant la quiddité, la vertu est une médiété, tandis que dans l'ordre de l'excellence et du parfait, c'est un sommet ”. Il n'y a pas excès ou défaut de courage en tant que tel, “ du fait que le moyen est en un sens un extrême ”.

- 2) La conception anselmienne de la vérité nous a fait voir que penser un être seulement dans l'intellect est moins que penser cet être “ dans la vérité ”. Penser seulement un être c'est moins que, en outre, penser à lui. C'est-à-dire qu'il est plus grand pour un être de ne pas seulement être dans l'intellect. Or, nous pouvons *penser* que Dieu n'est pas seulement dans l'intellect, donc, comme il est ce par rapport à quoi nous ne pouvons rien penser de plus grand, il ne peut être pensé comme existant seulement dans l'intellect. (Autre formulation qui rendra plus sensible le point sur lequel j'aimerais faire porter mon commentaire : Nous pouvons penser que nous pouvons penser à Dieu et pas seulement le penser). Notez ici également l'équivalence “ être plus grand ” et “ penser quelque chose de plus grand ”. En d'autres termes encore, d'un être qui est seulement dans l'intellect, je peux penser quelque chose de plus grand, c'est qu'il existe en dehors de la pensée, dans la chose, et pas seulement dans l'intellect. Mais ici, ce qui rend cet axiome décisif, c'est que l'être dont nous parlons est tel que rien de plus grand ne peut être pensé que lui ! Le Dieu intra-mental n'a pas cette propriété. Un Dieu qui serait un pur idéal ne répond pas à la définition, je dois donc penser Dieu nécessairement comme existant véritablement et pas seulement dans la pensée.

Eléments de discussion sur le texte d'ANSELME

- Dans le texte précédent on a souhaité présenter l'argumentation de ST ANSELME hors contexte, de manière an-historique, ce qui permet se rapprocher des mathématiques lorsque celles ci se veulent également universelles et éternelles.
- On¹¹ peut replacer le texte de ST ANSELME dans le contexte historique : ST ANSELME, moine du XI^{ème} siècle, à la demande de ses autorités, produit ses méditations : c'est une prière avec laquelle ST ANSELME remercie Dieu de lui avoir donné l'idée de la preuve de l'existence de Dieu. Il y a deux manières de connaître Dieu : la foi ou la raison. Ici ST ANSELME veut connaître Dieu dans la foi.
- On peut se référer¹² à un texte de Roger CUPPENS "*Les mathématiques d'une machine sont-elles préhilbertiennes?*"¹³ Dans ce texte, CUPPENS rappelle à propos de BROUWER et de l'intuitionnisme : "L'existence des entiers repose sur l'intuition. Tous les autres objets doivent être construits explicitement. Dans son refus des démonstrations d'existence non constructives, il est amené à refuser les démonstrations par l'absurde, le principe du tiers exclus et bien entendu l'axiome du choix". On voit l'analogie avec la démonstration de ST ANSELME qui ne démontre pas l'existence de Dieu par construction mais par un raisonnement par l'absurde.
- Précédemment on a invoqué¹⁴ la pétition de principe que constituent les deux hypothèses suivantes :
 - je pense à Dieu qui est défini comme quelque chose par rapport à quoi on ne peut rien penser de plus grand,
 - penser à quelque chose et penser que ce quelque chose existe est plus grand que penser à quelque chose sans penser qu'il existe.
- On en conclut alors que si on pense à Dieu, on pense nécessairement qu'il existe. Or, pour certains¹⁵, la conclusion est déjà inscrite dans les deux hypothèses.

3.1.3. La critique de la preuve ontologique par KANT

KANT, *Critique de la raison pure*, Dialectique transcendantale III, section 4.

« De l'impossibilité de la preuve ontologique de l'existence de Dieu

On voit aisément, d'après-ce qui précède, que le concept d'un être absolument nécessaire est un concept pur de la raison, c'est-à-dire une simple idée dont la réalité objective est bien loin d'être encore prouvée par cela seul que la raison en a besoin, qui, d'ailleurs, ne fait que nous indiquer une certaine perfection inaccessible et qui sert proprement à limiter l'entendement plutôt qu'à l'étendre à de nouveaux objets. Or, il y a ici quelque chose d'étrange et de paradoxal : c'est que le raisonnement concluant d'une existence donnée en général à quelque existence absolument nécessaire paraît être pressant et rigoureux, et que nous avons pourtant tout à fait contre nous toutes les conditions nécessaires à l'entendement pour se faire un concept d'une telle nécessité.

On a de tout temps parlé de l'être absolument nécessaire et l'on ne s'est pas donné autant de peine pour comprendre si et comment, on peut seulement concevoir une chose de cette espèce

¹¹ Suggestion de Bruno DE SOLERE.

¹² Référence proposée par François PLUVINAGE.

¹³ Actes de l'Université d'été "Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques", 29 août – 2 septembre 1994, Caen. IREM de Caen.

¹⁴ Invocation de Nicole VOGEL.

¹⁵ Point de vue de Nicole VOGEL.

que pour en prouver l'existence. Or, il est vrai qu'il est très aisé de donner une définition nominale de ce concept, en disant que c'est quelque chose dont la non-existence est impossible ; mais on n'est pas plus instruit pour cela en ce qui concerne les conditions qui rendent impossible de regarder la non-existence d'une chose comme absolument inconcevable et qui sont proprement ce que l'on veut savoir, je veux dire que l'on ignore si, par ce concept, nous pensons ou non quelque chose en général. En effet, écarter par le mot inconditionné toutes les conditions, dont l'entendement a toujours besoin, pour considérer quelque chose comme nécessaire, cela ne suffit pas, encore à me faire comprendre si, par ce concept d'un être inconditionnellement nécessaire, je pense encore quelque chose ou si, peut-être, je ne pense plus rien du tout.

Bien plus, on a cru encore expliquer par une foule d'exemples ce concept risqué, d'abord, à tout hasard, et, à la fin, devenu tout à fait familier, de telle sorte que toute recherche ultérieure sur son intelligibilité parût tout à fait inutile. Toute proposition de géométrie, par exemple : qu'un triangle a trois angles, est absolument nécessaire ; et l'on a parlé ainsi d'un objet qui est entièrement hors de la sphère de notre entendement, comme si l'on avait parfaitement compris ce qu'on en voulait dire par le concept qui l'intéresse.

Tous les exemples qu'on avance ne sont tirés, sans exception, que des jugements, et non des choses et de leur existence. Mais la nécessité inconditionnée des jugements n'est pas une nécessité absolue des choses. Car la nécessité absolue du jugement n'est qu'une nécessité conditionnée de la chose ou du prédicat dans le jugement. La proposition précédente ne disait pas que trois angles existent d'une manière absolument nécessaire, mais que, si l'on pose la condition qu'un triangle existe (soit donné), il y a aussi en lui trois angles nécessairement. Toutefois, cette nécessité logique a montré une si grande puissance d'illusion qu'après s'être fait d'une chose un concept a priori agencé de telle façon que, de l'avis commun, l'existence rentrait dans sa compréhension (das Dasein mit seinen Umfang begriff), on a cru pouvoir en conclure sûrement que, puisque l'existence appartient nécessairement à l'objet de ce concept, c'est-à-dire sous la condition que je pose cette chose comme donnée (comme existante), son existence est aussi posée nécessairement (en vertu de la règle d'identité) et que cet être est, en conséquence, absolument nécessaire lui-même, parce que son existence a été conçue dans un concept arbitraire et sous la condition que j'en pose l'objet.

Si je supprime le prédicat, dans un jugement identique, et que je garde le sujet, il en résulte une contradiction, et c'est pourquoi je dis que ce prédicat convient nécessairement au sujet. Mais si j'enlève le sujet en même temps que le prédicat, il n'y a plus de contradiction, car il ne reste plus rien que la contradiction puisse affecter. Poser un triangle en en supprimant les trois angles est contradictoire ; mais faire disparaître à la fois le triangle et les trois angles, il n'y a plus là de contradiction. Il en est exactement de même du concept d'un être absolument nécessaire, Si vous lui ôtez l'existence, vous supprimez la chose même avec tous ses prédicats ; d'où peut alors venir la contradiction ? Il n'y a rien extérieurement avec quoi il puisse y avoir contradiction, car la chose ne doit pas être extérieurement nécessaire ; il n'y a rien non plus intérieurement, car en supprimant la chose elle-même, vous avez supprimé en même temps ce qui est intérieur. Dieu est tout-puissant : c'est là un jugement nécessaire. La toute-puissance ne peut pas être supprimée dès que vous posez une divinité, c'est-à-dire un être infini avec le concept duquel cet attribut est identique, Mais si vous dites : Dieu n'est pas, ni la toute-puissance, ni aucun autre de ces prédicats n'est donné, car ils ont été supprimés tous ensemble avec le sujet et il n'y a plus la moindre contradiction dans cette pensée.

Vous avez donc vu que, si je supprime le prédicat d'un jugement en même temps que le sujet, il ne peut jamais en résulter de contradiction interne, quel que soit ce prédicat. Or, il ne vous reste pas d'autre refuge que de dire : il y a des sujets qui ne peuvent pas du tout être supprimés et qui, par conséquent, doivent subsister. Mais cela reviendrait à dire qu'il y a des sujets absolument nécessaires, supposition dont j'ai précisément contesté la légitimité et dont

vous vouliez essayer de me montrer la possibilité. Car il m'est impossible de me faire le moindre concept d'une chose qui, même supprimée ainsi que tous ses prédicats, donne encore lieu à la contradiction et, en dehors de la contradiction, je n'ai, par de simples concepts purs a priori, aucun critérium de l'impossibilité.

Contre tous ces raisonnements généraux (auxquels personne ne peut se refuser) vous objectez un cas que vous présentez comme une preuve de fait, en me disant qu'il y a pourtant un concept, et, à la vérité, celui-là seul, où la non-existence est contradictoire en soi, c'est-à-dire dont on ne saurait sans contradiction supprimer l'objet, et que ce concept est celui de l'être infiniment réel. Il a, dites-vous, toute réalité et vous avez le droit d'admettre un tel être comme possible (ce que j'accorde pour le moment, bien que l'absence de contradiction de ce concept soit encore loin de prouver la possibilité de l'objet)¹⁶. Or, l'existence est comprise elle-même dans la toute réalité : donc, l'existence est contenue dans le concept d'un possible. Par conséquent, si cette chose est supprimée, la possibilité interne de la chose est supprimée aussi, ce qui est contradictoire.

Je réponds : Vous êtes déjà tombé dans une contradiction quand, dans le concept d'une chose que vous voulez uniquement concevoir au point de vue de sa possibilité, vous avez déjà introduit le concept de son existence, sous quelque nom qu'elle se cache. Si l'on vous accorde ce point, vous avez, en apparence, partie gagnée, mais, dans le fait, vous n'avez rien dit ; car vous avez commis une simple tautologie. Je vous demande : cette proposition : telle chose ou telle autre (que je vous accorde comme possibles, quelles qu'elles soient) existe, cette proposition est-elle, dis-je, une proposition analytique ou une proposition synthétique. Si elle est analytique, par l'existence de la chose vous n'ajoutez rien à votre pensée de la chose, et alors, de deux choses l'une : ou la pensée qui est en vous doit être la chose elle-même, ou bien vous avez supposé une existence comme faisant partie de la possibilité, et alors l'existence est soi-disant conclue de la possibilité interne, ce qui n'est autre chose qu'une misérable tautologie. Le mot réalité qui, dans le concept de la chose, sonne tout autrement que celui d'existence dans le concept du prédicat, ne résout pas cette question. Car si vous appelez aussi réalité tout ce que vous posez (sans déterminer ce que vous posez), vous avez déjà posé et admis, comme réelle, dans le concept du sujet, la chose même accompagnée de tous ses attributs ; dans le prédicat vous ne faites que le répéter. Si vous avouez, au contraire, comme tout homme raisonnable doit raisonnablement le faire, que toute proposition d'existence est synthétique, comment voulez-vous soutenir que le prédicat de l'existence ne peut être supprimé sans contradiction, puisque ce privilège n'appartient proprement qu'aux propositions analytiques, dont le caractère repose précisément là-dessus !

Je pourrais sans, doute espérer avoir directement réduit à rien cette vaine argutie par une détermination précise du concept de l'existence, si je n'avais fait l'expérience que l'illusion résultant de la confusion d'un prédicat logique avec un prédicat réel (c'est-à-dire avec la détermination d'une chose) repousse presque tout éclaircissement. Tout peut servir indistinctement de prédicat logique et même le sujet peut se servir à lui-même de prédicat ; car la logique fait abstraction de tout contenu. Mais la détermination est un prédicat qui s'ajoute au concept du sujet et l'augmente. Elle ne doit donc pas y être déjà contenue.

Etre n'est évidemment pas un prédicat réel, c'est-à-dire un concept de quelque chose qui puisse s'ajouter au concept d'une chose. C'est simplement la position d'une chose ou de

¹⁶ Le concept est toujours possible, quand il n'est pas contradictoire. C'est le critérium logique de la possibilité et par là son objet se distingue du nihil negativum. Mais il n'en peut pas moins être un concept vide, quand la réalité objective de la synthèse par laquelle le concept est produit n'est pas démontrée en particulier, et cette démonstration, ainsi que nous l'avons montré plus haut, repose toujours sur les principes de l'expérience possible et non sur le principe de l'analyse (le principe de contradiction). Cela nous avertit de ne pas conclure aussitôt de la possibilité (logique) des concepts à la possibilité (réelle) des choses.

certaines déterminations en soi. Dans l'usage logique, ce n'est que la copule d'un jugement. Cette proposition : Dieu est tout-puissant, renferme deux concepts qui ont leurs objets : Dieu et toute-puissance ; le petit mot est n'est pas du tout encore par lui-même un prédicat, c'est seulement ce qui met le prédicat en relation avec le sujet. Or, si je prends le sujet (Dieu) avec tous ses prédicats (dont la toute-puissance fait aussi partie) et que je dise : Dieu est, ou il est un Dieu, je n'ajoute aucun nouveau prédicat au concept de Dieu, mais je ne fais que poser le sujet en lui-même avec tous ses prédicats, et en même temps, il est vrai, l'objet qui correspond à mon concept. Tous deux doivent exactement renfermer la même chose et, par conséquent, rien de plus ne peut s'ajouter au concept qui exprime simplement la possibilité, par le simple fait que je conçois (par l'expression : il est) l'objet de ce concept comme donné absolument. Et ainsi, le réel ne contient rien de plus que le simple possible. Cent thalers réels ne contiennent rien de plus que cent thalers possibles. Car, comme les thalers possibles expriment le concept et les thalers réels, l'objet et sa position en lui-même, au cas où celui-ci contiendrait plus que celui-là, mon concept n'exprimerait pas l'objet tout entier et, par conséquent, il n'en serait pas, non plus, le concept adéquat. Mais je suis plus riche avec cent thalers réels qu'avec leur simple concept (c'est-à-dire qu'avec leur possibilité). Dans la réalité, en effet, l'objet n'est pas simplement contenu analytiquement dans mon concept, mais il s'ajoute synthétiquement à mon concept (qui est une détermination de mon état), sans que, par cette existence en dehors de mon concept, ces cent thalers conçus soient le moins du monde augmentés.

Quand donc je conçois une chose, quels que soient et si nombreux que soient les prédicats par lesquels je la pense (même dans la détermination complète), en ajoutant, de plus, que cette chose existe, je n'ajoute absolument rien à cette chose., Car autrement, ce qui existerait ne serait pas exactement ce que j'avais conçu dans mon concept, mais bien quelque chose de plus, et je ne pourrais pas dire que c'est précisément l'objet de mon concept qui existe. Si je conçois aussi dans une chose toute réalité sauf une, du fait que je dis qu'une telle chose défectueuse existe, la réalité qui lui manque ne s'y ajoute pas, mais au contraire cette chose existe avec exactement le même défaut qui l'affectait lorsque je l'ai conçue, car autrement il existerait quelque chose d'autre que ce que j'ai conçu. Or, si je conçois un être à titre de réalité suprême (sans défaut), il reste toujours à savoir, pourtant, si cet être existe ou non. En effet, bien qu'à mon concept il ne manque rien du contenu réel possible d'une chose en général, il manque cependant encore quelque chose au rapport à tout mon état de pensée, à savoir que la connaissance de cet objet soit aussi possible a posteriori. Et ici se montre la cause de la difficulté qui règne sur ce point. S'il était question d'un objet des sens je ne pourrais pas confondre l'existence de la chose avec le simple concept de la chose. Car le concept ne me fait concevoir l'objet que conformément aux conditions universelles d'une connaissance empirique possible en général, tandis que l'existence me le fait concevoir comme enfermé dans le contexte de toute l'expérience; si donc, par sa liaison avec le contenu de toute l'expérience, le concept de l'objet n'est pas le moins du monde augmenté, notre pensée du moins en reçoit en plus une perception possible. Si, au contraire, nous voulons penser l'existence seulement par la pure catégorie, il n'est pas étonnant que nous ne puissions indiquer aucun critérium pour la distinguer de la simple possibilité.

Quelles que soient donc la nature et l'étendue de notre concept d'un objet, il nous faut cependant sortir de ce concept pour attribuer à l'objet son existence. Pour les objets des sens, cela a lieu au moyen de leur enchaînement avec quelque'une de mes perceptions suivant des lois empiriques ; mais pour des objets (Objecte) de la pensée pure, il n'y a absolument aucun moyen de connaître leur existence, parce qu'elle devrait être connue entièrement a priori, alors que notre conscience de toute existence (qu'elle vienne soit immédiatement de la perception, soit de raisonnements qui lient quelque chose à la perception) appartient entièrement et absolument à l'unité de l'expérience, et que si une existence hors de ce champ

ne peut pas, à la vérité, être absolument déclarée impossible, elle est pourtant une supposition que nous ne pouvons justifier par rien.

Le concept d'un Etre suprême est une idée très utile à beaucoup d'égards, mais, par le fait même qu'il est simplement une idée, il est incapable d'accroître par lui seul notre connaissance par rapport à ce qui existe. Il ne peut même pas nous instruire relativement à la possibilité d'une pluralité. Le caractère analytique d'une possibilité consistant en ce que de simples positions (des réalités) n'engendrent aucune contradiction, ne peut sans doute lui être contesté ; mais comme la liaison de toutes les propriétés réelles dans une chose est une synthèse dont nous ne pouvons pas juger a priori la possibilité, parce que les réalités ne nous sont pas données spécifiquement (49) et que, quand même cela arriverait, il n'en résulterait aucun jugement, le caractère de la possibilité de connaissances synthétiques ne devant jamais être cherché que dans l'expérience à laquelle l'objet d'une idée ne peut pas appartenir, il s'en faut bien que le célèbre LEIBNIZ ait fait ce dont il se flattait, c'est-à-dire qu'il soit parvenu, comme il le voulait, à connaître a priori la possibilité d'un être idéal aussi élevé.

Par conséquent, la preuve ontologique (CARTESIENNE) si célèbre, qui veut démontrer par concepts l'existence d'un Etre suprême, fait dépenser en vain toute la peine qu'on se donne et tout le travail que l'on y consacre ; nul homme ne saurait, par de simples idées, devenir plus riche de connaissances, pas plus qu'un marchand ne le deviendrait en argent, si, pour augmenter sa fortune, il ajoutait quelques zéros à l'état de sa caisse. »

Le travail sur ce texte pourrait s'aider du compte rendu des analyses suivantes.

Analyses ¹⁷

Il y a deux manières de connaître Dieu : par l'autorité des Ecritures et par la nécessité de la Raison, qui s'opposent et s'articulent au sein de la foi. C'est seulement après St THOMAS que la Raison sera opposée non seulement à l'autorité des Ecritures, mais à la foi elle-même, et c'est dans ce nouveau contexte intellectuel que DESCARTES formulera « sa » preuve ontologique. Donc ST ANSELME veut connaître Dieu au sein de la foi, DESCARTES aura le projet de constituer une connaissance sans le recours à la foi en utilisant la seule raison naturelle. DESCARTES estime que parmi toutes les idées, une idée ne peut être le produit de mon imagination : l'idée d'un Dieu infiniment parfait, l'imagination ne pouvant jamais donner que des représentations limitées. Pour DESCARTES, si nous concevons l'idée d'un être parfait, l'existence appartient nécessairement à un tel être. DESCARTES accepte cependant une objection : la pensée ne fait pas nécessité aux choses et répond à cette objection dans la troisième méditation. Cette troisième méditation propose une première preuve de l'existence de Dieu – dite « preuve par les effets », sans laquelle la seconde ne serait pas garantie -, preuve qui est un moyen par rapport à la solution du problème de la valeur objective des idées : il s'agit de montrer qu'une réalité objective correspond aux idées claires et distinctes, de « transformer les vérités nécessaires de la science en vérité des choses »¹⁸. Cela fait, DESCARTES pourra alors dans la Méditation V^{ème} développer la preuve dite ontologique : un être parfait ne peut pas ne pas exister sinon il lui manquerait une perfection : l'existence.

C'est la preuve de la V^{ème} méditation que KANT critique. Notons que dans les méditations le problème de DESCARTES était de garantir la certitude des sciences par l'existence de Dieu ; ce problème n'est plus celui de KANT qui part du fait de l'existence des sciences et cherche simplement à réfléchir aux conditions des possibilités et aux limites de celles-ci : la vérité des

¹⁷ Analyses de Bruno DE SOLERE.

¹⁸ Citation de M. GUERALT, dans *Descartes dans l'ordre des raisons*.

sciences dépend alors de la structure du sujet (on peut parler de « mort épistémologique de Dieu »).

La preuve de DESCARTES déduisait l'existence de Dieu de son essence après s'être efforcé de montrer qu'on avait le droit de faire ces déductions. KANT s'attaque à ce droit en montrant que l'existence n'est pas un élément de l'essence parmi d'autres, mais quelque chose qui peut ou non s'ajouter à l'essence.

Commentons le texte de KANT. On propose de réfléchir au cas d'une personne se trouvant devant un restaurant proposant un menu 100F. Quatre possibilités peuvent se présenter :

- 1) je crois avoir 100F, je mange et je trouve effectivement les 100F dans ma poche : à l'idée de 100F correspond effectivement l'existence des 100F,
- 2) je crois avoir 100F, je mange mais je me rends compte que j'ai oublié les 100F à la maison : à l'idée de 100F dans ma poche ne correspond pas l'existence de 100F dans ma poche,
- 3) je ne pense pas avoir 100F dans ma poche, je ne rentre pas dans le restaurant et, en marchant, je découvre les 100F dans ma poche : à l'idée de la non existence des 100F dans ma poche répond la découverte de leur existence dans ma poche,
- 4) je ne crois pas avoir 100F dans ma poche, et effectivement je ne les y trouve pas : l'idée de l'inexistence est confirmée par l'expérience.

La thèse de KANT est ainsi que seule la perception sensible permet de distinguer le concept d'un être réel et la réalité de cette chose. Pour attribuer une existence à un objet il faut sortir du concept de l'objet. L'existence d'un être parfait est possible mais elle n'est que possible ; l'idée de Dieu, être parfait, ne peut accroître notre connaissance, il faudrait pour cela une expérience qui nous apporterait la confirmation de l'existence.

3.2. Réflexions sur les démarches de la philosophie d'aujourd'hui

Un philosophe aujourd'hui ne tenterait plus de prouver l'existence ; la leçon de KANT a été retenue : l'existence ne se démontre pas, il faut qu'elle soit donnée dans une expérience possible.

Il paraît alors intéressant de s'interroger d'une part sur la place des jugements d'existence tant en mathématiques qu'en philosophie et d'autre part sur la spécificité des démarches philosophiques par rapport à celle des mathématiques.

En un premier temps les philosophes tendent à penser que pour les mathématiciens un objet existe dès lors qu'il est logiquement possible ; alors que c'était justement l'objet de la réfutation kantienne de démontrer qu'un concept sans contradiction ne garantit pas l'existence d'une réalité lui correspondant.

S'interroger sur l'existence pour un philosophe, c'est au fond se demander si telle chose est réelle dans la perspective même du bon sens qui distingue entre fiction et réalité.

Un problème du mathématicien est qu'il éprouve le besoin de préciser au départ le vocabulaire qu'il utilise, en donnant d'emblée un contenu exact et non équivoque à chaque notion : existence, réalité,... L'aboutissement de cette démarche est la présentation axiomatique. Une fois cette présentation minimale faite, il commence à raisonner.

En revanche le point de départ du philosophe est une situation vécue de sorte que le sens des termes s'éclaire (à des degrés divers, mais c'est justement l'objet de la démarche

philosophique d'éclairer progressivement les notions tendant à cerner et à problématiser les situations vécues) tout au long de sa réflexion.

Il apparaît, par ailleurs, que l'entreprise anselmienne ou cartésienne, de prouver l'existence de Dieu ne correspond plus aux entreprises de la philosophie depuis KANT ; jusqu'à KANT les métaphysiciens ambitionnaient de prouver des existences par les seules ressources de la raison. Depuis la démarche philosophique part de la réalité vécue en s'efforçant à partir de là de réfléchir aux conditions de possibilités de celles-ci (KANT : la science existe, quelles sont les conditions qui la rendent possible ?)

Peut-on faire une analogie dans ce débat pré-kantien / post-kantien avec le débat entre les mathématiciens constructivistes qui ne conçoivent une existence que par construction effective (ce qui renvoie au « vécu »), et les mathématiciens formalistes qui acceptent une existence par la seule force du raisonnement (existence « par défaut » d'objets qui ne sont pas construits). ?

3.3. La démonstration d'existence en mathématique

Comme l'a montré le débat précédent, le débat kantien/pré-kantien peut renvoyer au débat existant en mathématiques entre les constructivistes et les formalistes.

3.3.1. Exemples de démonstration d'existence

Pour éclairer le débat sur la démonstration d'existence, et le nourrir, nous proposons d'abord des exemples de démonstrations d'existence *sans et avec construction*.

Démonstration d'existence d'objet

L'exemple suivant est extrait de "*Mathématiques constructives : hier et demain*" de Henri LOMBARDI¹⁹.

Un théorème affirme que lorsqu'on effectue successivement trois symétries par rapport à 3 droites dans un ordre de succession donné, le résultat est le même dans l'ordre inverse de succession si et seulement si les trois droites sont concourantes ou parallèles. Il se pose alors le problème suivant :

Connaissant deux droites D_1 et D_2 et un point M extérieur montrer qu'il existe une troisième droite D_3 passant par M et qui soit parallèle ou concourante aux deux premières droites.

Existence sans construction (point de vue Cantorien, formaliste ou "abstrait")

Il y a deux cas (**disjonction des cas**) illustrés par la figure 1 :

1^{er} cas : les deux droites sont sécantes en un point I : la droite D_3 est la droite (IM),

2^{ème} cas : les deux droites sont parallèles : la droite D_3 est la parallèle à D_1 passant par M.

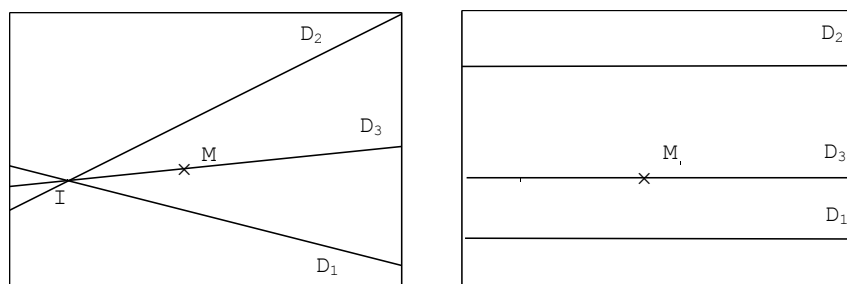


Figure 1

¹⁹ Publié dans "*La démonstration mathématique dans l'histoire*" actes du 7^{ième} colloque inter-irem épistémologie et histoire des mathématiques, de Besançon, 1989, édition IREM de Lyon.

Il se pose un problème pratique pour un dessinateur si les deux droites D_1 et D_2 se coupent en dehors de la feuille de papier ou s'il ne sait pas si les deux droites D_1 et D_2 sont parallèles ou non (on n'a pas de méthode générale permettant de le savoir).

Il existe alors une méthode qui permet de construire la troisième droite D_3 quelle que soit la situation.

Existence par construction

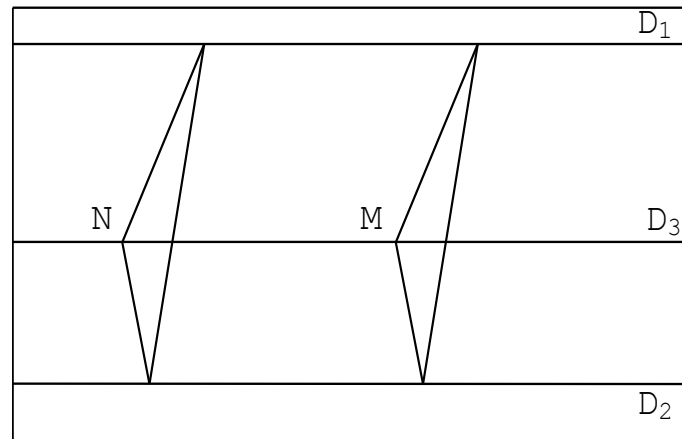


Figure 2

On construit un triangle dont un sommet est M et les deux autres sont respectivement sur D_1 et D_2 .

On construit alors un second triangle comme suit :

- d'abord un côté parallèle au côté ne passant pas par M du premier triangle; ce côté coupe D_1 et D_2 en deux points qui seront des sommets de ce second triangle ,
- puis on trace par ces sommets les parallèles aux deux autres côtés passant par M du premier triangle; ces deux autres côtés du second triangle se coupent en N.

La droite (MN) est la droite D_3 .

Autre exemple

Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 5 = 0$ admet deux solutions distinctes.

Existence sans construction

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

On obtient le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme :

$$f(-3) = -13 < 0 < f(-1) = 7$$

il existe a élément de $] -3; -1[$ tel que $f(a) = 0$. Mais le théorème ne donne pas de construction de a . Cependant la méthode de dichotomie permettrait une construction approchée.

Autre exemple

Montrer que l'équation $3x^2-2x-1=0$ admet deux solutions distinctes.

Existence avec construction

Les formules d'un théorème donnent les 2 seules solutions :

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 3} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 3} = -\frac{1}{3}.$$

3.3.2. Le constructivisme et l'axiome de choix²⁰

L'**axiome du choix** en mathématiques admet la propriété suivante.

On suppose qu'on a un ensemble quelconque I et qu'on peut associer à tout élément i de I une partie A_i non vide de A (A étant un autre ensemble quelconque). Alors l'axiome du choix affirme qu'il existe une application f (un choix f) de I dans A qui à chaque élément i de I associe (choisit pour image) un élément a de A_i .

Reformulons cet axiome : si on peut "indexer" A_i des parties de A avec un ensemble d'index I , alors on peut choisir dans chaque partie indexée un élément. *L'axiome du choix ne dit pas comment se fait ce choix. C'est ce qui pose problème aux constructivistes qui refusent d'admettre l'axiome du choix.*

Prenons un exemple vulgarisé. Supposons que toutes les classes de lycées de France soient numérotées. Alors l'axiome du choix dit que dans chaque classe, on peut choisir un élève. Dans le cas de cet exemple, on peut construire une procédure de choix : prendre le premier élève sur la liste alphabétique ou encore un autre choix prendre l'élève de la classe dont le numéro de sécurité sociale est le plus petit. On voit la difficulté du choix lorsque l'ensemble est infini et qu'il n'y a pas de relation d'ordre sur cet ensemble (donc il n'y a pas de premier ou de plus petit).

A partir de l'axiome du choix, on déduit deux résultats importants : le théorème de ZERMELO et le lemme de ZORN.

Le **théorème de ZERMELO** : tout ensemble peut être bien ordonné.

Ceci signifie que sur tout ensemble quelconque on peut construire une relation d'ordre (on peut mais on ne dit pas comment, c'est-à-dire il n'y a pas de construction de cette relation d'ordre). Cette relation est un bon ordre, c'est-à-dire que chaque partie (non vide) de cet ensemble admet un plus petit élément (ou un premier).

On peut alors se poser la question : tout ensemble admet-il un élément maximal (qu'on pourrait appeler un Dieu mathématique) ?

Le **lemme de ZORN** donne une condition d'existence d'un élément maximal (c'est-à-dire une condition d'existence d'un Dieu mathématique). Attention cet élément maximal n'est pas obligatoirement unique (le Dieu mathématique n'est pas obligatoirement unique).

Le lemme de Zorn : tout ensemble ordonné inductif (c'est-à-dire un ensemble ordonné E pour lequel tout sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant dans E) admet au moins un élément maximal. Vulgarisons avec un exemple.

L'intervalle $[0;1]$ est un ensemble ordonné inductif. Il admet 1 pour élément maximal.

L'intervalle $[0;1[$ n'est pas un ensemble ordonné inductif. Il n'admet pas d'élément maximal.

²⁰ Exposé de Richard CABASSUT.

Dans ce dernier cas on est tenté de "compléter" $[0;1[$ par 1 pour former le nouvel ensemble $[0;1]$ qui admet un élément maximal. L'élément avec lequel on complète n'est pas toujours de même nature que les autres éléments de l'ensemble. Par exemple, l'ensemble des nombres rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$ peut être complété par le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ pour admettre un élément maximal. De même l'ensemble des entiers naturels peut être complété par ∞ pour admettre un élément maximal.

Répondre sous quelles conditions on peut compléter par un élément maximal c'est donc donner des conditions pour qu'un "Dieu mathématique" existe, sachant que ce "Dieu" sera de nature différente des autres éléments dont il est "Dieu".

4. Présentation d'un exemple de démonstration mathématique

Voici une proposition à démontrer :

Tout triangle dont une médiane est confondue avec une bissectrice est isocèle.

En présence d'un professeur de mathématique et d'un professeur de philosophie, on peut proposer aux élèves d'abord d'indiquer des idées de démonstration, puis de réagir à leurs propositions de démonstration. La présence du professeur de mathématique permettra de réfuter les arguments faux ou de demander de justifier des explications peu claires.

On joint les trois documents suivants :

- un exemple de compte-rendu des étapes de la découverte de la démonstration,
- un exemple de rédaction de la démonstration,
- quelques éléments de réflexion.

4.1. Exemples de démarches de découvertes d'une démonstration

Pour entrer dans un problème de géométrie, une conduite standard est la lecture de l'énoncé et le tracé d'une figure correspondante. L'exemple retenu ici s'avère complexe dans sa démarche de raisonnement, malgré un point d'appui figural simple (un triangle et une droite). En effet ici, la perception de la figure réalisée ne conduit pas à un questionnement naturel contrairement à l'exemple où on considère dans un triangle ABC, le triangle A'B'C' formé par les milieux des côtés. Dans ce dernier exemple la figure suggère naturellement de vérifier si les côtés du triangle A'B'C' sont parallèles aux côtés du triangle ABC. Dans ce cas le tracé de la figure en lecture de l'énoncé peut conduire à percevoir le problème.

Pour revenir à notre problème initial, *tout triangle dont une médiane est confondue avec une bissectrice est isocèle*, la figure de l'énoncé ne permet pas de voir naturellement le problème²¹. Nous allons donc voir quelles démarches de découvertes peuvent résoudre le problème.

²¹ Le choix de ce problème n'est du qu'au fait que Georges GLAESER était membre de notre groupe et qu'il nous a proposé ce problème qu'il a exposé dans son livre *Mathématiques pour l'élève professeur*, par Georges GLAESER Hermann, page 26. Il n'y a pas eu de réflexion didactique préalable au choix de ce problème.

4.1.1. Démarche par enrichissement de la figure (exploitant les hypothèses)²²

Essayons d'expliquer comment la découverte des arguments de la démonstration aurait pu se produire. (Ce scénario est fictif et n'est pas obligatoire ; des élèves de la classe peuvent proposer un autre scénario). On y verra deux processus : l'*association* d'idées et la *reconnaissance* d'une situation de référence.

Au début on peut se poser la question : *comment montrer qu'un triangle, dont une bissectrice est confondue avec la médiane, est isocèle ?*

Deux idées peuvent venir rapidement à l'esprit :

- soit en montrant que le triangle a deux angles égaux : $\text{angle } ABC = \text{angle } ACB$,
- soit en montrant qu'il a des côtés de longueurs égales : $AC = AB$.

En considérant la figure telle quelle, on n'a pas d'idée supplémentaire, d'où la nécessité de compléter la figure en utilisant les notions de médiane et de bissectrice qu'on n'a pas encore utilisées.

Si on considère la médiane du triangle ABC, droite qui joint le sommet A au **milieu** I du côté opposé [BC], on peut penser à un parallélogramme ACDB (voir figure suivante) où les diagonales se coupent en leur **milieu**. D'où la construction du point D. Ici le mot **milieu** a déclenché l'*association* d'idées entre médiane et parallélogramme.

Ensuite on peut *associer* la notion de bissectrice (évoquée en hypothèse) à celle d'angles. On va donc étudier les angles dans le parallélogramme ACDB en y *reconnaissant* une configuration de référence, celle des angles alternes-internes : $\text{angle } BAD = \text{angle } ADC$. Or la bissectrice (AD), qui est confondue avec la médiane, partage l'angle BAC en 2 angles égaux : $\text{angle } BAD = \text{angle } DAC$. On en déduit $\text{angle } ADC = \text{angle } BAD = \text{angle } DAC$. Puis les propriétés d'angles permettent d'*associer* angles égaux et triangle isocèle et de *reconnaître* le triangle isocèle ADC.

On peut alors caractériser ce triangle par une égalité de longueurs de côtés : $AC = CD$.

On *associe* ce résultat à l'égalité $AC = AB$ que l'on peut essayer d'établir pour montrer que ABC est isocèle.

Il suffirait alors de montrer que $AB = CD$. On *reconnaît* là une propriété du parallélogramme ABCD.

La découverte de la démonstration est terminée. Il faut maintenant la rédiger.

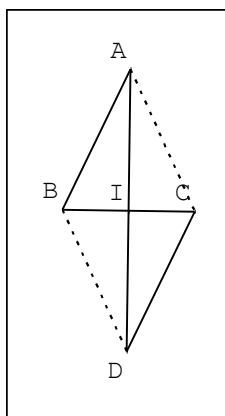


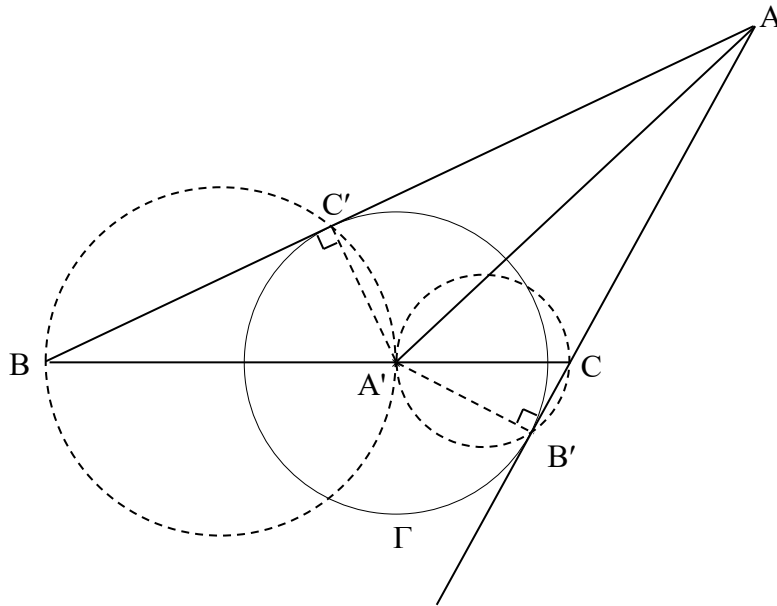
Figure 1

²² Cette démarche s'inspire de *Mathématiques pour l'élève professeur*, par Georges GLAESER Hermann, page 26.

4.1.2. Démarche par appauvrissement de l'énoncé (construction omettant certaines des hypothèses)²³

On peut adopter une démarche contraire à la démarche précédente en appauvrissant les hypothèses.

On peut commencer d'abord par résoudre le problème de la construction d'un triangle ABC ayant une bissectrice passant par A' point donné sur $[BC]$ (A' n'étant pas nécessairement milieu de $[BC]$) comme l'illustre la figure suivante).

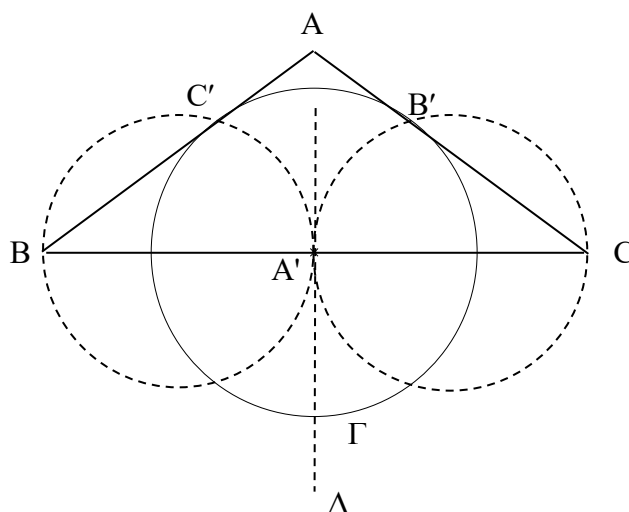


Analyse : Comme A' appartient à la bissectrice en A du triangle ABC, A' est à égale distance de (AB) et de (AC) (propriétés de la bissectrice). Les projetés orthogonaux C' et B' de A' respectivement sur (AB) et sur (AC) appartiennent donc à l'intersection d'un cercle Γ de centre A' et des deux cercles de diamètre $[A'B]$ et $[A'C]$ (ce qui garantit que $BC'A'$ et $CB'A'$ soient des angles droits d'après le théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse).

Synthèse : Pour faire la construction, on trace les deux cercles de diamètre $[A'B]$ et $[A'C]$ et on choisit un cercle Γ de centre A' qui veuille bien couper les deux cercles précédents. On choisit comme point C' l'un des deux points d'intersection de Γ et du cercle de diamètre $[A'B]$ et comme point B' l'un des deux points d'intersection de Γ et du cercle de diamètre $[A'C]$. Si les deux droites (CB') et (BC') ne sont pas parallèles, leur point d'intersection, noté A, est tel que (AA') soit la bissectrice en A du triangle ABC.

Pour découvrir une autre démonstration du résultat cherché en 4.1, on peut maintenant utiliser l'analyse du problème de construction précédent dans le cas particulier où A' est le milieu de $[BC]$. On obtient la figure suivante :

²³ Cette démarche est suggérée par François PLUVINAGE.



Montrons que le triangle ABC est isocèle en A.

Pour cela on considère la symétrie orthogonale S par rapport à la médiatrice Δ de $[BC]$ (qui passe par A'). Elle envoie le cercle de diamètre $[A'B]$ sur le cercle de diamètre $[A'C]$ et laisse invariant le cercle Γ de centre A' . Par conséquent l'image de C' par cette symétrie est l'un des deux points d'intersection du cercle Γ avec le cercle de diamètre $[A'C]$.

Or les points d'intersection de ces deux cercles sont respectivement le symétrique de C' par rapport à Δ et le symétrique de C' par rapport à A' . Le point B' ne peut pas être le symétrique de C' par rapport à A' car, dans ce cas, les droites (BC') et (CB') seraient parallèles. Par conséquent B' est le symétrique de C' par rapport à Δ .

On en déduit que l'image par S de la droite (BC') est la droite (CB') . Le point A, qui est le point d'intersection de ces deux droites, est donc fixé par S ce qui implique qu'il appartient à la médiatrice de $[BC]$. Par conséquent le triangle ABC est bien isocèle en A ($AB=AC$).

4.2. La rédaction de la démonstration

Proposons une rédaction de la démonstration découverte dans la première démarche.

On suggère²⁴ les figures successives suivantes pour comprendre les étapes de la démonstration.

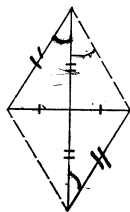


Figure 1

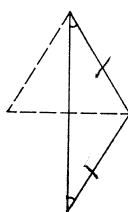


Figure 2

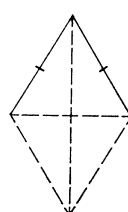


Figure 3

²⁴ Voir *Mathématiques pour l'élève professeur*, par Georges GLAESER Hermann, page 26.

Rédigeons la démonstration en codant les figures précédentes.

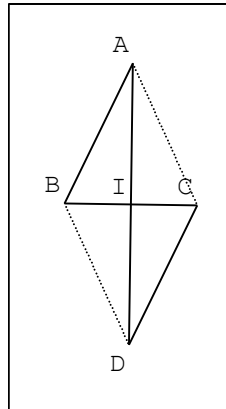


Figure 4

On considère un triangle ABC dont la médiane (AI) est confondue avec la bissectrice (AI). On prolonge (AI) jusqu'à D de sorte que I soit le milieu de [AD]. Comme (AI) est médiane, par définition de la médiane, I est également milieu de [BC]. Les diagonales de ACDB se coupent en leur milieu I ce qui montre que **ABDC est un parallélogramme**.

Dans ce parallélogramme, la propriété des angles alternes-internes montre que l'angle **BAI égale l'angle IDC** (angles alternes internes par rapport à la sécante (AD) coupant les parallèles (AB) et (CD)) (figure 1).

Comme (AI) est aussi bissectrice de l'angle BAC, on a donc l'angle **BAI égale l'angle IAC**.

En conséquence des deux égalités précédentes d'angles, l'angle **IAC égale l'angle IDC**.

Donc le triangle ACD est isocèle en C, donc **DC=AC** (figure 2).

Mais dans le parallélogramme ABDC, **AB=DC**.

Des deux égalités de côtés précédentes on déduit **AB=AC**, c'est-à-dire que ABC est isocèle en A (figure 3).

4.3. Observations

4.3.1. Distinguer entre la fonction heuristique du premier texte et la fonction validation du second texte

Cette distinction permet de repérer les difficultés liées aux mathématiques, qui sont de deux ordres : invention de la démarche et logique des enchaînements.

La démonstration précédente peut avoir pour fonction de valider la proposition « *tout triangle dont une médiane est confondue avec une bissectrice est isocèle* ».

L'heuristique est l'étude des activités et des procédures qui permettent de produire des raisonnements conduisant à des démonstrations, c'est-à-dire d'avoir des idées pour résoudre des problèmes, de découvrir des solutions aux problèmes.

On peut définir l'heuristique comme l'éducation aux habitudes de recherche²⁵. Puis on évoque quelques procédures heuristiques :

²⁵ Définition proposée par Georges GLAESER.

- le « grignotage » : on essaie d'éliminer des inconnues quand il y a plusieurs inconnues ou bien on cherche les points faibles par lesquels on va attaquer la démonstration,
- la « rectification de tir » : on trouve la solution à un problème voisin et on essaie de modifier un peu la méthode pour se rapprocher du problème en question,
- le « changement de registres » ²⁶: on place le problème dans un autre registre (par exemple passage du registre algébrique au registre graphique) pour faire apparaître de nouvelles méthodes ou mettre en valeur des propriétés qui n'étaient qu'implicites dans le précédent registre. On signale qu'en philosophie, on essaie également de transporter un problème d'un auteur à l'autre, pour mieux l'étudier.

On donne l'exemple de la résolution dans IR de l'équation $\frac{1}{x-1} = x-1$.

Différentes procédures heuristiques :

- Reconnaître, par changement de variable, une situation plus simple : $\frac{1}{a} = a$ qui renvoie à une situation de référence classique : $a^2=1$.
- Représenter avec sa calculatrice graphique la courbe d'équation $y = \frac{1}{x-1}$ et la droite d'équation $y=x-1$ et lire sur la courbe les solutions et vérifier si elles sont bonnes (ici on a un changement de registre qui va indiquer le nombre éventuel de solutions et leur localisation).
- Résoudre algébriquement en se ramenant à une équation polynomiale :

$$\frac{1}{x-1} = x-1 \Leftrightarrow (1 = (x-1)^2 \text{ et } x \neq 1) \Leftrightarrow (x^2 - 2x = x(x-2) = 0 \text{ et } x \neq 1) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 2).$$

Un autre exemple évoqué est la démonstration du théorème de résolution de $ax^2+bx+c=0$ et de la difficulté de cette démonstration pour les élèves à cause de l'accumulation d'écritures littérales abstraites.

Quelques types d'outils heuristiques

- Reconnaissance d'une forme de référence (configuration géométrique (par exemple un parallélogramme), expression algébrique (par exemple : identité remarquable), cas d'application d'un théorème, fonction usuelle,...) ; la classification des objets est une activité importante qui permet de se ramener à des situations de référence,
- analogie avec des situations déjà rencontrées (se bâtir une culture de situations problèmes, fréquenter des problèmes,...),
- algorithmes, méthodes, calculs (traitement algorithmique ("automatisé") de situations),
- changements de registres,
- changements de cadres²⁷,
- expérimentation (graphique, figure, calculatrice,...),
- documentation (recherche dans des livres, auprès d'experts, réseau de relations,...),
- débat scientifique (confrontation avec un interlocuteur).

Les difficultés heuristiques et les difficultés de compréhension d'une démonstration

L'apprentissage et la compréhension des mathématiques ne vont pas toujours sans difficultés.

²⁶ Théorie didactique développée par Raymond DUVAL, par exemple dans *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives n°5 (p. 37-65)- IREM de Strasbourg, 1993.

²⁷ On renvoie à l'article *Didactique des mathématiques* de Régine DOUADY dans l'Encyclopédie Universalis où est expliqué l'intérêt du « jeu de cadres ».

Une réflexion sur les mathématiques se doit de repérer ces difficultés, pour des raisons théoriques (conception de l'objet mathématique) aussi bien que par souci pédagogique. C'est nécessaire pour déconstruire le mythe des "mathématiques discipline abstruse" ; et ce l'est aussi pour faire voir, d'abord que la difficulté de compréhension est le plus souvent naturelle, comme elle l'est en toute recherche, ensuite que certains aspects de la difficulté peuvent trouver des réponses s'ils sont appréhendés clairement et cernés avec méthode.

1. Les difficultés de certains élèves se ramènent à leur difficulté à saisir des objets abstraits s'il n'y a pas de lien explicite à des objets ou des situations concrets. Ces élèves ont besoin d'exemples ou "illustrations", c'est-à-dire qu'ils ont besoin qu'on leur présente des objets sensibles dont les objets mathématiques abstraits sont les concepts, qu'on leur montre dans l'expérience un objet correspondant au concept. (Sur cette question, voir ci-dessous le paragraphe 5.1.2.3.). La pratique de l'exemple est tout à fait légitime dans la réflexion mathématique.
2. C'est un fait d'observation que les élèves acceptent difficilement de "sécher" et ne goûtent que rarement le plaisir de "sécher", la situation étant vécue comme une situation d'échec. Or, le fait de ne pas trouver immédiatement fait partie de l'activité scientifique, et devrait être assumé comme s'inscrivant dans toute pratique de réflexion. Réfléchir n'est pas réagir mécaniquement à une situation, en appliquant des recettes toutes faites ou stéréotypées.
3. Certaines résolutions mobilisent simultanément deux méthodes différentes. S'il est normal que le premier mouvement de l'élève soit de puiser dans son stock de méthodes celle dont il a le plus l'habitude ou celle qu'il a mobilisée pour le dernier exercice, il faut qu'il s'habitue aussi à mobiliser ses ressources méthodologiques avec plus de souplesse, en tentant de les combiner entre elles, et cela n'est pas vrai qu'en mathématique.
4. Georges GLAESER rappelait souvent que la pédagogie des mathématiques doit être attentive aux attitudes face à la non-réussite. Car il y a une difficulté à évaluer les élèves "qui ne trouvent pas", le fait de ne pas trouver ne signifiant pas, en soi, qu'il n'y a pas eu de réflexion mathématique.
5. La réflexion sur l'heuristique et la compréhension peut aussi se nourrir de l'observation historique qu'une même théorie a pu être développée à la même époque par deux méthodes différentes (comme cela a été le cas des bases du calcul différentiel avec NEWTON et LEIBNIZ).

Dans le cadre de cette réflexion sur l'heuristique et les difficultés de compréhension des raisonnements, on pourrait proposer d'insister sur les points suivants, qui peuvent être autant de thèmes de recherche :

- la distinction entre la démonstration pour éclairer un problème et la démonstration pour comprendre,
- la distinction entre avoir l'idée de la question ou du problème à poser et avoir l'idée de la réponse au problème. Le mathématicien Jean DIEUDONNE disait qu'il était plus important de poser une question ou un problème que d'y répondre. Les philosophes ont l'habitude de dire que l'essentiel de la réflexion est de trouver en quoi une question fait problème, c'est-à-dire savoir faire découvrir qu'une interrogation pour laquelle on attendait une réponse immédiate (parce qu'on croyait qu'elle était déjà pré-inscrite dans les savoirs constitués)

suppose l'invention d'un détour, la genèse d'un questionnement inédit, avec de nouveaux concepts et de nouvelles démarches.

4.3.2. Réflexion sur la place de la figure dans le raisonnement

- La figure, qui est une complexification du triangle initial, auquel s'est rajouté le point D, fait apparaître plusieurs configurations de références : le parallélogramme ABDC, la configuration d'angles alternes-internes (figure 1), la configuration de triangle isocèle (ACD en figure 2 et BAC en figure 1),
- dans ce contexte, la succession de sélection de trois parties différentes (figures 1, 2, 3) d'une même figure (figure 4) constitue une "rédaction en figures" des étapes de la démonstration. La figure joue un rôle heuristique déterminant. Il est bien évident qu'il faut avoir l'idée de sélectionner telle partie plutôt que telle autre, de reconnaître telle configuration.

Cependant la figure peut être un obstacle à la constitution d'une démonstration correcte en se limitant à un cas particulier.

Comme le montre la séance suivante réalisée en classe.

4.3.3. Compte rendu de séances réalisées en classe sur la place de la figure dans le raisonnement

La figure obstacle à la perception générale du problème

On dessine au tableau la figure suivante.

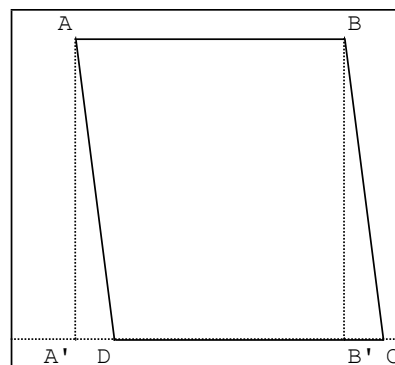


Figure 1

On se propose de démontrer la formule prouvant que l'aire d'un parallélogramme est le produit de la base par la hauteur relative à cette base.

On propose au tableau la démonstration suivante.

Dans le parallélogramme ABCD on considère les projetés orthogonaux A' et B' de A et B sur la droite (CD). Le parallélogramme ABCD se décompose en un puzzle de deux parties: le quadrilatère ADB'B et le triangle BB'C. Or le triangle rectangle BB'C admet pour triangle isométrique le triangle rectangle AA'D. on peut donc échanger les aires de ces deux triangles pour reconstituer le rectangle ABB'A' formé du quadrilatère ADB'B et du triangle AA'D. Donc l'aire du parallélogramme ABCD coïncide avec celle du rectangle AA'B'B d'aire L fois h .

On conclut :

L'aire d'un parallélogramme de base de longueur L et de hauteur h vaut L fois h .

L'ensemble des élèves approuve cette démonstration.

On propose alors le cas de figure suivant :

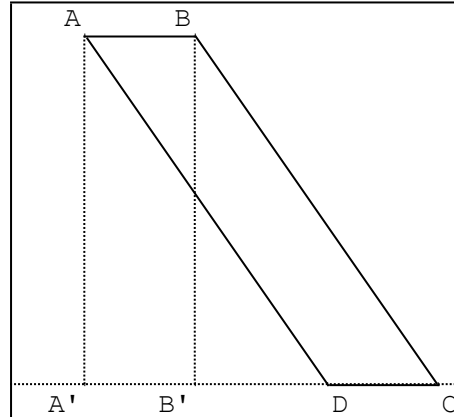


Figure 2

On voit le caractère trompeur de la figure car le raisonnement de la figure 1 ne peut être reproduit pour la figure 2.

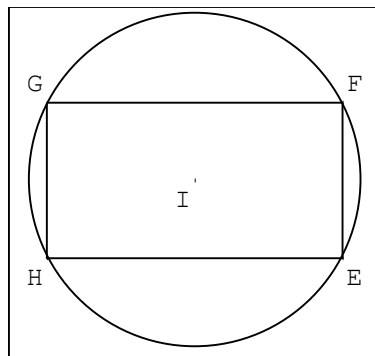
Le raisonnement et l'intuition qui fonctionnent sur la première figure, ne fonctionnent pas avec la deuxième figure. Jusqu'où peut-on faire confiance à son intuition ?

Questionnement

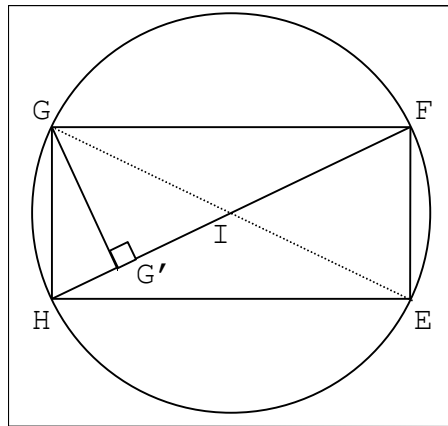
- Une figure est-elle un simple support psychologique pour mieux faire comprendre la démonstration ?
- Peut-on dans les inférences se passer de la figure ? Une figure particulière enferme-t-elle dans une inférence particulière ?
- Qu'est-ce qu'une démonstration ?
- Qu'est-ce qu'un raisonnement ?

4.3.4. Comparaison²⁸ d'une heuristique géométrique et d'une heuristique basée sur le calcul

Problème : Parmi les rectangles inscrits dans un cercle lesquels sont d'aire maximale ?



²⁸ D'après une suggestion de Richard CABASSUT.

Démonstration géométrique

On considère dans le triangle GHF le pied G' de la hauteur issue de G.

L'aire de GHF vaut $\frac{1}{2} \times G'G \times HF$. Donc l'aire du rectangle HEFG vaut $G'G \times HF$. Or $GG' = GI \sin(\angle GIH)$.

Le segment GG' est maximum pour $\sin(\angle GIH)$ maximum soit $\sin(\angle GIH) = 1$, soit $\angle GIH$ angle droit. Dans ce cas GHEF est un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires, donc **GHEF est carré**.

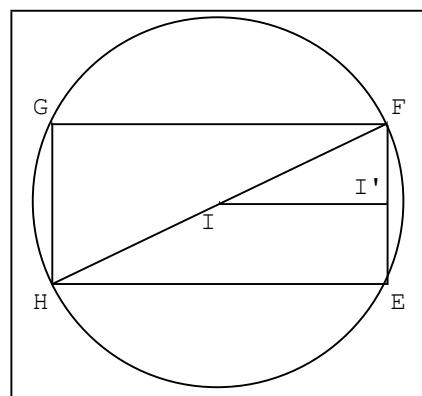
Commentaires sur cette démonstration

Cette démonstration s'appuie sur une heuristique qui n'est pas naturelle.

Pour calculer l'aire d'un rectangle l'idée naturelle est d'effectuer le produit de la longueur par la largeur. L'autre idée, diviser le rectangle en deux triangles puis prendre la hauteur GG' pour calculer l'aire, apparaît moins naturelle. Le fait de dessiner le rectangle avec un côté horizontal induit-il la première idée ? Le didacticien appelle figure prototype une figure qui induit une heuristique.

Démonstration par le calcul

L'idée est de définir la fonction f qui à $x = FE$ associe $f(x) = \text{aire du rectangle GFEH}$ et de déterminer pour quelles valeurs de x la fonction f admet un maximum. C'est un problème d'**optimisation** de la fonction f .



Soit $FE = x$ et I' projeté orthogonal de I sur le segment FE. On note R le rayon du cercle.

Dans le triangle FHE, où (II') droite des milieux est parallèle à (HE), d'après le théorème des milieux :

$$HE=2 \text{ I I}' \text{ et } FE=2 \text{ F I}'=x.$$

D'après le théorème de PYTHAGORE dans FEH,

$$HE^2=HF^2-FE^2=(2R)^2-x^2=4R^2-x^2.$$

L'aire $f(x)$ du rectangle vaut :

$$f(x)=HE \times EF=x\sqrt{4R^2-x^2}.$$

Le problème revient à étudier pour quelles valeurs de x l'aire $f(x)$ est un maximum, ou encore $(f(x))^2$ maximum (ce qui évite de traiter des expressions avec une racine carrée). En effet une quantité positive est maximum si et seulement si son carré est maximum.

La résolution de ce problème dépend des outils mathématiques dont disposent les élèves.

Cas d'un élève de première disposant des fonctions dérivées

Soit la fonction g définie par $g(x)=(f(x))^2=x^2(4R^2-x^2)=-x^4+4R^2x^2$.

$$g'(x)=-4x^3+8R^2x=-4x(x-\sqrt{2}R)(x+\sqrt{2}R).$$

Le tableau des variations de g est le suivant :

x	0	$\sqrt{2}R$	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$			

La fonction g admet donc un maximum pour

$$x=\sqrt{2}R.$$

Dans ce cas

$$HE^2=HF^2-FE^2=4R^2-x^2=2R^2 \text{ donc } HE=\sqrt{2}R.$$

Donc le rectangle GFEH est maximum lorsqu'il est carré.

Cas d'un élève de seconde ne disposant pas des fonctions dérivées

$$g(x)=(f(x))^2=x^2(4R^2-x^2)=-x^4+4R^2x^2.$$

L'étude de différents cas de rectangle amène à conjecturer que $g(x)$ est maximum lorsque le rectangle est carré c'est-à-dire pour $x=\sqrt{2}R$, soit $g(\sqrt{2}R)=4R^4$. Le problème se ramène à la résolution de l'inéquation :

$$g(x) \leq 4R^4 \quad (\text{mise en inéquation d'un problème}).$$

$$(g(x) \leq 4R^4) \Leftrightarrow (-x^4+4R^2x^2-4R^4 \leq 0) \Leftrightarrow (-(x^4-4R^2x^2+4R^4) \leq 0) \Leftrightarrow (-(x^2-2R^2)^2 \leq 0).$$

Cette inéquation est toujours vraie et $g(x)=4R^4$ pour $x^2-2R^2=0$ soit $x=\sqrt{2}R$ (car x positif). Le calcul fait ci-dessus montre que $HE=\sqrt{2}R$. **Le rectangle GFEH est donc maximum lorsqu'il est carré.**

Comparaison des heuristiques

La dernière démonstration semble davantage généralisable au problème de déterminer une aire maximum $f(x)$ dépendant d'une variable x , ce qui est un problème d'optimisation. Le problème est de trouver $f(x)$, ce qui est un problème de calcul. Ensuite il faut trouver un éventuel maximum de f , ce qui n'est pas toujours évident. Parfois on peut trouver des valeurs approchées de ce maximum.

Mais la première démonstration est également généralisable à un polygone inscrit dans un cercle et au problème de savoir quand son aire est maximale. Si HGF est un angle de ce polygone, d'après le raisonnement précédent l'aire est maximum lorsque G est milieu de l'arc HF . En tournant autour du polygone, on obtient que l'aire est maximale lorsque tout sommet G est milieu de l'arc HF formé par ses deux sommets voisins, ce qui revient à dire que le polygone est régulier.

5. Le problème de la pensée mathématique ²⁹

Dans le cadre d'une réflexion sur le raisonnement, il convient d'aborder également la question de la pensée. Ce faisant, il s'agit pour nous d'approfondir en même temps l'examen de l'esprit des mathématiques et le débat philosophique sur la nature de la pensée.

En un premier temps, nous centrerons la réflexion sur la thèse récente (et contestable) que "la science ne pense pas". Nous proposons d'aborder cette thèse en partant des observations faites sur la fonction heuristique du raisonnement (paragraphe 4) ; nous proposerons à partir de là, à titre d'exercice, une confrontation entre les réflexions de HEGEL sur les mathématiques et celles d'Alain BADIOU.

En un second temps, on pourra s'efforcer de préciser le lien et les différences entre la pensée et le calcul. Cet effort d'élucidation pourra se nourrir d'une information sur la démarche algébrique et sur la notion de structure en mathématique (et aussi en philosophie).

Enfin, en un troisième temps, on pourra s'interroger sur les places respectives de l'intuition et de la conceptualisation dans la pensée. Pour les philosophes, la lecture de KANT pourra servir de base de réflexion, réflexion qui pourra être éclairée par une information sur le passage, en mathématique, de la démonstration sur figure à l'analyse algébrique.

5.1. L'heuristique et la pensée mathématique

Nous avons vu (cf. §4. p. 41, la démonstration du théorème : "Tout triangle dont une médiane est confondue avec une bissectrice est isocèle") que le raisonnement mathématique ne fait pas que valider, mais consiste aussi, dans sa fonction heuristique, à rechercher les idées pour résoudre les problèmes, à découvrir (on pourrait dire inventer) les démarches à suivre.

Cette fonction heuristique est une des entrées dans la problématique de la "pensée mathématique". Nous proposons à ce sujet la lecture de la préface de la Phénoménologie de l'esprit de HEGEL, puis celle du Manifeste pour la philosophie et du Court traité d'ontologie transitoire d'Alain BADIOU.

²⁹ Contribution de Frédéric RUSCHER.

5.1.1. HEGEL et la pensée mathématique

HEGEL, *Phénoménologie de l'esprit*, Préface

« En ce qui concerne les vérités mathématiques, on tiendrait encore moins pour un géomètre celui qui connaîtrait par cœur les théorèmes d'Euclide, c'est-à-dire de l'extérieur, sans connaître leurs démonstrations, sans les avoir assimilés, comme on pourrait dire en jouant de l'opposition, de manière intérieure. Pareillement, on tiendrait pour non satisfaisante la connaissance, simplement acquise après avoir mesuré un grand nombre de triangles rectangles, des rapports mutuels bien connus qu'il y a entre leurs côtés. Pourtant, même dans la connaissance mathématique, le caractère essentiel de la démonstration est encore loin d'avoir pour signification et nature d'être un moment du résultat proprement dit : dans ce résultat, elle est au contraire quelque chose qui est passé et qui a disparu. En tant que résultat, le théorème est certes quelque chose qui est compris comme vrai par l'intelligence. Toutefois, cette circonstance vient s'ajouter et ne concerne pas son contenu, mais seulement le rapport au sujet; le mouvement de la démonstration mathématique ne ressortit pas à ce qui est objet, mais est une activité extérieure à la chose. C'est ainsi que la nature du triangle rectangle ne se décompose pas elle-même de la façon où on l'expose dans la construction nécessaire à la démonstration de la proposition qui exprime ces relations; toute la production du résultat est une démarche, un moyen de connaissance. - Dans la connaissance philosophique aussi, le devenir de l'existence en tant qu'existence est distinct du devenir de l'essence ou de la nature intérieure de la chose. Mais, premièrement, la connaissance philosophique contient l'un et l'autre devenir, au lieu que la connaissance mathématique n'expose que le devenir de l'existence, c'est-à-dire de l'être de la nature de la chose dans la connaissance en tant que telle. Et, deuxièmement, la connaissance philosophique réunit aussi ces deux mouvements particuliers. La genèse intérieure, ou encore, le devenir de la substance est un passage sans solution de continuité dans l'extérieur ou dans l'existence, dans l'être pour autre chose ; et à l'inverse, le devenir de l'existence est la reprise de soi dans l'essence. Le mouvement est ainsi le double processus et devenir du tout, où chacun pose en même temps l'autre et pour cette même raison a également chez lui-même l'un et l'autre, comme deux points de vue ; ensemble ils font le tout par le fait même qu'ils se dissolvent et font d'eux-mêmes des moments de ce tout.

Dans la connaissance mathématique, la compréhension par l'intelligence est une activité qui, pour la chose, est extérieure ; il s'ensuit que la chose vraie en est modifiée. C'est pourquoi le moyen, construction et démonstration, contient des propositions sans doute vraies; mais il faut dire tout aussi bien que le contenu est faux. Dans l'exemple ci-dessus, le triangle est mis en pièces, et ses différentes parties sont imputées à d'autres figures géométriques que la construction fait surgir sur ses côtés. C'est seulement à la fin qu'on reconstitue le triangle dont il est véritablement question, qu'on avait perdu de vue pendant toute la démarche, et qui ne se présentait qu'en morceaux appartenant à d'autres ensembles. - Nous voyons donc ici aussi entrer en jeu la négativité du contenu, qui mérite tout autant d'être appelée fausseté du contenu, que la disparition, dans le mouvement du concept, des notions auxquelles on croyait fermement.

Mais la défectuosité proprement dite de cette connaissance concerne aussi bien la connaissance elle-même que sa matière en général. - Pour ce qui est de la connaissance, on ne voit pas bien, pour commencer, la nécessité de la construction. Elle ne procède pas du concept de théorème, mais est un ordre qui nous est intimé, et il nous faut obéir aveuglément à la prescription qui enjoint de tracer précisément ces lignes-là, quand on pourrait à l'infini en tracer d'autres, sans détenir d'autre savoir que la bonne croyance que cela sera approprié pour la conduite de la démonstration. Après quoi, cette appropriation se montre bien,

effectivement, mais ce n'est qu'une appropriation extérieure puisqu'elle se montre seulement après coup, dans la démonstration. - De la même manière, celle-ci suit une voie qui commence n'importe où, sans qu'on sache encore selon quelle relation avec le résultat qui doit en sortir. Elle adopte dans son cours telles et telles déterminations et relations, et en laisse tomber d'autres, sans qu'on voie immédiatement en fonction de quelle nécessité; c'est une fin extérieure qui régit ce mouvement.

L'évidence de cette connaissance défectueuse dont les mathématiques sont fières, et qu'elles arborent du reste aussi pour plastronner face à la philosophie, ne repose que sur la pauvreté de leur fin et sur le caractère défectueux de leur matière, et ressortit donc à une espèce que la philosophie ne peut que dédaigner. - La fin qu'elles visent, ou encore, leur concept est la grandeur. C'est-à-dire exactement le rapport inessentiel, sans concept. C'est pourquoi le mouvement du savoir se déroule à la surface, ne touche pas la chose même, ne touche pas l'essence ou le concept, et pour cette raison, n'est pas un concevoir. - La matière à propos de laquelle les mathématiques avèrent ce réjouissant trésor de vérités est l'espace et l'Un. L'espace est l'existence dans laquelle le concept inscrit ses différences comme en un élément vide et mort, où elles sont tout aussi bien immobiles et sans vie. L'effectif n'est pas, comme on le considère en mathématiques, une spatialité. Ni la contemplation sensible concrète, ni la philosophie ne peuvent se satisfaire de cette ineffectivité qui est celle des choses des mathématiques. Dans ce genre d'élément ineffectif il n'y a aussi, au demeurant, que du vrai ineffectif c'est-à-dire que des propositions fixées, mortes; on peut s'arrêter à chacune d'entre elles; la suivante recommence pour soi de nouveau sans que la première se soit elle-même transportée jusqu'à la suivante, et sans que de la nature clé la chose même soit née ainsi, de cette manière, une connexion nécessaire. - De la même façon, en raison de ce principe et élément - et c'est en cela que consiste la dimension formelle de l'évidence mathématique - le savoir court le long de la ligne de l'identité. Ce qui est mort, en effet, ne se mouvant pas soi-même, ne parvient pas à des différences d'essence, ne parvient pas à l'opposition ou à la non-identité essentielle, ni donc non plus au passage de l'opposé dans l'opposé, au mouvement qualitatif, immanent, au mouvement autonome. Car c'est uniquement la grandeur, la différence inessentielle, que les mathématiques considèrent. Elles font abstraction du fait que c'est le concept qui scinde l'espace en ses dimensions et qui détermine les liaisons de celles-ci et au sein de celles-ci. Elles n'examinent pas, par exemple, le rapport de la ligne à la surface; et quand elles comparent le diamètre du cercle à son périmètre, elles se heurtent à leur incommensurabilité, c'est-à-dire à un rapport de concept, à un infini qui échappe à leur définition.

Les mathématiques immanentes, les mathématiques dites «pures », ne posent pas non plus le temps en tant que temps face à l'espace, comme la deuxième matière de leur examen. Certes, les mathématiques appliquées traitent du temps, ainsi que du mouvement et d'autres choses effectives encore, mais les propositions synthétiques qu'elles adoptent - c'est-à-dire les propositions quant à leurs rapports déterminées par leur concept - sont celles qu'elles trouvent dans l'expérience, et elles se contentent d'appliquer leurs formules à ces présupposés. Le fait même que les « démonstrations » qu'elles donnent fréquemment de ce genre de propositions, comme par exemple de celle de l'équilibre du levier, du rapport du temps et de l'espace dans le mouvement de la chute des corps, etc., soient données et acceptées comme des démonstrations, est simplement une démonstration de l'importance du besoin de démonstration pour la connaissance, puisque celle-ci, lorsqu'elle n'a pas mieux, prend aussi en considération les semblants vides de démonstration et y trouve motif à satisfaction. Une critique de ces démonstrations serait tout aussi étonnante qu'instructive, d'une part, pour débarrasser les mathématiques de tout ce faux décorum, d'autre part, pour montrer leurs limites, et, par là même, la nécessité d'un autre savoir. - En ce qui concerne le temps, dont on devrait se dire qu'en qualité de protagoniste faisant face à l'espace, il constitue la matière de la deuxième

partie des mathématiques pures, il est le concept même existant lui-même. Le principe de grandeur, de différence sans concept, et celui d'identité, de l'unité abstraite et sans vie, ne sont pas en mesure de se saisir de la pure agitation inquiète de la vie, ni de la différenciation absolue. C'est pourquoi cette négativité ne devient que dans la paralysie, c'est-à-dire, en tant que l'Un, une deuxième matière de cette connaissance qui, en ce qu'elle agit de manière extérieure, rabaisse ce qui se meut de soi-même au niveau d'une matière, afin d'avoir en celle-ci un contenu indifférent, extérieur, et sans vie.

La philosophie, en revanche, n'examine pas de détermination inessentielle ; elle examine la détermination dans la mesure où elle est détermination essentielle. Son élément et contenu, ce n'est pas l'abstrait ou l'ineffectif, mais l'effectif, ce qui se pose soi-même et vit en soi-même, l'existence dans son concept. C'est le procès qui se produit ses propres moments et les parcourt de bout en bout, et ce mouvement tout entier constitue le positif et la vérité de ce positif. Cette vérité inclut donc tout aussi bien le négatif en soi, cela même qu'on appellerait le faux, si on pouvait le considérer comme quelque chose dont il faut faire abstraction. Or, c'est au contraire l'évanescence lui-même qu'il faut considérer comme essentiel, et non pas dans la détermination d'une chose quelconque solidement établie, qu'il faudrait laisser tomber, une fois coupée du vrai, à l'extérieur de ce vrai, on ne sait trop où, de même qu'il ne faut pas non plus considérer le vrai comme le positif mort qui repose de son côté. L'apparition est le naître et disparaître, qui lui-même ne naît ni ne disparaît, mais est en soi, et constitue l'effectivité et le mouvement de la vie de la vérité. En sorte que le vrai est le vertige bachique, dans lequel il n'est pas un seul membre qui ne soit ivre, et parce que chaque membre, en se détachant, se dissout aussi immédiatement - ce vertige est tout aussi bien le repos transparent et simple. Certes, au tribunal de ce mouvement, les figures singulières de l'esprit, tout comme les pensées déterminées, ne pérennent pas durablement, mais, tout aussi bien qu'elles sont négatives et évanescences, elles sont aussi des moments nécessaires positifs. - Dans le tout du mouvement, si on l'appréhende comme repos, ce qui en lui se distingue et se donne une existence particulière est gardé comme quelque chose qui se souvient, dont l'existence est le savoir de soi-même, de même que ce savoir est tout aussi immédiatement existence. »

HEGEL, dans la Préface de la Phénoménologie de l'esprit, attaque la démonstration mathématique.

D'abord, selon lui, dans le devenir de la démarche démonstrative l'objet serait démembré : ses parties deviennent des parties d'autres éléments (par exemple, dans le cas de notre démonstration, un côté du triangle devient médiane du parallélogramme, un demi angle devient un angle alterne-interne -formé par la sécante de deux parallèles-,...). Pour HEGEL le contenu est devenu faux, au sens où on ne traite plus de l'objet triangle et de ses éléments, mais d'autres figures et éléments.

Ensuite, selon HEGEL, la connaissance serait arbitraire : "On ne se rend pas compte... de la nécessité de la construction", "on doit obéir en aveugle à la prescription de tirer des lignes particulières quand on pourrait en tirer une infinité d'autres".

Fondamentalement pour HEGEL, le "mouvement de la démonstration mathématique n'appartient pas au contenu de l'objet, mais est une opération extérieure à la chose". Par opposition, la connaissance philosophique envelopperait le devenir de la chose elle-même ; elle retiendrait à la fois le processus de démonstration et le devenir de l'essence même de la chose. Ainsi, contrairement à la démonstration mathématique, la pensée philosophique -qui est par cela authentiquement pensée- entrerait dans le devenir de son objet, en exposerait l'essence même en épousant le déploiement de celle-ci.

La démarche mathématique se voit reprocher de séparer l'essence et les procédures sur cette essence. C'est dire que les mathématiques ne penseraient pas vraiment ; au minimum il faudrait dire que le but et la matière de cette pensée sont pauvres. Le but est pauvre, car la mathématique ne s'occupe que de la grandeur ("le concept de la mathématique est la grandeur") ; or ainsi la mathématique ne touche pas la chose même, son essence... ni même son concept qui n'est alors qu'une abstraction, c'est-à-dire au sens de HEGEL une réalité diminuée, tronquée. Quant à la matière de la "pensée" mathématique elle est pauvre parce que l'espace, dit HEGEL, est l'Un, mais une unité morte et vide ; en effet, ainsi qu'il a été dit, la vérité des exposés mathématiques n'est pas celle du mouvement même des choses qui se développent selon leur logique interne, l'ordre rationnel propre à leur être, et l'espace géométrique n'est qu'un cadre abstrait. La démarche et la vérité mathématiques sont alors réduites à l'abstraction (donc l'insuffisance) de formes mortes, dans lesquelles on construit arbitrairement (le mouvement, l'effectivité venant de l'extérieur).

5.1.2. BADIOU et la pensée mathématique comme ontologie

BADIOU, *Manifeste pour la philosophie*, Court Traité d'ontologie transitoire.

« Puisqu'il s'agit en définitive, posant que la mathématique est une pensée, d'en venir à la pensée de cette pensée, il est pertinent de pointer les moments où la mathématique semble convoquée à se penser elle-même, à dire ce qu'elle est. Ces moments, on le sait, reçoivent le nom conventionnel de « crises », voire de « crises des fondements ».

Ainsi de la crise des irrationnels dans la mathématique dite pythagoricienne, ou de la crise liée aux « paradoxes » de la théorie des ensembles à la fin du siècle dernier, puis aux divers théorèmes de limitation des formalismes découverts dans les années trente. Il y a eu aussi une crise autour du maniement anarchique des infiniment petits au début du XVIII^e siècle, et une autre relative à la géométrie, avec la découverte du caractère indécidable du postulat d'Euclide sur les parallèles.

On a discuté la question de savoir si ces crises étaient intérieures à la mathématique, ou plutôt strictement philosophiques, en important dans le débat entre mathématiciens des options de pensée liées à l'existence de ce que Louis Althusser appelait la « philosophie spontanée des savants ». Althusser soutenait qu'il n'y avait dans les sciences aucune espèce de crise. Il y avait certes des discontinuités, de brusques remaniements qualitatifs. Ces moments étaient de progrès et de création, nullement d'impasse ou de crise. Mais, à l'occasion de ces ruptures, s'engageaient inéluctablement, y compris dans les milieux scientifiques concernés, des luttes de tendances philosophiques, dont l'enjeu était en réalité de redresser la façon dont les courants philosophiques se servent des sciences pour leurs fins propres, lesquelles, en dernier ressort, sont politiques.

Nous partons du constat suivant: il y a des moments singuliers où la mathématique semble requise, au regard de ses propres buts, de penser sa pensée. En quoi consiste cette opération? Tout se joue en fait autour de quelques énoncés sur lesquels la pensée mathématique bute, comme s'ils étaient dans son propre champ la signature de l'impossible.

Ces énoncés sont clairement de trois types :

- Soit il s'agit d'une contradiction formelle, tirée déductivement d'un ensemble de présupposés dont cependant l'évidence et la cohésion semblaient indubitables. C'est la butée sur le paradoxe. Ainsi de la théorie formelle des classes, dans le style de Frege, qui achoppe sur le paradoxe de Russell. L'évidence ici contrainte à l'impossible est celle qui assigne à une propriété quelconque l'ensemble des termes qui possèdent cette propriété. Rien de plus clair que cette doctrine de l'extension d'un concept; et cependant, comme une épreuve réelle, vient le cas qui affecte cette évidence d'une inconsistance intrinsèque.

- Le deuxième cas est celui où une théorie établie se voit, en un point, diagonalisée par une exception, ou un excès, qui contraint à ne tenir cette théorie, qu'on croyait absolument générale, que pour régionale, voire tout à fait particulière ou restreinte. Ainsi de la démonstration de ce que la diagonale d'un carré est incommensurable à son côté, si on entend par mesure un nombre rationnel. L'évidence de l'assignation à tout rapport saisissable d'une paire de nombres entiers assurait pour les pythagoriciens la réciprocité de l'être et du nombre. Elle est ruinée démonstrativement par un rapport géométrique en excès sur toute paire de nombres entiers qu'on prétendrait lui assigner comme mesure. Il faut donc repenser la pensée où se déployait la numéricité essentielle de l'être, et donc repenser la pensée mathématique comme telle.

- Enfin, le troisième cas est celui où un énoncé inaperçu est isolé comme condition de résultats tenus pour certains, alors que, pris en lui-même, cet énoncé semble insupportable au regard des normes partagées quant aux constructions de la pensée mathématique. Ainsi de l'axiome du choix. Les grands analystes français de la fin du siècle dernier en faisaient implicitement usage dans leurs propres démonstrations; mais son explicitation formelle leur parut excéder absolument ce qu'ils acceptaient quant au maniement de l'infini; et surtout, ils y virent une transgression illégitime de la vision constructive qu'ils se faisaient des opérations de la pensée mathématicienne. L'axiome du choix revient en effet à admettre un ensemble infini absolument indéterminé, dont l'existence est affirmée, alors qu'il est langagièrement indéfinissable et, dans la procédure, inconstructible.

On peut donc soutenir que la pensée mathématique revient sur elle-même sous la contrainte d'une butée réelle, ou du surgissement nécessaire, dans son champ, d'un point d'impossible. Cette butée est de l'ordre du paradoxe, qui fait venir l'inconsistance; de la diagonale, qui fait venir l'excès; ou du pointage d'un énoncé latent, qui fait venir l'indéfini et l'inconstructible.

Quelle est alors la nature de cette torsion sur elle-même de la mathématique, sous l'injonction de sa butée intérieure ?

Ce qui monte à la surface concerne ce qui, de l'ordre de la pensée mathématique, relève de l'acte, ou de la décision; et dans le même mouvement, il faut prendre position, puisqu'on est, si je puis dire, au pied de l'acte, sur la norme de la décision qu'il accomplit.

Or, dans tous les cas, dans cette obligation de décider, c'est de l'être qu'il s'agit; ou du mode sur lequel la mathématique assume pour son propre compte l'énoncé de Parménide : « Le même, lui, est à la fois penser et être. »

Reprenons nos exemples. Pour les Grecs, sous l'injonction de l'incommensurable réel, c'est à la décision d'un autre nouage de l'être et du nombre, du géométrique et de l'arithmétique, que la pensée est astreinte, décision dont le nom propre est Eudoxe. Face au paradoxe de Russell, c'est à une restriction des pouvoirs de la langue sur la détermination du multiple pur qu'il faut se résoudre, décision dont le nom propre est Zermelo. Et quant à l'axiome du choix, c'est à une abrupte décision sur l'infini actuel indéterminé qu'il appelle la pensée, décision qui du reste divise durablement les mathématiciens.

Dans tous les cas, il s'agit de décider en quel sens, et selon la disposition immanente de quelles limites, la pensée mathématique est coextensive à l'être dont sa consistance se soutient.

Nous dirons donc qu'au moment où la mathématique bute sur le paradoxe et l'inconsistance, la diagonale et l'excès, ou encore sur une condition indéfinie, elle en vient à penser ce qui, dans sa pensée, est de l'ordre d'une décision ontologique. Il s'agit proprement d'un acte, qui engage durablement le réel d'être dont elle assumera d'établir les connexions et les configurations. Mais, confrontée ainsi à sa dimension décisive, la mathématique ne peut qu'être en proie à la question de sa norme, et plus particulièrement: de la norme de ce que la pensée est en état de soutenir comme assertion d'existence. Faut-il faire venir à l'existence des nombres dont le principe n'est plus la composition d'unités ? Faut-il admettre qu'existent

des ensembles infinis actuels non dénombrables ? Dans quelles conditions peut-on garantir qu'un concept bien formé admet une extension identifiable ? Comment se nouent l'assertion d'existence et le protocole de construction ? Peut-on admettre qu'existe une configuration intelligible dont il soit impossible d'exhiber un seul cas ? On va trancher ces questions selon une norme immanente qui ne constitue pas la pensée, mais l'oriente.

Nous appellerons orientation dans la pensée ce qui règle dans cette pensée les assertions d'existence. Soit ce qui, formellement, autorise l'inscription d'un quantificateur existentiel en tête d'une formule qui fixe les propriétés qu'on suppose à une région d'être. Ou ce qui, ontologiquement, fixe l'univers de la présentation pure du pensable.

Une orientation dans la pensée s'étend non seulement aux assertions fondatrices, ou aux axiomes, mais aussi aux protocoles démonstratifs, dès que leur enjeu est existentiel. Admettra-t-on, par exemple, qu'on puisse affirmer une existence de cela seul que l'hypothèse d'inexistence conduit à une impasse logique ? C'est le ressort du raisonnement par l'absurde. L'admettre ou non relève, exemplairement, de l'orientation dans la pensée, classique si on l'admet, intuitionniste si on ne l'admet pas. La décision porte alors sur ce que la pensée détermine en elle-même comme voie d'accès à ce qu'elle déclare exister. L'acheminement vers l'existence oriente le cheminement discursif.

Il est à mon sens erroné de dire que deux orientations différentes prescrivent deux mathématiques différentes, soit deux pensées différentes. C'est à l'intérieur d'une pensée unique que s'affrontent les orientations. Aucun mathématicien classique n'a jamais mis en doute la mathématicité reconnaissable de la mathématique intuitionniste. Dans tous les cas, il s'agit de l'identité foncière de la pensée et de l'être. Mais l'existence, qui est à la fois ce que la pensée déclare et ce dont l'être garantit la consistance, est prise selon des orientations différentes. C'est qu'on peut appeler existence ce à propos de quoi décision et rencontre, acte et découverte sont indiscernables. Les orientations dans la pensée visent de façon singulière les conditions de cette indiscernabilité.

On dira donc qu'il y a des moments où la mathématique, butant sur un énoncé qui atteste en un point la venue de l'impossible, se retourne sur les décisions qui l'orientent. Elle saisit alors sa propre pensée, non plus selon son unité démonstrative, mais selon la diversité immanente des orientations dans la pensée. La mathématique pense son unité comme intérieurement exposée à la multiplicité des orientations dans la pensée. Une « crise » de la mathématique est un moment où elle est astreinte à penser sa pensée comme multiplicité immanente de sa propre unité.

C'est en ce point, je crois, et en ce point seulement, que la mathématique, c'est-à-dire l'ontologie, fonctionne comme condition de la philosophie. Disons ceci : la mathématique se rapporte à sa propre pensée selon son orientation. Il revient à la philosophie de poursuivre ce geste, par une théorie générale des orientations dans la pensée. Que toute pensée ne puisse penser son unité que comme exposition à la multiplicité (le ce qui l'oriente, c'est là ce dont la mathématique elle-même ne peut rendre compte, mais c'est aussi ce qu'elle manifeste exemplairement. Le rapport complet de la pensée mathématique à sa propre pensée suppose que la philosophie, sous condition des mathématiques, traite la question : qu'est-ce qu'une orientation dans la pensée ? Et plus encore : qu'est-ce qui impose que l'identité de l'être et de la pensée s'effectue selon une multiplicité immanente d'orientations ? Pourquoi faut-il toujours décider quant à ce qui existe ? Car tout le point est que l'existence n'est nullement la donation première. L'existence est précisément l'être même, pour autant que la pensée le décide. Et cette décision oriente essentiellement la pensée.

*Il faudrait donc disposer d'une théorie des orientations dans la pensée, comme territoire réel de ce qui peut activer la pensée de la mathématique comme pensée. J'ai, pour mon propre compte, proposé de ce point un traitement sommaire dans *L'Etre et l'Événement*, et je ne peux ici revenir sur sa substructure technique. On y repère trois orientations majeures,*

identifiables simultanément dans les moments de crise de la mathématique, et dans les remaniements conceptuels de la philosophie. Ces orientations sont l'orientation constructiviste, l'orientation transcendante, l'orientation générique.

La première norme -l'existence par des constructions explicites et, en définitive, subordonne le jugement d'existence à des protocoles langagiers finis et contrôlables. Disons que toute existence se soutient d'un algorithme, qui permet d'atteindre effectivement un cas de ce dont il s'agit.

La deuxième, la transcendante, norme l'existence par l'admission de ce qu'on peut appeler une surexistence, ou un point de bouclage hiérarchique qui dispose en deçà de lui-même l'univers de tout ce qui existe. Disons que, cette fois, toute existence s'inscrit dans une totalité qui lui assigne une place.

La troisième pose que l'existence est sans norme, sinon la consistance discursive. Elle privilégie les zones indéfinies, les multiples soustraits à toute récollection prédicative, les points d'excès et les donations soustractives. Disons que toute existence est prise dans une errance qui fait diagonale pour les montages supposés la surprendre.

Il est assez clair que ces trois orientations sont, métaphoriquement, de nature politique. Poser que l'existence doit se montrer selon un algorithme constructif, ou qu'elle est prédisposée dans un Tout, ou qu'elle est une singularité diagonale, cela oriente la pensée selon une acception chaque fois particulière de ce qui est, « ce qui est » étant ici pensé à partir de la décision d'existence. Soit ce qui est est ce dont il y a un cas; soit ce qui est est une place dans un Tout; soit ce qui est est ce qui se soustrait à ce qui est. On pourrait dire : politique des particularités empiriques, politique de la totalité transcendante, politique des singularités soustraites. Disons, pour faire court - les démocraties parlementaires, Staline, et, sans doute, ce qui se déclare un peu à tâtons aujourd'hui, une politique générique, une politique de l'existence comme soustraction à l'État, ou de ce qui existe seulement de n'être pas calculable. Il est magnifique que ces trois orientations soient mathématiquement lisibles, à seulement s'en tenir à la théorie des ensembles. La doctrine des ensembles constructibles de Gödel donne une solide assise à la première, la théorie des grands cardinaux à la seconde, la théorie des ensembles génériques à la troisième.

Mais bien d'autres exemples plus récents nous montreraient comment toute avancée mathématique finit par exposer, dans l'unicité contingente de son mouvement, les trois orientations. Tout mouvement réel est aussitôt la présentation, au point d'être qui y convoque la pensée, des trois orientations. Tout mouvement réel confronte la triplicité formelle des décisions d'existence.

On en retiendra ce point, qui est d'un grand secours dans toutes les situations concrètes : aucune querelle sérieuse entre dispositifs de pensée n'oppose des interprétations à propos d'une existence par tous reconnue. C'est l'inverse qui est vrai : c'est sur l'existence même que l'accord ne se fait pas, car c'est là ce qui fut décidé. Toute pensée est polémique. Mais il ne s'agit nullement d'un conflit des interprétations. Il s'agit d'un conflit des jugements d'existence. C'est pourquoi aucun conflit véritable dans la pensée n'admet de solution; le consensus est l'ennemi de la pensée, car il prétend que nous partageons l'existence. Mais l'existence est justement, au plus intime de la pensée, l'impartageable.

La mathématique a cette vertu de ne présenter aucune interprétation. Le réel ne s'y montre pas selon le relief des interprétations disparates. Il s'y démontre comme dépourvu de sens. De là que, quand la mathématique se retourne sur sa propre pensée, c'est à nu qu'elle expose les conflits d'existence, et elle nous donne à penser que toute saisie de l'être suppose, quant à l'existence, une décision qui, sans garantie ni arbitrage, oriente décisivement la pensée.

L'éloge par Lautréamont des « mathématiques sévères » est bien ajusté. Ce qu'il y a de sévère n'est pas tant le formalisme, ou l'enchaînement démonstratif, que la mise à nu d'une maxime

de pensée qu'on pourrait formuler ainsi : c'est quand tu décides ce qui existe que tu noues ta pensée à l'être. Mais tu es alors, inconscient de l'être, sous l'impératif d'une orientation. »

5.1.2.1. Eclairage du problème par la notion de structure

En vue d'un dialogue critique et formateur avec la pensée hégélienne (sur la question de la pensée mathématique, en même temps que sur les sens et le statut de la réflexion philosophique), on pourra notamment interroger la notion de Structure telle qu'elle se trouve en mathématiques. Pour cela, on pourra se reporter aux informations apportées par le document sur les Structures mathématiques (Chapitre VII).

La présentation de structures permettait de conclure qu'en mathématiques, pour résoudre des problèmes, répondre à des situations, il faut en examiner l'organisation formelle (et en mathématiques on dira alors qu'un ensemble est muni d'une structure si tous ses éléments sont soumis à une liste de lois -dont les propriétés sont prises comme axiomes-). Lorsque dans deux ou plusieurs situations on peut retrouver la même organisation formelle (la même structure), on saura que leur traitement peut être formellement le même et en termes mathématiques on dira que lorsque des ensembles sont soumis à une même liste de lois ils sont isomorphes.

Pour le dialogue avec la pensée hégélienne, il est pertinent de noter que si les structures sont aperçues d'abord dans des situations concrètes, l'élaboration mathématique s'intéressera à ces structures en tant que telles, en les vidant de leur contenu concret. Alors, dans une structure, seuls interviennent les axiomes des lois la définissant. Ces axiomes sont indépendants, détachés de la nature des éléments considérés, et les mots, signes et termes qui interviennent dans la rédaction des axiomes sont dépouillés des significations qu'ils peuvent avoir dans le langage courant. De sorte que, d'après D. HILBERT "au lieu de points, droites ou plans, on pourrait sans inconvénient dire tables, chaises ou verres de bière".

Cette formule fameuse de HILBERT est à rapprocher de la boutade de B. RUSSEL : "Les mathématiques sont une science où l'on ne sait pas de quoi on parle, et où l'on ne sait pas si ce qu'on dit est vrai". Les deux formules rappellent que les mathématiques n'affirment rien quant à l'existence de telle ou telle chose réelle (elles ne disent pas que le monde est composé de ceci ou de cela...), mais qu'elles ont pour objet les structures qui peuvent se retrouver dans les situations réelles.

En fait, le statut de ces structures est triple dans le temps : 1) Historiquement les structures - les premières- ont d'abord été pensées au contact des situations réelles, où en cherchant des solutions on a été attentif à des isomorphismes. 2) Comme objets purement mathématiques, ces structures sont ensuite manipulées par le mathématicien, dépouillées des significations qu'elles avaient dans les situations concrètes : on ne sait plus alors "de quoi on parle". 3) Mais pratiquement on peut ajouter que grâce à ces structures mathématiques, l'esprit pourra revenir mieux armé vers le réel, pour mieux l'inspecter.

Ontologiquement parlant, on dira que le statut des structures est double : ce sont des concepts opératoires manipulés à l'aide de signes -et à la limite certains en feraient de purs graphes sans signifié- et ce sont des réalités idéelles visées grâce à un langage ; on pourra pour ce débat se référer aux études de J.-T. DESANTI dans La Philosophie silencieuse, lorsqu'il écrit que "les mathématiques ne sont ni du ciel ni de la terre" ou aux réflexions de A. BADIOU dans son Court Traité d'ontologie transitoire, où les objets mathématiques sont présentés comme des "quasi-objets", étant précisé qu' "En mathématiques, l'acte qui manque aux objets fait retour du côté du sujet", en d'autres termes que l'objet mathématique est (et même est au sens fort du terme) au moins pour la pensée.

5.1.2.2. En mathématique "ce qui compte ce sont les relations" (Bourbaki, livre II)

En relation avec l'étude qui a été consacrée aux nombres (chapitre III) l'étude de la notion de structure (chapitre VII) devrait aussi permettre de voir qu'en mathématique l'esprit va de l'intuitif au formel, et de l'étude des "êtres" à celle des relations. Il sera important de se reporter à ces documents et aux exemples donnés pour éclairer le débat autour de la "pauvreté" ou de l' "abstraction" de la pensée mathématique, pour

- comprendre et illustrer comment sont élaborés puis développés les concepts et les théories mathématiques. L'examen de la notion de structure montre notamment comment des formes qui à l'origine avaient un contenu concret ou 'intuitif' bien déterminé ont pu être vidées de ce contenu pour leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance. Ainsi, si localement on utilisait correctement les nombres au 19^{ème} siècle, on rencontrait cependant des situations traitées comme relevant de problèmes différents, alors qu'elles relevaient de la même structure. Pour unifier des situations qui d'abord paraissaient différentes, pour une bonne mise en ordre des théories et pour mettre en évidence les raisons profondes des résultats, la notion de structure s'est alors avérée l'outil essentiel,
- poser la question de l'être des objets mathématiques et celle de l'essence même de la mathématique (en montrant comment, dans l'histoire des mathématiques, l'accent est déplacé de l'étude des "êtres" mathématiques à celle des relations).

Pour orienter la réflexion dans ce sens, on pourra commenter deux textes de BOURBAKI, qui précisent l'intérêt et le sens mathématique de la notion de structure.

« C'est la possibilité des extensions successives du calcul qui restait le même, alors que la nature des êtres mathématiques soumis à ces calculs variait considérablement, qui a permis de dégager peu à peu le principe directeur des mathématiques modernes. Les êtres mathématiques importent peu : ce qui compte ce sont les relations auxquelles ils sont soumis » (Livre 11, 1942).

« On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une structure mathématique. Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature n'est pas spécifiée ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les axiomes de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute hypothèse sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur "nature" Propre) » (L'Architecture des mathématiques, 1948).

La lecture de BOURBAKI rappelle qu'élaborer des structures mathématiques, c'est élaborer des relations s'appliquant à des ensembles d'éléments. Pour définir la notion de structure, l'élaboration préalable du langage des ensembles sera donc primordiale. Et il faudra considérer que les mots, signes et termes qui interviennent dans la rédaction des axiomes sont dépouillés des significations qu'ils peuvent avoir dans le langage courant. A ce propos nous introduirons et commenterons plus loin la formule fameuse de D. HILBERT : "au lieu de points, droites ou plans, on pourrait dire sans inconvénient tables, chaises ou verres de bière".

5.1.2.3. Le problème de l'abstraction (d'un point de vue pédagogique)

Dans cette perspective on pourra revenir sur ce qui est sans doute une méprise concernant le caractère abstrait (abstrait cette fois au sens d'abord banal du terme) des mathématiques.

Il y aura lieu bien sûr -et c'est l'objet de la réflexion menée sur les mathématiques tout au long des exemples et illustrations qui sont donnés dans ce travail- de réfléchir à la nature de l'objet mathématique, et en particulier au passage des contenus concrets -perception de situations prises dans la réalité vécue au quotidien- à des conceptions formelles vidées de tout contenu concret (au sens qui vient d'être rappelé dans la partie précédente) : il s'agit là d'une question philosophique fondamentale, mettant en jeu celle de l'essence de la connaissance et de l'essence du connu.

Mais si on se place au plan de la pédagogie, disons du vécu du maître et surtout de celui de l'élève³⁰, si on se place là où apparaît le plus souvent l'observation (ou la plainte) : "C'est trop abstrait", on peut faire remarquer que celle-ci est très largement dépendante de la façon dont les objets mathématiques sont présentés et vécus. On peut les présenter en partant de situations réelles, concrètes (c'est ce que nous proposerons de faire dans notre partie "Approche de la notion", mais également dans la suite chaque fois que cela nous apparaîtra possible), et montrer comment, pour qui est confronté à un problème, la recherche de solutions et la manipulation des situations conduit tout naturellement -si l'on est curieux et désireux de trouver la solution- à mettre en oeuvre et à dégager des "formes" qui seront progressivement "polies", cernées de façon de plus en plus rigoureuse. Par ce mode de présentation, l'élève se familiarisera progressivement avec les formes mathématiques ; à proprement parler, il étendra son domaine de familiarité : les formes mathématiques, vues d'abord dans les situations concrètes familières, lui paraîtront bientôt aussi familières que les situations où il les avait d'abord découvertes et vues. C'est sans doute en ce sens que Paul LANGEVIN, à propos de la querelle de l'abstraction, disait que "le concret c'est de l'abstrait devenu familier par l'usage" : un concept, une forme mathématiques seront vécus comme concrets dès lors qu'ils seront devenus familiers, notamment dans une démarche d'extension du domaine des activités familières.

5.1.2.4. "La mathématique est une pensée" (Alain BADIOU, Court traité d'ontologie transitoire)

On pourra, à partir de textes venant par exemple d'A. BADIOU, repenser la question (fondamentale cette fois) de savoir si faire des démarches mathématiques c'est penser.

En relation avec ces textes on pourra se demander si le chemin de l'élaboration des concepts mathématiques n'est pas au sens le plus fort du terme du penser, c'est-à-dire :

- déployer la curiosité, d'entrer dans une démarche d'exploration et, emporté dans ce mouvement, de se doter petit à petit d'instruments de plus en plus affinés et de plus en plus féconds. Il s'agirait tout bonnement de vivre l'esprit en acte : là où une situation fait problème, résiste d'abord à la pénétration, c'est-à-dire à la compréhension, il s'agirait d'affiner l' "inspection par l'entendement". Et là où l'élève, et peut-être le professeur, ne voyaient pas pourquoi on enseignait ces "machins abstrus", on pourrait ressaisir le sens profond de la pensée mathématique : la pensée se construit en construisant les démarches et outils permettant de voir "clairement et distinctement", de pénétrer toujours plus

³⁰ Et cette problématique ne se confond nullement avec la précédente, la distance entre les deux étant comme celle qui sépare les observations empiriques et la réflexion transcendantale ou, si on préfère, comme la différence entre une étude psychologique des démarches et vécus de l'acquisition des connaissances et la réflexion sur les conditions de possibilité d'une expérience ou plus généralement d'un savoir.

finement les problèmes dans leur infinie variété. C'est ici qu'on pourra méditer, entre autres, les pages qu'Alain BADIOU consacre à la pensée mathématique dans son Manifeste pour la philosophie (1989), et tout récemment dans son Court traité d'ontologie transitoire (1998),

- d'approfondir, dans le même geste, la réflexion sur la pensée ; car ce n'est qu'en pensant, en déployant les ressources de l'esprit en s'efforçant d'être le plus rigoureux possible, que l'on peut valablement penser à ce qu'est la pensée. A partir de là pourrait se lire aussi la célèbre formule de PLATON : "Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre", non pas pour dire essentiellement que l'exercice des mathématiques nous entraîne à l'ascèse de la pensée idéale, mais pour dire que la démarche mathématique, comprise comme démarche d'exploration et de constructions de concepts formels de plus en plus efficaces et élégants, est un modèle de curiosité active et de démarche rigoureuse, et en cela une pratique de pensée idéale pour qui souhaite penser sur la pensée.

5.2. Calculer et penser

Dans le raisonnement mathématique, l'idéal à atteindre est une démonstration rigoureuse : en appelant "calcul" un jeu rigoureusement réglé de signes, l'idéal du raisonnement mathématique serait le calcul.

5.2.1. La "nouvelle caractéristique" de LEIBNIZ

LEIBNIZ, *Lettre à Christian Huyghens* du 8 septembre 1679

« Je ne suis pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geométrie. C'est pour quoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geométrique lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algeèbre exprime magnitudinem. Et je crov d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit représenter des figures et mesme des machines et mouvemens en caractères, comme l'Algebre représente les nombres ou grandeurs; et je vous envoie un essay qui me paroist conisiderable).*

J'ay trouvé quelques élémens d'une nouvelle caracteristique³¹, tout à fait différente de l'Algebre, et qui aura des grands avantages pour représenter à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figures, tout ce qui depend de l'imagination. L'algebre n'est autre chose que la caracteristique des nombres indeterminés ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géométriques assez commodés, lors même que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle caracteristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en même temps la solution et la construction et la demonstration géométrique, le tout d'une maniere naturelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes déterminées [...].

Mais l'utilité principale consiste dans les cousequences et raisonnemens, qui se peuvent faire par les operations des caracteres, qui ne se sçauroient exprimer par des figures (et encor

³¹ Ici « caractéristique » veut dire à la fois « codage » et « modèle » au sens actuel (comme on parle du « modèle » de BOHR c'est-à-dire la représentation de la structure d'un atome par un proton autour duquel tourne un électron.

moins par des modèles) sans les trop multiplier, ou sans les brouiller par un trop grand nombre de points et de lignes, d'autant qu'on seroit obligé de faire une infinité de tentatives inutiles: au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine. Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la géométrie, et qu'on pourroit mesme venir jusqu'à examiner les qualités des matériaux, parce que cela dépend ordinairement de certaines figures de leur parties sensibles. Enfin je n'espere pas qu'on puisse aller assez loin en physique, avant que d'avoir trouvé un tel abrégé pour soulager l'imagination. »

LEIBNIZ est le représentant typique des penseurs qui, soucieux d'écarter toute obscurité dans les démarches de la pensée, cherchait à hisser ces démarches au rang de purs calculs où tout serait "représenté(r)... en caractères" (ou signes). Il recherchait une science dont la langue traiterait de tous les types possibles de relations : une caractéristique universelle. Et les philosophes reconnaîtront dans le projet Leibnizien de "nouvelle caractéristique" la recherche de moyens universels de représentation des caractéristiques formelles des objets et des situations les plus divers -moyens plus universels que ceux de l'algèbre, limités selon LEIBNIZ à la représentation des nombres indéterminés ou des grandeurs-. A la recherche Leibnizienne d'une "caractéristique universelle" répond sans doute la notion moderne de structure. LEIBNIZ entendait ainsi donner "au genre humain une espèce d'instrument aussi propre à perfectionner la vue de l'esprit que les lunettes servent à celles du corps" (cf. De la méthode de l'universalité, in Opuscules et fragments inédits, p. 27, éd. 1903).

LEIBNIZ a, en effet, discuté les possibilités de création d'un système qui servirait de méthode directe d'analyse des relations. Si les détails de cette idée n'ont jamais été pleinement travaillés par LEIBNIZ, il avança cependant suffisamment loin dans ses travaux sur l'algèbre et la logique pour être classé parmi les initiateurs du concept de structure, et parmi ceux qui font du calcul l'aboutissement idéal de la pensée.

5.2.2. La pensée mathématique plus large que le calcul ?

Si on suit l'idéal leibnizien, à l'aboutissement la démarche de validation devrait pouvoir être mécanisée, au sens où elle serait totalement symbolisée ("représentée en caractères" selon l'expression de LEIBNIZ), de sorte qu'à chaque symbole pourrait être substituée une inscription mécanique ou électronique, et que toutes les opérations sur les signes (ou "caractères") pourraient, elles aussi, donner lieu à un processus mécanique ou électronique. A la limite, la dimension subjective ou conscientielle du raisonnement -avec ses possibilités d'erreurs- serait mise entre parenthèses, la machine exécutant seule le calcul, c'est-à-dire exécutant l'algorithme.

Il est vrai, sans doute, selon la formule même de Robert BLANCHE, que "le calcul domine le raisonnement comme une sorte de modèle idéal" (Le Raisonnement, PUF, 1973). Cependant, et R. BLANCHE insiste également sur ces points, le calcul rigoureux, qui est l'objectif de validation, a exigé au départ 1) l'heuristique de la démarche 2). La conception des notions et des types de liaisons, et sans doute le tout ne garde-t-il de sens que s'il reste conçu comme un modèle de formalisation -tirant peut-être son sens de ce renvoi même implicite aux situations problèmes qui ont conduit à la conception des formes étudiées.

Pour le débat sur cette problématique, on peut renvoyer aux réflexions (ci-dessus 5.2). sur l'heuristique, l'abstraction et la question de la portée ontologique ou non des démarches mathématiques. Nous renvoyons également aux études sur l'Algèbre (Chapitre IV) et Les Structures (Chapitre VII). L'étude de ces thèmes montre en quoi les mathématiques sont un effort pour résoudre des problèmes : inventer des démarches et forger des modèles formels susceptibles de permettre la résolution des problèmes.

5.3. Intuition et conception

5.3.1. Reprise des exemples du paragraphe 4

- Démonstration du théorème : "Tout triangle dont une médiane est confondue avec une bissectrice est isocèle",
- résolution du problème : "Parmi les rectangles inscrits dans un cercle, lesquels sont d'aire maximale ?"

Ces exemples sollicitent la réflexion sur le problème des figures et de leur fonction dans la démonstration. Sur les figures, on "voit". Or démontrer est-ce "faire voir", au sens où il y aurait une intuition sensible (voir quelque chose qui se montre de façon sensible, se donne au regard). Ou est-ce (à l'arrivée de la réflexion, lorsque la démarche de validation est trouvée) prouver la vérité par un calcul (cf. ci-dessus), où les valeurs de vérité sont acquises par extension purement logique d'une proposition à l'autre, par un jeu réglé sur des signes ?

5.3.2. La conception Kantienne des mathématiques

Dans le cadre de l'enseignement philosophique, il sera utile d'interroger les écrits de KANT. On le sait, en effet, pour KANT toute connaissance suppose une intuition et l'objet mathématique doit être construit.

5.3.2.1. KANT : Critique de la raison pure. Esthétique transcendantale

« De quelque manière et par quelque moyen qu'une connaissance puisse se rapporter à des objets, le mode par lequel elle se rapporte immédiatement à des objets, et que toute pensée, à titre de moyen, prend pour fin, est l'intuition. Mais celle-ci n'a lieu qu'autant que l'objet nous est donné, ce qui n'est possible, à nouveau, du moins pour nous autres hommes, que si l'objet affecte d'une certaine manière l'esprit. La capacité de recevoir (la réceptivité) des représentations grâce à la manière dont nous sommes affectés par des objets s'appelle sensibilité. C'est donc au moyen de la sensibilité que des objets nous sont donnés, et elle seule nous fournit des intuitions ; mais c'est par l'entendement qu'ils sont pensés, et c'est de lui que proviennent les concepts. Mais toute pensée doit se rapporter finalement soit en droite ligne (directe) soit par des détours (indirecte), au moyen de certains caractères, à des intuitions, et par conséquent chez nous à la sensibilité, puisque aucun objet ne peut nous être donné d'une autre façon.

L'effet d'un objet sur la capacité de représentation, en tant que nous sommes affectés par lui, est la sensation. On nomme empirique cette intuition qui se rapporte à l'objet par le moyen de la sensation. L'objet indéterminé d'une intuition empirique s'appelle phénomène.

Ce qui, dans le phénomène, correspond à la sensation, je l'appelle sa matière ; mais ce qui fait que le divers du phénomène peut être ordonné suivant certains rapports, je le nomme la forme du phénomène. Comme ce en quoi seulement les sensations peuvent s'ordonner et être mises en une certaine forme ne peut pas être lui-même encore sensation, il suit que, si la matière de tout phénomène nous est donnée seulement a posteriori, sa forme doit se trouver prête a priori dans l'esprit pour les sensations prises dans leur ensemble, et que, par conséquent, on doit pouvoir la considérer indépendamment de toute sensation.

J'appelle pures (dans le sens transcendantal) toutes les représentations où l'on ne trouve rien qui appartienne à la sensation. Par suite, la forme pure des intuitions sensibles en général, dans laquelle tout le divers des phénomènes est intuitionné sous certains rapports, se trouvera

a priori dans l'esprit. Cette forme pure de la sensibilité s'appellera encore intuition pure. Ainsi, quand, dans la représentation d'un corps, je sépare ce que l'entendement en pense, comme la substance, la force, la divisibilité, etc., ainsi que ce qui appartient à la sensation, comme l'impénétrabilité, la dureté, la couleur, etc., il me reste encore quelque chose de cette intuition empirique, à savoir l'étendue et la figure. Celles-ci appartiennent à l'intuition pure, qui se trouve a priori dans l'esprit, comme une pure forme de la sensibilité, indépendamment même de tout objet réel des sens ou de toute sensation. »

5.3.2.2. KANT : Critique de la raison pure. Théorie transcendantale de la méthode

« La mathématique donne le plus éclatant exemple d'une raison pure qui s'étend d'elle-même avec succès, sans le secours de l'expérience. Les exemples sont contagieux, surtout pour ce pouvoir, qui se flatte naturellement d'avoir dans d'autres cas le même bonheur qui lui est échü dans un cas particulier. Aussi la raison pure espère-t-elle pouvoir s'étendre, dans l'usage transcendantal, avec autant de bonheur et de solidité qu'elle est parvenue à le faire dans l'usage mathématique, surtout si elle applique à celui-là cette même méthode qui lui a été dans celui-ci d'une si évidente utilité. Il nous importe donc beaucoup de savoir si la méthode qui conduit à la certitude apodictique, et que dans cette dernière science on appelle mathématique, est identique à celle qui sert à chercher cette même certitude dans la philosophie et qui en ce lieu devrait être appelée dogmatique.

La connaissance philosophique est la connaissance rationnelle par concepts, et la connaissance mathématique la connaissance rationnelle par la construction des concepts. Or, construire un concept, c'est présenter a priori l'intuition qui lui correspond. La construction d'un concept exige donc une intuition non empirique, qui par conséquent comme intuition est un objet singulier, mais qui n'en doit pas moins, comme construction d'un concept (d'une représentation générale) exprimer dans la représentation une validité universelle, pour toutes les intuitions possibles qui appartiennent au même concept. Ainsi je construis un triangle en présentant l'objet correspondant à ce concept soit par la simple imagination dans l'intuition pure, soit même, d'après celle-ci, sur le papier dans l'intuition empirique, mais dans les deux cas tout à fait a priori, sans en avoir tiré le modèle de quelque expérience que ce soit. La figure singulière tracée ici est empirique, et pourtant elle sert à exprimer le concept sans porter préjudice à son universalité, parce que, dans cette intuition empirique, on ne regarde jamais que l'acte de la construction du concept, auquel beaucoup de déterminations comme celles de la grandeur, des côtés et des angles, sont tout à fait indifférentes et que l'on fait abstraction de ces différences qui ne changent pas le concept du triangle.

La connaissance philosophique considère donc le particulier uniquement dans le général, et la connaissance mathématique, le général dans le particulier, même dans le singulier, mais a priori et au moyen de la raison, de telle sorte que, comme ce singulier est déterminé sous certaines conditions universelles de la construction, de même l'objet du concept auquel ce singulier ne correspond que comme son schème doit être pensé comme universellement déterminé.

C'est dans cette forme que consiste donc la différence essentielle de ces deux espèces de connaissances rationnelles, et elle ne repose pas sur la différence de leur matière ou de leurs objets. Ceux qui ont cru distinguer la philosophie de la mathématique en disant que la première a pour objet simplement la qualité, tandis que la seconde n'a pour objet que la quantité, ont pris l'effet pour la cause. La forme de la connaissance mathématique est la cause qui fait que cette connaissance peut porter uniquement sur des quanta. Il n'y a en effet que le concept de grandeurs qui se laisse construire, c'est-à-dire présenter a priori dans l'intuition; Les qualités au contraire, ne se laissent présenter dans aucune autre intuition que

l'intuition empirique. Aussi une connaissance rationnelle de ces qualités ne peut-elle être possible qu'au moyen de concepts. Ainsi personne ne peut tirer d'ailleurs que de l'expérience une intuition correspondant au concept de la réalité; on n'arrivera jamais à y participer de soi-même a priori et antérieurement à la conscience empirique que nous en avons. On pourra faire de la forme conique un objet d'intuition sans nulle assistance empirique simplement d'après le concept, mais la couleur de ce cône devra être donnée d'avance dans telle ou telle expérience. Je ne puis en aucune façon présenter le concept d'une cause en général dans l'intuition sinon dans un exemple que me fournit l'expérience, et ainsi de suite. D'ailleurs la philosophie traite de grandeurs aussi bien que la mathématique, par exemple de la totalité, de l'infinité, etc. La mathématique s'occupe aussi de la différence des lignes et des surfaces comme d'espaces de diverses qualités, de la continuité de l'étendue comme d'une des qualités de celle-ci. Mais, bien qu'en pareil cas l'une et l'autre aient un objet commun, la manière de le traiter par la raison est pourtant tout autre dans la considération philosophique que dans la considération mathématique. Tandis que la première s'en tient simplement à des concepts généraux, la seconde ne peut rien faire avec le simple concept, mais elle se hâte aussitôt de recourir à l'intuition, où elle considère le concept in concreto, non pas pourtant d'une manière empirique, mais simplement dans une intuition qu'elle a présentée a priori, c'est-à-dire qu'elle a construite, et dans laquelle ce qui résulte des conditions universelles de la construction doit s'appliquer aussi d'une manière universelle à l'objet du concept construit. Que l'on donne à un philosophe le concept d'un triangle, et qu'on le laisse découvrir à sa manière le rapport de la somme des angles de ce triangle à l'angle droit. Il n'a rien que le concept d'une figure renfermée entre trois lignes droites, et dans cette figure le concept d'un nombre égal d'angles. Cela étant, il aura beau réfléchir sur ce concept aussi longtemps qu'il voudra, il n'en tirera rien de nouveau. Il peut analyser et éclaircir le concept de la ligne droite, ou celui d'un angle, ou celui du nombre trois, mais non pas arriver à d'autres propriétés qui ne se trouvent pas du tout dans ces concepts. Mais que le géomètre s'attaque à cette question, il commence aussitôt par construire un triangle. Comme il sait que deux angles droits pris ensemble valent exactement autant que tous les angles adjacents qui peuvent être tracés à partir d'un point pris sur une ligne droite, il prolonge un côté de son triangle et obtient ainsi deux angles adjacents qui sont égaux à deux droits. Il partage ensuite l'angle externe, en tirant une ligne parallèle au côté opposé du triangle, et voit qu'il en résulte un angle externe adjacent qui est égal à un angle interne, etc. De cette façon, il arrive par une chaîne d'inférences, toujours guidé par l'intuition, à une solution parfaitement évidente et en même temps universelle de la question.

Mais la mathématique ne construit pas simplement des grandeurs (quanta) comme dans la géométrie; elle construit aussi la pure grandeur (quantitas) comme dans l'algèbre, où elle fait complètement abstraction de la nature de l'objet qui doit être pensé d'après un tel concept de grandeur. Elle choisit alors une certaine notation de toutes

les constructions de grandeurs en général (de nombres), comme celles de l'addition, de la soustraction, de l'extraction des racines, etc.; et, après avoir également désigné le concept général (les grandeurs d'après les différents rapports de ces grandeurs, elle présente dans l'intuition, selon certaines règles générales, toute opération par laquelle la quantité est engendrée ou modifiée. Quand on doit diviser une grandeur par une autre, elle combine les caractères de toutes les deux suivant la forme qui sert à noter la division, etc., et elle parvient ainsi, au moyen d'une construction symbolique, tout aussi bien que la géométrie suivant une construction ostensive ou géométrique (des objets mêmes), là où la connaissance discursive ne pourrait jamais atteindre au moyen de simples concepts.

Quelle peut être la cause de ces situations si diverses où se trouvent ces deux artisans de la raison, dont l'un chemine en suivant des concepts, l'autre en suivant des intuitions qu'il présente a priori conformément aux concepts ? D'après les théories transcendantales

exposées plus haut, cette cause est claire. Cela ne tient pas ici à des propositions analytiques qui puissent être engendrées par une simple analyse des concepts (en quoi le philosophe aurait sans doute l'avantage sur son rival), mais à des propositions synthétiques, et, en vérité, à celles qui doivent être connues a priori. En effet, je ne dois point regarder à ce que je pense réellement dans mon concept du triangle (celui-ci n'est rien de plus que la simple définition), mais je dois bien plutôt en sortir, pour aller à des propriétés qui ne se trouvent pas dans ce concept, mais qui pourtant lui appartiennent. Or, cela n'est pas autrement possible que si je détermine mon objet d'après les conditions, soit de l'intuition empirique, soit de l'intuition pure. Dans le premier cas (en mesurant les angles du triangle) je n'aurais qu'une proposition empirique, qui ne contiendrait aucune universalité, encore moins aucune nécessité, et ce n'est pas de propositions semblables qu'il est question. Mais le second procédé est la construction mathématique, à savoir la construction géométrique, au moyen de laquelle j'ajoute dans une intuition pure, aussi bien que dans l'intuition empirique, le divers qui appartient au schème d'un triangle en général, par conséquent à son concept, par où certainement des propositions synthétiques universelles doivent être construites. [...]

La solidité des mathématiques repose sur des définitions, des axiomes et des démonstrations. Je me contenterai de montrer qu'aucun de ces éléments ne peut être ni fourni ni imité par la philosophie, dans le sens où le mathématicien le prend; que le géomètre, en suivant sa méthode, ne construirait, dans la philosophie, que des châteaux de cartes; que le philosophe, en suivant la sienne dans le domaine de la mathématique, ne pourrait faire naître que du verbiage; encore que la philosophie tienne son rôle dans cette science, rôle qui est d'en connaître les limites, et que le mathématicien lui-même, quand son talent n'est pas déjà limité par la nature et restreint à sa partie, ne puisse pas rejeter les avertissements de la philosophie, ni encore se mettre au-dessus d'eux.

1° Des DÉFINITIONS. Définir, comme l'expression même l'indique, ne doit signifier proprement que présenter originairement le concept détaillé d'une chose à l'intérieur de ses limites. D'après ces requisits, un concept empirique ne peut pas être défini, mais seulement explicité. En effet, comme nous n'avons en lui que quelques caractères d'une certaine espèce d'objets des sens, nous ne sommes jamais sûrs si, sous le mot qui désigne le même objet, on ne pense pas tantôt plus de caractères de cet objet et tantôt moins. Ainsi dans le concept de l'or, outre le poids, la couleur, la dureté, celui-ci peut penser encore à cette propriété qu'a l'or de ne pas se rouiller, tandis que celui-là n'en sait peut-être rien. On ne se sert de certains caractères que tant qu'ils suffisent à la distinction; mais de nouvelles observations en font disparaître quelques-uns et en ajoutent d'autres, de telle sorte que le concept n'est jamais renfermé entre des limites certaines. Et à quoi servirait-il d'ailleurs de définir un concept de ce genre, puisque, quand il est question, par exemple, de l'eau et de ses propriétés, on ne s'arrête pas à ce que l'on pense sous le nom d'eau mais que l'on passe à des expériences, et que le mot, avec les quelques caractères qui s'y attachent, ne doit constituer qu'une désignation et non un concept de la chose, et par conséquent la prétendue définition n'est autre chose qu'une détermination de mot. En second lieu, on ne peut même, à parler exactement, définir aucun concept donné a priori, comme par exemple ceux de substance, de cause, de droit, d'équité, etc. En effet je ne puis jamais être sûr que la représentation claire d'un concept donné (encore confus) a été développée dans le détail qu'à la condition de savoir qu'elle est adéquate à l'objet. [...]

Nous bornerons toute cette remarque à faire observer que les définitions philosophiques ne sont que des expositions de concepts donnés tandis que les définitions mathématiques sont des constructions de concepts originairement formés. Les premières ne sont faites qu'analytiquement par le moyen de la décomposition (dont l'intégralité n'est pas

apodictiquement certaine), tandis que les secondes sont faites synthétiquement et constituent ainsi le concept même que les premières ne font qu'expliquer. D'où il suit :

a. Qu'en philosophie, on ne doit pas imiter la mathématique en commençant par les définitions, à moins que ce ne soit à titre de simples essais. En effet comme les définitions philosophiques sont des analyses de concepts donnés, ces concepts occupent le premier rang bien qu'ils ne soient encore que confus, et l'exposition incomplète précède l'exposition complète, de telle sorte que, de quelques caractères que nous avons tirés d'une analyse encore inachevée, nous en pouvons conclure d'autres avant d'arriver à l'exposition intégrale, c'est-à-dire à la définition. En un mot, dans la philosophie, la définition, comme distinction proportionnée, doit plutôt terminer l'oeuvre que la commencer. Dans la mathématique au contraire, nous n'avons absolument aucun concept avant la définition, puisque c'est par elle que le concept est donné tout d'abord; elle doit donc et d'ailleurs elle peut toujours commencer par là.

b. Les définitions mathématiques ne peuvent jamais être fausses. En effet, comme le concept est d'abord donné par la définition, il ne contient exactement que ce que la définition veut que l'on pense par ce concept. Mais bien qu'il ne puisse rien s'y trouver de faux quant au contenu, peut cependant y avoir parfois, encore que rarement, quelque défaut dans la forme (dans la manière de les présenter), je veux dire du côté de la précision. Ainsi la définition ordinaire de la circonférence, qu'elle est une ligne courbe dont tous les points sont également éloignés d'un point unique (du centre), a le défaut d'introduire sans nécessité la détermination de courbe. En effet, il doit y avoir un théorème particulier dérivé de la définition, et qui peut être aisément démontré, à savoir que toute ligne dont tous les points sont également éloignés d'un point unique est courbe (qu'aucune partie n'en est droite). Les définitions analytiques au contraire peuvent être fausses de diverses manières, soit en introduisant des caractères qui n'étaient pas réellement dans le concept, soit en manquant de l'étendue de détail qui fait l'essentiel d'une définition, parce qu'on n'est jamais pleinement sûr de l'intégralité de son analyse. Aussi la méthode de la mathématique à l'endroit de la définition ne se laisse-t-elle pas imiter dans la philosophie.

2° Des AXIOMES. Les axiomes sont des principes synthétiques a priori en tant qu'ils sont immédiatement certains. Or, un concept ne peut être uni à un autre d'une manière synthétique et pourtant immédiate, parce que, pour pouvoir sortir d'un concept, une troisième connaissance médiatisante est nécessaire. Or, comme la philosophie n'est qu'une connaissance de la raison par des concepts, il n'y a en elle aucun principe qui mérite le nom d'axiome. La mathématique, au contraire, est susceptible d'axiomes, parce qu'au moyen de la construction des concepts dans l'intuition de l'objet elle peut lier a priori et immédiatement les prédicats de cet objet, par exemple que trois points se trouvent toujours dans un plan. Au contraire, un principe synthétique qui vient uniquement de concepts ne peut jamais être immédiatement certain, par exemple la proposition que tout ce qui arrive a sa cause; car il faut que je me reporte à un troisième terme, c'est-à-dire à la condition de la détermination de temps dans une expérience, et je ne saurais connaître un tel principe directement et immédiatement par de simples concepts. Les principes discursifs sont donc tout autre chose que les principes intuitifs, c'est-à-dire que les axiomes. Les premiers exigent toujours encore une déduction, dont les derniers peuvent totalement se dispenser; et comme précisément par cette même raison ceux-ci sont évidents, tandis que les principes philosophiques, avec toute leur certitude, ne peuvent jamais prétendre l'être, il s'en faut infiniment qu'une proposition synthétique quelconque de la raison pure et transcendante soit aussi manifeste (comme on a coutume de le dire avec arrogance) que cette proposition :

Deux fois deux font quatre. J'ai, il est vrai, dans l'« Analytique », dans la table des principes de l'entendement pur, fait aussi mention de certains axiomes de l'intuition; mais le principe cité là n'était pas lui-même un axiome, il ne servait qu'à fournir le principe de la possibilité

des axiomes en général, et il n'était lui-même qu'un principe provenant de concepts. Car même la possibilité de la mathématique doit être montrée dans la philosophie transcendantale. La philosophie n'a donc pas d'axiomes, et il ne lui est jamais permis d'imposer ses principes a priori aussi absolument, mais elle doit consentir à justifier sa qualification à leur égard par une déduction approfondie.

3° Des Démonstrations. Seule une preuve apodictique, en tant qu'elle est intuitive, peut s'appeler démonstration. L'expérience nous apprend bien ce qui est, mais non pas que ce qui est ne puisse pas du tout être autrement. Aussi les fondements de preuve empiriques ne peuvent-ils fournir aucune preuve apodictique. Mais la certitude intuitive, c'est-à-dire l'évidence, ne peut jamais naître de concepts a priori (dans la connaissance discursive), quelque apodictiquement certain que puisse être d'ailleurs le jugement. Il n'y a donc que la mathématique qui contienne des démonstrations, parce qu'elle ne dérive pas sa connaissance de concepts, mais de la construction des concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui peut être donnée a priori comme correspondant aux concepts. La méthode algébrique elle-même, avec ses équations d'où elle tire par déduction la vérité en même temps que la preuve, si elle n'est pas, il est vrai, une construction géométrique, n'en est pas moins une construction caractéristique, où, à l'aide des signes, on présente les concepts dans l'intuition, surtout ceux du rapport des grandeurs, et où, sans jamais regarder à l'aspect heuristique, on garantit tous les raisonnements contre les erreurs par cela seul que chacun d'eux est mis devant les yeux. La connaissance philosophique, au contraire, doit se passer de cet avantage, puisqu'elle doit toujours considérer l'universel in abstracto (au moyen de concepts) tandis que la mathématique peut examiner l'universel in concreto (dans l'intuition particulière), et pourtant au moyen d'une représentation pure a priori, ce par quoi toute fausse démarche devient visible. Je donnerais donc plus volontiers aux preuves philosophiques le titre de preuves acroamatiques (discursives) que celui de démonstrations, parce que ces preuves ne peuvent se faire que par de simples mots (par l'objet en pensée), tandis que, comme l'expression l'indique déjà, les démonstrations pénètrent dans l'intuition de l'objet. »

5.3.2.3. La critique de KANT par BOLZANO

« Sur la Doctrine kantienne de la construction des concepts par les intuitions

§1

De nous avoir rendus pour la première fois véritablement attentifs à la différence importante qui règne entre la partie analytique et la partie synthétique de notre savoir, cela demeure un mérite que KANT s'est acquis, même s'il s'avère qu'on ne peut ni légitimer ni prendre en compte tout ce que ce philosophe a en outre affirmé concernant la nature interne de nos jugements synthétiques. Il est certain que la vérité des jugements analytiques repose sur une tout autre raison (Grund) que celle des jugements synthétiques. Si tant est que les premiers méritent le nom de véritables jugements, (ce que je leur accorde non sans réserve), ils reposent alors tous sur cette unique proposition universelle qu'énonce la formule suivante : (A cum B) est une espèce de A. Si l'on nomme cette proposition le Principe d'unité, ou le Principe de contradiction, on peut alors du moins dire que le Principe de contradiction est la source universelle de tous les jugements analytiques. Mais il en va tout autrement des jugements synthétiques. Ceux-ci ne se laissent manifestement pas déduire de ce principe. C'est pourquoi KANT souleva la question suivante : quelle est donc ici la raison qui détermine notre entendement à ajouter à un certain sujet un prédicat qui n'est pas du tout compris dans le concept (dans la définition) de ce sujet ? Et il crut trouver que cette raison (Grund) ne

pouvait être rien d'autre qu'une intuition que nous relions au concept du sujet et qui contient en même temps le prédicat. Et en conséquence il faut, dit-il, que correspondent à tous les concepts à propos desquels nous sommes censés pouvoir former des jugements synthétiques, des intuitions. Si maintenant ces intuitions sont simplement empiriques, alors les jugements qu'elles ont rendu possibles sont également empiriques. Or, vu qu'il existe aussi des jugements synthétiques a priori (comme en effet la mathématique et la physique pure en contiennent indéniablement), il doit de la même façon - aussi étrange que cela puisse paraître - y avoir nécessairement aussi des intuitions a priori. Et si l'on s'est un jour intimement résolu à croire qu'il pouvait y en avoir de telles, alors on se convainc également sans difficulté, à l'avantage de la mathématique et de la physique pure, qu'elles sont le temps et l'espace.

§ 2

Honnêtement, nous devons demander ici ce que KANT peut bien entendre par intuition. Et nous obtenons [...] la réponse suivante : toutes les représentations sont soit des intuitions, c'est-à-dire des représentations d'un individu, soit des concepts, c'est-à-dire des représentations de quelque chose d'universel. Si nous demandons enfin ce que doit pouvoir signifier l'expression intuition pure a priori, il ne me vient, quant à moi, aucune autre réponse possible que la suivante : c'est une intuition qui est liée à la conscience de la nécessité qu'elle doit être ainsi et non autrement. Car c'est seulement si cette conscience de la nécessité est contenue dans l'intuition, qu'elle peut se trouver aussi dans la relation que celle-ci permet entre le sujet et le prédicat, c'est-à-dire dans le jugement.

§ 3

Il est bien connu que plusieurs se sont déjà scandalisés de ces intuitions a priori de la philosophie critique. Pour ma part, j'irai volontiers jusqu'à concéder qu'il doit y avoir une certaine raison, tout à fait différente du Principe de contradiction, pour laquelle l'entendement joint dans un jugement synthétique, le prédicat au concept du sujet. Mais que cette raison puisse être, et être appelée une intuition et, qui plus est, une intuition pure dans le cas des jugements a priori, cela je ne le trouve pas clair. Et même, s'il me faut être sincère, tout cela me paraît reposer sur une distinction qui n'a pas été assez clairement pensée entre ce que signifie empirique et ce que signifie a priori dans nos connaissances. La Critique de la Raison pure commence bien par cette distinction mais [...] elle n'en donne aucune définition véritable. Comment suppléer maintenant à ce manque? Étant donné que les deux concepts, empirique et a priori, sont opposés l'un à l'autre de façon contradictoire, il serait suffisant d'avoir défini convenablement l'un des deux seulement, par exemple le concept d'empirique ; alors la définition de l'autre serait donnée d'elle-même par simple opposition. Qu'entendons-nous donc à vrai dire par empirique ? Que du moins l'on ne nous donne pas en guise de réponse « empirique est ce que nous obtenons par les cinq sens - ou bien par un objet extérieur ». En tant que philosophes en effet, nous n'avons pas encore le droit de supposer ce que sont les cinq sens ni qu'il y ait des objets extérieurs.

§ 4

Selon mon opinion, la différence entre l'empirique et l'a priori dans nos connaissances ne concerne originairement que nos jugements et ce n'est que par ceux-ci qu'elle peut aussi être étendue indirectement à nos concepts ou à nos représentations. Je suis en effet conscient de posséder des jugements de la forme : « Je perçois - X » ; et ces jugements, je les nomme des jugements empiriques, des jugements de perception ou de réalité et cet X en eux, je le

nomme une intuition, ou, si l'on veut, une représentation empirique. La copule propre à tous ces jugements est le concept du percevoir que je tiens pour un concept simple, par conséquent indéfinissable. Pour le circonscrire (umschreiben) cependant et se prémunir du malentendu, on pourrait tenter de dire qu'il s'agit du concept d'un être, a) d'un simple être pur, sans nécessité, b) d'un être qui n'est pas celui d'un objet extérieur en tant que tel, mais seulement d'une simple représentation en moi (c'est-à-dire de l'intuition).

Mes autres jugements maintenant, notamment ceux qui a) expriment une nécessité ou b) une possibilité ou c) un devoir, je les nomme a priori, et les concepts qui interviennent en eux comme sujet ou prédicat, je les appelle des concepts a priori.

§ 5

En vertu du Principe de raison (Satz voni Grunde), je suis en outre amené à chercher une certaine raison (Grund) à tous mes jugements. Celle-ci cependant est tout autre pour les jugements empiriques que pour les jugements a priori. Les premiers ou ceux qu'on appelle encore les jugements de réalité ont cela en propre que je cherche leur raison dans ce qui est (dans quelque chose de réel, dans les choses; c'est-à-dire, selon les circonstances, en partie dans ce que j'appelle « la constitution particulière de ma faculté de perception », en partie dans certaines « choses différentes de moi, c'est-à-dire extérieures à moi qui (selon la façon courante de parler) agissent sur ma faculté de perception ». Il n'en va pas de même de mes jugements a priori pour lesquels je ne peux trouver la raison au nom de laquelle j'ajoute le prédicat au sujet nulle part ailleurs que dans le sujet lui-même (et dans la propriété particulière (Beschaffenheit) du prédicat)[...]. Des intuitions ne servent et ne peuvent ici rien, comme cela sera peut-être mieux éclairé dans les paragraphes suivants par d'autres considérations.

§ 6

Certes, il existe bien une espèce de jugements, ceux qu'on appelle les jugements d'expérience ou jugement de probabilité (Erfahrungs- oder Wahrscheinlichkeitsurteile), dans lesquels la liaison du prédicat avec le sujet est effectivement rendue possible au moyen d'intuitions. Car à partir du moment où j'ai les jugements de perception : « je perçois les intuitions X et Y, et qui plus est, jamais X sans Y », je tire ensuite (herleiten) de ceux-ci, au moyen du Principe de raison, le jugement de probabilité : « Il est probable que la chose qui est la raison de l'intuition X est liée à celle qui est la raison de Y comme une cause à son effet ». De cette forme sont à mon avis tous nos jugements qu'on appelle jugements d'expérience. Si nous disons par exemple le soleil échauffe la pierre, cela ne signifie en vérité rien d'autre que l'objet (soleil), qui est la cause de l'intuition X (c'est-à-dire du disque solaire tel qu'il brille), est aussi la raison de l'intuition Y (c'est-à-dire de celle d'une pierre chaude) II. Mais tous ces jugements ne possèdent selon leur nature que Ici probabilité.

§ 7

Comment cependant peuvent naître, par une liaison à des intuitions, des jugements absolument certains", tels que le sont tous les jugements a priori ? Kant semble vouloir dire : « Si je lie à une intuition le concept universel, par exemple d'un point ou d'une direction ou d'une distance, c'est-à-dire si je me représente un point singulier, une direction ou distance singulières, alors je découvre dans ces objets singuliers que leur revient tel ou tel prédicat, et je sens en même temps que ceci vaut de même pour tous les autres objets qui tombent sous ce concept ». Si tel est ce que veulent dire Kant et ses disciples, je pose la question suivante :

comment en venons-nous donc, lors de l'intuition de tel objet singulier, au sentiment (zu dem Gefühle) que ce que nous remarquons en lui vaut aussi pour tout autre ? Au moyen de ce qui est singulier et individuel; ou au moyen de ce qui est universel en cet objet ? A l'évidence seulement au moyen de ce qui est universel, c'est-à-dire au moyen du concept, non pas au moyen de l'intuition.

§ 8

A quel point la doctrine kantienne des intuitions peut être scabreuse (misslich), cela se révèle avec une clarté particulière si on l'étend aussi à d'autres propositions, aux propositions qui n'appartiennent pas à la géométrie. Le Principe de raison, la plupart des propositions de l'arithmétique sont, d'après une remarque juste de Kant, des propositions synthétiques. Mais qui ne sent pas tout l'artifice que Kant, afin d'appliquer sans restriction sa doctrine des intuitions, dut déployer, pour affirmer qu'il y a également au fondement de ces propositions une intuition et plus précisément - car quelle autre pourrait-ce bien être? - l'intuition du temps ? Le Principe de raison vaut pourtant aussi là où il n'y a aucun temps, et c'est bien à la suite de ce Principe que Kant lui-même admet (selon une remarque que l'on a déjà souvent faite) l'existence des noumènes, qui ne sont pas dans le temps. Les propositions de l'arithmétique ne nécessitent l'intuition du temps en aucune façon. Nous ne voulons analyser qu'un exemple. Kant mentionne la proposition $7 + 5 = 12$. A la place de celle-ci nous allons prendre, uniquement pour faciliter l'exposé, la proposition plus courte $7 + 2 = 9$. La démonstration de cette proposition ne présente pas de difficulté dès que l'on présuppose la proposition universelle $a + (b + c) = (a + b) + c$, selon laquelle, dans le cas d'une somme arithmétique, on ne s'occupe que de l'ensemble (Menge) et non pas de l'ordre des éléments (un concept qui comprend assurément celui de succession dans le temps (Zeitfolge)). Cette proposition, loin de présupposer le concept de temps, l'exclut bien au contraire. Mais cette dernière une fois admise, la preuve de la proposition ci-dessus pourra être conduite de la manière suivante. Que $1 + 1 = 2$, $7 + 1 = 8$, $8 + 1 = 9$, ce ne sont que de simples définitions et des propositions arbitraires. De là $7 + 2 = 7 + (1 + 1)$, (per def). $= (7 + 1) + 1$, (per propos. praeced). $= 8 + 1$, (per def). $= 9$ (per def)..

§ 9

« Mais alors, dira-t-on, il est, au moins en géométrie, vrai, que certaines intuitions interviennent ici comme fondement. En effet, dès que nous pensons le concept de point, aussitôt l'intuition visuelle d'un point se trouve en nous ». Assurément, mais cette image qui accompagne notre pur concept de point ne lui est pas du tout liée essentiellement, mais seulement par association d'idées ; parce que nous les avons souvent pensés tous deux ensemble. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle le caractère de cette image est très différent selon les personnes et qu'elle dépend de mille circonstances accidentelles. Celui qui par exemple n'aurait toujours vu que des lignes grossières et dessinées à gros traits ou celui à qui on n'aurait toujours représenté les lignes droites que par des chaînes ou des bâtons, celui-là aurait à l'esprit lors de la pensée d'une ligne, l'image d'une chaîne ou d'un bâton. Au mot triangle se présente à l'esprit de l'un, un triangle équilatéral, à l'esprit du deuxième, un triangle rectangle, à l'esprit du troisième, peut-être un triangle ayant un angle obtus. C'est pourquoi je ne comprends pas du tout non plus comment Kant a pu trouver entre l'intuition qui fait voir un triangle dessiné réellement devant nous et celle qui fait voir un triangle simplement construit dans l'imagination une différence si grande qu'il déclara la première superflue et insuffisante, la seconde au contraire nécessaire et suffisante pour la preuve d'une proposition synthétique a priori. Selon ma conception, il est assurément inévitable que

notre imagination nous représente, à la pensée de n'importe quel objet spatial vu fréquemment, une image de celui-ci; il est aussi utile et commode, pour juger plus aisément de l'objet, que nous ayons cette image dans la tête; mais je ne le tiens pas pour absolument nécessaire à ce jugement. C'est ainsi en effet qu'il y a bien en géométrie des théorèmes pour lesquels nous n'avons aucune espèce d'intuitions. La proposition selon laquelle toute ligne droite se peut prolonger à l'infini n'a aucune intuition pour elle; les lignes que notre imagination peut représenter en nous ne sont pas infiniment longues. En stéréométrie, nous traitons souvent d'objets spatiaux composés de si multiples manières que même l'imagination la plus vive ne peut plus se les représenter distinctement; nous n'en continuons pas moins à faire nos calculs avec nos concepts et trouvons du vrai.

§ 10

« Mais si ce ne sont pas les intuitions qui font la différence essentielle entre la mathématique et les autres sciences, d'où vient donc la grande certitude et évidence de la première? » - Je réponds : de ceci que l'on peut très facilement vérifier sur des intuitions et des expériences les résultats de la mathématique. Par exemple que la ligne droite soit réellement la ligne la plus courte entre deux points, chacun de nous en fait l'expérience par d'innombrables essais - longtemps avant qu'il n'ait pu le démontrer par des raisonnements (Schlüsse). C'est aussi la raison pour laquelle l'évidence tant vantée de la mathématique disparaît progressivement au fur et à mesure que l'expérience s'éloigne de nous, tout de même que des propositions qui sont pourtant inférées ont souvent un degré bien plus élevé de clarté intuitive (Anschaulichkeit) que de véritables axiomes (Grundsätze).

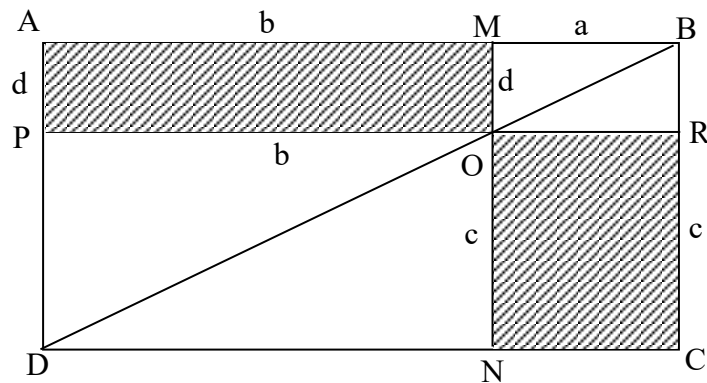
§ 11

« Ainsi il n'y aurait donc absolument aucune différence à admettre entre ces intuitions que Kant a appelées a priori et les intuitions empiriques ? Tous les objets doivent pourtant avoir une figure : il n'est pas nécessaire qu'ils possèdent couleur, odeur, etc. » - Je réponds : ce ne sont pas tous les objets parmi ceux qui doivent nous apparaître qui doivent posséder une figure mais seulement ceux qui précisément doivent nous apparaître comme extérieurs, c'est-à-dire dans l'espace. Mais précisément ceux-ci doivent ensuite avoir aussi quelque chose qui remplit cette figure et ceci ne peut, du fait de la constitution particulière de notre faculté de perception, n'être qu'une seule des cinq choses suivantes, soit une couleur, soit une odeur, etc. Par conséquent, la couleur, l'odeur, etc. sont également des formes a priori au sens précis du mot selon lequel l'espace et le temps le sont, sauf que le domaine des premiers est plus réduit que celui des seconds ; exactement comme la forme de l'espace a, de la même façon, un domaine plus réduit que celle du temps. Parmi les concepts en effet (tel sera notre jugement final) n'existe aucune distinction justifiable d'après laquelle ils pourraient être divisés sous la forme de concepts empiriques et de concepts a priori ; tous au contraire sont a priori. »

5.3.3. Exemple de développement algébrique à partir d'un théorème de géométrie

La réflexion sur l'intuition et la conceptualisation pourra se nourrir de l'examen d'un exemple mathématique, notamment de l'exemple d'un développement algébrique à partir d'un théorème de géométrie : égalité d'aire entre deux rectangles.

Dans un rectangle ABCD, on trace une diagonale BD. Par un point O (quelconque) de cette diagonale, on trace une parallèle (MN) aux côtés [AD] et [BC], et une parallèle (PR) aux côtés [AB] et [DC]. On demande de comparer les aires des rectangles AMOP et ORCN.



Il est facile de démontrer que ces rectangles sont égaux en aires. En effet, les triangles BDC et BAD sont égaux. De même sont égaux les triangles OMB et OBR et les triangles POD et DON.

Puisque

$$BDC = DON + OBR + ORCN,$$

et que

$$BAD = POD + OMB + AMOP,$$

on peut conclure que

$$ORCN = AMOP.$$

Si on appelle a et c les côtés du rectangle ORCN (respectivement les segments NC et OR, et les segments CR et NO), et b et d les côtés du rectangle AMOP (respectivement les segments AM et PO, et les segments AP et MO), on pourra écrire :

$$a \times c = b \times d.$$

(La surface d'un rectangle étant égale au produit des côtés).

[Ce théorème de géométrie est très important pour EUCLIDE, car, en l'absence d'une représentation de l'égalité ($=$), il s'en sert comme outil de traitement des "égalités" de type $a \times b = c \times d$.

ARCHIMEDE, de son côté utilise le levier (balance) : égalité des produits des forces et des longueurs.]

Puis, en fonction du théorème (déjà très important chez EUCLIDE) sur les proportions, et notamment du théorème de l'égalité du produit des extrêmes et des moyens, on pourra écrire les égalités suivantes :

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \text{ ou } \frac{a}{d} = \frac{b}{c} \text{ ou } \frac{c}{d} = \frac{b}{a}.$$

Il apparaît d'après cet exemple (à travailler avec les élèves) :

- 1) que la solution d'un problème géométrique peut être exprimée sous la forme d'une équation (égalité entre deux produits),

- 2) que, par la suite, cette équation pourra exprimer toutes sortes de rapports de grandeurs (de situations), et pas seulement les rapports entre les rectangles qui ont fait l'objet du problème de départ,
- 3) que l'équation construite pourra donner lieu à des extensions par transformations et calculs. L'activité mathématique, d'abord proprement géométrique, s'effectuant sur des figures et des lignes (objet d'intuition avec, dirait KANT, la forme du sens externe : l'espace) s'étendra en activités portant sur des équations. Ces équations peuvent être mises en oeuvre pour répondre à des situations de natures très différentes et pas seulement géométriques, et se donnent sous formes de signes dont le contenu ou le sens ne relève plus de l'intuition sensible.

III. Les géométries non euclidiennes³²

³² Contributions de MM. Georges GLAESER, Jean SAMSON, Jean-Claude MEYER, Frédéric RUSCHER.

1. Intérêt philosophique de l'approche des géométries non-euclidiennes

Que l'attention des philosophes se porte sur les mathématiques, cela s'explique aisément par les préoccupations mêmes de la philosophie. S'interrogeant sur la vérité, la possibilité de l'atteindre -ce qui est, au fond, la question du rapport à l'être, celle de la saisie de la réalité dans son essence et/ou dans ses apparences- les philosophes ne pouvaient, ni ne pourront, manquer d'examiner les mathématiques, que ce soit comme :

- 1) modèle de certitude,
- 2) modèle de démarche vers la certitude, à examiner pour élaborer les règles d'une méthode,
- 3) oeuvre de l'entendement, susceptible d'en illustrer le pouvoir, et de fonder une étude critique de celui-ci,
- 4) étape dans la dialectique de l'esprit allant des opinions vagues vers la connaissance idéale,
- 5) instrument ou langage de la connaissance du réel,
- 6) étude des formes dans lesquelles se donne le savoir, notamment scientifique, les modèles mathématiques étant perçus comme des modèles de représentation du réel,
- 7) ontologie, les modèles mathématiques étant alors considérés comme montrant les formes même de l'être.

Nous avons pensé qu'il serait utile de débiter la réflexion sur les mathématiques par l'examen de la question des géométries non-euclidiennes. C'est là, comme dans la réflexion sur les nombres qui suit, que l'on peut commencer à observer le travail de la mathématique en voyant comment les mathématiques s'élargissent et s'enrichissent. Il s'agit au fond d'entrer dans les mathématiques en saisissant des moments de leur genèse, saisir l'intelligence mathématique en acte.

L'approche des géométries non-euclidiennes, qui se fera par les entrées facilement accessibles évoquées ci-dessus, devrait permettre aux élèves et aux professeurs de philosophie :

- 1) De faire voir que la pluralité des géométries correspond à des observations accessibles à tous, qu'elle est l'aboutissement d'éléments connus dès l'Antiquité, mais que la formulation et la théorisation du problème ont cependant été tardives.

Ces constats pourront appeler la réflexion sur la démarche scientifique, notamment sur le passage des "faits" connus à leur problématisation, et sur les éventuels obstacles à celle-ci.

- 2) D'éclairer la notion d'axiome.

C'est à partir, en particulier, de l'examen des théorèmes de géométrie plane non vérifiés sur la sphère ou la pseudosphère (1ère partie, ci-dessous), que l'on pourra aborder la question du caractère axiomatique des mathématiques. On verra notamment que l'axiome, dont on dit volontiers qu'il est "arbitrairement posé au départ", s'inscrit de fait dans une démarche de résolution d'un problème ; il paraît important de présenter le caractère axiomatique des mathématiques à partir de la démarche effective du mathématicien.

- 3) De mettre à disposition un exemple d'histoire des sciences.

L'examen des rapports entre la mathématique ancienne (géométrie euclidienne) et les mathématiques ultérieures (géométries non-euclidiennes) permettra de montrer que la science nouvelle ne disqualifie pas la science ancienne comme fausse, mais l'intègre à des ensembles plus généraux.

- 4) D'apporter les éléments d'une réflexion sur l'espace.

On sera amené à se demander si la représentation de l'espace est nécessairement une, et si l'on peut, et en quel sens, parler d'une forme a priori, universelle et nécessaire.

- 5) D'apporter les éléments d'une réflexion sur les rapports des mathématiques au réel.

On sera amené à se demander si les mathématiques imposent un modèle pour appréhender et organiser le réel ou si elles proposent des modèles entre lesquels les sciences de la nature auront à choisir selon les exigences de la confrontation au réel.

- 6) D'engager une réflexion sur les relations entre la connaissance spontanée ou ordinaire et la connaissance scientifique.

En effet, la géométrie euclidienne est encore proche de la géométrie spontanée, notamment par les "évidences" qu'elle partage avec celle-ci. Les progrès de la science signifieront-ils une rupture avec les premières expériences ou les premières constructions de l'esprit ? Ou sont-ils un approfondissement, un gain en précision, sur la base d'une connaissance originaire qui reste, à son niveau, valable ?

Dans ce qui suit, nous illustrerons des considérations sur des géométries qui ne satisfont pas à tous les axiomes d'EUCLIDE en proposant des points de départ accessibles à tous, susceptibles de fonder une réflexion claire, aux références sans ambiguïté : manipulations de globes terrestres, épluchages d'oranges ou comparaisons entre les propriétés d'un objet avec celles qui apparaissent sur sa photographie.

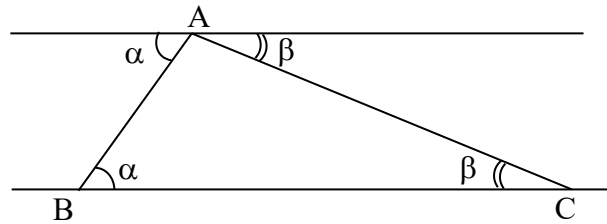
La géométrie non-euclidienne de LOBATCHEVSKY, si souvent évoquée, est particulière. Elle satisfait à tous les axiomes d'EUCLIDE, à l'exception du fameux postulat des parallèles. Son explication fait allusion à des connaissances que, vraisemblablement, très peu de lycéens et de professeurs maîtrisent. Nous ne centrerons pas nos réflexions sur elle, limitant notre intention à la compréhension de la problématique de la pluralité des géométries. Ceux et celles qui voudront satisfaire leur curiosité au-delà de ce qui est ici présenté pourront parcourir le Livre du Problème (Volume VI, Chapitre 6), publié en 1976 par l'IREM de Strasbourg.

2. Des théorèmes de géométrie plane non vérifiés sur la sphère ou la pseudosphère

2.1. Théorème sur la somme des angles d'un triangle

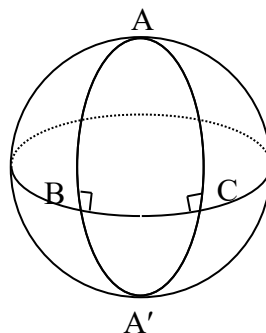
On connaît, en géométrie euclidienne, le théorème selon lequel, dans un plan, la somme des trois angles d'un triangle vaut deux droits, soit 180 degrés.

La démonstration de ce théorème se fait en appliquant le théorème de l'égalité des angles alternes/internes :



Si on remplace le plan par une autre surface (sphère, pseudosphère), on obtient des résultats tout à fait différents.

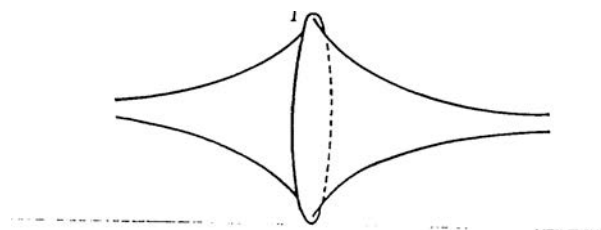
Ainsi, si on dessine un triangle sur une sphère (par exemple si sur un globe on prend le triangle formé par deux méridiens sur l'équateur), on obtient un triangle dont chacun des deux angles sur l'équateur est déjà égal à un droit.



Si on découpe une orange en 8 parts égales, les 8 triangles de la peau de l'orange seront des triangles avec chacun 3 angles de 90 degrés.

Il y a ainsi ce qu'on appelle l'"excès sphérique", c'est-à-dire qu'on arrive à plus de 180 degrés pour la somme des angles du triangle.

Si on prend une pseudosphère³³, pour le triangle dessiné sur la surface on obtient une somme des 3 angles inférieure à 180 degrés.



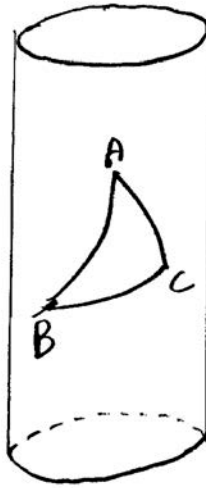
2.2. Réflexions sur les cas présentés

2.2.1. Observations

- Un théorème démontré dans le cadre de la géométrie plane n'est plus vérifié lorsque le plan est remplacé par une autre surface (sphère ou pseudosphère),

³³ Une pseudosphère est la surface engendrée par une tractrice en tournant autour de son asymptote et constitue un modèle local du plan de LOBATCHEVSKI en considérant comme droites ses géodésiques.

- cependant ce théorème n'est pas, dès lors, à considérer comme faux. Il apparaît seulement comme un cas particulier, vérifié seulement si certaines conditions sont réunies (lorsque le triangle est construit dans un plan).



2.2.2. Problématisation philosophique

- Les démonstrations faites pour le triangle, construit dans un plan (cadre de la géométrie euclidienne) n'étaient pas fausses ; la seule erreur était de penser que le cadre de la démonstration ne faisait pas problème, et que les théorèmes et la géométrie ainsi construits étaient les seuls possibles.
- Le constat fait soulève la question du rapport entre la géométrie mathématique et l'espace réel.

C'était une conviction non discutée que la géométrie euclidienne était partout applicable dans l'univers. Dès lors que se montrent des géométries se pose aussi la question de

- leur applicabilité,
 - la nature de l'espace réel : on peut par exemple se demander s'il n'est pas sphérique³⁴.
- On peut aussi amorcer une interrogation sur le statut théorique (ou ontologique) des éléments de base des démonstrations géométriques (ici de la conception de l'espace, des surfaces) : sont-ce des éléments existant réellement ? Universellement répandus ? Sont-ce des éléments conventionnellement définis ?
 - On pourra enfin cerner le statut des énoncés mathématiques : un énoncé mathématique est vrai dans le cadre de bases données.

³⁴ La théorie de la relativité d'EINSTEIN propose un modèle d'espace « courbe ».

3. Droites dans le plan et lignes géodésiques : axiomes ou évidences différant selon l'espace envisagé

3.1. Chemin joignant deux points

Dans la géométrie euclidienne, et plus généralement dans la géométrie habituelle ou spontanée de nos représentations quotidiennes, la ligne droite est la ligne la plus courte possible pour joindre 2 points (on dira que : "la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre"), et il n'y a qu'une seule droite joignant ces 2 points.

Cela paraît évident, ne nécessitant nulle démonstration. Et cela a été également présenté ainsi, comme un point de départ, dans la géométrie.

N.B. : Chez EUCLIDE, on trouve la Demande 1 (ou postulat) : "Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point".

Dans cette formulation, il n'y a pas mention de l'unicité de la droite joignant deux points ; cependant celle-ci est admise au cours de la démonstration de la Proposition 4 (théorème de l'égalité des triangles) avec la mention : "deux droites contiendraient une aire, ce qui est impossible". De sorte qu'on peut dire qu'EUCLIDE admet implicitement l'évidence qu'il ne peut y avoir qu'une droite joignant deux points dans un plan, et que celle-ci est la ligne la plus courte.

Nous présenterons au § 4 les informations historiques nécessaires sur les Eléments d'EUCLIDE, en particulier sur les notions de Demande, de Postulat et de Proposition.

Si on se place dans les conditions de la sphère -en admettant qu'on ne puisse sortir de ces conditions-, la ligne la plus courte possible joignant 2 points est la ligne géodésique passant par ces points (c'est-à-dire la ligne qui correspond à la partie de la circonférence du grand cercle passant par ces points. Un grand cercle étant un cercle formé par l'intersection de la sphère et d'un plan passant par le centre de la sphère).

Dans la géométrie euclidienne, il n'y a dans un plan qu'une droite joignant 2 points ; de même, sur la sphère, il n'y a, en général, qu'une géodésique et une seule joignant 2 points. Cependant, si sur la sphère on prend 2 points diamétralement opposés (comme 2 points aux antipodes sur le globe), il y aura une infinité de géodésiques joignant ces 2 points.

3.2. Réflexions sur le cas présenté

3.2.1. Observation

En changeant de cadre (spatial), en se mettant dans les conditions de l'espace sphérique, on constate qu'un énoncé qui paraissait évident perd sa validité.

3.2.2. Problématisation philosophique

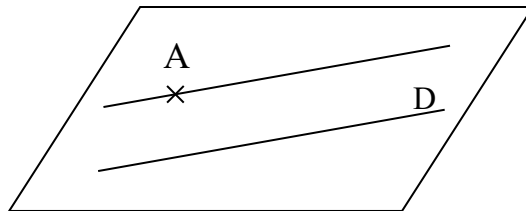
- a) Ce cas permet de montrer qu'il existe des cadres spatiaux différents, conduisant à des énoncés géométriques différents.

- b) Ce cas conduit aussi à poser la question de l'évidence et des axiomes. Chez EUCLIDE, il y avait à la fois une demande (donc la perception qu'il y avait lieu de démontrer, sans pouvoir le faire encore), et une évidence posée implicitement (cf. § 4).

4. Mise en question de l'axiome euclidien des parallèles dans la mise en perspective

4.1. Axiome d'EUCLIDE

On le sait, dans la géométrie euclidienne, est postulée la possibilité de mener dans un plan une parallèle et une seule par un point à une droite donnée.



Dans la géométrie commune -ou dans notre représentation spontanée de la réalité et des figures géométriques-, nous considérons en général comme évident :

- 1) qu'il y a des parallèles (rails de chemin de fer, bords de la feuille de papier, etc..),
- 2) que des droites parallèles ne se rejoignent jamais (ce qui est la "nature" même des parallèles, dont l'existence est admise comme évidente).

Or, l'observation simple de la représentation en perspective, ce que chacun connaît par exemple par les photographies, où le représenté est projeté sur le plan de la pellicule (la représentation en perspective correspond à la projection d'une figure sur un plan projectif), permet d'apercevoir : Que les parallèles du plan représenté se rejoignent dans le plan de la représentation en perspective.

On pourra faire saisir le principe de la perspective en présentant l'appareil à perspective, tel qu'il est montré sur la célèbre gravure de DÜRER (cf. Illustration in Encyclopédie universelle). Le peintre vise la figure ou le paysage à dessiner à travers un œilleton. De ce point, la ligne du regard rejoint les points et lignes de la figure ou des objets à dessiner. Entre l'œilleton et la figure, on met une vitre : les lignes du regard traversent le plan de cette vitre, et on peut marquer les points où les lignes du regard coupent ce plan. On dessine ainsi la figure en perspective (cf. Figure A).

Or, il apparaît que dans le dessin en perspective (le dessin obtenu sur la vitre) les lignes parallèles dans l'objet ou la figure à représenter se rejoignent en un point, point qu'on appelle point de fuite. Si on regarde la figure ou l'objet en vue cavalière (d'en haut, à la verticale), on voit les parallèles ; si en revanche, on les vise à travers l'œilleton et on les représente en perspective sur la vitre (plan de la représentation en perspective), les parallèles n'existent plus.

4.2. Réflexions sur le cas présenté

4.2.1. Observations

- On peut ici observer une situation où se juxtaposent deux ensembles de conditions différentes : les conditions de la représentation cavalière et les conditions de la représentation en perspective à point de fuite.
- Dans le plan, saisi en représentation cavalière, vaut l'axiome des parallèles. En revanche, cet axiome ne vaut pas dans la géométrie projective. C'est un axiome de la géométrie projective que deux droites se coupent toujours, éventuellement à l'infini.

4.2.2. Problématisation philosophique

- a) Ce cas permet une réflexion sur l'évidence. Ce qui est évident dans certaines conditions de représentation ne l'est plus dans d'autres.
- b) Ce cas conduit aussi à une interrogation sur le statut des éléments et énoncés premiers de la géométrie (cf. Problématisation au § I).
- c) Il y a aussi une réflexion à mener sur l'histoire des sciences. Car la confrontation entre les évidences de la représentation cavalière et celles des figures mises en perspective était connue depuis longtemps -comme elle est patente pour chacun de nous, qui ne la théorise pas pour autant-. La question se pose alors de savoir pourquoi il n'y a pas eu une théorisation de la double géométrie, avec axiomes (ou demandes) différents, avant le 19^{ème} siècle.

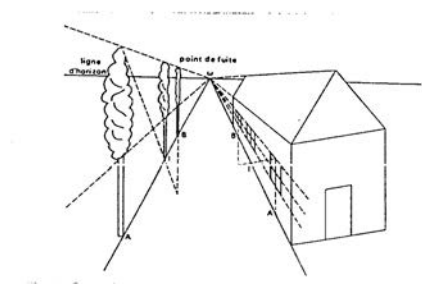


Figure A

4.3. La 5e demande (ou postulat) d'EUCLIDE

4.3.1. Précisions lexicales

Les Eléments d'EUCLIDE comprennent successivement :

- des Définitions,
- des Demandes (en grec : αιτηματα terme aujourd'hui traduit par "postulat"),
- des Notions communes (en grec κοιναι εννιαι cette expression a souvent été traduite par "axiomes"),
- des Propositions (ou Théorèmes).

Les Définitions (par exemple : définition de la ligne, du point..). présentaient des essences, les Notions communes (ou axiomes) sont le nerf du raisonnement (par exemple : "Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles" ou "Si à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les tous seront égaux"), les Propositions sont des énoncés démontrés, sur la base des essences définies (Définitions) et des notions communes (ou axiomes).

Quant aux Demandes (αἰτηματα), ce sont des propositions en attente de démonstration ; une telle proposition est nécessaire pour construire la démonstration d'une autre, et on demande son assentiment, sans pouvoir actuellement la démontrer.

Le terme grec de Demande (αἰτηματα aitemata), a été traduit en latin par "Petitiones" d'abord (Campanus, au 13^{ème} siècle), puis par "Postulata" (Zimberti, au 16^{ème} siècle). C'est de cette dernière traduction latine que vient l'usage de "Postulat" en français.

N.B. 1 : Aujourd'hui, on appelle généralement "axiome" tout énoncé servant de base, fixant les conditions et les règles et définissant les objets premiers, énoncé non démontré. L'axiome est alors considéré comme posé conventionnellement pour servir de base, et comme tel n'est ni vrai ni faux. Et c'est selon la cohérence avec les bases ainsi posées que les propositions démontrées seront vraies ou fausses.

Les axiomatiques d'aujourd'hui (ensembles d'axiomes) comprennent des énoncés qui chez Euclide faisaient partie non seulement des Demandes, mais aussi des Définitions et des Notions communes. Un débat a lieu, par ailleurs, sur la question de savoir s'il faut distinguer les axiomes mathématiques des principes logiques (principe de non-contradiction et principe d'identité), qui eux seraient universels, s'imposant a priori à toute élaboration d'axiomes.

N.B. 2 : Là où on considérait autrefois que les démonstrations mathématiques portaient d'évidences (d'énoncés de valeur universelle, en l'occurrence de Définitions et de Notions communes n'ayant pas à être démontrés), ou de propositions non évidentes mais dont on demandait l'assentiment en attendant la démonstration (les fameuses "Demandes"), on considère depuis le 19^e siècle que les mathématiques partent d'axiomes, c'est-à-dire d'énoncés non contradictoires, choisis pour la théorie que l'on veut exposer.

4.3.2. Histoire de la demande (ou postulat) d' EUCLIDE

- a) EUCLIDE formule cinq Demandes dans les Eléments. La 5^e est formulée ainsi : "Que, si une droite tombant sur deux droites fait des angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits".
- b) C'est ainsi qu'est effectivement formulé le fameux "postulat des parallèles". On peut noter que ce postulat ainsi formulé est logiquement équivalent à des énoncés plus simples, notamment : "Pour toute droite D, et pour tout point P n'appartenant pas à D, il existe une unique droite D', parallèle à D dans le plan déterminé par D et P".

Dans son commentaire de la Proposition I,31 des Eléments, PROCLUS (5^{ème} siècle) avait déjà mentionné que la demande d'EUCLIDE impliquait l'unicité de la parallèle. Le postulat des parallèles, dans la forme où il est connu habituellement (" Dans un plan, par un point on peut mener une parallèle à une droite donnée et une seule"), fut en fait formulé par John PLAYFAIR en 1795 ; on parle alors de l' "axiome de Playfair".

- c) Nous savons grâce au commentaire de PROCLUS que la demande d'EUCLIDE ne fut pas acceptée sans démonstration, et l'histoire des mathématiques rapporte plusieurs essais de démonstration (PTOLEMEE, dans un ouvrage intitulé : Sur la rencontre de droites prolongées à partir d'angles plus petits que deux droits, Agarius, Simplicius, ...).

Au 18^{ème} siècle G. SACCHERI reprit le problème. Il espérait, en niant le postulat euclidien, obtenir une contradiction. Mais, construisant des théorèmes sur la base du postulat contraire à celui d'EUCLIDE, il n'aboutit pas aux contradictions attendues, et obtint en fait un certain nombre de théorèmes cohérents.

Au 19^{ème} siècle, des mathématiciens dont BOLYAÏ et LOBATCHEVSKY envisagèrent alors la possibilité d'une géométrie "alternative", dans laquelle le postulat des parallèles n'est plus vérifié.

IV. Les nombres³⁵

³⁵ Contribution de Mm. G. GLAESER, J. SAMSON, J.-C. MEYER, F. RUSCHER.

1. Intérêt philosophique de la réflexion sur les nombres

La présentation qui suit a essentiellement un double objectif :

- De rappeler des notions et une terminologie aujourd'hui utilisées dans l'enseignement des mathématiques, et dont le professeur de philosophie devrait être informé,
- permettre une réflexion sur la mathématisation.

1.1. Eclairage de la notion de mathématisation

N.B. : Il importe de rappeler ici -et il paraît essentiel de le faire apercevoir aux élèves- que, depuis le 18^{ème} siècle, compter et mesurer ne sont plus les seules activités mathématiques ; l'acte de mathématiser est donc à comprendre comme englobant bien plus que "compter" et "calculer".

Les nombres ont d'abord servi à compter et à mesurer ; or compter et mesurer sont bien de premiers actes de mathématisation, de ce mode d'appréhension d'objets et de situations qu'on appelle mathématisation. Ainsi, en réfléchissant aux nombres, on réfléchira au sens de l'acte de mathématisation, dont on sait qu'il est au cœur de bien des débats sur la vérité, le rapport au réel, les relations entre la connaissance sensible et la connaissance scientifique.

La présentation qui suit devrait permettre d'*entrer dans la problématique* de la mathématisation.

- 1) D'abord, en découvrant *l'origine, l'ancrage de la mathématisation dans le concret*, on pourra repérer une *première base* pour en saisir la signification. En partant de la réflexion sur les nombres, on pourra apercevoir comment la mathématisation est *efficace dans la maîtrise d'une situation pratique* (pour de plus amples développements sur ce sujet, on pourra se reporter à Mathématiques pour l'élève professeur de G. GLAESER, Editions Hermann) ; on comprendra que mathématiser, c'est *opérer* (d'abord sur du réel -avant d'opérer seulement sur des symboles).
- 2) Ensuite, en *saisissant les développements* des méthodes et des concepts, donc en saisissant la dynamique de l'acte de mathématisation, on se mettra à même de poser, sur des bases compréhensibles, la *question de l'essence des mathématiques*. Les réflexions sur l'essence des mathématiques, on le conçoit aisément, auront toujours intérêt à s'appuyer sur une observation directe de l'activité mathématique. C'est dans cette perspective, notamment, qu'on pourra réfléchir à *l'objet mathématique* ; en s'interrogeant sur les développements du travail avec et sur les nombres, à partir de l'observation (que les nombres, qui naissent dans des situations, deviennent des symboles de celles-ci et finalement des objets qui sont étudiés indépendamment de toute situation concrète), on pourra poser la question de l'essence de *l'objet mathématique*, et celle des éventuelles *mutations* de la mathématisation.

1.2. Réflexion sur les développements des mathématiques

A partir des réflexions sur la mathématisation, on pourra aussi aborder une réflexion sur le développement des mathématiques : car ici s'illustre bien la dynamique de la pensée mathématique. A partir de ce qui est présenté sur les nombres, les élèves pourront apercevoir comment, à partir des acquis obtenus dans de premières situations, les mathématiques se développent en introduisant notamment de nouveaux groupes de nombres. On pourra faire observer la nature et l'esprit des développements, en montrant que, par eux, les mathématiques :

- 1) Deviennent de plus en plus efficaces.

Le gain en efficacité exigea notamment l'amélioration de la codification, en particulier par la création de la *numération avec position* -par exemple, dans 12, les seules positions du 2 et du 1 indiquent que ces chiffres donnent, le dernier à droite les unités, le premier à sa gauche les dizaines. La numération avec position, si familière aujourd'hui, fut le résultat d'une longue évolution, d'efforts dans la recherche de l'efficacité qui s'étendirent sur plus de mille ans.

- 2) Théorisent de façon de plus en plus précise leurs éléments et méthodes.

Ainsi, c'est au début du XX^{ème} siècle seulement que la notion d'ensemble, comme notion de base de celle de nombre fut élaborée, et donc qu'on aboutit à la théorie actuelle des nombres.

- 3) S'étendent selon des nécessités à la fois externes (nouvelles situations pratiques) et internes (exigences logiques ou exigences d'efficacité opératoire).

Les premiers nombres sur lesquels on calcula, furent les entiers : cela permettait de dénombrer des objets. Les besoins des mesures exigèrent bientôt la création des fractions et des nombres décimaux : on pouvait alors dire que tel segment mesure les $\frac{3}{4}$ de tel autre segment qui a été pris comme unité de mesure. La découverte des incommensurables, c'est-à-dire du fait qu'on ne pouvait pas toujours exprimer le rapport entre deux segments comme le rapport entre deux entiers -sous forme de fraction - conduisit à son tour à la conception des nombres irrationnels : on a d'abord pensé (les pythagoriciens notamment) que pour un segment donné, on pouvait toujours trouver une unité de mesure (unité de longueur) de manière à ce que la longueur du segment fasse un nombre entier de fois l'unité choisie (à condition de prendre cette unité suffisamment petite) ; or, pour un carré de côté 1, la diagonale vaut $\sqrt{2}$, nombre qui ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers. D'où la nécessité d'étendre la compréhension des nombres, et d'en concevoir un nouveau type.

N.B. : Il convient, compte tenu de la confusion venue de l'usage courant des termes (voir Des chiffres et des Lettres), d'habituer les élèves -surtout ceux qui sont le moins familiarisés avec les mathématiques- à bien distinguer entre le terme de "*nombre*", désignant le *concept* (ou le signifié), et le terme de "*chiffre*", désignant les instruments de *codage* (ou le signifiant).

2. Qu'est-ce qu'un nombre ?

Depuis le début du XX^{ème} siècle (seulement), la notion de nombre est définie à partir de celle d'ensemble.

La notion d'ensemble est une notion primitive (ou notion de base), de même que la notion d'élément d'un ensemble. Le nombre sera défini à partir d'une opération faite sur deux ensembles : l'application d'un ensemble vers un autre ensemble.

2.1. Etude des applications et applications particulières

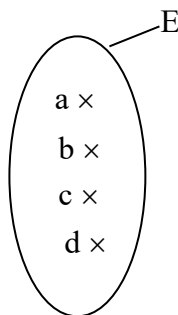
On représente souvent un ensemble par une figure en forme de "patate", et les éléments de cet ensemble par des croix ou des points, des lettres ou des chiffres placés à l'intérieur de cette "patate".

Ainsi, E est un ensemble dont les éléments sont a, b, c et d.

On peut écrire aussi

$$E = \{ a ; b ; c ; d \}.$$

On dit que $a \in E$, $b \in E$ pour exprimer que a et b sont deux éléments de E.

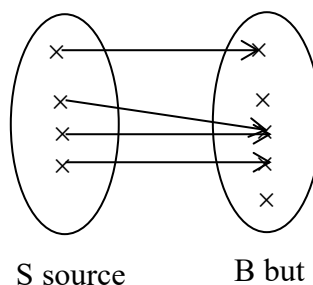


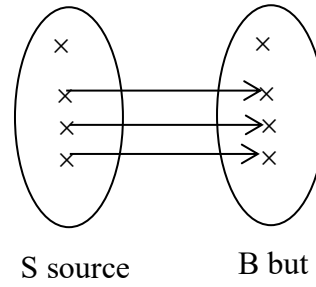
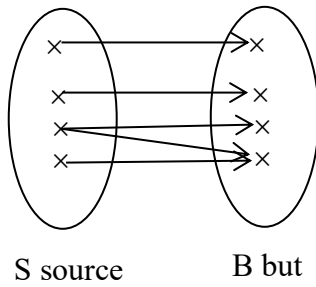
2.1.1. Notion d'application d'un ensemble S nommé "source" vers un ensemble B nommé "but"

Une application de S vers B est une "correspondance" entre S et B telle que tout élément de la source S admet une image et une seule dans le but B.

Exemple

Pour reconnaître une application, il suffit de regarder uniquement la source sans regarder le but. Si de tout élément de la source part une flèche et une seule, la "correspondance" est une application. Sinon elle n'en est pas une.

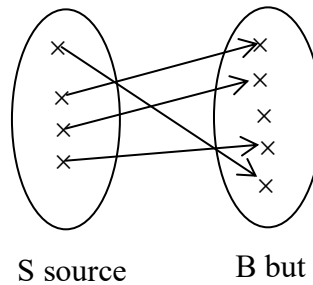
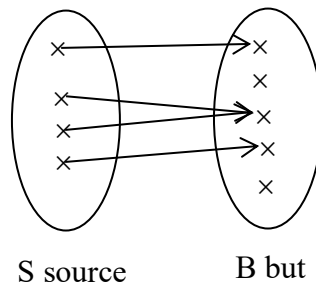


Contre-exemples

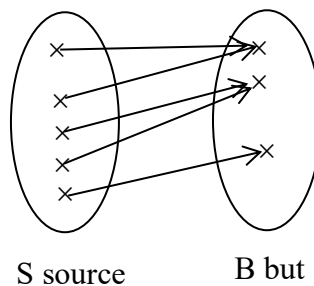
Ces schémas ne représentent pas des applications.

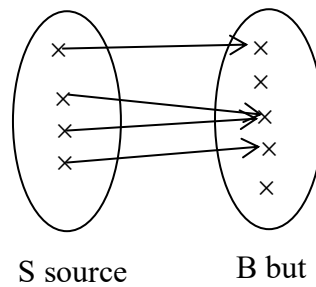
2.1.2. Propriétés de quelques applications

Une application est **injective** si et seulement si tout élément du but est image d'au plus un élément de la source. Une application injective s'appelle aussi une injection.

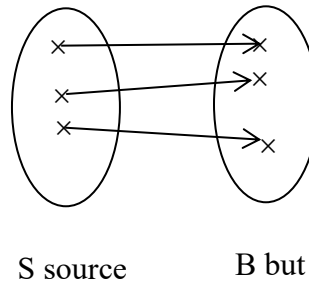
Contre-exemple

Une application est **surjective** si et seulement si tout élément du but est image d'au moins un élément de la source. Une application surjective s'appelle aussi une surjection.



Contre-exemple

Une application est **bijjective** si et seulement si tout élément du but est image d'un élément et d'un seul de la source. Une application bijective s'appelle aussi une bijection.



2.1.3. Définition du nombre

On dira que deux ensembles ont **même puissance ou même cardinal (ou sont équipotents)** s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

Exemple 1

Dans le stock de chaussures d'un commerçant, il y a une bijection naturelle entre les chaussures droites et les chaussures gauches ; on dit qu' "il y a autant de chaussures droites que de chaussures gauches" dans ce stock.

Exemple 2

L'application qui à tout entier naturel associe son double est une bijection de l'ensemble des entiers naturels dans l'ensemble des entiers pairs. Il y a ainsi autant d'entiers naturels que d'entiers pairs naturels. Ici, le tout est égal à la partie.

N.B. : La propriété de pouvoir être mis en bijection avec une de ses parties est propre aux ensembles infinis.

On arrive ainsi à la DEFINITION du nombre entier naturel : un nombre entier naturel est la classe de tous les ensembles finis qui ont le même cardinal.

2.1.4. La bijection en pratique

La bijection est présente déjà dans des situations pratiques archaïques.

Ainsi lorsque, lors d'une transhumance, un berger voulait s'assurer qu'il n'aurait pas perdu de brebis en route (ou n'en aurait pas "adopté" une sans le vouloir..), il mettait en correspondance terme à terme les bêtes de son troupeau avec de petits cailloux (recueillis dans un sac). Il lui suffisait de procéder à cette mise en correspondance au départ et à l'arrivée de la transhumance. Mathématiquement parlant, ce berger effectuait une bijection entre ses bêtes et les cailloux de son sac.

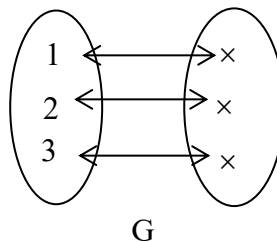
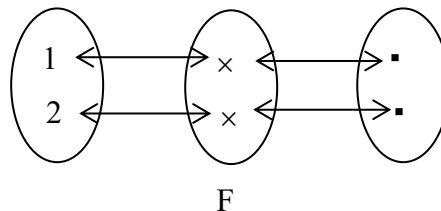
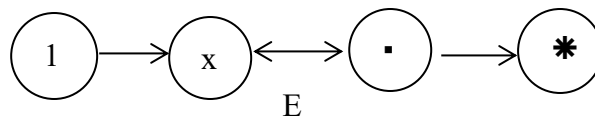
L'effectuation de cette bijection était évidemment possible pour tout troupeau, qu'il s'agît de moutons, de bovidés, de chèvres, etc. ou pour tout autre type d'objets. Le même ensemble de cailloux, pouvait donc servir à établir des correspondances terme à terme, c'est-à-dire effectuer des bijections, avec tout autre ensemble d'éléments.

* Compter à haute voix, c'est mettre en bijection vocale un ensemble fini et une partie de l'étalon universel commençant par 1.

Ainsi, de façon générale, c'est l'étalon universel qui permet de compter. On appelle étalon universel l'ensemble 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ;...etc.

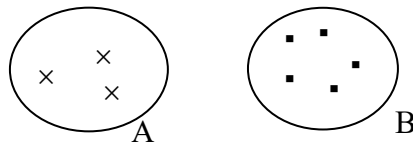
Exemples

On code 1 chacun des ensembles dont le cardinal est celui de E. On code 2 le cardinal de F ainsi que tous les ensembles équipotents, et ainsi de suite. Le cardinal de G est 3.



2.2. Opérations sur les ensembles

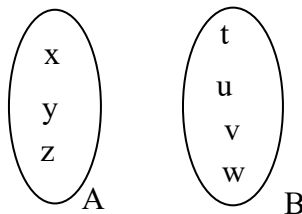
Soient deux ensembles A et B.



Les ensembles A et B sont disjoints s'ils n'ont aucun élément commun. On dit que leur intersection est vide.

2.2.1. Réunion de deux ensembles disjoints

Si A et B sont deux ensembles disjoints, alors $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B.



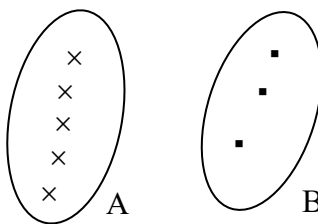
Ainsi, l'ensemble $A \cup B$ (on dit réunion de A et B) est l'ensemble $\{ x ; y ; z ; t ; u ; v ; w \}$

Si A et B sont disjoints, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$; (les notations $\text{card}(A)$ ou $\text{card } A$ représentent le cardinal de A).

On peut définir ainsi la somme de deux nombres.

Exemple

Pour définir la somme de $5 + 3$, on construit deux ensembles disjoints, l'un A de cardinal 5 et l'autre B de cardinal 3. Le cardinal de $A \cup B$ sera la somme des deux nombres (5+3).



* Propriété : la commutativité de l'addition

Comme

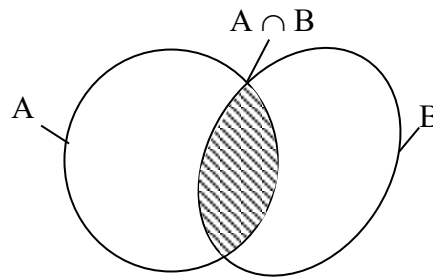
$$A \cup B = B \cup A, \text{card}(A \cup B) = \text{card}(B \cup A).$$

Par exemple :

$$5+3 = 3+5.$$

* L'intersection

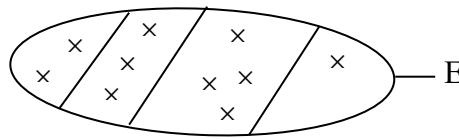
Si les deux ensembles A et B ne sont pas disjoints, on définit l'intersection de A et de B par l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. On la note $A \cap B$.



La réunion de deux ensembles, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, soit à ces deux ensembles.

2.2.2. Partition d'un ensemble

On obtient une partition d'un ensemble E en effectuant un partage de E en sous-ensembles tous disjoints et dont la réunion est E.



La figure illustre une partition d'un ensemble en 4 ensembles disjoints.

Exemple

L'ensemble des entiers pairs et l'ensemble des entiers impairs forment une partition de l'ensemble des entiers.

2.3. Les ensembles de nombres

N^* : ensemble des termes de la comptine ou ensemble des entiers naturels sans le zéro.

Nous avons rencontré plus haut (Nombres et ensembles) les termes de la comptine traditionnelle $\{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \text{etc} \}$. On note l'ensemble des termes de cette comptine.

$$N^* = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; \text{etc} \}.$$

N : ensemble des entiers naturels.

Cet ensemble N^* a été complété par le zéro, notamment lorsqu'on a élaboré la numération avec position. Ce mode de codification exigeait en effet le Zéro, symbolisant le vide -par exemple, dans 102, le 0 indiquera la place vide des dizaines c'est-à-dire "qu'il n'y a pas de dizaine". N est appelé l'ensemble des entiers naturels. Ces nombres sont appelés naturels, parce qu'on les utilise spontanément pour compter (comme le berger ses moutons, l'enfant ses billes,...). Et on les appelle entiers, parce qu'en comptant on prend toujours des objets entiers (le mouton en entier, la miche de pain en entier, etc.).

Z : ensemble des entiers relatifs.

On utilise ces nombres pour désigner des quantités entières positives ou négatives.

Par exemple : par rapport à la surface du sol, on est au niveau -5.

$$Z = \{ \dots -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; \dots \}$$

D : ensemble des nombres décimaux.

D : ensemble des nombres comportant un nombre fini de décimales après la virgule.

D est aussi l'ensemble des fractions qui peuvent s'écrire sous forme $\frac{n}{10^k}$ où n est un entier et k un entier positif.

Les décimaux s'utilisent systématiquement dans le monde de la finance et dans des expériences où l'on attend un résultat numérique. Dans le cas des expériences, le nombre de décimales significatives dépendra de la fiabilité de l'instrument de mesure et de l'habileté de l'expérimentateur.

Pour mesurer les parties de l'unité (la moitié, le quart, le tiers d'un boisseau, par exemple) les rationnels sont plus pratiques ; en effet, même $1/3$ n'est pas décimal.

Q : ensemble des nombres rationnels

Les nombres qui peuvent s'écrire comme un rapport de deux entiers sont dits nombres rationnels. Ils sont appelés ainsi d'après le mot latin "ratio" (à l'origine du mot français "raison") qui signifie : rapport.

En développant certains nombres rationnels, en procédant à la division exacte, on observe que le développement décimal est illimité.

Exemple

$$22/7 = 3,142857142857142857142857....$$

Si la fraction n'est pas élément de D, la partie décimale est à partir d'un certain temps périodique (comme dans l'exemple ci-dessus).

R : ensemble des nombres réels

On s'est trouvé confronté à des nombres non rationnels, c'est-à-dire qui ne pouvaient pas s'écrire comme le rapport entre deux entiers. Ainsi, en cherchant à mesurer la diagonale d'un carré qui a comme longueur de côté 1 (ou l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle, dont les côtés de l'angle droit ont comme longueur 1), on conclut d'après le théorème de PYTHAGORE que la longueur de cette diagonale est un nombre dont le carré est 2 et on montre que ce nombre n'est pas rationnel. On est donc contraint de considérer d'autres nombres, appelés nombres irrationnels. On peut dire rapidement que ce sont les nombres qui ont un développement décimal illimité non périodique.

Par la suite, on appellera nombres réels, l'ensemble réunissant l'ensemble des nombres rationnels et l'ensemble des nombres irrationnels.

Pour les ensembles de nombres évoqués ci-dessus, on pourra finalement écrire :

$$N^* \subset N \subset D \subset Q \subset R.$$

(On lira : N^* est inclus dans N, N est inclus dans D, D est inclus dans Q, Q est inclus dans R).

V. L'algèbre³⁶

³⁶ Contribution de MM. Georges GLAESER, Jean SAMSON, Jean-Claude MEYER, Frédéric RUSCHER.

1. Intérêt philosophique de la réflexion sur l'algèbre

La réflexion sur l'algèbre présente, pour l'essentiel, un intérêt comparable à celui que présente la réflexion sur les nombres. En effet, la démarche algébrique est éminemment une démarche de mathématisation. Elle illustre et permet de percevoir en acte le travail d'appréhension et de résolutions de situations par des concepts et des symboles mathématiques. Ici, la démarche de mathématisation pourra être particulièrement éclairée à travers la question de la mise en équation.

On le sait, le nom d' "algèbre" vient de l'arabe *al-jabr*, qui est une expression médicale signifiant : "Réduire une fracture". Le nom a été retenu suite aux transcriptions latines, au début du Moyen Age, du titre donné par le mathématicien arabe al Khwârizmî (début du 6ème siècle) à l'un de ses ouvrages : Al djabr w'al moukâbala. Dans ce traité, al Khwârizmî se proposait de montrer comment résoudre une équation, en la réduisant d'abord, c'est-à-dire en la simplifiant (par suppression de deux termes égaux placés dans les deux membres de l'équation).

Depuis le début du Moyen Age, le terme d'algèbre a désigné l'acte de mettre en équation, et l'étude des équations.

Nous donnerons d'abord des exemples simples pour montrer la démarche (l'invention) qui est à la base de cette mise en équation :

- 1) Il y a, à la source, l'idée qu'on a parfois intérêt, pour résoudre un problème, à voir s'il n'y a pas un problème inverse plus simple à résoudre.
- 2) Cette idée de prendre d'abord le problème inverse conduira notamment à reposer le problème en supposant que les réponses recherchées (les inconnues) soient les données connues, et que se soient les données du problème de départ qui soient les inconnues.
- 3) A la source de l'algèbre, il y a enfin l'idée d'exposer les éléments tels qu'ils apparaissent dans ce problème inverse sous forme d'une égalité.

Si le terme d'algèbre date du début du Moyen Age, nous montrerons ci-dessous que l'effectuation de cet acte mathématique est plus ancien ; et aussi qu'il s'effectuait bien avant l'usage de lettres symbolisant les inconnues -ce par quoi on a coutume de caractériser l'algèbre-.

Mais notre intention n'est pas essentiellement historique ; elle est de faire apparaître le sens essentiel de l'algébrisation : la mathématisation de situations par leur modélisation, c'est-à-dire ici par leur mise sous forme d'équation.

La perspective historique de la présentation participe de cette intention de faire apparaître l'essence ; car c'est en entrant dans la dynamique du développement de l'algèbre qu'on pourra comprendre comment l'apparition de certaines formes, dont l'usage des symboles littéraux, correspond à une exigence d'efficacité et de rigueur croissantes dans la mathématisation.

Plus récemment, le terme est utilisé pour désigner l'étude des structures dites algébriques.

2. La démarche algébrique

2.1. D'un problème au problème inverse

Les élèves connaissent les problèmes arithmétiques qu'on a pu leur poser à l'école ou qui se posent dans la vie quotidienne.

Quand un problème se pose, 1) on dispose de données (d'éléments connus) et 2) on recherche une réponse (il y a une inconnue).

Exemple

Un capital C a été placé à un taux d'intérêt $n/100$ pendant une durée t . On demande de calculer l'intérêt i rapporté par le placement (par ex : 1000 francs placés à 5% pendant 2 ans).

Ici, les données sont : C , $n/100$, t (le montant du capital, le taux de l'intérêt, la durée du placement). La réponse recherchée est i (l'intérêt rapporté).

On peut inverser ce problème : certaines données deviennent alors inconnues, et certaines inconnues deviennent des données.

Exemple

Un capital C placé à $n/100$ doit rapporter un intérêt i ; pendant quelle durée t faudra-t-il le placer ?

Maintenant les données sont C , $n/100$ et i , et l'inconnue est t .

On remarque déjà que dans la solution du second problème on peut utiliser l'équation écrite pour répondre au premier.

Pour calculer l'intérêt i (premier problème), il faut effectuer le produit de $C \times t \times n/100$, soit l'équation :

$$i = C \times t \times \frac{n}{100} \text{ ou } i = Ct \frac{n}{100}.$$

Pour calculer la durée du placement (problème inverse), on pourra utiliser cette équation, en la transformant :

$$t = \frac{100i}{Cn}.$$

De telles inversions se trouvent aussi en géométrie. Par exemple, on peut demander quelle est l'aire d'un triangle en ayant comme données la base et la hauteur de ce triangle (et la connaissance du théorème selon lequel l'aire est égale au demi-produit de la base par la hauteur). Le calcul consistera à appliquer le théorème :

$$S = \frac{B \times h}{2}.$$

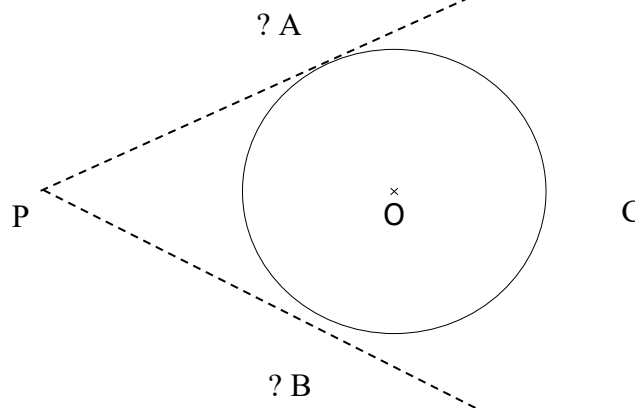
Un problème inverse sera par exemple de calculer la hauteur en ayant comme données l'aire et la base (et le théorème cité).

2.2. Résoudre d'abord un problème inverse plus facile

A la base de la démarche algébrique, il y a l'idée que pour résoudre un problème, on a parfois intérêt à voir s'il n'y a pas un problème inverse plus facile à résoudre.

Nous donnons ici un exemple de cette démarche dans la géométrie. Le passage par le problème inverse consistera à supposer que l'on ait trouvé ce qui était cherché, en d'autres termes que les inconnues deviennent des données et qu'une des données deviennent en revanche l'inconnue.

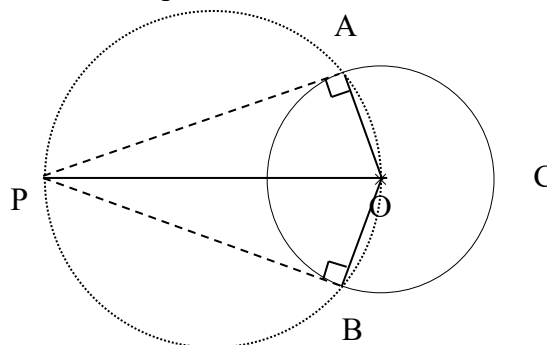
Soient un point P et un cercle C de centre O. On demande de tracer les tangentes à ce cercle C passant par P, c'est-à-dire que l'on demande de trouver les points A et B.



2.3. Démarche de résolution en passant par un problème inverse

On suppose que A et B (points de tangence sur le cercle C) sont donnés. Le problème consistera donc à chercher le point P.

On construit la maquette représentant ce problème :



A partir de là, on peut trouver la solution, et construire méthodiquement le point P.

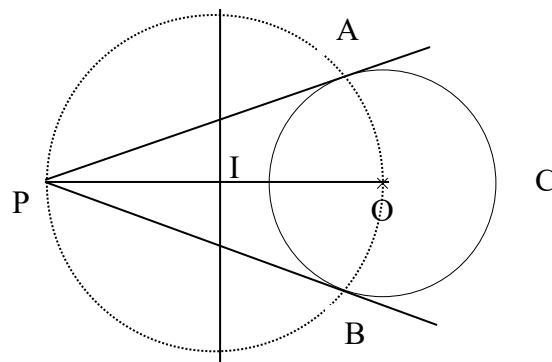
En effet, si (PA) et (PB) sont des tangentes, (OA) et (OB) sont perpendiculaires à (PA) et à (PB) (théorème des tangentes : une tangente est perpendiculaire au rayon du cercle joignant le centre du cercle au point de tangence). Les angles PAO et PBO sont des angles droits, et les triangles PAO et PBO sont donc des triangles rectangles.

Si A et B sont donnés, on construira avec une équerre les angles de côtés AO, AP et BO, BP, AP et BP devant se couper en P (étant l'hypoténuse commune aux deux triangles rectangles).

Or, selon un théorème connu (que les Allemands appellent le "Thalessatz", c'est-à-dire "théorème de THALES" - qui ne correspond pas à ce qu'en France on appelle communément le Théorème de THALES), un triangle rectangle peut être inscrit dans un demi-cercle, dont l'hypoténuse est le diamètre. PO peut donc être considéré comme le diamètre du cercle dans lequel sont inscrits d'un côté le triangle PAO, et de l'autre le triangle POB.

Si, comme c'est le cas pour le problème de départ, c'est le point P qui est donné, il suffira :

- de tracer le segment [PO] (ce sera le diamètre du cercle dans lequel les triangles PAO et PBO seront inscrits,
- de construire le milieu I de ce segment [PO], c'est-à-dire le centre du cercle dans lequel les triangles PAO et PBO seront inscrits) ; la construction se fait par compas,
- de tracer le cercle de centre I et de rayon IP (=IO). Ce cercle coupe le cercle C de centre O en A et B. Le problème posé est ainsi résolu.



3. Les équations de DIOPHANTE d'Alexandrie

Deux exemples tirés de l'Arithmétique de DIOPHANTE d'Alexandrie (v.325-v.410) illustreront ce qu'est la méthode algébrique.

3.1. Exemple 1 : (Arithmétique, Livre I)

« Partager un nombre proposé en deux nombres dont la différence est donnée.

Que le nombre donné soit 100, et que la différence soit 40 unités trouver les nombres.

Posons que le plus petit nombre est 1 arithme donc, le plus grand nombre sera 1 arithme plus 40 unités. En conséquence, la somme des deux nombres devient 2 arithmes, plus 40 unités. Or, les 100 unités données sont cette somme ; donc, 100 unités sont égales à 2 arithmes plus 40 unités. Retranchons les semblables des semblables, c'est-à-dire 40 unités de 100, et, de même, 40 unités de 2 arithmes plus 40 unités. Les deux arithmes restants valent 60 unités, et chaque arithme devient 30 unités.

Revenons à ce que nous avons posé : le plus petit nombre sera 30 unités ; tandis que le plus grand sera 70 unités, et la preuve est évidente. »

DIOPHANTE utilise un terme grec pour désigner le premier nombre recherché (le plus petit), ce qu'on appellerait aujourd'hui la première inconnue. Il utilise une notation abrégée.

Pour résoudre le problème posé, DIOPHANTE propose au fond de poser l'équation suivante :

$$2 \text{ arithmes} + 40 = 100.$$

Il propose ensuite de "réduire" l'équation, en retranchant des termes égaux placés dans les deux membres de cette équation : il retranche 40 à chacun des deux membres :

$$2 \text{ arithmes} + 40 - 40 = 100 - 40.$$

D'où :

$$2 \text{ arithmes} = 60.$$

D'où :

$$1 \text{ arithme} = 30.$$

Le plus petit nombre recherché vaut donc 30, le plus grand 70.

En termes d'aujourd'hui, le problème se traduit par le système d'équations :

$$\begin{cases} X+Y=100 \\ X-Y=40 \end{cases}$$

$X=70$ et $Y=30$ sont solutions.

Cet exemple montre comment, pour trouver la solution à un problème, DIOPHANTE le fait entrer dans la forme d'une équation : on dira qu'il le modélise sous forme d'équation. Et c'est cette modélisation qui permettra de trouver la solution.

3.2. Exemple 2 : (Arithmétique, Livre IV)

La méthode suivie par DIOPHANTE est ici la même que pour l'exemple 1.

« Partager un nombre donné en deux cubes dont la somme des racines est donnée.

Soit le nombre 370 à partager en deux cubes dont la somme des racines est 10 unités.

Posons que la racine du premier cube est 1 arithme plus 5 unités, c'est-à-dire plus la moitié de la somme des racines ; il restera donc comme racine de l'autre cube 1 arithme, moins 5 unités. En conséquence, la somme des cubes sera 30 carrés d'arithme plus 250 unités ; ce que nous égalons à 370 unités, c'est-à-dire un nombre donné, et l'arithme devient 2 unités.

Revenant aux choses posées, la racine du premier cube sera 7 unités ; celle du second cube sera 3 unités ; et les cubes mêmes seront 343 et 27 . »

La somme des nombres est 10. Donc l'un de ces nombres est ≥ 5 et l'autre ≤ 5 . D'où l'idée ingénieuse de prendre pour inconnue non pas l'un de ces nombres, mais plutôt l'excès et le déficit sur 5.

La formule $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ permet de développer $(x+5)^3$ et $(5-x)^3$, ce que DIOPHANTE sait faire (comme il est dit au début de son livre).

4. Géométrie et algèbre

Des liens entre la géométrie et l'algèbre sont également repérables très tôt. Des développements de nature algébrique déjà ont été effectués dans le cadre ou dans le prolongement de problèmes géométriques dès l'Antiquité.

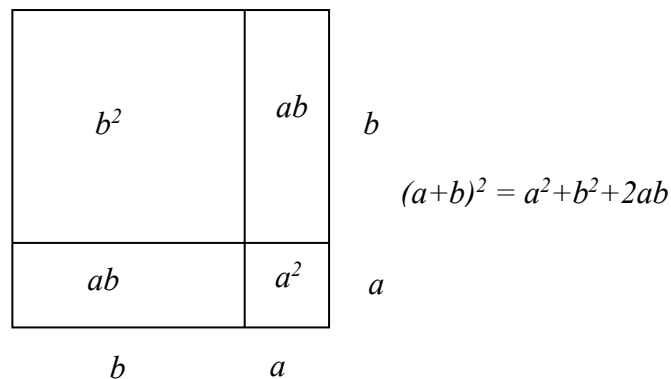
N.B. : Les symboles utilisés aujourd'hui sont récents (19^{ème}, souvent 20^{ème} siècle). De plus chaque mathématicien avait ses propres symboles et ses propres expressions pour désigner ses concepts. Cela rend la lecture des textes historiques difficile, et exige le concours des spécialistes. Pour illustrer notre propos nous ne pourrons faire autrement qu'utiliser le lexique et les symboles en usage aujourd'hui.

4.1. L'équation $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ et son image géométrique

Les mathématiciens ont aperçu très tôt que le même problème pouvait être repris sous forme géométrique (et être présenté sous forme iconique) et sous forme d'équation (égalité entre des quantités présentées sous des formes différentes).

Et de même qu'en géométrie on formulait les théorèmes de façon générale (Ex : "La somme des trois angles d'un triangle..." entendez : de tout triangle), de même dans la présentation sous forme d'équation on donnait une relation d'égalité valable dans tous les cas où les mêmes éléments seraient réunis.

Ici : "Chaque fois qu'il y aura des grandeurs a et b , et que leur somme sera élevée au carré, le produit sera égal à la somme des carrés de ces grandeurs ajoutée à leur double produit et inversement (La somme des carrés de deux grandeurs ajoutée au double produit de ces grandeurs est toujours égale au carré de leur somme)".



N.B. : Le terme mathématique grec qui désigne un produit (comme ab) est : "le rectangle de a par b ".

4.2. Développement algébrique à partir d'un théorème de géométrie (égalité d'aire entre deux rectangles)

Voir §5.3.3. du chapitre II (page 75) l'exemple de développement algébrique à partir d'un théorème de géométrie.

VI. Les notions "statiques" et leurs transformations³⁷

³⁷ Contribution de MM. Georges GLAESER, Jean SAMSON, Frédéric RUSCHER.

1. Intérêt philosophique de la réflexion sur les transformations

Les objectifs de cette présentation des "transformations", outre ceux qui ont été précisés pour les thèmes précédents, seront plus particulièrement :

- 1) Mettre l'accent sur l'aspect "action" de la démarche mathématique, en montrant des procédures de mise en oeuvre, des actions où l'utilisation des objets mathématiques est féconde. On pourra montrer qu'une des dimensions essentielles des mathématiques est d'effectuer des actions (ici : projection d'une droite sur une droite, projection d'un plan sur une droite), de procéder à des transformations d'objets, qui permettent de trouver des solutions et de donner une expression formalisée à de nombreuses situations.
- 2) Montrer que les progrès issus des "transformations" permettent des gains en efficacité, on pourrait dire en élégance, dans les démonstrations.
Par exemple là où, dans les Eléments d'EUCLIDE, il fallait dix pages de démonstrations pour établir les propriétés des triangles isocèles (resp. des parallélogrammes), la connaissance des symétries permet de montrer directement que ces propriétés sont données (si l'on définit les triangles isocèles [resp. les parallélogrammes] comme des triangles admettant un axe de symétrie [resp. des quadrilatères possédant un centre de symétrie]).
On utilise pour rédiger ces démonstrations mathématiques l'expression : "par raison de symétrie".
- 3) Montrer que des notions comme "commutativité" ou "projection" peuvent se trouver dans de nombreuses situations concrètes. Cela peut induire une réflexion sur le statut des concepts mathématiques avec, par exemple, une interrogation sur un rapprochement entre ces concepts et les catégories d'ARISTOTE ; de là on pourra aussi réfléchir à la thèse de BADIOU qui voit dans les mathématiques l'ontologie d'aujourd'hui.
- 4) A partir de l'examen des transformations, on pourra plus largement éclairer, par l'observation de démarches effectives, la question de la pensée mathématique. On pourra, à cette occasion, interroger le fameux texte de HEGEL sur la "défectuosité" de la connaissance mathématique (Préface de la Phénoménologie de l'Esprit). HEGEL y oppose la philosophie, qui "n'examine pas de détermination inessentielle", aux mathématiques dans lesquelles "la compréhension par l'intelligence est une activité qui, pour la chose, est extérieure" et où "c'est une fin extérieure qui régit le mouvement" de la pensée.

2. Vers la notion de transformation

De façon générale, la notion d'ensemble (cf. notamment chapitre IV) est une notion statique, aussi bien dans le domaine numérique (nombres) que dans le domaine géométrique (points, droites, plans).

Mais on peut effectuer des actions (opérations mentales) sur les ensembles. En effet, c'est une dimension importante de l'activité mathématique que d'effectuer des actions sur les ensembles.

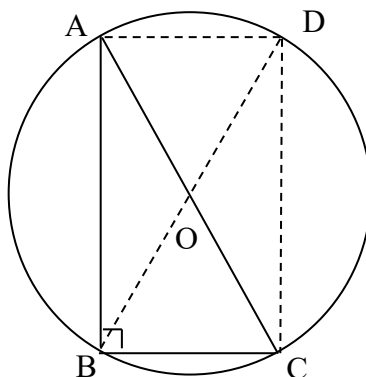
De telles actions ont été effectuées dès les débuts de la géométrie. Celle-ci, à son origine (VI^{ème} siècle avant J.C.), est essentiellement l'étude de quelques figures remarquables : pour cette étude des figures, pour en trouver les propriétés, pour résoudre des problèmes posés à leur sujet et faire les démonstrations, si la figure à étudier a une structure trop pauvre, on effectue des actions sur cette figure (en lui adjoignant quelques éléments auxiliaires, pour obtenir une figure plus abordable (ex.1), ou en réorganisant le puzzle de la figure de manière à obtenir une figure sur laquelle on sait conclure immédiatement (ex.2). Nous proposons ici deux exemples d'actions.

2.1. Exemple 1

Ce premier exemple pourra avoir une grande valeur pédagogique pour la compréhension de la démarche mathématique (ce qui retient ici notre attention), comme d'abord pour l'enseignement des mathématiques elles-mêmes ... à condition que le maître s'abstienne de souffler la réponse.

Problème proposé

On dessine un triangle rectangle ABC sur du papier quadrillé, et on demande de trouver le centre d'un cercle passant par A, B et C. L'élève dispose d'une équerre et d'un compas.



Si SOCRATE ne souffle pas trop tôt l'astuce à l'esclave, celui-ci pourra :

- reconnaître dans le triangle rectangle un demi-rectangle (il adjoindra à la figure ABC le triangle ADC, pour former le rectangle ABCD),
- après avoir ajouté DB, s'apercevoir, par raison de symétrie, que les diagonales d'un rectangle sont de longueur égale et se coupent en leur milieu (O).

La solution est alors trouvée : OA, OC et OB étant égaux par raison de symétrie, O est le centre du cercle recherché.

On notera avec intérêt que la solution ainsi trouvée correspond au théorème qui, en Allemagne, s'appelle le THALESSATZ (théorème de THALES ; théorème démontré 6 siècles avant J.C.). Dans l'enseignement français, ce théorème ne fut longtemps enseigné qu'à la fin de la 4^{ème} ... après avoir eu le temps de dégoûter la plupart des débutants avec des démonstrations artificielles de propriétés que l'on pouvait, par transformations, rendre "visibles sur la figure". Il s'agit, en donnant cet exemple, de montrer qu'une dimension

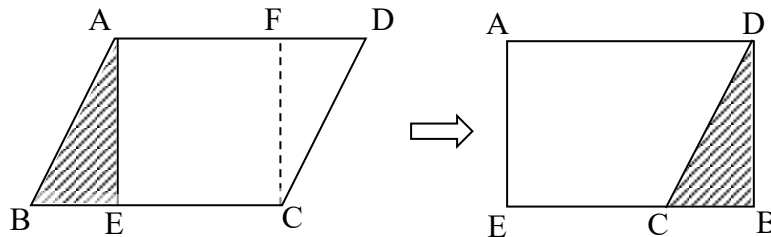
essentielle des mathématiques est d'effectuer des actions, de procéder à des transformations qui permettent de trouver des propriétés et des solutions, en d'autres termes de développer une curiosité active.

2.2. Exemple 2

Pour résoudre un problème et démontrer les propriétés d'une figure, on peut également réorganiser le puzzle de manière à obtenir une figure sur laquelle on sait conclure immédiatement.

Problème proposé

Comment calculer l'aire d'un parallélogramme ?



On trouvera la solution de ce problème si on reconnaît dans le parallélogramme une figure comprenant des triangles (comme ABE et CFD) et un rectangle (comme AECF). En réorganisant le puzzle, on obtient le rectangle AEBD et on peut conclure immédiatement que l'aire du parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur. Attention cependant aux différents cas de figure ! (voir page 49).

2.3. Propriétés des transformations

Les transformations les plus fécondes possèdent les propriétés suivantes :

- a) Elles modifient essentiellement l'objet qui est transformé.
- b) Elles conservent certaines des propriétés initiales.
- c) Elles peuvent détruire certaines des propriétés initiales.

Exemples où on projette une figure contenue dans un plan P, sur un plan P'

- a) la projection d'un cercle, n'est pas toujours un cercle, mais en général une ellipse,
- b) le milieu d'un segment se projette sur le milieu du segment projeté,
- c) la projection d'un angle droit n'est pas toujours un angle droit.

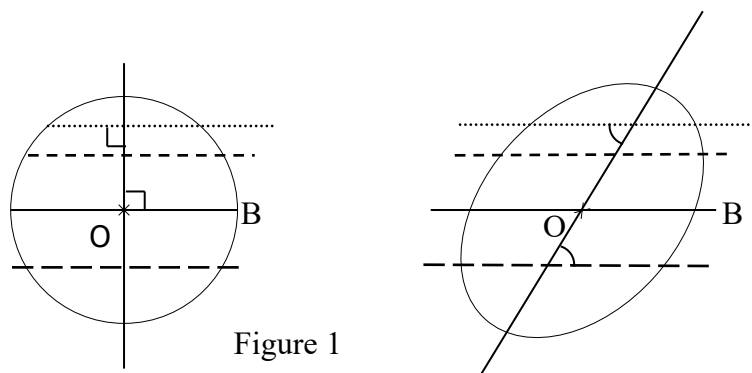


Figure 1

Le théorème : "L'ensemble des milieux des cordes d'un cercle de direction donnée est le diamètre perpendiculaire à cette direction" se démontre par raison de symétrie.

En transformant ce théorème par projection sur un autre plan, on obtient un théorème peu évident : « L'ensemble des milieux des cordes de direction donnée d'une ellipse est une corde (sauf exception non perpendiculaire) passant par le centre de l'ellipse. »

3. Exemples de transformations

Pour les lecteurs qui ont pu, à partir des exemples facilement accessibles présentés ci-dessus, se familiariser avec l' "esprit" des actions (opérations mentales) sur les objets mathématiques, nous proposons à présent des exemples plus "techniques" de transformations.

Nous présenterons successivement des projections (plan sur une droite, puis droite sur une droite), et des symétries.

Et, finalement, nous aborderons des exemples de composition de transformations : ces exemples permettront à nouveau d'illustrer ce qu'est la mathématisation d'une situation. Mathématiser une situation (cf. chapitre V, L'algèbre), c'est la saisir à l'aide de concepts et d'actions (ici : transformations) formels. Les exemples de composition de transformations montreront que l'on peut modéliser des situations concrètes très diversifiées ; par exemple aussi bien des situations où l'ordre des opérations est indifférent (le résultat final ne sera pas affecté par l'ordre dans lequel les opérations seront effectuées) que des situations où l'ordre dans lequel on effectue des opérations modifie la nature du résultat.

N.B. : Les exemples donnés ici sont des exemples de géométrie plane. Ainsi on ne parlera pas d'un plan, mais du plan, qui est le référentiel de la géométrie plane.

N.B. :

- i. La projection P est évidemment surjective (tout point de d est invariant par P),
- ii. mais elle n'est pas injective ; en effet (fig. 2) M' admet une infinité d'antécédents qui sont les points de la droite passant par M' et parallèle à δ . Une telle droite est une projetante.

3.1.2. Projection d'une droite d_1 sur une droite d

Définition et vocabulaire

On donne deux droites d_1 et d , et une direction représentée par une droite δ . On suppose que δ n'est pas parallèle à d .

La projection p de d_1 sur d est la transformation qui à tout point M de d_1 associe sa projection $P(M)$ sur d . En d'autres termes, on remplace, pour définir p , la source, qui était le plan pour P , par la droite d_1 . On obtient ainsi une transformation p de la droite d_1 sur la droite d . La transformation p est la restriction de P à d_1 .

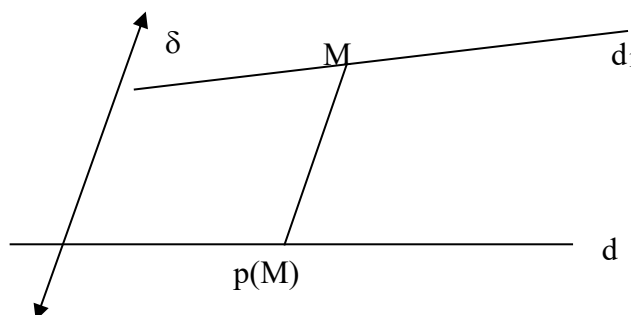


Figure 3

Propriétés

- i. De même que pour P , $pop=p$
- ii. Si $d_1 \parallel \delta$ l'image de d_1 par p est un point de d . Dans ce cas, p n'est ni injective, ni surjective.
- iii. Si d_1 n'est pas parallèle à δ alors p est une bijection de d_1 sur d .
- iiii. Si A, B, C sont trois points de d_1 et A', B', C' sont les images respectives de A, B, C par p , alors

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

(Théorème de THALES en terminologie française).

En particulier, l'image par p du milieu de $[AC]$ est le milieu de $[A'C']$.

Les projections ne conservent pas les longueurs, mais conservent les rapports des longueurs. Ainsi, si $AB = k \times AC$, alors $A'B' = k \times A'C'$. Le rapport des longueurs AB/AC se conserve par projection.

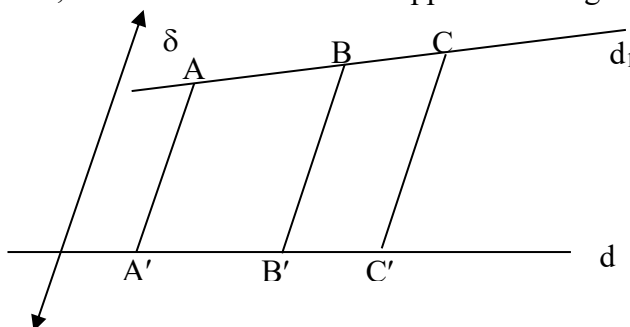


Figure 4

3.2. Les symétries (orthogonales)

3.2.1. Symétrie par rapport à une droite

Une tache d'encre écrasée sur un papier plié en deux comme celles utilisées dans le Test de RORSCHACH donne un bon exemple de points du plan admettant un axe de symétrie.



Le pliage donne une bonne image mentale de ce qu'est une symétrie par rapport à une droite.

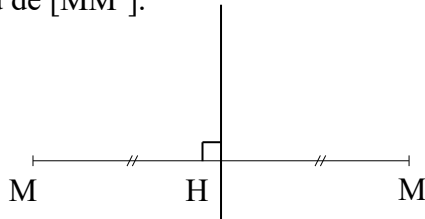
3.2.2. Définition et vocabulaire

On donne une droite d . La symétrie d'axe d est la transformation S qui à tout point M associe le point M' défini par l'algorithme suivant :

Si M est un point de d alors $M=M'$.

Si M n'est pas sur d , alors la perpendiculaire à d passant par M coupe d en H et le point M' est obtenu en prolongeant $[MH]$ d'un segment $[HM']$ de même longueur que le segment $[MH]$. Le point H est donc le milieu de $[MM']$.

On note $M'=S(M)$.



3.2.3. Propriétés générales

- i. Tout point de d est invariant par S .
- ii. Si la symétrie S transforme M en M' alors elle transforme M' en M . On dit que S échange les points M et M' .
- iii. Il résulte de cette dernière propriété que S est bijective ; l'antécédent de M est M' .
- iv. Comme dans l'étude de la projection P , on étudie SoS .
Quel que soit le point M du plan, $SoS(M)=M$.

La transformation SoS transforme tout point M en lui-même ! Tout point du plan est invariant par SoS . Une transformation qui laisse invariants tous les points du référentiel est appelée transformation identique. Cette transformation, comme toute "machine à ne rien faire" n'a aucun intérêt pratique, mais intervient dans de nombreuses situations utilisant des transformations (son statut est analogue à celui du nombre 0 en arithmétique, tant qu'on se contente d'additions).

On note Id la transformation identique.

3.2.4. Propriétés géométriques de S

A noter : certaines propriétés énoncées ci-dessous sont des axiomes, d'autres peuvent s'en déduire. Au niveau présent, dans le cadre de l'examen des transformations par symétries, on les admettra toutes sans démonstration, le pliage les rendant évidentes.

La symétrie conserve les distances (le symétrique d'un segment est un segment de même longueur), l'alignement (le symétrique d'une droite est une droite), les angles géométriques (le symétrique d'un angle est un angle de même mesure mais orienté en sens contraire).

Un triangle est isocèle si et seulement s'il admet un axe de symétrie.

3.3. Symétrie centrale

3.3.1. Définition

On donne un point O du plan. La symétrie de centre O est la transformation qui laisse O invariant et qui, à tout point M du plan, associe le point M' de la droite (OM) tel que O soit le milieu de $[MM']$. On note s cette symétrie.

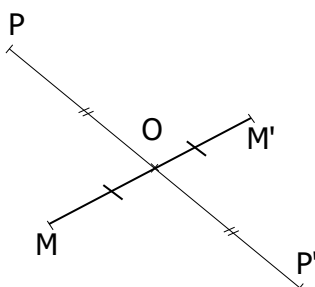


Figure 1

3.3.2. Propriétés générales de s

- i. Le seul point invariant par s est O .
- ii. Par définition, si s transforme M en M' , alors s transforme M' en M .
- iii. Il résulte de cette dernière propriété que $s \circ s = \text{Id}$.
- iv. s est une bijection. Tout point M du plan admet un antécédent unique qui est le point $M' = s(M)$.

3.3.3. Propriétés géométriques de s

s conserve les distances, les angles.

L'image d'une droite d par s est une droite parallèle à d .

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si il admet un centre de symétrie.

4. Exemples de composition de transformations

Intérêt de ces exemples

Si, dans le domaine numérique, on peut noter que l'addition et la multiplication sont commutatives, c'est là un résultat très particulier. En effet, dans bien des domaines, une succession d'actions n'est pas commutative.

Nous donnerons ici quelques exemples où la succession des actions n'est pas commutative ; et nous verrons ensuite que la mathématique des transformations étudie, elle aussi des cas de ce type.

4.1. Exemples de situations concrètes où la succession des actions n'est pas commutative

Dans la vie quotidienne, on rencontre aussi bien des situations où la succession des actions n'entraîne pas de modification du résultat final, que des situations où la succession entraîne des modifications.

Ainsi, que je mette d'abord le sucre dans la tasse ou que je verse d'abord le café n'aura pas de conséquence sur le résultat.

Mais souder le cadre d'un vélo, puis le peindre, ne conduit pas au même résultat que peindre le cadre et le souder ensuite.

De même, faire cuire un oeuf puis le casser ne conduit pas au même résultat que casser un oeuf et le faire cuire ensuite : dans un cas j'aurai un oeuf dur, dans l'autre une omelette !

On peut retrouver les mêmes différences en mathématique (et comprendre à nouveau ici que les mathématiques permettent de modéliser les situations concrètes de différentes natures). Ainsi, "prendre un nombre a , lui ajouter 1, puis élever le résultat au carré" ne conduit pas au même résultat que "prendre un nombre, l'élever au carré et ajouter 1 au résultat".

Cette non commutativité se retrouve (sauf exception) lorsqu'on fait subir aux points du plan deux transformations distinctes successives. Nous nous proposons ici de montrer quelques exemples de cette situation.

4.2. Composition des applications (ou de transformations)

4.2.1. Remarque importante

En français on écrit et on lit de gauche à droite. Ainsi on note $f(x)$ l'image de x par l'application f . Constatez que dans la notation $f(x)$, f est lu en premier et x en deuxième, alors que $f(x)$ est défini par la partie de la phrase soulignée où x apparaît en premier et f en deuxième ! Cette nécessaire inversion est une source de confusions graves dans la composition des applications.

4.2.2. Définition de la composition de deux applications (ou transformations) f et g

On note pour tout élément x

$$[g \circ f](x) = g[f(x)].$$

Cela signifie que l'on fait subir à x l'application f , puis au résultat obtenu $f(x)$ on fait subir l'application g . On retrouve ici l'interversion signalée plus haut.

$$x'' = g(x) \text{ et } x' = f(x) \text{ donc } x'' = g[f(x)] = [g \circ f](x).$$

Cette interversion ne serait pas grave si on avait $g \circ f = f \circ g$. Mais les exemples précédents montrent que cette égalité est en général non vérifiée.

4.3. Composition de symétries

On note S la symétrie d'axe d et S' la symétrie d'axe d' .

4.3.1. Composition de symétries d'axes sécants

On suppose que les droites d et d' sont sécantes.

Propriété

$S' \circ S$ est la rotation de centre l'intersection des droites d et d' , et d'angle le double de l'angle de la droite d vers la droite d' .

$S \circ S'$ est la rotation de même centre mais d'angle le double de l'angle de la droite d' vers la droite d . On dit qu'on tourne dans le sens inverse (de d' vers d) par rapport à la précédente rotation (de d vers d').

4.3.2. Composée de deux symétries d'axes parallèles

On suppose que d_1 et d_2 sont deux droites parallèles et on note S la symétrie d'axe d_1 et S' la symétrie d'axe d_2 .

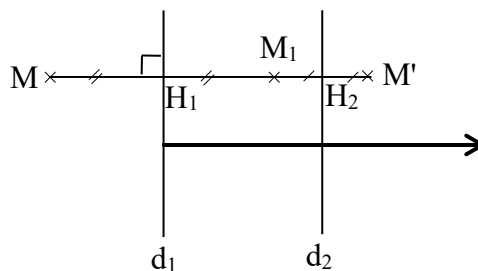
Quel que soit le point M du plan, on note

$$M_1 = S(M) \text{ et } M' = S'(M_1).$$

On a alors

$$M' = S'(M_1) = S'[S(M)] = S' \circ S(M).$$

On désigne par H_1 l'intersection de (MM_1) et de d_1 et par H_2 l'intersection des droites (M_1M') et d_2 .



Propriété

$S'oS$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{2H_1H_2}$. En particulier MM' vaut deux fois la distance entre les droites d_1 et d_2 .

On remarquera que, par contre, SoS' est la translation de vecteur $\overrightarrow{2H_2H_1}$.

VII. Fonctions continues et fonctions discontinues³⁸

³⁸ Contribution de MM. Georges GLAESER, Jean SAMSON, Frédéric RUSCHER.

1. Intérêt philosophique de la présentation de ces fonctions

L'objet de ce chapitre est de lever des malentendus concernant la relation entre les mathématiques et la physique, en montrant sur un exemple que les mathématiques peuvent proposer des modèles multiples de représentation de la nature.

Les malentendus classiques tournent autour de la question du déterminisme.

Rappelons, pour mémoire, celui qui associe mathématisation et affirmation du déterminisme : en appliquant les mathématiques au réel, on affirmerait ipso facto le déterminisme, en d'autres termes, les mathématiques apporteraient avec elles une vision déterministe de l'être.

Or, on le sait :

- 1) les mathématiques peuvent proposer des modèles de relations aléatoires, en d'autres termes on peut modéliser mathématiquement des situations ou des enchaînements non déterminés,
- 2) et, de toutes façons, l'essence des mathématiques n'est nullement d'affirmer des propriétés de la nature, mais d'élaborer des modèles formels (cf. chapitre III : L'algèbre, le développement sur la démarche de mathématisation).

Outre ce malentendu -reposant sur une conception des mathématiques, à la fois réductrice sur leurs possibilités, et erronée sur leur essence- s'est développé parfois un débat obscur sur l'indéterminisme et l'impossibilité de mathématiser les phénomènes discontinus : n'y aurait-il pas indéterminisme (et corollairement impossibilité de mathématiser) lorsque, pour des phénomènes physiques, d'infimes variations des causes conduisent brusquement à des effets très grands ?

Cette interrogation était posée parce que, très largement dans la physique classique, on avait tendance :

- 1) à considérer que la variation des effets était fonction de celle des causes (de petites variations des causes entraînant de petites variations des effets, de grandes variations des causes entraînant de grandes variations des effets),
- 2) et sans le dire explicitement, à voir dans ce "principe" un corollaire nécessaire du principe du déterminisme.

Pour lever ces malentendus qui viennent d'être rappelés et pour élucider le conglomerat des problématiques autour de la mathématisation de la physique et du déterminisme, nous proposons :

- 1) une mise au point rapide sur le principe du déterminisme, son statut et son rôle dans les sciences de la nature,
- 2) une mise au point sur les phénomènes naturels où de petites variations des causes entraînent de grands effets,
- 3) une présentation des fonctions continues et des fonctions discontinues (susceptibles de modéliser les uns les phénomènes naturels continus, les autres les phénomènes naturels discontinus).

1.1. Statut et rôle du principe du déterminisme dans les sciences de la nature

Définition

On dira qu'il y a déterminisme lorsque l'on admet que, les mêmes facteurs étant réunis, nécessairement les mêmes réactions se produiront ("dans les mêmes conditions, les mêmes causes produisent nécessairement les mêmes effets", selon la formulation commune).

Le débat ontologique

Le débat sur le déterminisme est souvent de nature ontologique : dans ce cas, on s'interroge sur l'être de la réalité, on débat sur la question de savoir si la réalité elle-même est déterminée, c'est-à-dire si nécessairement, les mêmes facteurs étant réunis, les mêmes effets se produiront, ou en d'autres termes si les enchaînements des phénomènes sont nécessaires.

Le débat ontologique porte en général sur l'extension universelle (ou non) du déterminisme, et soulève la question de la contingence (ou non détermination) d'une partie au moins de la réalité. Dans les débats philosophiques, la question est le plus souvent centrée sur la liberté : la pensée et l'action humaines échappent-elles au déterminisme et dans quelle mesure les hommes peuvent-ils s'autodéterminer ? La question est aussi celle du hasard, notamment dans les réflexions épistémologiques : y a-t-il des phénomènes naturels non soumis à la régularité des lois de la nature ?

Le principe du déterminisme dans les sciences de la nature

Dans le domaine des sciences de la nature, le débat a parfois été ontologique également. Cependant, dans une perspective proprement scientifique on ne saurait se prononcer sur l'être même, affirmer une caractéristique universelle de l'être. Le scientifique ne peut prouver que tous les phénomènes sont, ont été et seront déterminés, l'observation ne permet pas d'induire un principe universel.

De façon générale, les sciences de la nature s'en tiennent aujourd'hui à la position de **Max PLANCK** (cf. **L'Image du monde dans la physique moderne**, 1937) : le principe du déterminisme est un principe directeur de la recherche.

Il convient, pour comprendre cette position, de rappeler que la science, depuis GALILEE, consiste à rechercher les lois de la nature, c'est-à-dire les relations constantes entre les facteurs constitutifs des phénomènes étudiés. Or, l'étude des lois suppose que l'on admette le déterminisme : si celui-ci n'est pas supposé, la recherche des lois et la démarche expérimentale n'ont évidemment pas de sens.

Lorsqu'on se trouve devant des phénomènes qui apparemment ne sont pas soumis à des lois (les mêmes facteurs réunis ne paraissent pas donner toujours les mêmes effets), il y a, remarquait M. PLANCK, deux positions possibles :

- soit on qualifie le phénomène d'"indéterminé", c'est-à-dire que l'on admet que ce phénomène n'est pas susceptible de donner lieu à la formulation de lois exprimant sous forme de fonctions mathématiques des relations constantes entre les facteurs constitutifs,
- soit on maintient le principe du déterminisme, en posant comme hypothèse que c'est l'insuffisance des connaissances (précision dans la quantification ou l'analyse des facteurs, inadaptation des modèles formels mis en oeuvre..). qui empêche la formulation de lois, dont on postule qu'elles existent.

La première position (possible) serait à rejeter dans la perspective de la recherche scientifique : "l'indéterminisme de principe, en renonçant à fournir une réponse rigoureuse à

une question précise, réduit sensiblement l'ambition de la recherche scientifique, qui n'est autre que de dégager les lois des phénomènes observés. Il ferme d'emblée et sans nécessité une porte qui pourrait nous ouvrir un champ de connaissances entièrement neuf" écrit M. PLANCK. En d'autres termes, poser l'indéterminisme, c'est affirmer qu'il n'y a pas de lois à chercher, et donc interrompre la recherche. Au contraire, poser le déterminisme, c'est adopter une attitude de recherche : là où il y a apparemment des enchaînements aléatoires de faits, on s'assigne la tâche de rechercher l'ordre nécessaire, les lois.

Ainsi, selon la perspective de la science d'aujourd'hui si, en effet, la science ne peut affirmer que la nature est déterminée, ce qui serait une thèse ontologique, elle a un intérêt essentiel à partir toujours de l'hypothèse de la détermination : c'est la position qui fonde son travail et sa fécondité. Le principe du déterminisme est un principe directeur de la recherche, ou principe heuristique.

1.2. La question des grands effets de petites causes

Le constat que parfois d'infimes variations des causes produisent des effets très grands a parfois conduit à une remise en question du principe du déterminisme.

Nous avons déjà rappelé plus haut qu'en effet, dans la physique classique, on avait tendance :

- 1) à considérer que la variation des effets était proportionnelle à celle des causes et que, donc, de petites variations de celles-ci devaient entraîner de petites variations de celles-là,
- 2) à voir là un corollaire du principe du déterminisme.

Or, le constat qu'une petite variation des causes entraîne de grands effets n'est nullement une raison suffisante pour remettre en cause le principe du déterminisme. Si on suppose un immense corps conique (un rocher par exemple) en équilibre sur sa pointe, on admettra facilement qu'une toute petite variation du rapport des forces (une légère brise par exemple) puisse provoquer le déséquilibre, avec une multiplicité de conséquences très importantes... ; la brise aussi bien que la chute du rocher auront été des phénomènes déterminés.

En physique, et dans les applications techniques, on a largement pris l'habitude de faire les prévisions à l'aide des lois connues, qui concernent en général, les facteurs principaux des phénomènes étudiés ou manipulés. On considère dans ces cas-là les autres facteurs comme négligeables. Mais si d'aventure un facteur que l'on avait considéré comme négligeable (soit parce qu'on le considérait comme inessentiel et trop faible pour pouvoir modifier sensiblement le résultat, soit parce qu'on en ignorait l'existence) provoquait une modification des résultats attendus, cela ne conduirait pas le savant à parler d'indéterminisme, mais à juger qu'il faudrait désormais inclure ce facteur dans sa mathématisation du phénomène. Les prévisions météorologiques sont quotidiennement confrontées à cette problématique : on connaît de mieux en mieux les lois des macro-facteurs, mais beaucoup de micro-causes restent mal connues ou difficilement repérables ; mais ce n'est pas pour autant que les météorologues affirment que ces micro-facteurs ne relèvent pas du déterminisme naturel. Ici également, la position de M. PLANCK s'impose aux chercheurs soucieux de ne pas "fermer d'emblée et sans nécessité une porte" au progrès de la connaissance.

Pour ce qui concerne la mathématisation des phénomènes évoqués dans cette partie, la présentation des fonctions continues et de contre-exemples (fonctions discontinues) montrera

que les mathématiques ne sont pas seulement susceptibles de représenter des phénomènes, où les causes variant de façon continue les effets font de même, de petites variations des causes étant accompagnées de petites variations des effets, mais qu'elles peuvent aussi représenter des phénomènes où une cause variant de façon continue, l'effet connaît une variation discontinue (changement d'orientation par exemple), et où une petite variation de la cause peut être accompagnée d'un effet d'un autre ordre de grandeur.

2. Les fonctions continues et des contre-exemples

2.1. Introduction

Lorsque de petites variations des causes d'un phénomène engendrent de petites variations des effets, un problème se pose de façon naturelle. Ce problème s'énoncera ainsi : Peut-on obtenir des variations des effets aussi petites qu'on le veut dès que les variations des causes sont suffisamment petites ?

Pour la mathématisation du problème, en convenant que les intensités des causes et des effets peuvent être représentées par des nombres, le passage des causes aux effets peut être représenté par une relation fonctionnelle et, dans le cas le plus simple, par une fonction réelle d'une variable réelle (il s'agit alors d'un phénomène qui ne dépend que d'un paramètre).

2.2. Continuité d'une fonction en un point

En mathématiques, une fonction réelle f d'une variable réelle x est dite continue au point x_0 si $f(x)$ peut être aussi voisin qu'on le désire de $f(x_0)$ dès que x est suffisamment voisin de x_0 .

Il est nécessaire de bien comprendre ici que la contrainte imposée porte sur la distance de $f(x)$ à $f(x_0)$, (exemple de situation concrète illustrant cette contrainte : la tolérance qu'on peut avoir quant à l'exactitude des dimensions d'une pièce mécanique). Le problème consiste à trouver une valeur de x suffisamment proche de x_0 pour que la contrainte soit vérifiée (Dans la situation concrète proposée : le problème est celui du soin à apporter à l'usinage de la pièce).

En désignant par $|f(x)-f(x_0)|$ la distance de $f(x)$ à $f(x_0)$ et par $|x-x_0|$ la distance de x à x_0 , la définition d'une fonction continue en un point x_0 a été donnée par CAUCHY (1789-1857) :

La fonction f est continue au point x_0 si, quel que soit le nombre réel positif b , il existe un réel positif a tel que pour tout x , $|x-x_0| < a$ implique $|f(x)-f(x_0)| < b$.

2.3. Fonctions continues ; exemple et contre-exemple

Exemple

La fonction $x \rightarrow 3 + 1/2 x$ est continue au point $x = 2$.

En effet :

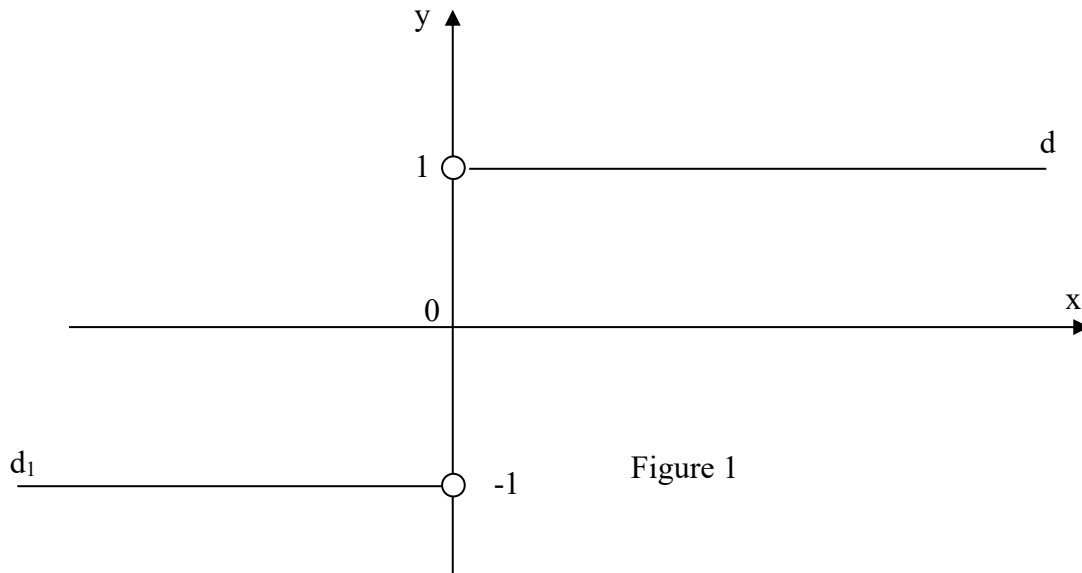
$$|f(x)-f(x_0)| = |3+1/2x-(3+1/2 x_0)| = 1/2 |x-x_0|.$$

Contre-exemple

La fonction signe sgn est définie par :

$$\begin{aligned}\text{sgn}(x) &= -1 \quad \text{si } x < 0 \\ \text{sgn}(0) &= 0 \\ \text{sgn}(x) &= 1 \quad \text{si } x > 0\end{aligned}$$

sgn n'est pas continue au point 0.



En effet, si $x \neq 0$ la distance

$$|\text{sgn}(x) - \text{sgn}(0)| = 1.$$

Alors pour $b=1/2$ il existe x tel que

$$|\text{sgn}(x) - \text{sgn}(0)| > b.$$

Ce qui suffit pour prouver que la fonction sgn n'est pas continue au point 0.

2.4. Exemple de limite d'une suite de fonctions continues

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$:

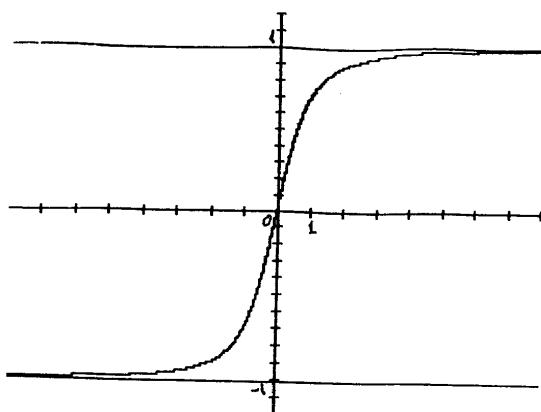
$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Le tableau des variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	-1	0	1

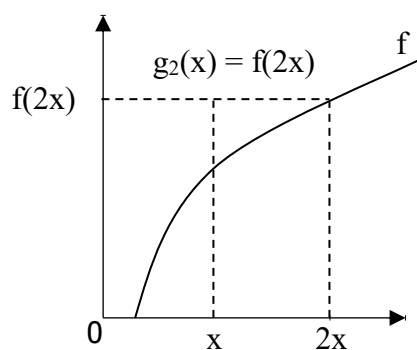
Le graphe de f a l'allure suivante :



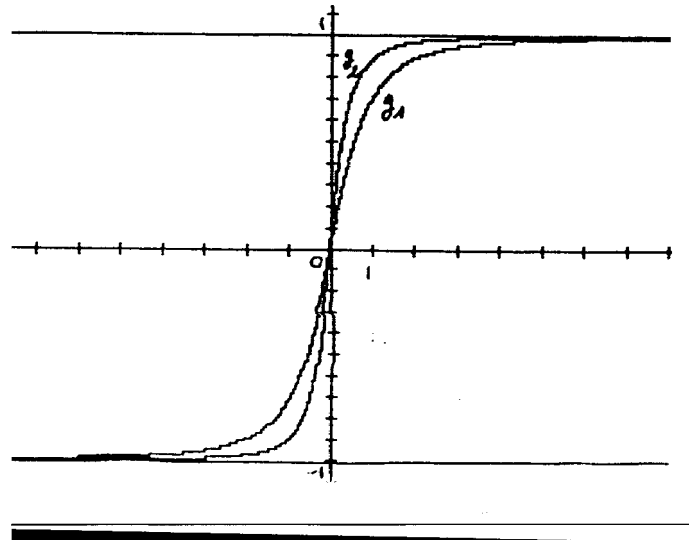
A l'aide de la représentation graphique de la fonction f , on construit la suite de fonctions $g_1, g_2, g_4, g_8, g_{16}, \dots$ définie par

$$g_1(x)=f(x) ; g_2(x)=f(2x) ; g_4(x)=f(4x) ; \dots$$

On peut, par exemple, représenter graphiquement g_2 en fonction de la représentation graphique de f à l'aide du schéma suivant :



Ce schéma montre que pour passer de f à g_2 on conserve les ordonnées en divisant les abscisses par 2. On procède de même pour passer de g_2 à g_4 , puis de g_4 à g_8 , etc.

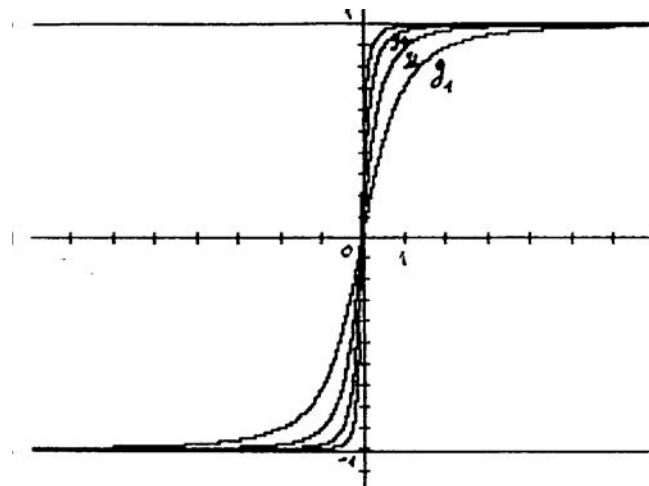


Observations importantes

- Toutes ces fonctions sont nulles pour $x=0$,

- en passant de g_1 à g_2 , puis de g_2 à g_4 , la ligne représentant la fonction se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées (axe vertical).

En continuant indéfiniment, on obtiendra la fonction limite sgn étudiée précédemment (cf. figure 1). Dans ce cas, il y a "rupture" ou saut dans la ligne représentant la fonction (la fonction sera représentée par deux demi-droites, parallèles à l'axe des abscisses (d et d_1 sur la figure 1)).



On a ici l'exemple d'une suite de fonctions continues au point $x=0$, et qui admet une limite discontinue au point 0.

VIII. Les structures³⁹

³⁹ Contribution de MM. G. GLAESER, J. SAMSON, F. RUSCHER.

1. Intérêt philosophique de l'examen de la notion de structure

1.1. Le concept philosophique et le concept mathématique

Le présent chapitre devrait permettre au professeur de philosophie de confronter l'usage fait par les philosophes de la notion de structure (notion clé dans ce courant qu'on appellera "structuralisme, à partir des années 50), avec la définition que les mathématiciens en ont donnée. Cette confrontation est d'autant plus intéressante (sinon nécessaire) que le mot "structure" est employé dans des acceptions analogues, mais cependant diverses, dans des disciplines variées, les sciences humaines, les techniques et les arts, les sciences exactes.

1.1.1. Petit historique

En fait, la notion de structure intervient spontanément dans des disciplines diverses (vers 1900) bien avant qu'on puisse parler de structuralisme (c'est-à-dire d'un système de pensée basé sur la notion de structure). C'est sans doute en chimie qu'on en rencontre les prémices (bien après le rejet des conceptions alchimistes), sous l'influence de John DALTON (1766-1844), qui fut à l'origine de la théorie atomique (recherche de la structure atomique, moléculaire de la matière) et de Dimitri MENDELEIEV, dont le tableau périodique des éléments date de 1869. [On pourra rapprocher ce tableau périodique des éléments avec l'organigramme de n'importe quelle administration comportant des personnages et/ou des services hiérarchisés]. En mathématique, la notion de structure est introduite sous l'influence de HILBERT (1862-1943). Dans les sciences humaines, c'est d'abord en linguistique qu'on en parle en pleine conscience (le Cours de linguistique générale de Ferdinand DE SAUSSURE est publié en 1916 ; puis paraissent, vers 1956, les travaux de JAKOBSON et de CHOMSKY) ; à partir de là, la notion est reprise par les anthropologues et ethnologues : en 1949, Claude LEVI-STRAUSS publie sa thèse sur les "Structures élémentaires de la parenté" -étude des structures familiales-, puis en 1958 son Anthologie structurale.

1.1.2. Sens général de la notion

Toutes ces occurrences de la notion de structure correspondent au même schéma : on étudie une situation concrète en lui substituant un modèle abstrait comportant un ensemble de symboles, dont les éléments sont soumis à des axiomes. On dit que deux de ces modèles ont une structure commune (on parlera d'isomorphisme) lorsque l'on peut traduire l'un dans l'autre par une bijection qui conserve les axiomes.

Nous illustrerons ce point par un exemple extrêmement simple, familier à nos lecteurs. Cet exemple est emprunté aux énoncés de deux problèmes très simples d'école primaire - correspondant à deux situations familières de la vie courante :

1ère situation/problème : Une marchande de bonbons achète chez le producteur... kg de sucre, elle en fait ... bonbons, qu'elle vend ... les dix. Calculez son bénéfice.

2ème situation/problème : Un pharmacien achète chez un grossiste 100 boîtes de médicaments à 10 francs la boîte, et il les revend à 15 francs la boîte. Calculez son bénéfice.

On entend parfois des enfants peu précoces dire qu'ils préfèrent le premier problème parce qu'ils aiment les bonbons et détestent les médicaments... Mais dès que l'instituteur entend un écolier qui déclare : "Ces problèmes, c'est pareil", il sait que cet écolier a une première idée de la structure, de l'isomorphisme.

1.1.3. La notion de structure dans le "Structuralisme"

Il convient, à présent, de rappeler rapidement, également à l'usage de nos amis mathématiciens, la signification de la notion de structure dans la réflexion philosophique, notamment depuis la fin des années 50 (apparition du courant "structuraliste").

La notion s'est alors imposée comme une notion clé, voulant signifier la rupture avec ce qu'étaient jusque là le questionnement et les "prétentions" de la philosophie. Avec le concept de structure, il s'agissait tout à la fois :

- de rejeter la place centrale du sujet humain dans la compréhension de l'histoire et des événements humains de tous ordres. Là où la compréhension philosophique centrait l'examen des actes et des oeuvres humains sur le sujet, voyait leur source dans la conscience libre (ou s'efforçant de l'être), il s'agissait dorénavant de cerner les structures, c'est-à-dire les mécanismes indépendants de la volonté - dont on postulait qu'ils déterminaient les phénomènes humains comme les lois de la nature déterminent les phénomènes naturels,
- de remplacer le questionnement philosophique sur les origines, au fond la quête philosophique de vérité originaire, par une interrogation scientifique sur le fonctionnement des phénomènes, en s'efforçant de dégager les modèles formels -appelés structures- selon lesquels se déploieraient les phénomènes. Les sciences humaines, ainsi conçues comme étude des structures, devant prendre la place de la philosophie réputée liée à une conception désuète de la vérité,
- de repousser les perspectives historiques ("diachroniques") d'une démarche progressive vers le vrai par des perspectives synchroniques, c'est-à-dire de privilégier, pour chaque culture ou chaque époque, la recherche de permanences formelles, d'isomorphismes formels entre les différentes dimensions et volets de celles-ci. Comme le disait Claude LEVI-STRAUSS à propos des mythes : "Ce qu'un mythe dit dans un langage qui semble approprié à un domaine se diffuse dans tous les domaines où pourrait se poser un problème de même type formel". Répondant à une question sur le sens sexuel des mythes, Claude LEVI-STRAUSS ajoutait : "Cela nous frappe parce que cet aspect tient une grande place dans notre propre système de valeurs et dans notre vie sociale. Notez toutefois qu'un mythe ne traitera jamais un problème relevant de la sexualité en lui-même et pour lui-même, isolé des autres. Il s'appliquera à montrer que ce problème est formellement analogue à d'autres problèmes que les hommes se posent au sujet des corps célestes, de l'alternance du jour et de la nuit, de la succession des saisons, de l'organisation sociale, des relations politiques entre groupes voisins... La pensée mythique, confrontée à un problème particulier, le met en parallèle avec d'autres. Elle utilise simultanément plusieurs codes" (in C. LEVI-STRAUSS, D. ERIBON, De près et de loin, 1988 ; NB. Formules soulignées par nous).

Ainsi, dans la réflexion philosophique -et plus précisément dans ce courant émergeant à la fin des années 50 qu'on appellera le "structuralisme"-, la notion de structure a un sens essentiellement programmatique et anti-métaphysique : il s'agit de refuser une conception traditionnelle du questionnement philosophique, et de proposer la recherche des formes -en repérant des isomorphismes, c'est-à-dire des identités formelles appelées structures- dont on postule qu'elles déterminent les oeuvres humaines apparemment libres et hétérogènes.

1.1.4. Le structuralisme philosophique et l'usage des structures mathématiques

Il est important d'observer qu'au-delà et en complément de la perspective anti-métaphysique (voire anti-philosophique, dans la mesure où il y a refus de la philosophie au sens traditionnel du terme), la recherche des structures ainsi confiée aux Sciences humaines a fait appel -de façon plus ou moins appropriée et précise- aux ressources des mathématiques.

Pour formaliser les organisations permanentes des phénomènes, les spécialistes des sciences humaines ont cherché à traduire les "formes" repérées, les isomorphismes -les structures- par des modèles mathématiques : les paliers de formalisation, la sollicitation des modèles mathématiques étant variables selon les théoriciens.

Quand il y a recours explicite aux mathématiques, les structures des sciences humaines peuvent aussi être telles structures mathématiques. Mais il ne faut pas oublier alors la différence de point de vue : pour **le mathématicien**, la structure sera un objet mathématique - plus précisément, on le verra, la conception d'une relation dénuée de contenu concret-indépendamment de toute prise de position métaphysique ou anti-métaphysique, alors que pour **le philosophe** "structuraliste" parler de structure aura valeur de prise de position ontologique : affirmation du déterminisme des actions et pensées humaines, refus de la primauté de la conscience ou "décentrement du sujet" selon la formule du psychanalyste LACAN, dénonciation de la conception traditionnelle de la vérité ou "déconstruction" de la métaphysique occidentale fondée sur le sens de l'être comme présence (selon les formules de DERRIDA).

1.2. De l'intuitif au formel, et de l'étude des "êtres" à celle des relations

En relation avec l'étude qui a été consacrée aux nombres, l'étude de la notion de structure devrait aussi permettre :

- de comprendre et d'illustrer comment sont élaborés puis développés les concepts et les théories mathématiques. L'examen de la notion de structure montre notamment comment des formes qui à l'origine avaient un contenu concret ou 'intuitif' bien déterminé ont pu être vidées de ce contenu pour leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance. Ainsi, si localement on utilisait correctement les nombres au 19^{ème} siècle, on rencontrait cependant des situations traitées comme relevant de problèmes différents, alors qu'elles relevaient de la même structure. Pour unifier des situations qui d'abord paraissaient différentes, pour une bonne mise en ordre des théories et pour mettre en évidence les raisons profondes des résultats, la notion de structure s'est alors avérée l'outil essentiel,
- de poser la question de l'être des objets mathématiques et celle de l'essence même de la mathématique (en montrant comment, dans l'histoire des mathématiques, l'accent est déplacé de l'étude des "êtres" mathématiques à celle des relations).

Pour orienter la réflexion dans ce sens, nous citerons ici deux textes empruntés à BOURBAKI, qui précisent l'intérêt et le sens mathématique de la notion de structure : "C'est la possibilité des extensions successives du calcul qui restait le même, alors que la nature des êtres mathématiques soumis à ces calculs variait considérablement, qui a permis de dégager peu à peu le principe directeur des mathématiques modernes. Les êtres

mathématiques importent peu : ce qui compte ce sont les relations auxquelles ils sont soumis" (Livre II, 1942).

"On peut maintenant faire comprendre ce qu'il faut entendre, d'une façon générale, par une structure mathématique. Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature n'est pas spécifiée ; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments ; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les axiomes de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute hypothèse sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur "nature" propre)" (L'Architecture des mathématiques, 1948).

Ainsi, élaborer des structures mathématiques, c'est élaborer des relations s'appliquant à des ensembles d'éléments. Pour définir la notion de structure, l'élaboration préalable du langage des ensembles sera donc primordiale. Et il faudra considérer que les mots, signes et termes qui interviennent dans la rédaction des axiomes sont dépouillés des significations qu'ils peuvent avoir dans le langage courant. A ce propos nous introduirons et commenterons plus loin la formule fameuse de D. HILBERT : "au lieu de points, droites ou plans, on pourrait dire sans inconvénient tables, chaises ou verres de bière".

1.3. Faire (re)naître la passion de la pensée mathématique

La réflexion sur les structures pourrait aussi alimenter la réflexion sur la pensée, et plus précisément sur les rapports entre la pensée philosophique et la pensée mathématique. Plus précisément, l'étude consacrée aux structures pourrait, nous l'espérons, d'une part dissiper une méprise (à vrai dire quelque peu triviale) sur les mathématiques, et surtout, d'autre part, ranimer l'intérêt des philosophes pour les mathématiques comme pensée -il faudrait même dire la passion des mathématiques, en intégrant cette passion à l' "amour de la sagesse" qui donne son nom à la philosophie-.

1.3.1. La méprise concernant le caractère abstrait des mathématiques

Il convient d'abord de revenir sur la trop fameuse méprise concernant le caractère abstrait des mathématiques. On pourra pour cela consulter le paragraphe 5.1.2.3. (page 62).

1.3.2. L'amour pour la pensée mathématique

En étendant la familiarité aux formes mathématiques, peut-être pourra-t-on aussi ranimer la flamme de l'enthousiasme, disons de l'amour pour la pensée mathématique -et d'abord chez le philosophe, dont l'effort de penser pourra, non seulement se nourrir des mathématiques mais aussi, par la pensée des mathématiques, s'éclairer lui-même.

Nous renvoyons au paragraphe 5.1.2.4. du chapitre II (page 62), « La mathématique est une pensée », sur le raisonnement de validation, où nous détaillons le chemin de l'élaboration des concepts mathématiques.

2. Approche de la notion de structure

2.1. Situations de découvertes de structures

L'objet de cette "Approche" est de présenter des situations concrètes, dont la rencontre est au fond rencontre d'une structure.

2.1.1. Exemples élémentaires

Nous empruntons les premières situations au Livre du problème, Vol. 6, édité par l'IREM de Strasbourg (pages 29 et 36).

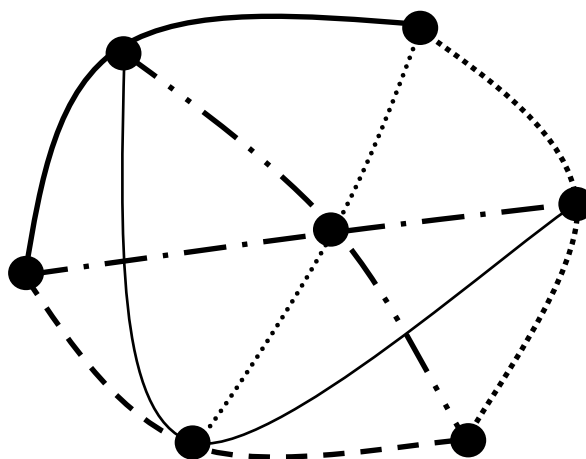
On trouve dans ce volume le compte rendu de deux séances de travail proposées à des élèves de CM1 et de CM2. Les deux séances se sont déroulées à plusieurs mois d'intervalle, séparées par les grandes vacances ; il est remarquable que, malgré l'intervalle de temps, l'analogie entre les deux questions, exprimées par ailleurs avec des mots tout à fait différents, ait été spontanément trouvée par des élèves.

La première situation proposée demande de construire un réseau d'autoroutes reliant sept villes, réseau tel que :

1. D'une ville quelconque à toute autre il y ait toujours une autoroute.
2. Entre deux villes différentes il n'y ait jamais plus d'une autoroute.
3. Deux autoroutes différentes passent toujours par une même ville.

Le compte rendu de présentation de l'expérience montre le soin apporté à la progression de la recherche effectuée pour trouver une solution à cette situation/problème, pour introduire les règles du jeu 1, 2, 3 qui, pour le lecteur, sont des axiomes.

Figure obtenue, présentant une solution de la situation/problème



La deuxième situation nécessite un jeu de 21 cartons sur lesquels sont inscrites les lettres de l'une des listes suivantes (une lettre par carton, chaque lettre est inscrite trois fois) :

Jeu 1 : B, C, E, I, L, O, S
Jeu 2 : C, E, I, O, P, R, T
Jeu 3 : A, B, C, E, L, S, U
Jeu 4 : B, E, I, L, O, S, T
Jeu 5 : C, E, I, L, O, S, U
Jeu 6 : C, E, I, L, O, S, T

On distribue un jeu par groupe de deux élèves, et on demande aux enfants de l'observer :

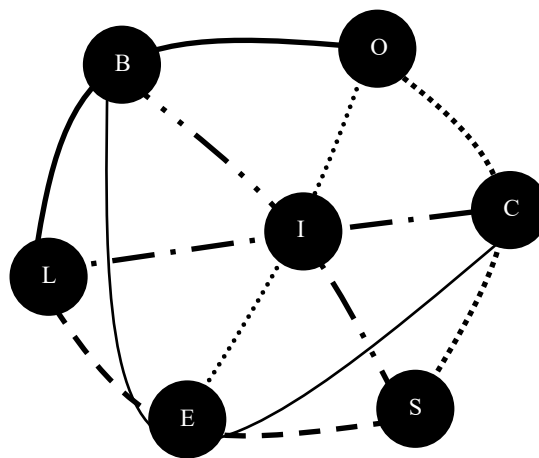
- Combien de cartons ?
- Combien de lettres différentes ?
- Combien de fois chaque lettre est-elle inscrite ?

La règle du jeu (le problème à résoudre) consiste alors à fabriquer avec les 21 cartons dont on dispose sept mots français de trois lettres distinctes, tels que deux mots différents aient une lettre commune et une seule.

Voici, par exemple, une telle liste de sept mots pour le jeu 1 :

OIE, BIS, LES, BOL, SOC, CIL, BEC.

On vérifie alors que tout couple de lettres distinctes intervient dans un mot et un seul, et on dessine au tableau la figure suivante :



Les élèves reconnaissent la figure des autoroutes trouvée au cours de l'année scolaire précédente :

Et ils découvrent ainsi que les deux situations proposées respectent la même structure d'incidence.

Le mathématicien dira qu'un ensemble est muni d'une structure si tous ses éléments sont soumis à une liste de lois dont les propriétés sont prises comme axiomes. Deux ensembles peuvent être munis de la même structure : on dit que ces deux structures sont isomorphes. Dans les confrontations relatées ci-dessus à deux situations, les élèves ont en fait découvert l'isomorphisme entre les structures des deux situations.

2.1.2. Les logarithmes : un exemple d'isomorphisme

Parmi les exemples d'isomorphismes, il faut citer l'exemple spectaculaire des logarithmes, inventés en 1614 par le baron NEPER (1550-1617). Les logarithmes ne sont pas une simple curiosité, mais marquent un véritable saut culturel : ils permettent de simplifier considérablement un grand nombre de calculs (multiplication, division, élévation aux puissances, extraction de racines) et interviennent par exemple dans le calcul des intérêts composés. Ce progrès a été rendu possible grâce à la saisie d'isomorphismes, de structures communes, d'abord entre les progressions arithmétiques et les progressions géométriques. Les fonctions log sont des bijections entre le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^+$ des réels strictement positifs (c'est-à-dire sans 0) et le groupe additif $\mathbb{R}$, qui transforme la multiplication en addition.

Autrement dit, si x et y sont des réels strictement positifs, on a

$$(1) \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

Les propriétés suivantes sont une conséquence immédiate de (1) :

- a) Puisque pour tout entier n , $1^n = 1$, on a d'après (1) : $\log(1^n) = n\log 1 = \log 1$ donc $\log 1 = 0$.
- b) Le logarithme décimal (qui figure dans les tables usuelles) satisfait à

$$(2) \quad \log 10 = 1.$$

On en déduit les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \log(100) &= 2 & \log(1000) &= 3 & \log(10000) &= 4 & \dots \\ \log(0,1) &= -1 & \log(0,01) &= -2 \end{aligned}$$

ainsi

$$\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}.$$

2.2. Premier bilan des situations de découvertes de structures

Il est apparu que pour résoudre des problèmes, répondre à des situations, il faut en examiner l'organisation formelle, et en mathématiques on dira qu'un ensemble est muni d'une structure si tous ses éléments sont soumis à une liste de lois -dont les propriétés sont prises comme axiomes-. Lorsque dans deux ou plusieurs situations on peut retrouver la même organisation formelle (la même structure), on saura que leur traitement peut être formellement le même et en termes mathématiques on dira que lorsque des ensembles sont soumis à une même liste de lois ils sont isomorphes.

Si les structures sont aperçues d'abord dans des situations concrètes, l'élaboration mathématique s'intéressera à ces structures en tant que telles, en les vidant de leur contenu concret. Nous renvoyons au paragraphe 5.1.2.1. du chapitre II (page 60), « Eclairage du problème par la notion de structure », pour des compléments.

2.3. La nouvelle caractéristique de LEIBNIZ

LEIBNIZ recherchait une science dont la langue traiterait de tous les types possibles de relations : une caractéristique universelle. Et les philosophes reconnaîtront dans le projet Leibnizien de "nouvelle caractéristique" la recherche de moyens universels de représentation des caractéristiques formelles des objets et des situations les plus divers -moyens plus universels que ceux de l'algèbre, limités selon LEIBNIZ à la représentation des nombres

indéterminés ou des grandeurs-. A la recherche Leibnizienne d'une "caractéristique universelle" répond justement la notion moderne de structure. LEIBNIZ entendait ainsi donner "au genre humain une espèce d'instrument aussi propre à perfectionner la vue de l'esprit que les lunettes servent à celles du corps" (cf. De la méthode de l'universalité, in Opuscules et fragments inédits, p. 27, éd. 1903).

LEIBNIZ a, en effet, discuté les possibilités de création d'un système qui servirait de méthode directe d'analyse des relations. Si les détails de cette idée n'ont jamais été pleinement travaillés par LEIBNIZ, il avança cependant suffisamment loin dans ses travaux sur l'algèbre et la logique pour être classé parmi les prédécesseurs de l'analyse vectorielle, et plus largement parmi les initiateurs du concept de structure.

Le projet de LEIBNIZ est en particulier exposé dans une lettre à Christian HUYGHENS, datée du 8 septembre 1679. Dans cette lettre, LEIBNIZ écrit :

« je ne suis pas encor content de l' Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pour quoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algebre exprime magnitudinem. Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit représenter des figures et mesme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre représente les nombres ou grandeurs ; et je vous envoie un essay qui me paroist considerable).

J'ay trouvé quelques élémens d'une nouvelle caracteristique⁴⁰, tout à fait différente de l'Algebre, et qui aura des grands avantages pour représenter à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figures, tout ce qui depend de l'imagination. L'algebre n'est autre chose que la caracteristique des nombres indéterminés ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géométriques assez commodes, lors même que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle caracteristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en même temps la solution et la construction et la demonstration géométrique, le tout d'une maniere naturelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes déterminées [...].

Mais l'utilité principale consiste dans les consequences et raisonnemens, qui se peuvent faire par les operations des caracteres, qui ne se sçauroient exprimer par des figures (et encor moins par des modelles) sans les trop multiplier, ou sans les brouiller par un trop grand nombre de points et de lignes, d'autant qu'on seroit obligé de faire une infinité de tentatives inutiles: au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine. Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la geometrie, et qu'on pourroit mesme venir jusqu'à examiner les qualités des matériaux, parce que cela dépend ordinairement de certaines figures de leur parties sensibles. Enfin je n'espere pas qu'on puisse aller assez loin en physique, avant que d'avoir trouvé un tel abregé pour soulager l'imagination. »

Dans ce texte on retrouve en effet cette recherche d'universalité à laquelle répond la notion de structure.

⁴⁰ Ici « caractéristique » veut dire à la fois «codage» et «modèle» au sens actuel (comme on parle du « modèle » de BOHR c'est-à-dire la représentation de la structure d'un atome par un proton autour duquel tourne un électron.

3. Exemples de structures algébriques

Les structures que nous rencontrerons dans ce chapitre sont les structures de GROUPE, d'ANNEAU et de CORPS.

Chacune de ces dénominations évoque un terme (ou une référence ou une idée ou un contexte) sociologique : Pour les groupes et les corps on pourra penser à des groupes de travail ou des groupes politiques, au corps enseignant ou au corps médical. Le mot "anneau" apparaît comme une mauvaise traduction du mot allemand (et anglais) "Ring" signifiant aussi cercle au sens sociologique (un cercle de collectionneurs, par exemple).

Les termes renvoient donc à des ensembles d'éléments.

3.1. Quelques rappels

3.1.1. Rappels concernant la théorie des ensembles

Rappelons que la théorie des ensembles considère des "Ensembles E" contenant des "éléments e".

- 1) A partir de ce langage de base, on construit d'autres ensembles : ensembles produits [L'ensemble produit $E \times F$ est l'ensemble des couples d'éléments (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$], ensembles d'applications d'un ensemble dans (ou sur) un autre [pour la notion d'application, cf. le chapitre sur les transformations].

On dit qu'un ensemble F est une partie de E, si $e \in F \Rightarrow e \in E$ (relation d'inclusion). On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Ainsi on peut construire à partir de E de nombreux ensembles associés, par exemple : $E \times \mathcal{P}(E \times \mathcal{P}(F))$.

Un ensemble structuré est un ensemble défini par ses ensembles sous-jacents et des relations.

- 2) Certaines opérations dans un ensemble de nombres sont associatives, d'autres non (cf. le chapitre sur les nombres). L'addition, la multiplication sont associatives dans $\mathbb{N}$, la soustraction ne l'est pas.

Ainsi, en général :

$$a - (b - c) \neq (a - b) - c.$$

- 3) Une opération dans un ensemble de nombres peut être commutative ou non (cf. chapitre sur les nombres).

Ainsi, dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, la multiplication est commutative alors que la division ne l'est en général pas :

$$1/3 \times 2/5 = 2/5 \times 1/3 \text{ mais } 1/3 \div 2/5 \neq 2/5 \div 1/3.$$

- 4) Pour l'addition, le nombre 0 a un statut particulier : quel que soit le nombre a,

$$0 + a = a + 0 = a.$$

Le nombre 1 a le même statut pour la multiplication que 0 pour l'addition : quel que soit le nombre a,

$$1 \times a = a \times 1 = a.$$

On exprime cette propriété en disant que 0 est un élément neutre pour l'addition et que 1 est un élément neutre pour la multiplication.

- 5) Le nombre 0 a un statut particulier pour la multiplication : quel que soit le nombre a ,

$$a \times 0 = 0 \times a = 0.$$

Le nombre 0 est dit absorbant pour la multiplication.

Si on prend l'ensemble N , et si a et b sont des éléments de N , leur somme est $a+b$ (somme habituelle). Cependant si on ajoute à N le seul élément ("infini"), on a

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty \\ b + \infty &= \infty \\ a + b + \infty &= \infty \\ \infty + \infty &= \infty \end{aligned}$$

Dans cette structure, ∞ est un élément absorbant pour l'addition.

[Cela peut s'exprimer dans un vocabulaire très familier : si on additionne un, deux, trois ... et beaucoup, cela donne beaucoup ! $un + beaucoup = beaucoup$].

- 6) Dans l'ensemble Z des nombres entiers relatifs, tout nombre a admet un opposé noté $(-a)$ vérifiant

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Le nombre $(-a)$ est l'opposé de a .

- 7) Dans l'ensemble Q^* des rationnels, tout rationnel non nul admet un inverse. L'inverse de a/b est b/a .

Un rationnel non nul q et son inverse noté q^{-1} vérifient $q \times q^{-1} = 1$.

- 8) Propriétés de la multiplication dans N .

L'étude du produit cartésien de deux ensembles a permis d'établir la commutativité de la multiplication dans N .

L'associativité de la multiplication se déduit de celle de l'addition dans N en constatant que la multiplication dans N n'est qu'une addition répétée.

La multiplication dans N est distributive par rapport à l'addition : ce qui s'écrit

$$a(b+c) = ab+ac$$

ainsi que

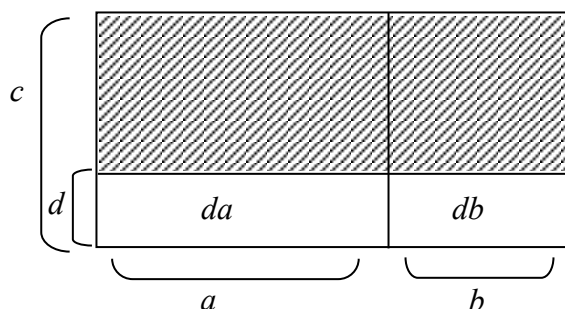
$$(a+b)c = ac+bc.$$

Là aussi on établit ces résultats en remarquant que la multiplication dans N est une addition répétée.

3.1.2. Propriétés de la multiplication dans Z . Observation sur la règle des signes

La classique règle des signes (moins par moins donne plus, plus par plus donne plus, moins par plus donne moins, etc.), donnant le signe d'un produit de deux éléments de Z a été choisie pour conserver la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition dans N .

Les Hindous et DIOPHANTE savaient développer $(a + b)(c - d)$, en calculant l'aire d'un rectangle de côtés $a+b$ et $c-d$ (rectangle hachuré sur la figure ci-dessous) :



Ce qui permet de retrouver chez eux l'usage (ou le respect) de la règle des signes.

Cependant cette règle des signes resta longtemps non démontrée. On trouvera dans un article de M. Georges GLAESER (Epistémologie des nombres relatifs, in *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 2 N°3, pp 303-346, 1981), un exposé éclairant sur l'histoire de la "règle des signes", sur le fait qu'il ait fallu attendre plus de 15 siècles avant que cette démonstration fût faite. M GLAESER montre (et c'est une observation importante aussi bien pour l'histoire des mathématiques et pour la compréhension de leur genèse que pour la réflexion didactique et l'étude des causes de certaines difficultés d'apprentissage) que les maîtres ont longtemps présenté cette règle comme une sorte de dogme, sur lequel il n'y avait rien à expliquer, ni rien à comprendre, la règle étant de celles qu'il suffit d'appliquer. Certains étudiants particulièrement curieux, désirant comprendre l'origine de la règle, ne rencontraient que l'incompréhension de leurs maîtres, leur légitime curiosité étant condamnée comme indice d'inadaptation à la discipline étudiée : ce fut le cas notamment de STENDHAL, qui en témoigne dans son autobiographie (cf. *La Vie d'Henri BRULARD*) :

Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus ($- \times - = +$) ? (C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle « algèbre »).

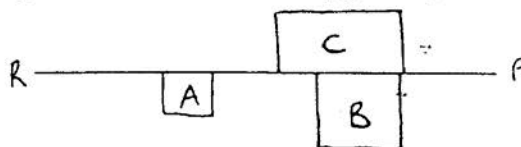
On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient.

M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa « leçon », celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : « Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise »

Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur $- \times - = +$ ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M. Chabert, que M. Dupuy n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les « forts » auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi.

J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que $-$ par $-$ donne $+$ soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats « vrais et indubitables ».

Mon grand malheur était cette figure :



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous ; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A , puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C ?

Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. Chabert rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000 ?

La règle ne fut démontrée qu'en 1867 par Hermann HANKEL, dans sa Théorie des nombres complexes.

Il s'agissait de résoudre le problème suivant : connaissant la multiplication dans $\mathbb{N}$ et l'addition dans $\mathbb{Z}$, peut-on prolonger la multiplication dans $\mathbb{Z}$ à tout l'ensemble ? Il s'agit de prolonger la multiplication dans $\mathbb{Z}$ en respectant la distributivité. Plus généralement, connaissant par exemple les propriétés additives de $\mathbb{R}^+$ HANKEL propose explicitement de prolonger la multiplication de $\mathbb{R}^+$ à $\mathbb{R}$ en respectant un principe de permanence : la structure algébrique cherchée doit avoir de bonnes propriétés. L'existence de l'unicité du prolongement résulte du théorème qui énonce que la seule multiplication sur $\mathbb{R}$, prolongeant la multiplication usuelle de $\mathbb{R}^+$ en respectant les distributivités à gauche et à droite, est conforme à la règle des signes.

Le même article montre également les obstacles qu'il fallut surmonter pour que les nombres négatifs soient utilisés.

PASCAL encore en refusait l'usage ; il écrit dans ses Pensées : "trop de vérité nous étonne ; j'en sais qui ne peuvent comprendre que, qui de zéro ôte 4 reste zéro".

Quant à DESCARTES, il consacre le tiers de son livre "Géométrie" (1628) à l'art de se débarrasser des "racines fausses" (c'est ainsi qu'il désignait les racines négatives d'une équation) ; citons quelques lignes (éditions Jacques Gabay, page 56) :

"Mais souvent il arrive que quelques-unes de ces racines soient fausses ou moindres que rien. Comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité qui fait 5, on a

$$x+5=0,$$

qui étant multiplié par

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$

fait

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4 et une fausse qui est -5 ...".

"Nous pouvons transformer les racines fausses en racines réelles".

"On peut toujours en augmentant la valeur des vraies racines d'une quantité qui soit plus grande que n'est celle d'aucune des fausses, faire qu'elles deviennent toutes vraies, en sorte qu'il n'y ait point deux signes qui s'entresuivent et outre cela que la quantité connue du troisième terme soit plus grande que le carré de la moitié de celle du second".

[Rappelons pour information que DESCARTES résout des problèmes de géométrie par l'algèbre, mais sans utiliser ce que l'on appellera les "coordonnées cartésiennes" ; celles-ci ont été élaborées par EULER, né en 1707, DESCARTES étant mort en 1650. En représentant le "folium" (courbe appelée ainsi parce que ressemblant à une feuille), DESCARTES se restreint au premier quadrant (partie où $x>0$ et $y>0$), alors que cette courbe tout entière est située dans les quadrants 1, 2 et 4. DESCARTES fut le précurseur de la géométrie analytique, qui ne sera vraiment constituée entièrement qu'avec MONGE.]

3.2. Structure de groupe

Un ensemble E muni d'une opération notée $+$ (ou tout autre signe conventionnel) a une structure de groupe si :

- 1) L'opération est associative : quels que soient les éléments a, b, c de E

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

- 2) Il existe un élément neutre e : quel que soit l'élément a de E

$$a+e=e+a=a.$$

- 3) Tout élément de E admet un inverse pour $+$: quel que soit l'élément a de E , il existe un élément noté $-a$ de E tel que

$$a+(-a)=e.$$

Si l'opération est commutative, le groupe noté $(E,+)$ est dit commutatif.

Exemple

L'ensemble des entiers relatifs, noté Z muni de l'addition est un groupe.
 Ce groupe est commutatif.

3.3. Structure d'anneau

Nous avons constaté que l'ensemble Z (ensemble des entiers "relatifs", i.e positifs, négatifs ou nuls) muni de l'addition et de la multiplication vérifie les propriétés suivantes :

- 1) Z muni de l'addition est un groupe commutatif.
- 2) Z est muni d'une multiplication associative.
- 3) La multiplication dans Z est distributive sur l'addition.

Un ensemble vérifiant les propriétés 1, 2, 3 est appelé un anneau. Si la multiplication est commutative, l'anneau est dit commutatif. Ainsi Z muni de l'addition et de la multiplication a une structure d'anneau commutatif. On note $(Z,+, \times)$ cet anneau. Z est un groupe, et de plus c'est un anneau.

Quelques exemples d'anneaux

Remarque : Le premier anneau proposé $(Z,+, \times)$ est tel que la multiplication admette un élément neutre 1. Un anneau vérifiant cette propriété est appelé anneau unitaire.

3.3.1. $(2Z, +, \times)$

Il est facile de trouver des anneaux ne possédant pas cette propriété. Par exemple $(2Z, +, \times)$ n'est pas un anneau unitaire [$2Z$ est l'ensemble des entiers positifs pairs].

La multiplication et l'addition étant celles utilisées dans Z il est facile de vérifier que $2Z$ est un anneau ; cet anneau ne comporte pas d'élément 1, donc n'est pas unitaire.

3.3.2. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans la preuve par neuf (bien connue par tous, pour les vérifications rapides des multiplications -et des autres opérations- qu'elle permet) on ne trouve que 9 nombres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. En effet : 9 est remplacé par 0, 10 par 1, 11 par 2 et, de façon générale, tout élément de $\mathbb{Z}$ est remplacé par le reste de sa division par 9.

[On sait que le reste de la division d'un entier par 9 est le reste de la division par 9 de la somme de ses chiffres].

On considère alors l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, [ensemble des restes des entiers relatifs divisés par 9], noté $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et on munit cet ensemble de l'addition notée encore $+$ qui à tout couple d'éléments de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ associe le reste de la division par 9 de leur somme au sens habituel dans $\mathbb{Z}$. On procède de façon analogue pour la multiplication notée encore $\times$.

Ainsi

$$3 + 12 = 0 ; 4 + 6 = 1 ; -3 \times 7 = 6.$$

L'ensemble $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, +, \times)$ a une structure d'anneau commutatif. Cet anneau possède une propriété remarquable :

un produit de deux facteurs de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ peut être nul sans que l'un des facteurs soit nul.

Exemple

$$3 \times 6 = 0.$$

En effet, 3×6 est le reste de la division de 9 par 18, donc est nul.

On dit que 3 et 6 sont deux diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Un anneau sans diviseurs de 0 (sauf 0) est appelé anneau d'intégrité.

3.3.3. Anneau de polynômes à une indéterminée

L'ensemble des polynômes à une indéterminée est muni d'une addition associative, commutative, admettant comme élément neutre le polynôme 0. De plus, l'ensemble des polynômes à une indéterminée est muni d'une multiplication associative, commutative et distributive par rapport à l'addition.

L'ensemble des polynômes à une indéterminée a donc une structure d'anneau. Le polynôme 1 est élément neutre de la multiplication des polynômes. L'anneau des polynômes est un anneau unitaire d'intégrité.

Un polynôme nul s'annule pour toute valeur de x . Un polynôme non nul s'annule pour un nombre fini de valeurs de x .

3.4. Structure de corps

1) Un corps $(K, +, \times)$ est d'abord un anneau.

2) Si on retire de K l'élément neutre de l'addition, l'ensemble obtenu $K - \{0\}$ est un groupe pour la multiplication.

Les ensembles que l'on a déjà rencontrés qui ont une structure de corps sont $(\mathbb{Q}, +, \times)$ (corps des nombres rationnels) et $(\mathbb{R}, +, \times)$ (corps des nombres réels).

Corps des fractions rationnelles

Soit $P(x)/Q(x)$ une fraction rationnelle, P et Q étant deux polynômes (Q non nul).

La somme de deux fractions rationnelles est une fraction rationnelle.

L'addition de deux fractions rationnelles est associative, commutative, admet l'élément neutre 0 ; toute fraction rationnelle admet une fraction rationnelle opposée.

La multiplication des fractions est associative, commutative, distributive par rapport à l'addition, admet un élément neutre 1 ; tout élément autre que 0 admet un inverse pour la multiplication.

Tous les axiomes de la structure de corps sont vérifiés. L'ensemble des fractions rationnelles muni de l'addition et de la multiplication est un corps commutatif.

4. L'exemple du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

En présentant ce CORPS nous entendons montrer, pour ceux qui veulent préciser davantage des notions et des structures mathématiques, un exemple plus détaillé de développement des mathématiques.

Nous avons déjà vu, dans le chapitre consacré aux nombres, comment les mathématiques s'étendaient selon des exigences à la fois externes (nouvelles situations pratiques) et internes (exigences logiques ou exigences d'efficacité opératoire).

Le présent chapitre concernant les structures montre comment, par et pour une extension des calculs, les mathématiques s'attachent à étudier des types de relations qui puissent se retrouver dans toutes sortes de situations. Ces types de relations devraient permettre d'unifier des problèmes et/ou des opérations auparavant considérés comme différents. L'étude des nombres complexes illustre une extension de la mathématique, en présentant un nouvel ensemble de nombres. Ces nombres, que l'un ou l'autre mathématicien avait parfois "croisés" en tentant de résoudre une équation, avaient été jusque là "évités" parce qu'incompatibles avec les règles en vigueur (notamment la règle des signes évoquée ci-dessus). L'étude des nombres complexes illustre ainsi la découverte d'une nouvelle structure (plus englobante) de relations.

Pour appréhender ce qu'est la mathématique, en saisissant une phase active d'extension, nous allons retracer la genèse historique de ce nouveau corps, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

4.1. Vers les nombres "sophistiques" de BOMBELLI

Au 16^{ème} siècle, les mathématiciens italiens étaient rompus aux règles du calcul algébrique, en particulier aux calculs relatifs aux identités. Ils ne possédaient cependant pas de procédé permettant de formaliser le calcul algébrique, et les calculs étaient entièrement rédigés dans la langue italienne courante. On trouvera dans Mathématiques et mathématiciens de P. DEDRON et J. ITARD (Editions Magnard) un fac-similé et sa traduction en français du calcul que nous allons écrire tout de suite avec le symbolisme actuel.

L'équation du troisième degré

$$(1) \quad x^3 + ax = b \quad (a \text{ et } b \text{ nombres donnés})$$

a été résolue par Jérôme CARDANO (dit CARDAN) ou par TARTAGLIA (une controverse entre eux sur l'antériorité de la découverte n'a jamais été clairement résolue).

[C'est à CARDAN que l'on doit l'assemblage mécanique -sur les directions des automobiles- qui porte son nom. CARDAN cherchait un système pour suspendre les braseros à bord des bateaux en bois, de façon à éviter les incendies.]

L'utilisation d'une identité et un résultat sur les équations du second degré conduisit rapidement à une formule dite "formule de Cardan" (publiée par CARDAN en 1545) qui donne, lorsque c'est possible, une racine notée x de l'équation (1) en fonction des nombres a et b.

$$(2) \quad x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}}$$

Remarques

- 1) Il y a diverses façons équivalentes d'écrire la formule (2). On passe de l'une à l'autre par les opérations usuelles du calcul.
- 2) Chacun se souvient que l'écriture $\sqrt{\quad}$ se lit racine carrée de... L'écriture $\sqrt[3]{\quad}$ se lit racine cubique de....

Vers 1572, le mathématicien BOMBELLI eut l'idée de tester la formule de CARDAN en partant d'une équation du troisième degré ayant une solution évidente. Il prit comme équation

$$(3) \quad x^3 - 15x = 4.$$

L'équation (3) admet une solution qui est 4.

Les coefficients a et b de la formule de CARDAN sont a = -15, b = 4. On remplace a par -15 et b par 4 dans (2) et on obtient :

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \frac{-15}{3\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}}.$$

BOMBELLI est bien conscient que le dernier résultat obtenu est dénué de sens. Il s'agirait en fait de calculer $\sqrt{-121} = \sqrt{11^2 \times (-1)} = 11\sqrt{-1}$, donc la racine carrée de -1, donc de trouver le nombre dont le carré serait -1.

Or, d'après la règle des signes (cf. plus haut) un carré ne peut être négatif, car - par - donne +, comme + par + donne + ; un nombre multiplié par lui-même est nécessairement positif selon la règle des signes.

Rappelons que la règle des signes est alors admise comme s'imposant "évidemment" (voyez les difficultés rencontrées plus tard encore par STENDHAL, cf. le texte cité plus haut), et qu'elle ne sera démontrée qu'en 1867 par HANKEL pour l'ensemble $\mathbf{R}$.

Bien que le dernier résultat

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \frac{-15}{\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}},$$

aboutisse à une donnée inacceptable aux regards d'une règle considérée comme évidente (donc un résultat dénué de sens), BOMBELLI voulut voir les conséquences qui pouvaient résulter de la manipulation, à l'aide du calcul ordinaire, de nombres qu'il appela "sophistiques" [Terme utilisé par BOMBELLI. cf. DELACHET et QUEYSANNE, *Eléments d'algèbre moderne*.] Il développa ainsi son calcul :

Comme

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} = \\ \sqrt{-1} + \frac{5}{2 + \sqrt{-1}} &= 2 + \sqrt{-1} + \frac{5}{2 + \sqrt{-1}} \times \frac{(2 - \sqrt{-1})}{(2 - \sqrt{-1})} = 2 + \sqrt{-1} + \frac{5(2 - \sqrt{-1})}{2^2 - \sqrt{-1}^2} = \\ 2 + \sqrt{-1} + \frac{5(2 - \sqrt{-1})}{5} &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4 \end{aligned}$$

On retrouve bien la solution de l'équation (3) pressentie.

[On note que, initialement, les nombres complexes sont maniés d'une façon "ludique", comme le sont les problèmes d'Echec, jeu dont les règles sont une création arbitraire des hommes, sans origine dans le monde naturel. La découverte, a posteriori, de l'efficacité du jeu avec est une confirmation a posteriori de leur "vérité", entendons de leur pertinence dans la pensée mathématique.]

4.2. Des nombres sophistiques de BOMBELLI aux nombres complexes

La règle de calcul sur les nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ est la suivante : Effectuer les calculs comme dans $\mathbf{R}$ en remplaçant dans chaque occurrence $(\sqrt{-1})^2$ par -1.

Au 18^{ème} siècle, EULER remplace $\sqrt{-1}$ par la lettre i ("i" initiale d' "imaginaire").

Ainsi les nombres de BOMBELLI s'écrivent $a + bi$, $c + di$... où a, b, c, d, sont des nombres réels et i n'est pas réel.

La règle de calcul précitée s'écrit :

- Pour l'addition $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,
- pour la multiplication $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

4.3. Une axiomatique des nombres complexes

Une démarche souvent utilisée en mathématiques consiste, après avoir longtemps "bricolé" avec des objets "de rigueur mathématique douteuse", à rédiger une théorie de rigueur irréprochable, complète, englobant les problèmes qui avaient provoqué les "bricolages".

La démarche utilisée pour développer une telle théorie est souvent la démarche axiomatique, que l'on va appliquer ici.

4) Définition

On appelle nombre complexe tout couple (a,b) de nombres réels. On munit l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes de deux opérations :

- L'addition définie pour tout nombre complexe $(a,b), (c,d)$ par

$$(a,b) + (c,d) = (a + c ; b + d),$$

- la multiplication définie par

$$(a,b) \times (c,d) = (ac - bd ; ad + bc).$$

2) Etude de l'ensemble $(\mathbf{C}, +, \times)$

- i. On vérifie aisément que l'addition est associative et commutative dans $\mathbf{C}$, qu'elle admet un élément neutre $(0 ; 0)$ et que chaque élément de $\mathbf{C}$ admet dans $\mathbf{C}$ un opposé. L'opposé de (a,b) est $(-a,-b)$. Ainsi $(\mathbf{C}, +, \times)$ a une structure de groupe commutatif.

- ii. Les résultats que nous énonçons maintenant nécessitent un peu plus de calculs que ceux relatifs à l'addition, mais ces calculs, ne présentent pas de difficulté.

La multiplication dans $\mathbf{C}$ est associative, commutative, admet un élément neutre $(1, 0)$, est distributive sur l'addition. Tout élément de $\mathbf{C}$ autre que $(0, 0)$ admet une inverse pour la multiplication.

L'étude précédente prouverait que $(\mathbf{C}, +, \times)$ a une structure de corps commutatif.

4.4. Retour des nombres complexes aux nombres de BOMBELLI

La partie précédente, consacrée à l'axiomatique des nombres complexes, semble peut-être indépendante des "calculs" de BOMBELLI. Nous avons déjà rappelé selon quelle démarche se développent souvent les mathématiques : partant d'objets de rigueur d'abord approximative, ou au statut encore non cerné, le travail mathématique consiste à développer des théories rigoureuses. On a montré comment les mathématiques ont fait la théorie rigoureuse de nombres "sophistiqués" de BOMBELLI : la présente partie a pour but de montrer explicitement le lien entre les nombres complexes (théorie construite) et les nombres "sophistiqués" de BOMBELLI.

4.4.1. Etude des nombres complexes de la forme $(a,0)$

Addition : $(a,0) + (b,0) = (a+b, 0)$; l'opposé de $(a,0)$ est $(-a,0)$.

Multiplication : La règle de la multiplication montre que

$$(a,0) \times (b,0) = (ab, 0).$$

Inverse : L'inverse de $(a,0)$ est $(a^{-1},0)$.

Cette étude montre que les nombres $(a,0)$; $(b,0)$ etc. se comportent exactement comme les nombres réels a ; b ; la seule différence existant est d'ordre typographique. On identifie ainsi les nombres complexes $(a,0)$, $(b,0)$... aux réels a , b ,....

Ainsi l'élément neutre $(1,0)$ de la multiplication dans $\mathbb{C}$ n'est autre que le réel 1.

4.4.2. Etude des nombres complexes de la forme $(0,a)$

(nombres appelés imaginaires purs).

Le produit de deux nombres de la forme $(0,a)$ n'est pas de cette forme.

Ainsi, en utilisant la règle de la multiplication dans $\mathbb{C}$

$$(0,a) \times (0,b) = (-ab, 0)$$
 que l'on peut identifier au réel $-ab$.

En particulier,

$$(0,1)^2 = (0,1) \times (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Le couple de réels $(0;1)$ admet comme carré le réel (-1) .

Ainsi, le nombre i qui n'est pas un nombre réel se représente par un couple de nombres réels. On posera

$$(0,1) = i.$$

Avec ces nouvelles notations, le nombre complexe (a,b) s'écrit :

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \times (0,1) = a + bi$$

avec a et b réels, i non réel et $i^2 = (-1)$.

Cette écriture est celle qu'on utilise généralement pour représenter un nombre complexe.

Remarque : La structure de corps commutatif de $\mathbb{C}$ justifie la règle de calcul de BOMBELLI : il faut, en effet, calculer comme dans $\mathbb{R}$ en remplaçant en toute occurrence i^2 par (-1) .

Exemple

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2.$$

IX. Le calcul vectoriel⁴¹

⁴¹ Contribution de MM. G. GLAESER, J. SAMSON, F. RUSCHER.

1. Intérêt philosophique de la réflexion sur le calcul vectoriel

L'examen du calcul vectoriel s'inscrit dans les préoccupations évoquées à propos des études précédentes (notamment sur les Transformations et les Structures). Prolongeant ces études, le présent chapitre voudrait cependant apporter au professeur de philosophie "matière à penser" complémentaire.

1. Ce chapitre sera d'abord l'occasion de présenter un exemple particulièrement éclairant et pédagogiquement fécond -c'est-à-dire qui instruit et sollicite la réflexion- de démonstration mathématique : la démonstration par ARCHIMEDE du théorème relatif à la loi d'équilibre du levier.
2. Chemin faisant, nous aurons à éclairer la naissance de l'analyse infinitésimale, du calcul différentiel et intégral. Ce sera l'occasion d'illustrer un moment de développement des mathématiques, en montrant comment des exigences externes et internes sollicitent la précision ou la création des notions.
Ce sera aussi l'occasion de pratiquer un exercice de "vulgarisation", c'est-à-dire de cet art qui consiste à donner des lumières à des non-spécialistes ou à instruire authentiquement en montrant les problèmes, et en s'efforçant de surmonter les barrières de prérequis d'abord dissuasifs (parce que non présentés dans leur situation problématique réelle).
3. La réflexion sur le calcul vectoriel apparaît ensuite comme une dimension indispensable de la réflexion sur l'espace et les "espaces" -qui seront évoqués dans la suite-, tant au sens mathématique qu'au sens physique.
Car aujourd'hui, lorsque les mathématiques ou la physique font usage de la notion d'espace, cet usage implique très souvent la connaissance des vecteurs. Pour les professeurs de philosophie, parler de l'espace physique ou mathématique sans prendre en compte la connaissance que beaucoup de leurs élèves ont des vecteurs, ce serait développer un discours "irréaliste", puisque non lié à ce qu'est, pour ces élèves, la "réalité" de l'espace dans leur pratique intellectuelle.
4. Cette réflexion sur le calcul vectoriel apparaît également comme un complément indispensable des réflexions sur les modes de connaissance, et tout particulièrement sur l'intuition.

Questionner la représentation de l'espace, c'est inmanquablement demander si celui-ci ou certaines de ses caractéristiques fondamentales sont l'objet d'une connaissance immédiate, intuitive ou si la représentation de l'espace peut être purement conceptuelle.

Cette question est rencontrée, notamment, par les lecteurs de LEIBNIZ ou de KANT.

Il faut bien entendu renvoyer aux réflexions de LEIBNIZ sur le "Situs" (ce qui se traduit pour nous par le "hic et nunc"), qui est une propriété logique et non point spatiale ; la Confessio philosophi et le De Principio individui montrent combien LEIBNIZ "désubstantialise" l'espace (selon l'expression de Yvon BELAVAL, dans son LEIBNIZ, 1962), lui enlève son caractère sensible, pour en faire un simple système de relations logiques entre les substances.

Pour KANT, nous renvoyons tout particulièrement aux développements sur le paradoxe d'objets non congruents (Dissertation de 1770 ; Prolégomènes à toute métaphysique future

&12 et 13, 1783 ; Qu'est-ce s'orienter dans la pensée, 1786). En opposition à LEIBNIZ, KANT y étaye sa thèse du caractère intuitif de l'espace, et veut montrer que celui-ci ne relève pas de l'entendement mais de la sensibilité. Dans ces textes, KANT expose cette observation que des choses "parfaitement identiques en tous les points" (Prolég. & 13) ne sont pas toujours substituables : si des figures planes identiques sont substituables, il n'en est pas de même pour diverses figures sphériques. KANT évoque également le cas de la main droite et de la main gauche ou de nos deux oreilles, pour faire voir qu'il y a là des différences entre choses "parfaitement identiques", différences que l'entendement ne peut concevoir. Ces choses sont conceptuellement identiques selon KANT, "il n'y a là aucune différence interne que quelque entendement pourrait simplement penser (ibid)., et pourtant "la main gauche ne peut être renfermée dans les mêmes limites que la droite ... et le gant de l'une ne peut être utilisé par l'autre" (ibid). : KANT en conclut que ces choses sont distinctes dans l'espace et que leur distinction relève "des intuitions sensibles", de la sensibilité et non de l'entendement. Dans Les premiers Principes (1786), KANT reprend la question en évoquant la différence interne entre des limaçons qui sont semblables et même identiques en tout point, mais dont une espèce est enroulée en spirale vers la droite, l'autre vers la gauche : ces différences ne pourraient pas être réduites à des concepts distincts, ni par suite être expliquées d'une façon intelligible, ce qui veut dire pour KANT qu'elles sont données dans une intuition sensible et non conçues (par l'entendement, faculté de penser).

N.B. : Aujourd'hui, pour le mathématicien, les "choses parfaitement identiques" dont parle KANT sont appelées objets symétriques par rapport à un plan. Cette symétrie conserve les distances (c'est une isométrie), mais modifie l'orientation de la figure.

Aujourd'hui, la notion d'orientation est étudiée dans le cadre du calcul vectoriel, en particulier du produit scalaire, qui permet de définir l'orthogonalité de deux vecteurs et l'espace euclidien. Là où, historiquement, KANT n'entrevoit pas la possibilité de conceptualiser l'orientation et de résoudre par les seules ressources de l'entendement le paradoxe des objets non congruents, les progrès de la conceptualisation mathématique ont permis de surmonter le paradoxe en intégrant la question de l'orientation dans des modèles conceptuels enrichis.

La réflexion sur le calcul vectoriel, l'étude des notions de direction et de sens, puis tout particulièrement le passage de la notion de direction dans un espace euclidien à celle d'orientation dans un espace vectoriel contribueront à enrichir le débat. Il s'agira notamment de saisir comment les démarches mathématiques appréhendent la question de l'orientation et comment (et dans quelle mesure) elles la détachent finalement de ses origines intuitives.

2. Le calcul vectoriel : exposé élémentaire

2.1. Notion de vecteur

A ses débuts, ce calcul a opéré sur des objets géométriques empruntés aux espaces euclidiens (cet espace qui nous est familier). Ces objets sont les vecteurs liés et les vecteurs libres. Le calcul vectoriel sert de modèle à de nombreuses sciences portant sur des objets physiques (non géométriques) : forces, vitesses, champs électriques et magnétiques, etc...

La démarche mathématique a, ici comme pour d'autres notions, fait un travail d'élaboration rigoureuse et exacte de notions dont certaines sont issues du langage commun. Pour éviter les confusions liées au langage commun et aux dictionnaires usuels, nous nous proposons de préciser d'emblée les significations scientifiques de deux termes essentiels : direction et sens.

Dans le langage scientifique, des droites⁴² ont même direction si elles sont parallèles⁴³. Une droite peut être parcourue dans deux sens opposés.

Exemple

Un ascenseur se meut suivant une direction verticale, dans le sens ascendant ou descendant, selon qu'il monte ou qu'il descend. Sur les panneaux de signalisation, la confusion est générale, sauf dans l'expression "sens interdit".

Rappelons que le segment de droite $[AB]$ désigne l'ensemble des points alignés avec A et B et situés entre ces deux points. Ainsi, $[AB]$ et $[BA]$ désignent le même objet.



Un vecteur lié est un segment orienté. On en distingue l'origine et l'extrémité. Si A et B sont distincts, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$ le sont (ce sont des vecteurs opposés). Si A et B sont confondus, le vecteur est nul.

Comme tous les segments de droite, les vecteurs ont une longueur qu'en physique on nomme aussi intensité (ou, plus récemment, norme). On dit que deux vecteurs liés $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont équipollents s'ils sont parallèles, de même sens et de même longueur.

Deux vecteurs liés représentent le même vecteur libre s'ils sont équipollents.

Un vecteur libre est un vecteur lié libéré de son origine et de son extrémité ou encore qu'un vecteur libre est défini uniquement par sa direction, son sens et sa longueur.

Proposition : Etant donné un point A et un vecteur libre $\vec{V}$, il existe un point B tel que le vecteur $\vec{AB}$ soit un représentant du vecteur $\vec{V}$.

On dit que l'on obtient le point B en fixant le vecteur libre $\vec{V}$ en A, A est l'origine, et B l'extrémité du vecteur lié $\vec{AB}$.

Les vecteurs libres peuvent être additionnés selon une loi de composition nommée règle du parallélogramme. Cette règle fut d'abord (dans l'Antiquité) un résultat expérimental grossièrement établi ; ce n'est que plus tard qu'elle devint une loi théoriquement démontrée - en 1650, Gilles Personne DE ROBERVAL (1602-1673) parvint à déduire la construction du parallélogramme des forces du théorème de l'équilibre des leviers, grâce à une élégante mais difficile étude, figurée sur la couverture du livre de René DUGAS, A History of mechanics (voir reproduction jointe), avec une argumentation qui n'a pas à être exposée ici.

⁴² Le mot droite, chez EUCLIDE, est synonyme de ce que nous appelons aujourd'hui segment de droite. C'est ainsi qu'EUCLIDE pose en axiome qu'une "droite" peut être prolongée. Deux "droites" sont dites parallèles si elles restent disjointes après avoir été prolongées si loin qu'on le veut.

⁴³ Aujourd'hui, deux droites sont définies comme parallèles si elles sont disjointes (i.e. sans points communs) ou confondues ; la propriété commune des droites parallèles est leur direction.

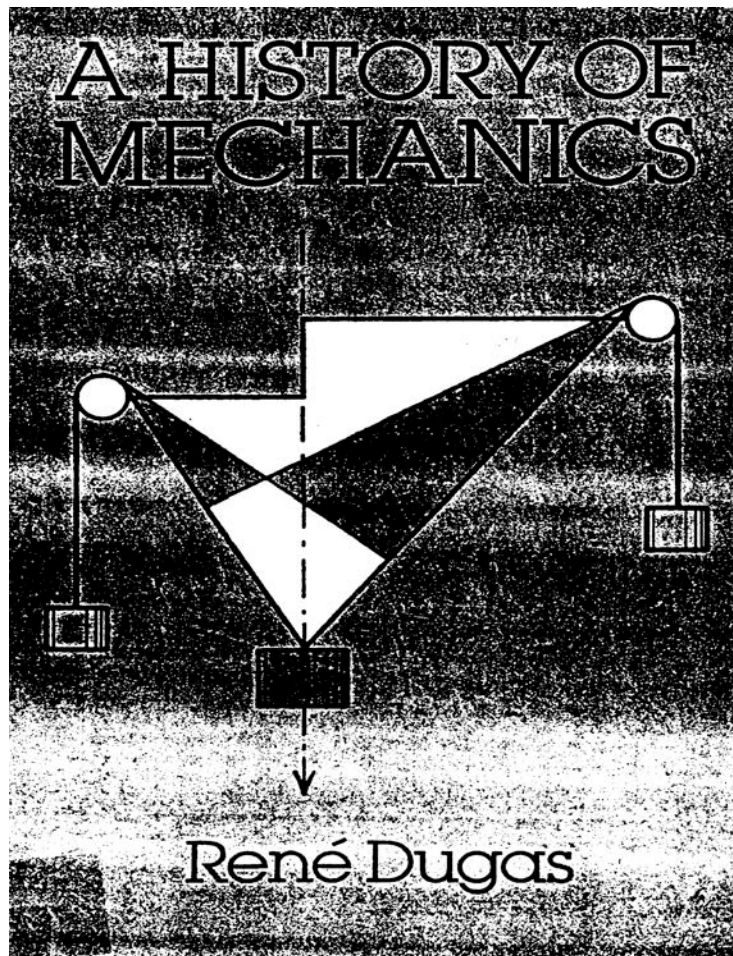
2.2. Remarques épistémologiques sur l'introduction de la règle du parallélogramme

Ce n'est qu'à la fin du XIX^{ème} siècle, que la géométrie enseignée, qui jusque là s'était surtout intéressée aux figures géométriques, commence à considérer les transformations géométriques (symétries, translations, rotations, etc...) comme des objets sur lesquels on peut "calculer" et que l'addition des vecteurs libres sera mise en relation avec la composition des translations.

C'est par voie expérimentale, à l'époque où les constructeurs de pyramides étaient confrontés aux problèmes de levage et de transport de lourds fardeaux, que la résultante de deux ou plusieurs forces avait d'abord été découverte. L'Historien PLUTARQUE (v. 46 -125) énumère quelques "machines simples" qui étaient déjà en usage, en particulier les poulies et les moufles.

Par ailleurs, en physique, ARCHIMEDE (-287 -212) et les savants de son époque avaient commencé la recherche sur la statique (cf. le premier chapitre du traité d'ARCHIMEDE : Sur l'Equilibre des plans), en étudiant l'équilibre des objets pesants et des forces. C'est ainsi qu'ARCHIMEDE avait établi la loi d'équilibre du levier qui est liée à la composition des forces parallèles et au concept de centre de gravité. Sur cette lancée il avait fondé l'hydrostatique en énonçant son fameux principe.

Ainsi, la règle du parallélogramme fut longtemps connue des élèves grâce seulement à l'enseignement de la physique.



3. Le théorème d'ARCHIMEDE relatif à la loi d'équilibre du levier (composition de forces parallèles)

3.1. Le théorème d'ARCHIMEDE

N.B. : L'exposé qui suit est une simplification du texte d'ARCHIMEDE. Il se borne au cas où les forces sont des poids commensurables, et sera présenté sur un exemple numérique. Dans le cas de poids incommensurables il faudrait se référer à quelques axiomes de continuité, ce que nous ne ferons pas ici.

Enoncé du problème

Le levier est une barre rigide de poids négligeable sur laquelle sont accrochées en A une charge de poids P_A et en B une charge de poids P_B (les poids sont exprimés en kilogramme force).

Il s'agit de déterminer la position du point d'appui O de façon que la barre reste en équilibre et horizontale (cf. Figure jointe page 152).

Ce point d'appui peut être immobilisé sur un support, ou fixé à une extrémité d'une corde passant sur deux poulies, un poids de $P_A + P_B$ étant fixé à l'autre extrémité de la corde pour assurer l'équilibre. La figure suivante est faite dans le cas où $P_B = 3\text{kg}$ et $P_A = 5\text{kg}$; on raisonnera ici dans cette hypothèse.

Enoncé du théorème

Le point d'appui doit, dans ces conditions, se trouver en un point O tel que :

$$P_A \times OA = P_B \times OB$$

Conséquence

Si deux forces parallèles et de même sens, d'intensités P_A et P_B , sont fixées en A et B, leur résultante est une force représentée par un vecteur lié d'origine O parallèle et de même sens que les forces données d'intensité $P_A + P_B$.

Axiome accompagnant l'énoncé

La résultante de n forces équipollentes, dont les origines sont placées symétriquement par rapport à O, est une force représentée par un vecteur lié d'origine O, de même direction et de même sens que les forces données et dont l'intensité est le produit par n d'une quelconque des n forces données.

Démonstration du théorème

Déterminons d'abord la position du point O par tâtonnement : dans ce cas, par définition du "bon tâtonnement", l'équilibre sera réalisé. Nous dessinons une maquette telle que celle de la figure ci-jointe, sur laquelle nous partageons le segment AB en quatre segments de même longueur l. En reportant un segment de longueur l à droite de B, on définit le point B', en reportant successivement deux segments de longueur l à gauche de A on obtient le point A'. On obtient ainsi, de A' à B', 7 segments de même longueur l. Les 8 points qui délimitent ces segments (penser aux piquets et intervalles) seront les points d'ancrage de huit poids de 1 kg chacun.

Les trois poids situés le plus à droite ont pour résultante le poids de 3 kg fixé en B, les cinq autres ont pour résultante le poids de 5 kg fixé en A.

Remarque

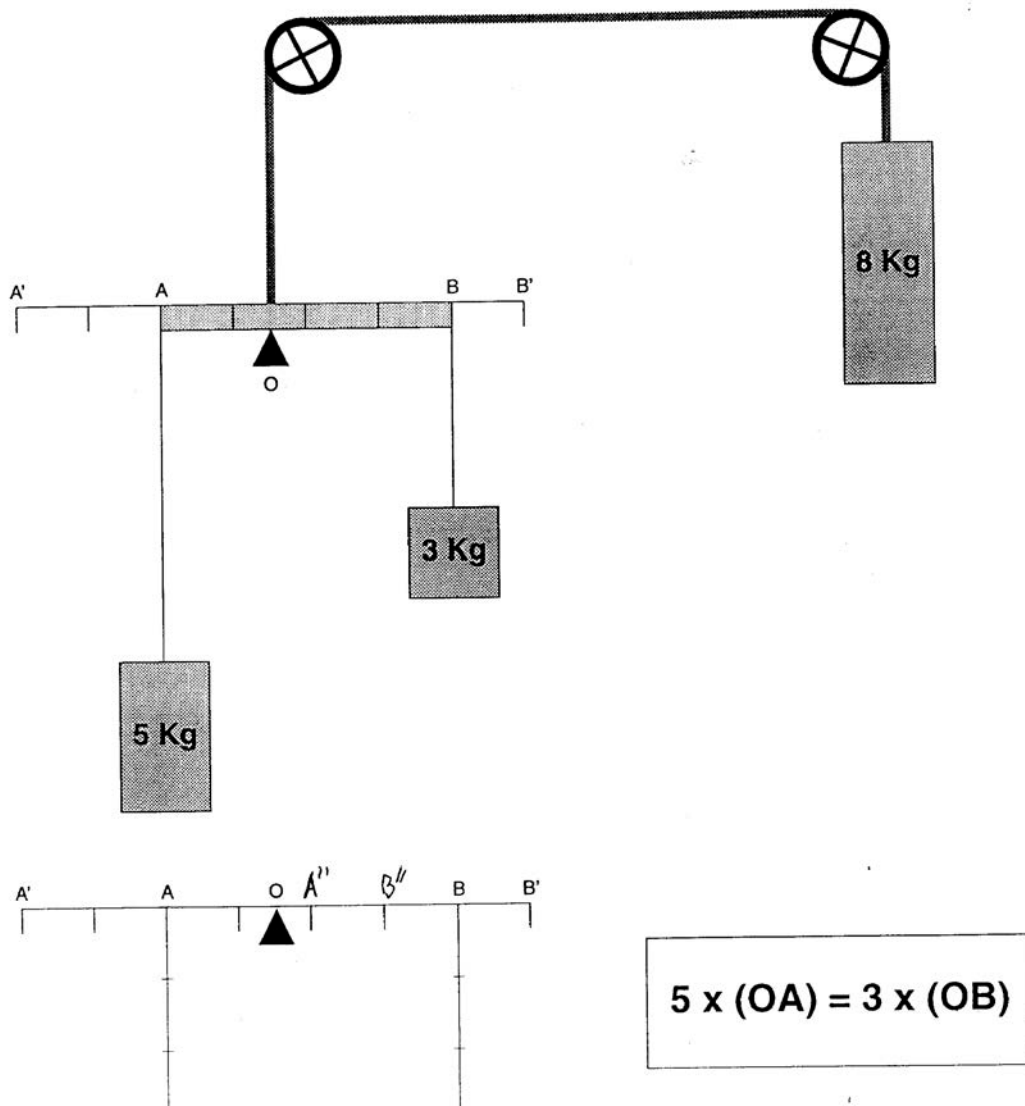
Les résultats énoncés sont des conséquences immédiates de l'axiome accompagnant l'énoncé donné du théorème.

Le but de la manœuvre exécutée a été de remplacer le système de deux poids différents (l'un de 3 kg, l'autre de 5 kg) par huit poids de 1 kg régulièrement espacés. L'axiome précité nous indique que la résultante de ces huit poids (et par conséquent des deux poids initialement donnés) est un poids de 8 kg fixé au milieu O de A'B'. On voit que

$$5 \text{ OA} = 3 \text{ OB.}$$

Remarque

Il aurait certes été possible d'utiliser une langue plus précise et plus concise pour expliquer l'idée d'ARCHIMEDE. La forme choisie -le récit d'une manipulation- vise à "fixer" une base concrète, à exploiter ensuite dans une réflexion partagée avec ses élèves -comme on le fait souvent, en partant du problème des fontainiers de Florence et des travaux de TORRICELLI, pour réfléchir à la méthode expérimentale.



3.2. Le vrai, le vraisemblable, l'improbable et l'impossible

Expliquons maintenant ce que peuvent être les scrupules d'un mathématicien face à l'AXIOME énoncé par ARCHIMEDE.

Pour avoir de droit d'invoquer des raisons de symétrie, il faut s'assurer que la situation étudiée est vraiment symétrique, ne comporte pas de dissymétries cachées.

Nous passerons sur les cas où les dissymétries sont délibérément créées par un illusionniste pour "truquer" les résultats d'une expérience... le goût du succès ou l'appât du gain l'emportant sur le souci du vrai. Ainsi un équilibre entre des poids métalliques peut être rompu grâce à un puissant aimant caché derrière le rideau...

En revanche, sont très intéressantes les situations où le scientifique recherche des dissymétries cachées, pour réfuter des conjectures hâtives :

1) En mathématiques, cela correspond à la recherche de "contre-exemples". Et une telle recherche appartient pleinement à l'heuristique mathématique. Ainsi, lorsqu'une propriété d'abord énoncée sur le mode universel apparaît par la suite comme difficilement démontrable, le mathématicien se demande s'il n'existe pas des "contre-exemples" : il va chercher des exceptions, aussi artificielles soient-elles, pour tenter de mettre en défaut certains énoncés réputés, à tort, universels. Le fameux ruban de MÖBIUS (c'est une surface unilatère) est un des exemples des plus élégants à ce propos : en le coupant suivant la ligne médiane tracée sur le rectangle de départ, on n'obtient pas deux rubans mais un seul ruban avec deux bords (contrairement au ruban de MÖBIUS qui n'en a qu'un). En revanche, si on le coupe au tiers de sa largeur, on obtient deux rubans enlacés.

2) En physique également, le travail du chercheur conduit à débusquer de fausses conjectures, des idées reçues -parfois fondées sur des principes auxquels on accorde à tort une validité universelle. L'expérience de FOUCAULT, réalisée en 1851 sous le dôme du Panthéon, et qui fonctionne en permanence au Musée du Conservatoire des Arts et Métiers à Paris, est un bon exemple.

En application du principe de raison suffisante (dont la raison de symétrie est une forme), on prédisait (cela paraissait évident) que le plan d'oscillation d'un pendule ne changeait pas : pour que changement il y eût, il eût fallu une raison, en l'occurrence intervention d'un facteur nouveau, venant s'ajouter aux conditions de l'expérience. FOUCAULT accrocha le pendule au sommet du dôme, l'écarta avec précaution pour provoquer des oscillations dans le plan vertical Nord-Sud. Comme il n'y a par la suite aucune nouvelle intervention du manipulateur, il semble n'y avoir aucune raison pour que le plan des oscillations dévie : et pourtant il dévie vers l'Ouest.

Voici l'explication de ce phénomène : les principes fondamentaux de la dynamique, formulés par GALILEE (1564-1642) et surtout par NEWTON (1642-1727) sont : le principe d'inertie, le principe de l'action et de la réaction et le principe de la proportionnalité de l'accélération à la force productrice du mouvement. Ces principes ne sont valables que si on évalue l'accélération par rapport à certains repères privilégiés appelés repères galiléens. C'est pourquoi certaines expériences, qui réussissent d'une certaine façon en laboratoire, sont perturbées lorsqu'on les reprend sur le plancher d'un manège de chevaux de bois ou à l'intérieur d'un vaisseau spatial. FOUCAULT avait suspecté l'issue de son expérience en tenant compte de la rotation terrestre : dans notre hémisphère le plan contenant le pendule tourne

dans le sens des aiguilles d'une montre (dans l'hémisphère austral la révolution s'effectue dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre). La période T de révolution du plan d'oscillation du pendule dans le référentiel terrestre (exprimée en heures) est

$$T = \frac{24}{\sin \varphi},$$

où φ est la latitude du lieu où s'effectue l'expérience et 24 et (approximativement) la période de rotation de la terre dans un référentiel dit galiléen.

Ainsi, est vraisemblable ce qui découle par raison suffisante des principes admis ; pour dire du vraisemblable qu'il est vrai, il faut tester la validité des principes, dont l'universalité peut n'être qu'apparente. L'impossible est ce qu'excluent logiquement les conséquences des principes admis : si l'on change de système de repères (ou d'axiomes), le domaine de l'impossible voit ses contours modifiés. On dira d'un résultat qu'il est probable (ou improbable) si la connaissance qu'on a des circonstances ne peut être assurée comme exhaustive ou si le domaine d'application des principes ne peut être garanti comme universel.

4. Le calcul vectoriel : survol historique

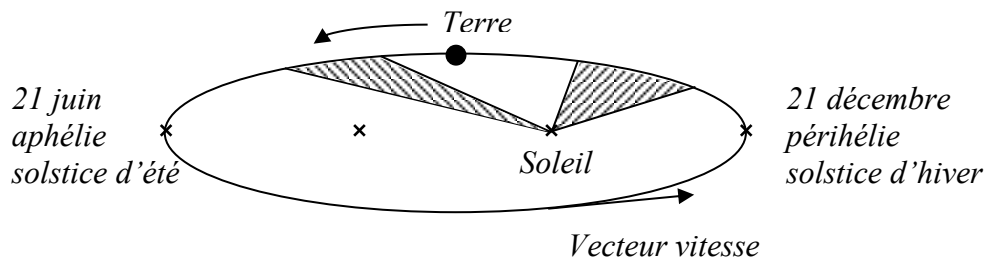
Le calcul vectoriel prend naissance au sein de la mécanique (du point, du solide, des corps déformables, des liquides, etc...) en ses trois chapitres : la statique, la cinématique et la dynamique.

Ajoutons à ce qui a été dit plus haut sur la statique une allusion à Simon STEVIN de Bruges (1548-1620) qui étudia les conditions d'équilibre d'un solide sur un plan incliné, puis démontra l'impossibilité du mouvement perpétuel (1586). Il étudia, en outre, la pression qu'un liquide exerce sur les parois d'un récipient qui le contient. Il fut également un pionnier de l'emploi systématique de la numération décimale et des fractions décimales.

La cinématique et la dynamique sont des sciences qui étudient le mouvement (de deux points de vue différents). Pour comprendre leur différence, comparons ce que furent les apports de KEPLER (1571-1630) (après PTOLEMEE, COPERNIC, TYCHO-BRAHE) et de NEWTON (1642-1727) après GALILEE (1564-1642) dans leur étude des mouvements des planètes.

La cinématique étudie les différentes sortes de mouvement indépendamment des forces qui les produisent. Lorsqu'il s'agit du mouvement d'un point, elle ne retient de celui-ci que sa position dans l'espace à chaque instant. Ce point peut être pesant ou ne pas être pesant (comme par exemple une tache lumineuse sur un écran ou la trace que laisse une pointe en se déplaçant sur une feuille de papier). La cinématique détermine les trajectoires et le "timing" du mouvement [on pourrait traduire le mot anglais de "timing" par "horaire" ; mais le déplacement d'une planète sur son orbite s'observe pendant des années, et non des heures].

KEPLER, se basant sur les nombreuses observations astronomiques de ses nombreux prédécesseurs et aussi de son maître TYCHO-BRAHE, dessina la trajectoire de la terre par rapport au soleil, telle qu'elle apparaîtrait à un observateur fictif placé très haut au-dessus de la trajectoire. Il reconnut que cette trajectoire est une ellipse (1ère loi de KEPLER) :



L'ellipse avait été abondamment étudiée dans l'Antiquité, en particulier par APOLLONIUS de Perga (262 à 200 av. J.-C.), dans son traité des Sections coniques (ce sont l'ellipse, l'hyperbole et la parabole). Ces courbes, très différentes, mais possédant de curieuses ressemblances dans leurs propriétés, y sont étudiées comme des objets de curiosité, dont on ne pressent aucune application pratique... avant de les voir apparaître en astronomie ou en perspective.

Après avoir identifié ces trajectoires, KEPLER étudie le timing de leur parcours. Il constate que les extrémités du grand axe (aphélie et périhélie) sont visitées par la Terre aux solstices ; il remarque que la vitesse sur l'orbite n'est pas constante (avec un maximum au solstice d'hiver, et un minimum au solstice d'été), et il identifie la loi temporelle du parcours de la Terre sur son orbite. La loi chronologique du déplacement satisfait à la loi des aires (2^{ème} loi de KEPLER. cf. figure ci-dessus : à durée égale, les surfaces hachurées sont de même aire. On dit qu'un mobile M décrit une orbite selon la loi des aires -par rapport à un point O- si l'aire balayé par le segment [OM] est proportionnelle à la durée). Enfin, reprenant ce même travail sur les six planètes connues à l'époque (Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne), il retrouve les mêmes résultats (orbites elliptiques et loi des aires) et compare les durées de la révolution complète de chacune d'elles (3^{ème} loi de KEPLER). Toutes les planètes découvertes depuis (Uranus découverte en 1781 par HERSCHEL, Neptune en 1846 par LE VERRIER et ADAM, Pluton en 1930) ainsi que les nombreuses petites planètes (parmi lesquelles Cérès découverte en 1801 par PIAZZI ou Vesta et Pallas découvertes par HERSCHEL) se meuvent autour du Soleil en obéissant aux lois de KEPLER.

[On peut rappeler que c'est en été 1801 que HEGEL soutint sa thèse inaugurale "De orbitis planetarum" à l'Université d'Iéna (Les Orbites des planètes, Traduction et présentation par F. DE GANDT, Ed. Vrin, 1974). HEGEL y prouve "more geometrico" qu'il est impossible que le système solaire comporte plus de cinq planètes ! Certes, on ne saurait reprocher à HEGEL d'ignorer, à l'époque, l'existence des grosses planètes découvertes après la soutenance de la thèse ; mais on peut s'étonner que le jury de thèse ne se soit pas adjoint un collègue astronome... peut-être aussi que l'auteur n'ait pas rompu, ultérieurement, le silence sur son erreur].

KEPLER a presque résolu le problème de l'étude cinématique des planètes [Presque. En réalité chaque planète voit son mouvement perturbé par l'attraction d'autres planètes]. Ses travaux aboutirent à la clarification des concepts de vitesse et d'accélération, qui ne prendront cependant leur plein sens mathématique

- 1) qu'avec l'avènement du calcul différentiel, avec NEWTON et LEIBNIZ (après FERMAT),
- 2) puis par l'utilisation du langage vectoriel.

Le vecteur vitesse a pour intensité la vitesse numérique (moyenne de l'espace parcouru par unité de temps) et pour direction et sens ceux qu'indique la tangente à la trajectoire.

La cinématique appliquée a permis de construire divers dispositifs appelés mécanismes servant à transmettre ou modifier des mouvements (bielles, engrenages, courroies, etc...). Le

joint de CARDAN, par exemple, permet de transmettre un mouvement de rotation autour d'un axe à l'axe suivant incliné par rapport au premier.

C'est ROBERVAL qui résolut le problème de la composition des vitesses :

Supposons un mobile qui se déplace sur la plate-forme d'un véhicule qui lui se déplace sur le sol, plate-forme par rapport à laquelle il a une trajectoire et une vitesse (que l'on appelle vitesse relative [à la plate-forme]). A chaque instant, le point de la plate-forme qui coïncide avec la position instantanée du mobile a une vitesse due au véhicule : c'est la vitesse d'entraînement, la vitesse absolue du mobile par rapport au sol.

ROBERVAL a démontré que le vecteur vitesse absolue est la somme des vitesses relative et d'entraînement (somme obtenue par la règle du parallélogramme, cf. plus haut).

La formule d'addition des vitesses en mécanique classique -celle de ROBERVAL- sera :

$$(1) \quad \vec{V}'' = \vec{V} + \vec{V}'.$$

En mécanique relativiste, il faut corriger la formule (1), lorsque V ou V' dépasse les centaines de mille km à la seconde par une formule différente faisant intervenir c , la vitesse de la lumière dans le vide (de l'ordre de 300000 km à la seconde). Ceci n'intervient guère dans les mouvements terrestres ni même sur les vaisseaux spatiaux, les corrections sont parfois nécessaires, en revanche, dans les expériences se déroulant dans les accélérateurs de particules. Rappelons ici, à ce propos, que la relativité n'a pas "réfuté" la mécanique classique ; elle la précise dans des occasions rarement rencontrées dans la vie terrestre.

5. Digression sur l'analyse infinitésimale et sur ses deux chapitres : le calcul différentiel et le calcul intégral

La dynamique inaugurée par GALILEE (loi de la chute des corps et de l'oscillation du pendule) ne pouvait prendre son véritable essor qu'avec l'élaboration par NEWTON et LEIBNIZ des sciences mathématiques citées dans le sous-titre.

Leur pionnier fut ARCHIMEDE qui, 2000 ans avant eux, avait résolu quelques problèmes particuliers, relevant du futur calcul intégral : il avait calculé l'aire et le volume de la sphère, l'aire des segments des paraboles, et défini la notion de centre de gravité. En outre, il détermina les positions des tangentes à diverses courbes, parmi lesquelles la spirale qui porte son nom : problèmes qui relèvent du calcul différentiel.

Après une longue éclipse de près de 1000 ans -à problématiser par la réflexion sur l'histoire de la pensée-, on retrouva quelques écrits d'ARCHIMEDE et recommença à analyser les ressorts heuristiques qui avaient guidé le syracusain. Et ce n'est qu'au XVII^{ème} siècle qu'une dizaine de savants occidentaux reprirent le flambeau, qui conduisit aux oeuvres de NEWTON et LEIBNIZ.

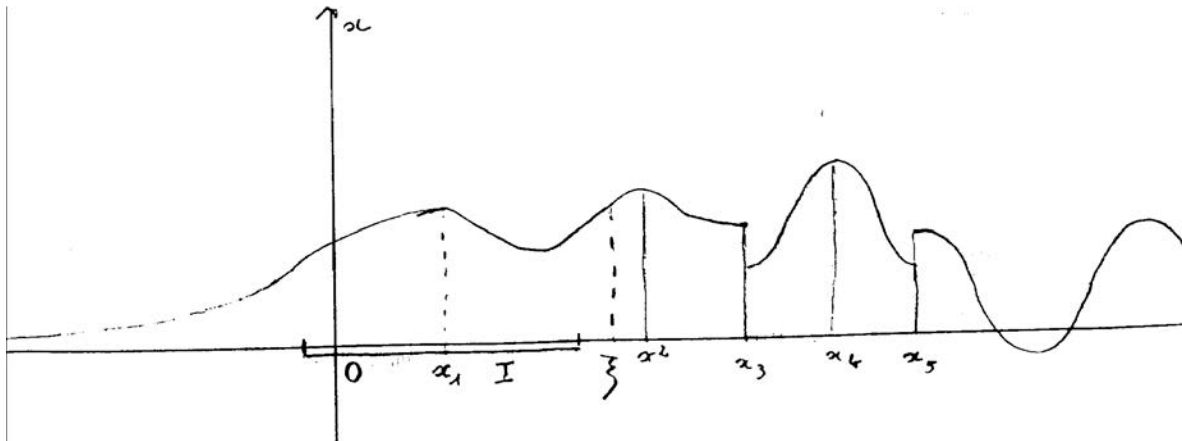
Le but de ce qui suit est de présenter la création du calcul intégral d'une façon accessible aussi à ceux qui ne maîtriseraient pas (plus ou pas encore) les bases du langage mathématique. Il s'agit tout à la fois d'éviter la déplorable pédagogie de l'allusion (et tout bonnement l'imposture intellectuelle... récemment dénoncée par SOKAL et BRICMONT) et de pratiquer une vulgarisation honnête, en apportant les savoirs aidés de dessins ou de métaphores.

5.1. Propriétés locales

"Le CALCUL DIFFERENTIEL traite de propriétés locales (pr. loc). des fonctions numériques et de leur comportement lors de variations infiniment petites de la variable".

C'est la définition qu'on, trouve dans le Petit Larousse au mot "différentiel (calcul)". Elle serait satisfaisante pour tout lecteur qui comprend les deux expressions soulignées. Pour celui qui découvre (ou redécouvre) la notion, nous préférons que l'abus de langage "variations infiniment petites" soit remplacé par suffisamment petites.

Voici, ci-dessous, la représentation graphique d'une fonction numérique $f(x)$, que nous allons commenter :



On "voit" sur cette figure que la fonction atteint pour x_1 un maximum local ($f(x_1)$) : cela signifie que si l'on prend un intervalle I^{44} (de l'axe Ox) de milieu x_1 , suffisamment petit pour qu'il ne comprenne pas ξ , les valeurs de $f(x)$ sur cet intervalle sont inférieures ou égales à $f(x_1)$. Mais $f(x_1)$ n'est pas un maximum global. Ce qu'illustre la métaphore suivante : dans le massif alpin on rencontre de nombreux sommets qui atteignent une altitude localement maximale ; mais seul le Mont Blanc (point culminant) atteint une altitude globalement maximale.

Autre comportement local : En x_3 et en x_5 la fonction f subit une discontinuité (un saut, comme cela se voit sur un taximètre, sur lequel le prix affiché varie par sauts brusques).

Pour qu'on puisse observer les comportements locaux ci-dessus, il faut, à chaque fois, que l'on détermine des intervalles suffisamment petits, pour qu'ils apparaissent seuls, sans être perturbés par ce qui se passe à côté. Si ce n'est pas le cas, on peut raccourcir l'intervalle (sans passer par l'infiniment petit de la définition du Petit Larousse).

Le dessin ci-dessus, prolongé à droite évoque un comportement global à oscillation périodique ; prolongé à gauche, il fait apparaître une décroissance asymptotique : ce sont des phénomènes globaux.

⁴⁴ Un tel intervalle s'appelle en mathématiques un "voisinage" du nombre x ; une propriété de la fonction f est locale au point x , si elle est satisfaite dans un voisinage suffisamment petit. Une propriété globale s'observe sur tout l'ensemble de définition de la fonction.

5.2. Notion de dérivée

Le calcul différentiel définit et utilise la notion de dérivée. Citons d'abord la définition classique de la dérivée, telle qu'elle est enseignée aux lycéens :

Définition

La dérivée d'une fonction f est une fonction numérique, notée f' , qui prend pour $x = x_0$ la valeur de la limite (si elle existe) vers laquelle tend le quotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lorsque x tend vers x_0 .

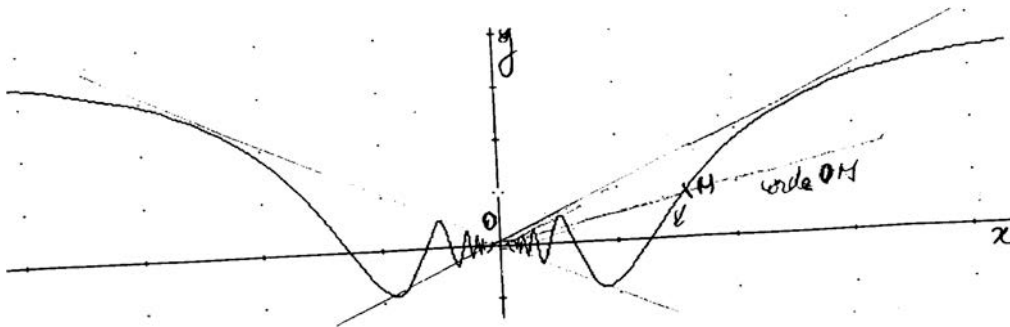
Cette définition fournie à une personne qui maîtrise le langage mathématique, et qui connaît le sens du mot limite, exige encore un commentaire concernant la restriction : "(si elle existe)". Cette parenthèse laisse entendre qu'il y a des cas où cette limite n'existerait pas.

Au début du XIX^{ème} siècle, on croyait dans la communauté des mathématiciens qu'il était évident que toute courbe continue possédait une tangente en chaque point. En l'absence d'une définition définitive de la continuité, on rejetait le cas des courbes présentant un coin anguleux -en affirmant que ce n'étaient pas des courbes continues, et d'éminents savants - AMPERE, POINSOT...- enseignaient des démonstrations fausses de cette assertion fausse (cf. Léon BRUNSCHVIG, Les Etapes de la philosophie mathématique, p. 334-340).

Il n'en est rien comme le montrent les contre-exemples (cf. pour cette notion le développement ci-dessus "Le Vrai, le vraisemblable...", p. 152) classiques suivants :

1) La fonction "valeur absolue" $y = |x|$ est représentée par un angle ($y = x$ si x est positif, $y = -x$ dans le cas contraire).

2) La courbe d'équation $y = x \times \sin(1/x)$ a un comportement local bizarre à l'origine : elle oscille de plus en plus vite entre deux droites symétriques par rapport à l'axe des abscisses, dans tout intervalle contenant l'origine :



Lorsque le point mobile M décrit cette courbe en s'approchant de plus en plus près de l'origine O , la corde OM "frétille", en balayant un angle, sans "se fixer" sur une tangente. (Ce phénomène mérite d'être contemplé par des élèves, notamment d'origine littéraire, pour qu'ils aperçoivent bien pourquoi les mathématiques exigent qu'une proposition soit démontrée avant qu'on affirme qu'elle est vraie. Ce contre-exemple est particulièrement spectaculaire).

3) En 1872, Karl WEIERSTRASS trouva un contre-exemple encore plus inattendu ; il prouva que la fonction définie par la série trigonométrique

$$f(t) = \frac{1}{2}\cos(10t) + \frac{1}{4}\cos(100t) + \dots + \frac{1}{2^n}\cos(10^n t) + \dots,$$

n'admet de dérivée pour aucune valeur t . [La démonstration concernant ces "Fonctions sans

dérivées de WEIERSTRASS" est difficile et affaire de spécialistes, et ne sera pas développée ici].

Mais, pensait-on, ces exemples ne se présentent jamais dans la nature ! C'est ce que réfute le physicien Jean PERRIN (prix Nobel de physique en 1926) dans les deux textes suivants, figurant dans la préface de son livre : *Les Atomes*, 1912 (édition actuelle dans la collection Champs/Flammarion). Parlant des mathématiciens qui "pinaillent" en étudiant des "monstres inexistants", il écrit :

« Au premier abord, de telles restrictions semblent n'être qu'un exercice, intellectuel, ingénieux sans doute, mais en définitive artificiel et stérile, où se trouve poussé jusqu'à la manie le désir d'une rigueur parfaite. Et, le plus souvent, ceux auxquels on parle de courbes sans tangentes ou de fonctions sans dérivées commencent par penser qu'évidemment la nature ne présente pas de telles complications, et n'en suggère pas d'idées.

C'est pourtant le contraire qui est vrai, et la logique des mathématiciens les a maintenus plus près du réel que ne faisaient les représentations pratiques employées par les physiciens. C'est ce qu'on peut déjà comprendre en songeant, sans parti pris simplificateur, à certaines données tout expérimentales.

De telles données se présentent en abondance quand on étudie les colloïdes. Observons, par exemple un de ces flocons blancs qu'on obtient en salant de l'eau de savon. De loin, son contour peut sembler net, mais sitôt qu'on s'approche un peu cette netteté s'évanouit. L'oeil ne réussit plus à fixer de tangente en un point : une droite qu'on serait porté à dire telle, au premier abord, paraîtra aussi bien, avec un peu plus d'attention, perpendiculaire ou oblique au contour. Si l'on prend une loupe, un microscope, l'incertitude reste aussi grande, car, chaque fois qu'on augmente le grossissement, on voit apparaître des anfractuosités nouvelles, sans jamais éprouver l'impression nette et reposante que donne, par exemple, une bille d'acier poli. En sorte que, si cette bille donne une image utile de la continuité classique, notre flocon peut tout aussi logiquement suggérer la notion plus générale des fonctions continues sans dérivées . »

...

« Et ce qu'il faut bien observer, c'est que l'incertitude sur la position du plan tangent en un point du contour n'est pas tout à fait, du même ordre que l'incertitude qu'on aurait à trouver la tangente en un point du littoral de la Bretagne, selon qu'on utiliserait pour cela une carte à telle ou telle échelle. Selon l'échelle la tangente changerait, mais chaque fois on en placerait une. C'est que la carte est un dessin conventionnel, où, par construction même, toute ligne a une tangente. Au contraire, c'est un caractère essentiel de notre flocon (comme au reste du littoral, si au lieu de l'étudier sur une carte on le regardait lui-même de plus ou moins loin), que, à toute échelle, on soupçonne, sans les voir tout à fait bien, des détails qui empêchent absolument de fixer une tangente. »

Parler de "dérivée" à des élèves ou des étudiants, c'est bien souvent rencontrer de leur part des attitudes de rejet ou d'indifférente incompréhension ; la notion paraît bien compliquée, et surtout "déconnectée de toute réalité" : "D'où est-ce que ça sort ?", "Ça ne sert à rien !". Tel brillant étudiant en Economie se plaignait qu'on consacrait une heure toutes les deux semaines aux dérivées. Tout lui parut limpide et intéressant lorsqu'on lui dit tout simplement que le mot "dérivée" est le mot savant qui désigne, par exemple, le taux de variation (instantané) d'un phénomène qui dépend du temps : il était aussi rompu aux dérivées que Monsieur JOURDAIN l'était à la prose.

On peut montrer, par exemple, aux élèves les plus récalcitrants qu'en météorologie on étudie l'évolution de la température T observée à l'ombre, en différents lieux fixés : la variation de température entre l'heure t_1 et l'heure t_2 est égale à $T(t_2) - T(t_1)$, et le taux de variation horaire est :

$$(T(t_2) - T(t_1)) / (t_2 - t_1).$$

On peut aussi s'intéresser aux taux de variation par demi-heure, par minute, par seconde, etc. On en arrive ainsi à s'approcher du taux de variation instantané qui se dissimule dans la définition précédente derrière le mot "limite". Lorsque cette limite est positive (resp. négative) cette dérivée se nomme en langage ordinaire "taux de réchauffement" (resp. "taux de refroidissement").

Les météorologues étudient aussi comment varient certains paramètres dans l'espace. C'est ainsi qu'ils envoient des ballons-sondes dans l'atmosphère pour mesurer la température $T(t)$ à différentes altitudes t . La dérivée de cette fonction (limite des quotients $(T(t_2) - T(t_1)) / (t_2 - t_1)$) s'appelle couramment gradient thermique. Sa connaissance en divers points du globe permet de prévoir les courants ascendants, les turbulences et la genèse des vents.

La dérivée de l'espace parcouru par un mobile, est sa vitesse, et la dérivée de la vitesse, est l'accélération (resp. ralentissement lorsque la dérivée est négative) dans le langage courant. Lorsque la trajectoire n'est pas rectiligne, on remplace parfois la vitesse numérique (en km/h par exemple) par le vecteur-vitesse, dont la direction (au point M) est celle de la tangente en M à la trajectoire, l'intensité est la vitesse numérique, et son sens est celui de M sur sa trajectoire courbe.

La notion de dérivée ne se restreint pas à l'étude des fonctions numériques, mais s'étend aussi à des fonctions à valeurs vectorielles.

Bibliographie

Ouvrages collectifs

SEMINAIRE DE PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE :
Penser les mathématiques, Seuil, 1982.

ACTES DES JOURNÉES ACADEMIQUES DE LILLE :
Mathématique et Philosophie : la démonstration, IREM de Lille, 1997.

ACTES DU 7ÈME COLLOQUE INTER-IREM D'ÉPISTEMOLOGIE ET D'HISTOIRE DES
MATHÉMATIQUES :
La démonstration mathématiques dans l'histoire, IREM de Besançon, 1989.

Ouvrage issu d'un cycle de conférences de la COMMISSION INTER – IREM :
BARBIN Evelyne, CAVEING Maurice, *Les Philosophes et les mathématiques*, Ellipses, 1996.

Ouvrages individuels

BADIOU Alain, *Manifeste pour la philosophie*, Seuil, Paris, 1989, *Court Traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris, 1998.

BARBIN Evely, *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles*, dans "Fragments d'histoire des mathématiques II", brochure APMEP n°65, 1987.

BLANCHE Robert, *L'axiomatique*, PUF, 1967, *Le Raisonnement*, PUF, 1973.

BRUNSCHVIG Léon, *Les Etapes de la philosophie mathématique*, 1912, réédition Blanchard, Paris, 1993.

CAVAILLES Jean, *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1962.

CASSIRER Ernst, *La philosophie des formes symboliques*, tome III, éditions de Minuit, 1972.

CUPPENS Roger, "Les mathématiques d'une machine sont-elles préhilbertiennes ?" in Actes de l'Université d'été "Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques", Caen, IREM de Caen, 1994.

DESANTI Jean Toussaint, *Les idéalités mathématiques*, Seuil, 1968, *La philosophie silencieuse*, Seuil, 1975.

DESCARTES René, *Discours de la méthode*, 1637, Hatier 1999.

DIEUDONNE Jean, *Les mathématiques aujourd'hui*, Seuil, 1968.

DUVAL Raymond, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, in Annales de Didactique et de Sciences Cognitives n°5, 37-65, IREM de Strasbourg, 1993, *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, 1995.

ESPINOZA Miguel, *La science : les mathématiques, l'expérience, la logique*, Ellipses, 1996, *Les mathématiques et le monde sensible*, Ellipses, 1997.

GLAESER Georges, *Mathématiques pour l'élève professeur*, Hermann, 1971, *Epistémologie des nombres relatifs*, in Recherches en Didactique des Mathématiques Vol 2 N°3, 303-346, 1981.

GUICHARD Jacqueline, *Statuts et fonctions de la démonstration en mathématiques : quelques repères*, IREM de Poitiers, 1993.

HEGEL Georg Wilhelm Friedrich, *Phénoménologie de l'esprit*, 1807, Aubier, 1991.

HUSSERL Edmund, *L'origine de la géométrie*, P.U.F., 1974.

KANT Emmanuel, *Critique de la raison pure*, 1781, P.U.F., Quadrige, 1997.

LARGEAULT Jean, *Intuition et intuitionisme*, Vrin, 1993.

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm, *Lettre à Christian Huyghens* in *Opuscles et fragments inédits de LEIBNIZ*. Extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre, ed. par Louis COUTURAT, Paris, Félix Alcan, 1903.

PANZA Marco, SALANSKIS Jean-Michel, *L'objectivité mathématique*, Masson, 1995.

PLATON, *Gorgias*, Hatier, 2000, *Ménon*, Hatier, 1999, *La République*, Garnier-Flammarion, 1966, *Théétète*, Garnier-Flammarion, 2002.

PERELMAN Chaïm, OLBRECHTS-TYTECA Lucie, *Traité de l'argumentation, la nouvelle rhétorique*, Editions de l'Université de Bruxelles, 1976.

POINCARÉ Henri, *La science et l'hypothèse*, 1902, Flammarion, 1968, *La valeur de la science*, 1905, Paris, Flammarion, 1970.

SAINT ANSELME DE CANTERBURY, *Proslogion, Allocution sur l'existence de Dieu*, traduction, Paris, G-F Flammarion, 1994.

TOULMIN Stephen, *Les usages de l'argumentation*, 1958, traduction P.U.F., Paris, 1993.