# Autour du septième problème de Hilbert : Une excursion en transcendance

Julien Haristoy et Édouard Oudet

**Résumé**

On souhaite donner un aperçu de quelques problèmes en théorie des nombres transcendants, autour du pivot que constitue le septième problème de Hilbert. On esquisse un historique du développement de la discipline antérieurement à l'énoncé des problèmes de Hilbert, puis on propose une preuve aussi élémentaire que possible et (presque) complète du théorème de Gel'fond-Schneider, qui répond à la question de Hilbert. Enfin on décrit l'importante postérité du septième problème dans les travaux mathématiques au vingtième siècle.

Lorsque David Hilbert est invité à donner une des conférences majeures du deuxième congrès international des mathématiciens, qui doit se tenir à Paris à l'été 1900, il lui apparaît rapidement que le moment est symboliquement idéal pour donner à la communauté mathématique sa vision du développement futur de la discipline. Il souligne l'importance de dégager des problèmes[1] :

> « Et de même que dans toute entreprise humaine il faut poursuivre un but, de même dans la recherche mathématique il faut des problèmes. La puissance du chercheur se retrempe dans leur résolution, il y trouve de nouvelles méthodes et de nouveaux points de vue, d'où il découvre un horizon plus vaste et plus libre. »

C'est donc à cette occasion que Hilbert rend publique sa liste de vingt-trois problèmes destinés à occuper les mathématiciens du siècle à venir (en fait, suivant les conseils de Minkowski et Hurwitz, qui craignaient un exposé trop long, il n'énonça oralement que dix de ces problèmes, l'intégralité de son texte paraissant aux *Göttinger Nachrichten*).

Parmi les qualités que doit posséder un bon problème mathématique selon Hilbert, figurent en premier lieu clarté et limpidité :

> « Cette clarté, cette limpidité si énergiquement exigée [...] d'une théorie mathématique, je l'exigerais encore davantage d'un problème mathématique parfait ; ce qui est clair et limpide nous attire en effet, ce qui est embrouillé nous rebute. »

1. Nous citons ici la traduction de L. Laugel dans le *Compte-rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, Gauthier-Villars, Paris, 1902.

À cet égard le septième problème, sous le titre général *Irrationalité et transcendance de certains nombres*, est certainement exemplaire. Rappelons d'abord qu'un nombre complexe est dit *algébrique* s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers (ou rationnels, cela revient au même), par exemple $i, \sqrt{2}$, les racines de l'unité ; sinon on dit qu'il est *transcendant*. Il est utile de rappeler pour la suite que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps.

Le septième problème évoque d'abord la question de la transcendance de certaines valeurs de la fonction exponentielle, dans la lignée des travaux de Hermite et Lindemann :

> « [...] nous regardons comme extrêmement probable que la fonction exponentielle $e^{i\pi z}$, par exemple, qui, pour toutes les valeurs rationnelles de l'argument $z$ prend évidemment toujours des valeurs algébriques, prenne d'autre part, pour toutes les valeurs irrationnelles algébriques de l'argument $z$, des valeurs toujours transcendantes. Nous pouvons donner à cet énoncé la forme géométrique suivante : *Lorsque, dans un triangle isoscèle*[2]*, le rapport entre l'angle à la base et l'angle au sommet est algébrique, mais non rationnel, le rapport entre la base et l'autre côté sera toujours transcendant.* »

En effet, si $\alpha$ mesure l'angle à la base, l'angle au sommet vaut $\pi - 2\alpha$ et leur rapport $\pi/\alpha - 2$ ; ce dernier est irrationnel algébrique si et seulement si $z = \alpha/\pi$ l'est. Or le quotient de la base par le côté de l'angle au sommet est $2\cos\alpha = e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}$ qui est transcendant si et seulement si $e^{i\pi z}$ l'est.

Remarquons que comme $e^{i\pi} = -1$, il revient au même de se demander si $(-1)^z$ est transcendant pour toute valeur de $z$, algébrique irrationnelle[3]. On peut alors voir cette question comme un cas particulier de la conjecture suivante, à laquelle nous ferons dorénavant référence, lorsque nous évoquerons le septième problème de Hilbert :

> «*La puissance $\alpha^\beta$, pour une base algébrique $\alpha$ et un exposant algébrique irrationnel $\beta$, comme par exemple le nombre $2^{\sqrt{2}}$ ou $e^\pi = i^{-2i}$, représente toujours un nombre transcendant ou pour le moins irrationnel.* »

Hilbert précise :

> « J'en regarde la démonstration comme extrêmement difficile » ;

il ajoute encore :

> « Il est certain que la résolution de ces problèmes et d'autres analogues doit conduire à des méthodes nouvelles, ainsi qu'à de nouveaux points de vue relativement à la nature de nombres irrationnels et transcendants particuliers. »

Siegel rapporte que Hilbert disait souvent que la preuve de l'irrationalité de $2^{\sqrt{2}}$ lui semblait appartenir à un futur plus lointain que celle du dernier «Théorème» de Fermat ou de l'hypothèse de Riemann[4]. Or le septième problème fut résolu indépendamment et

2. Graphie d'usage à l'époque, la seule correcte selon Littré.

3. Pour fixer les idées, on peut définir la fonction $\alpha^z$ par $\exp(z(\ln|\alpha| + i\theta))$, où $\theta$ est la détermination de l'argument de $\alpha$ appartenant à $]-\pi, \pi]$, communément appelée détermination principale de l'argument ; la seule vertu de ce choix est de prolonger les fonctions puissances usuellement définies sur $\mathbb{R}$. Quoique le choix d'une autre détermination de l'argument définisse une fonction puissance distincte, il n'affecterait pas nos énoncés de transcendance.

4. C'est plus précisément lors d'une conférence donnée en 1919 que Hilbert manifesta l'espoir de voir

presque simultanément par Gel'fond et Schneider en 1934, qui plus précisément montrèrent que

*si $\alpha$ est un nombre algébrique différent de* 0 *et de* 1 *et $\beta$ un nombre algébrique irrationnel, alors $\alpha^\beta$ est un nombre transcendant.*

Si Hilbert s'est trompé sur l'évaluation de la difficulté respective des questions mentionnées ci-dessus, nous essaierons de montrer, après avoir rappelé quelques épisodes marquants de la théorie transcendante des nombres avant 1900, que le pronostic quant à la nécessité de trouver de nouvelles méthodes s'est, lui, parfaitement avéré, comme s'est concrétisé l'espoir que celles-ci se révèleraient fécondes.

# 1 Quelques repères historiques

Le premier usage mathématique du mot transcendant, qui relevait jusqu'alors du vocabulaire scholastique, semble remonter à Leibniz (1704) — ce qui n'est guère étonnant si l'on songe que, davantage encore que vers les mathématiques, ses préoccupations le portaient vers les questions théologico-philosophiques — et probablement en un sens proche de celui où nous l'entendons. Les premières conjectures explicites de transcendance sont certainement à mettre au compte d'Euler (mais son nom n'est-il pas attaché peu ou prou à la naissance de quelque branche des mathématiques modernes que ce soit ?) et nous reviendrons au paragraphe suivant sur l'une de ses contributions.

Cependant, et sans rechercher le paradoxe, on peut dire que les premières démonstrations ressortissant, au moins dans l'esprit, à la théorie transcendante des nombres sont des démonstrations d'irrationalité. Nous n'avons pas l'ambition de tenter ici une réflexion sur la notion de nombre[5], depuis l'émergence de la pensée rationnelle grecque jusqu'au dix-neuvième siècle allemand ; rappelons seulement que la première preuve d'irrationalité, plus précisément d'incommensurabilité, qui nous soit parvenue (et qui constitue aussi une des toutes premières démonstrations toujours recevables aujourd'hui) remonte selon Aristote à l'école Pythagoricienne ; elle concerne, comme on sait, le rapport du côté du carré à sa diagonale.

Pour revenir à l'époque moderne, Euler montre dès 1744 l'irrationalité de $e$ ; la démonstration bien connue qui repose sur l'égalité $e = \sum_{n\geq 0} 1/n!$ est due à Fourier en 1815. Citons aussi Lambert qui, en 1766, démontre (presque[6]) l'irrationalité de $\pi$, dont on avait depuis longtemps relié les propriétés arithmétiques à la possibilité de la quadrature du cercle. Plus précisément, prolongeant des idées d'Euler, il considère le développement en fraction continue[7] de $\tan x$ et montre que cette fonction prend des valeurs irrationnelles pour des

l'hypothèse de Riemann démontrée de son vivant (il est mort en 1943), alors qu'à son avis seuls les plus jeunes de ses auditeurs verraient la résolution du problème de Fermat. Quant à l'irrationalité de $2^{\sqrt{2}}$, il n'imaginait pas que ceux-ci pussent vivre assez longtemps pour en connaître une démonstration. Cf. Jeremy J. Gray, *The Hilbert Challenge*, Oxford University Press, 2000.

5. Ni d'ailleurs les compétences pour la mener à bien.

6. La première preuve complète est de Legendre qui montra aussi l'irrationalité de $\pi^2$.

7. Ou faut-il dire plutôt continuée ?

arguments rationnels non nuls. Comme $\tan(\pi/4)$ est rationnel, l'irrationalité de $\pi$ s'en déduit.

Ce sont les échecs répétés de démonstration de l'algébricité de $e$ ou de $\pi$ qui amènent l'opinion mathématique dominante, à la suite d'Euler, Lambert et Legendre, à conjecturer leur transcendance.

Cependant il est remarquable que jusqu'en 1844, la théorie transcendante des nombres n'ait pas véritablement d'objet, en ce sens que personne n'est alors en mesure d'exhiber le moindre nombre transcendant. C'est à cette date en effet que Joseph Liouville publie (au Journal de ... Liouville) *Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, et tout particulièrement le résultat que nous écririons ainsi :

*Soit $\xi$ un réel, racine d'un polynôme irréductible à coefficients entiers $P$, de degré $d$ au moins égal à 2 ; posons $c' = \max_{x\in[\xi-1,\xi+1]} |P'(x)|$ et $c = \min(1, 1/c')$, alors pour tout rationnel non nul $p/q$, avec $q > 0$, on a :*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}.$$

La démonstration en est fort simple.

D'abord, il est clair qu'on peut supposer $|\xi - p/q| < 1$, ou encore $p/q \in ]\xi - 1, \xi + 1[$, sinon il n'y a rien à démontrer.

Ensuite, comme $P$ est irréductible et $d \geq 2$, $P(p/q)$ est non nul. Comme $P \in \mathbb{Z}[X]$, $|q^d(P(\xi) - P(p/q))| = |q^d P(p/q)|$ est entier, au moins égal à 1, ce qui s'écrit encore :

$$\left|P(\xi) - P\Big(\frac{p}{q}\Big)\right| \geq \frac{1}{q^d}.$$

Or le théorème des accroissements finis donne :

$$\left|P\Big(\frac{p}{q}\Big)\right| = \left|P(\xi) - P\Big(\frac{p}{q}\Big)\right| \leq \max_{x\in[\xi-1,\xi+1]} |P'(x)|. \left|\xi - \frac{p}{q}\right|,$$

ce qui suffit à conclure.

Qualitativement, le théorème de Liouville dit qu'un nombre algébrique réel n'est pas «bien» approchable par des rationnels, d'où l'idée de produire des nombres qui par construction ont de meilleures approximations rationnelles que celles qu'on attend d'un nombre algébrique.

On appelle *nombre de Liouville* un irrationnel réel $\xi$ tel que pour tout entier $n$, il existe un rationnel $p/q$, avec $q \geq 2$ tel que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Au vu du résultat précédent, un nombre de Liouville ne saurait être algébrique (sinon $c < q^{d-n}$ pour tout $n$). Un exemple classique de tel nombre est donné par

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

dont l'écriture décimale contient beaucoup de 0 (on peut bien sûr remplacer 10 par n'importe quel entier).

Son développement décimal n'étant à l'évidence pas périodique, $\zeta$ est irrationnel, et si l'on note $p_n/q_n = \sum_{k=1}^{n} 1/10^{k!}$, de sorte que, pour $n$ strictement positif, $q_n = 10^{n!}$, on a :

$$\left|\zeta - \frac{p_n}{q_n}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} < \frac{10}{10^{(n+1)!}} \leq \frac{1}{q_n^n}$$

ce qui en fait bien un nombre de Liouville.

La rencontre de Dedekind et Cantor en 1872 eut d'importantes conséquences pour le développement des mathématiques en général. Pour ce qui nous concerne, notons simplement que le premier avait montré que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, disons comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, puis que le second, travaillant à une construction rigoureuse des réels, remarqua que les nombres transcendants sont denses dans $\mathbb{R}$. On verrait bientôt que presque tout réel, au sens de la mesure de Lebesgue, est transcendant.

Le problème de montrer la transcendance d'un nombre donné restait cependant entier. Le premier résultat en ce sens est la démonstration de la transcendance de $e$ par Hermite en 1873 ; corollaire immédiat : si $r$ est rationnel, $e^r$ est transcendant (la racine $r$-ième d'un nombre algébrique est algébrique !).

En dépit de l'optimisme et de l'enthousiasme, à commencer par ceux d'Hermite, qui suivirent cette avancée importante, il fallut attendre 1882 pour que Lindemann annonçât enfin la preuve de la transcendance de $\pi$ (et par conséquent l'impossibilité de la quadrature du cercle). Lindemann démontra en fait bien plus, à savoir le résultat aujourd'hui connu sous le nom de théorème d'Hermite-Lindemann :

*Si $\alpha$ est un nombre algébrique non nul, $e^\alpha$ est transcendant.*

Pour $\alpha = 1$, il s'agit du théorème d'Hermite. D'autre part, $e^{i\pi} = -1$ n'est pas transcendant, par suite $i\pi$ n'est pas algébrique, donc $\pi$ non plus. La méthode de Lindemann est une généralisation de celle d'Hermite, découvreur éponyme de l'identité suivante, facile à vérifier par intégrations par parties successives :

*Pour tout polynôme $f \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n$, si l'on pose $F(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)$, on a :*

$$\int_0^x e^{-t} f(t) dt = F(0) - F(x)e^{-x}$$

À la suite de Hurwitz (1883), on peut voir cette relation comme une conséquence de ce que la fonction exponentielle est solution de l'équation différentielle $y' = y$, puis montrer qu'on obtient une identité analogue pour les fonctions solutions de $azy'' = by' + y$, où $a$ et $b$ sont des nombres complexes ; il en déduit enfin de nouveaux résultats de transcendance.

Dans tous les cas, l'efficacité de la méthode réside dans l'algébricité des coefficients du développement en série entière des fonctions considérées, ne laissant pas d'espoir quant au problème posé par Hilbert, où il s'agirait de considérer la fonction $\alpha^z$, solution de

$y' = (\log \alpha)\, y$ (ici et dans la suite, log désigne une détermination du logarithme complexe, disons la détermination principale ; ln désigne le logarithme naturel des nombres réels positifs).

# 2 Le problème d'Euler-Hilbert

Le septième problème de Hilbert est couramment appelé problème d'Euler-Hilbert, tant il paraît naturel d'en faire remonter l'origine au passage suivant de l'*Introduction à l'Analyse Infinitésimale*[8] ($a$ et $b$ sont des nombres rationnels positifs) :

> « D'après ce que nous venons d'exposer, il est clair qu'il n'y a de logarithmes rationnels que ceux des puissances de la base $a$ ; car si un autre nombre $b$ n'est pas une puissance de la base $a$, son logarithme ne peut être exprimé par un nombre rationnel, le logarithme de $b$ ne sera pas non plus un nombre irrationnel[9] ; [...] Puisqu'aucun nombre, soit rationnel, soit irrationnel, ne peut représenter les logarithmes des nombres, qui ne sont pas des puissances de la base, on a donc raison de les rapporter aux quantités transcendantes ; & c'est la cause pour laquelle on a coutume de ranger les logarithmes parmi ces dernières. »

La dernière assertion d'Euler signifie que si $a$ et $b$ sont des rationnels positifs, $a \neq 1$, $\log_a b = \ln b / \ln a$ est rationnel (si $b$ est une puissance rationnelle de la base) ou transcendant. Posons $\beta = \ln b / \ln a$, l'énoncé de Hilbert dit précisément que si $\beta$ n'est pas rationnel, $\beta$ est nécessairement transcendant, sinon $a^\beta = b$ est transcendant.

Euler ne produit aucun élément de preuve à l'appui de ce qu'il avance, et le problème n'a pas connu de progrès au moment où Hilbert l'énonce dans sa généralité et appelle pour sa résolution à l'émergence d'idées nouvelles.

Une contribution majeure en ce sens est fournie par Alexandre Gel'fond en 1929 : il introduit certaines fonctions d'interpolation pour une fonction holomorphe et, reprenant des idées développées par Pólya, en déduit une borne pour la croissance de la fonction ; par des considérations arithmétiques, il arrive alors à une contradiction lorsque cette fonction prend beaucoup de valeurs algébriques. Ce procédé lui permet de donner une solution partielle au septième problème de Hilbert, précisément dans le cas où $\beta$ est un nombre quadratique (i.e. racine d'un polynôme irréductible de degré 2) imaginaire, ce qui donne en particulier la transcendance de $e^\pi = (-1)^{-i}$. Kuzmin remarque en 1930 que la méthode de Gelfond peut être étendue au cas des nombres quadratiques réels ; la question de la transcendance de $2^{\sqrt{2}}$, par exemple, est alors résolue.

Pour la solution complète du septième problème, il fallut encore ajouter une autre idée, introduite par Siegel dans l'étude des fonctions de Bessel : la construction d'une fonction auxiliaire possédant des propriétés d'annulation remarquables. Une preuve générale fut

8. Nous citons : Léonard Euler, *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, traduit du latin par J. B. Labey, Barrois aîné, l'an quatrième de la République Française (1796), réédition ACL-éditions, Paris 1997.

9. Il faut comprendre ici : irrationnel algébrique.

enfin donnée par Gel'fond en mars 1934, puis, indépendamment, quoiqu'utilisant les mêmes arguments décisifs, par Théodore Schneider, un élève de Siegel, deux mois plus tard.

Nous donnons un aperçu de la preuve de Schneider, telle qu'elle est décrite par Michel Waldschmidt dans *Transcendence Methods*.

On part du fait que les fonctions $z$ et $\alpha^z$ sont *algébriquement indépendantes* sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ non nul tel que la fonction $P(z, \alpha^z)$ soit identiquement nulle (c'est une généralisation de la notion de transcendance), et on raisonne par l'absurde.

Si $\alpha^\beta$ est algébrique, les fonctions $z$ et $\alpha^z$ prennent toutes deux des valeurs algébriques aux points $m + n\beta, (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, toutes contenues dans le corps de nombres $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \alpha^\beta)$ (le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}, \alpha, \beta$ et $\alpha^\beta$). On se donne alors un réel positif $H$ : un lemme de Siegel, reposant sur le principe des tiroirs de Dirichlet [10], assure alors l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$ s'annulant en tout point $(m + n\beta, \alpha^{m+n\beta})$, pour $0 \leq m, n \leq H$, et dont on contrôle «bien» le degré et la valeur absolue des coefficients en fonction de $H$ (sinon c'est trivial).

Posons $F(z) = P(z, \alpha^z)$ ; un argument analytique (une variante du lemme de Schwarz, voir le paragraphe suivant) permet de borner la croissance de $F$ dans un disque centré en 0, ce qui impose (argument arithmétique) de nouveaux zéros pour $F$, toujours de la forme $m + n\beta$, ce qui donne une nouvelle borne pour $F$, sur un disque plus grand ... etc, jusqu'à prouver que $F$ est identiquement nulle, la contradiction cherchée.

La preuve de Gel'fond est essentiellement analogue et diffère surtout par ce qu'il considère un zéro de multiplicité élevée, plutôt qu'un grand nombre de zéros distincts. L'une et l'autre démonstrations mettent en œuvre une combinaison ingénieuse d'arguments de nature algébrique, arithmétique et analytique.

Au début des années quatre-vingt-dix, une nouvelle méthode, introduite par Michel Laurent, a permis de substituer dans la preuve de nombreux résultats de transcendance l'étude de certains déterminants à la construction de fonctions auxiliaires, telles que la fonction $F$ ci-dessus.

C'est sur ce type d'arguments que repose la démonstration développée au paragraphe suivant. Elle est adaptée du deuxième chapitre du livre *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups* de Waldschmidt, par ailleurs riche de commentaires et de considérations heuristiques. Elle a la vertu d'être élémentaire au sens où elle ne demande aucune connaissance en théorie algébrique des nombres et guère plus que le principe du maximum en analyse complexe.

Soulignons cependant que, si notre démonstration ne traite que le cas où $\alpha$ est un réel positif différent de 1 et $\beta$ un réel irrationnel, elle manque l'exhaustivité d'assez peu : la raison en est expliquée au paragraphe suivant.

Voici d'abord quelques préliminaires au corps de la preuve proprement dite.

10. Ou «principe des trous de pigeons» en anglais ; c'est simplement la remarque qu'une application entre deux ensembles finis tels que l'ensemble d'arrivée est de cardinal strictement plus petit que l'ensemble de départ, n'est pas injective.

Pour un polynôme $f$ à coefficients entiers, on définit sa *hauteur* comme la plus grande des valeurs absolues de ses coefficients, et on la note $\mathrm{H}(f)$. Pour un polynôme de plusieurs variables on note *deg* son degré total. Nous utiliserons de façon essentielle la

**Proposition 1** *Soit $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des nombres algébriques, il existe une constante $c$ (ne dépendant que des $\gamma_i$) telle que pour tout polynôme $f$ de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ et tout réel $T$ tel que* $\max(\ln \mathrm{H}(f), deg(f)) \leq T$,

$$f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \neq 0 \quad \textit{implique} \quad |f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)| \geq e^{-cT}$$

Nous nous contentons de donner les grandes lignes de la démonstration. Pour $i = 1, ..., n$, soit $P_i \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P_i(\gamma_i) = 0$, on note $d_i$ le degré de $P_i$, $a_i$ le coefficient de son terme de plus haut degré et $\gamma_{i,1} = \gamma_i, \gamma_{i,2}, ..., \gamma_{i,d_i}$ les racines de $P_i$ (comptées avec leur multiplicité).

On remarque d'abord que si $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ est racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, tel que $P(0) \neq 0$ et de hauteur majorée par $M$, alors $|\alpha| \geq (1+M)^{-1}$. (En considérant le polynôme $X^d P(1/X)$, on voit qu'il revient au même de montrer $|\alpha| \leq (1+M)$. On peut alors supposer $|\alpha| > 1$, et si $\alpha$ annule $\sum_{i=0}^{d} b_i X^i$, on a $|\alpha| \leq |b_d \alpha| = |b_{d-1} + b_{d-2}\alpha^{-1} + \cdots + b_0 \alpha^{-d+1}| < M/(1 - |\alpha|^{-1})$.)

L'idée est d'associer à tout polynôme $f$ de degré $N$ tel que $f(\gamma_1, ..., \gamma_n) \neq 0$ un polynôme $F \in \mathbb{Z}[X]$ de hauteur majorée par $e^{CT}$ où $C$ ne dépend que de $\gamma_1, ..., \gamma_n$ (et du choix de $P_1, ..., P_n$) tel que $F(f(\gamma_1, ..., \gamma_n)) = 0$ puis d'appliquer la remarque précédente à $P = F$ et $\alpha = f(\gamma_1, ..., \gamma_n)$.

Explicitement, $F$ est donné par :

$$F(X) = (a_1 ... a_n)^{N d_1 ... d_n} \prod_{j_1=1}^{d_1} ... \prod_{j_n=1}^{d_n} (X - f(\gamma_{1,j_1}, ... \gamma_{n,j_n})).$$

La majoration de la hauteur de $F$ est, ici, facile à établir (remarquer en premier lieu qu'il existe une constante $c_1$ ne dépendant que de $\gamma_1, ..., \gamma_n$ telle que $|f(\gamma_1, ..., \gamma_n)| \leq e^{c_1(\deg f + \ln H(f))}$). C'est un point plus délicat que de montrer que $F$ est à coefficients entiers.

Supposons d'abord que $n = 1$; on a

$$F(X) = a_1^{N d_1} \prod_{j_1=1}^{d_1} (X - f(\gamma_{1,j})).$$

Remarquons alors que $F = a_1^{N d_1} G$ où $G$ est un polynôme symétrique en les $\gamma_{1,j}$, $j = 1, ..., d_1$, de degré au plus $N d_1$ et à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$.

Le théorème fondamental de structure de l'algèbre des polynômes symétriques assure l'existence d'un polynôme $\Gamma$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré au plus $N d_1$ tel que

$$G = G(\gamma_{1,1}, ..., \gamma_{1,d_1}) = \Gamma(s_1, ..., s_{d_1})$$

où $s_1, ..., s_{d_1}$ sont les $d_1$ polynômes symétriques élémentaires en les $\gamma_{1,j}$. On peut donc écrire

$$G(\gamma_{1,1}, ..., \gamma_{1,d_1}) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_{d_1}) \in \mathbb{N}^{d_1},\ \sum_{i=1}^{d_1} \alpha_i \leq N d_1} P_\alpha s_1^{\alpha_1} ... s_{d_1}^{\alpha_{d_1}}$$

où $P_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$. Comme les $s_i a_1$ sont entiers pour $i = 1, \ldots, d_1$ (ce sont, au signe près, les coefficients de $P_1$), $F$ est à coefficients entiers.

On généralise cette étude au cas $n$ quelconque par récurrence en remarquant que $F$ s'écrit

$$F(X) = (a_n)^{Nd_1 \ldots d_n} \prod_{j_n=1}^{d_n} \left( (a_1 \ldots a_{n-1})^{Nd_1 \ldots d_n} \prod_{j_1=1}^{d_1} \ldots \prod_{j_{n-1}=1}^{d_{n-1}} (X - f(\gamma_{1,j_1}, \ldots \gamma_{n,j_n})) \right);$$

l'hypothèse de récurrence indique que le facteur parenthésé est un polynôme de $\mathbb{Z}[X, Y]$, de degré au plus $Nd_1 \ldots d_{n-1}$, évalué en $Y = \gamma_{n,j_n}$. Un argument similaire à celui utilisé pour le cas $n = 1$ permet de conclure. □

Même si c'est un peu artificiel, on peut réécrire le théorème de Liouville ainsi :

*pour tout nombre $\xi$ racine d'un polynôme irréductible de degré $d \geq 2$, il existe une constante positive $c$ telle que pour tout polynôme $P = qX + p$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$, $|P(\xi)| \geq e^{c(1-d)\ln q}$,*

et voir dans la proposition précédente une généralisation de celui-ci pour des polynômes de degré plus grand que 1 d'une part, en plusieurs variables d'autre part. Il paraît naturel alors d'un déduire un critère de transcendance.

Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $\alpha, \beta$ et $\alpha^\beta$ sont simultanément algébriques (pour $\alpha$ positif, différent de 1 et $\beta$ irrationnel), donc $\alpha^{-1}$ et $(\alpha^\beta)^{-1}$ aussi.

Au paragraphe suivant, nous construisons alors pour tout entier impair $N$ un polynôme $f_N$ de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_5]$ tel que, pour $N$ grand tout au moins, $\max(\ln \mathrm{H}(f_N), deg(f_N)) \leq N^{15}$ et

$$0 < |f_N(\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \alpha^\beta, (\alpha^\beta)^{-1})| < e^{-N^{16}/3}$$

Or, d'après la proposition, il existe une constante $c$ telle que :

$$e^{-N^{16}/3} > e^{-cN^{15}};$$

c'est la contradiction attendue.

# 3 Une preuve du théorème de Gel'fond-Schneider (cas réel)

Posons $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha^\beta$ et $l = \log \alpha$. Pour $(\tau, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on introduit la fonction $\Phi_{\tau t}(z) = z^\tau e^{tlz}$ ; puis pour $(s_1, s_2) \in \mathbb{Z}^2$, on considère les nombres $\xi_{s_1 s_2} = s_1 + s_2\beta$, de sorte que

$$\Phi_{\tau t}(\xi_{s_1 s_2}) = (s_1 + s_2\beta)^\tau (\alpha_1^{s_1} \alpha_2^{s_2})^t.$$

On veut écrire une matrice carrée dont les $\Phi_{\tau t}(\xi_{s_1 s_2})$ sont les coefficients. Soit $N$ un entier impair, la taille de la matrice est $L = N^8$ ; les lignes seront indicées par $(\tau, t)$ pour $0 \leq \tau \leq N^6 - 1$ et $|t| \leq (N^2 - 1)/2$, les colonnes par $(s_1, s_2)$, pour $|s_1|, |s_2| \leq (N^4 - 1)/2$.

Moyennant le choix d'un ordre sur $\mathbb{Z}^2$, on peut alors définir pour tout entier positif $N$ la matrice

$$M_L = (\varphi_\lambda(\zeta_\mu))_{1\leq\lambda,\mu\leq L},$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} \varphi_\lambda(z) = \Phi_{\tau t}(z) \\ \zeta_\mu = \xi_{s_1 s_2}. \end{cases}$$

On note $\triangle_L$ son déterminant. C'est clairement un polynôme à coefficients entiers en $\beta$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_1^{-1}$, $\alpha_2^{-1}$. Il ne reste qu'à appliquer le programme annoncé au paragraphe précédent en prenant pour polynôme $f_N$ le déterminant $\triangle_L$.

Plus explicitement, il faut d'abord montrer que $\triangle_L$ est non nul pour $L$ assez grand. Curieusement, c'est sans doute la partie la plus délicate de la preuve générale et c'est ici que nous aurons besoin de l'hypothèse que $\alpha$ et $\beta$ sont réels. Dans le cas complexe, il n'y a aucune assurance que $\triangle_L$ est non nul. On considère alors une matrice du même type mais avec (beaucoup) plus de colonnes que de lignes et on montre qu'elle est de rang maximal, i.e. égal au nombre de lignes, ce pour quoi on a besoin soit de résultats analytiques plus fins que ceux utilisés ci-dessous, soit de manipulations techniques qui, quoiqu'élémentaires, ne prennent tout leur sens qu'avec un minimum d'habitude de l'algèbre commutative (ou de la géométrie algébrique). Une fois extraite la matrice adéquate on retrouve les rails de la démonstration qui suit. Il s'agit ensuite de majorer $|\triangle_L|$, sa hauteur et son degré comme annoncé. (On voit bien ici que l'ordre choisi sur $\mathbb{Z}^2$ pour écrire notre matrice n'a pas d'importance : un choix différent n'a d'autre effet que de permuter les lignes et les colonnes de la matrice, c'est à dire de multiplier $\triangle_L$ par $\pm 1$.)

*Première étape :* $\triangle_L$ est non nul

Il s'agit de montrer que $M_L$ est de rang maximal.

Supposons donc qu'il existe des réels $a_{\tau t}$ tels que la combinaison linéaire $\sum_{\tau t} a_{\tau t}\mathcal{L}_{\tau t}$, où $\mathcal{L}_{\tau t}$ désigne la ligne $(\tau, t)$ de $M_L$, soit nulle. Cela se traduit par

$$\sum_{\tau t} a_{\tau t}\Phi_{\tau t}(\xi_{s1s2}) = 0 \text{ pour tout } (s_1, s_2) \text{ tel que } |s_1|, |s_2| \leq (N^4-1)/2.$$

Si l'on pose

$$F(x) = \sum_{\tau t} a_{\tau t}\Phi_{\tau t}(x),$$

cela revient à dire que $F$ s'annule aux points $\xi_{s_1 s_2}$. Ainsi $F$ possède $N$ zéros distincts (sinon il existerait $(s_1, s_2) \neq (s_1', s_2')$ tels que $s_1 + s_2\beta \neq s_1' + s_2'\beta$ et $\beta$ appartiendrait à $\mathbb{Q}$). Écrivons

$$F(x) = \sum_t a_t(x)e^{tlx},$$

où $a_t(x) = \sum_\tau a_{\tau t}x^\tau$ et remarquons que $\deg(a_t) \leq N^6 - 1$, donc que

$$\sum_t \deg(a_t) \leq N^2(N^6-1).$$

D'autre part, comme $l \neq 0$, $tl$ est différent de $t'l$ si $t$ est différent de $t'$ et on conclut grâce au

**Lemme 1** *Soient $P_1, ..., P_n$ des polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ de degrés respectifs $d_1, ..., d_n$ et soient $\omega_1, ...\omega_n$ des nombres réels distincts ; alors la fonction $f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)e^{\omega_i x}$ a au plus $d_1 + ... + d_n + n - 1$ zéros distincts.*

Démonstration.

Le point clé est que si une fonction réelle différentiable $f$ a au moins $m$ zéros distincts, sa dérivée en a au moins $m-1$ ; c'est en effet une conséquence immédiate du théorème de Rolle : soient $x_1, ..., x_m$ les zéros distincts de $f$, comme $f(x_i) = f(x_{i+1})$ pour $i = 1, ..., m-1$, il existe $x_i' \in ]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(x_i') = 0$ pour $i = 1, ..., m-1$.

On démontre alors le lemme par récurrence sur $k = d_1 + ... + d_n + n - 1$. Si $k = 0$, alors $n = 1$, $d_1 = 0$ et il est clair que $P_1 e^{\omega_1 x}$ ne s'annule pas.

À présent soit $k \geq 1$ ; sans perte de généralité, c'est à dire moyennant la multiplication de $f$ par $e^{-\omega_n x}$, on peut supposer $\omega_n = 0$, et donc $\omega_i \neq 0$ pour $i = 1, ..., n$. On a vu que si $f$ a $M$ zéros distincts, sa dérivée

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i P_i + P_i')(x)e^{\omega_i x} + P_n'(x)$$

en a au moins $M - 1$. Mais observons que le degré de $\omega_i P_i + P_i'$ est encore $d_i$, pour $i = 1, ..., n-1$, tandis que celui de $P_n'$ est $d_n - 1$, donc, par hypothèse de récurrence, $M - 1 \leq d_1 + \cdots + d_n + n - 1$, qui est la majoration annoncée de $M$. □

Dans le cas qui nous intéresse, on en déduit que $F$ ne peut avoir plus de $N^2(N^6 - 1) + N^2 - 1 = L - 1$ zéros distincts, sauf si tous les $a_t$ sont nuls. Autrement dit, on a montré

$$\sum_{\tau t} a_{\tau t} \mathcal{L}_{\tau t} = 0 \text{ implique } a_{\tau t} = 0 \text{ pour tout } (\tau, t).$$

Ainsi $\triangle_L$ est non nul.

*Deuxième étape :* Un majorant pour $|\triangle_L|$

On se place dans le plan complexe ; dans ce qui suit nous noterons $\overline{D}_r$ le disque fermé de centre 0 et de rayon $r$ et nous posons $|\varphi|_r = \sup_{z \in \overline{D}_r} |\varphi(z)|$. Un résultat de base en théorie des fonctions analytiques (ou holomorphes) est le principe du maximum, qui assure que le module d'une fonction analytique sur un disque fermé atteint son maximum sur le bord du disque. Une conséquence facile en est le

**Lemme 2 (une variante du lemme de Schwarz)** *Soit $n \in \mathbb{N}$, $r_1$ et $r_2$ deux réels tels que $0 < r_1 \leq r_2$ et soit $\Psi$ une fonction analytique sur le disque $\overline{D}_{r_2}$. Si $\Psi$ a un zéro d'ordre au moins $n$ en 0, alors*

$$|\Psi|_{r_1} \leq \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n |\Psi|_{r_2}.$$

Démonstration.

Posons $\Phi(z) = z^{-n}\Psi(z)$; c'est une fonction analytique sur $\overline{D}_{r_2}$ et le principe du maximum donne d'une part sur $\overline{D}_{r_2}$ : $|\Phi|_{r_2} = r_2^{-n}\,|\Psi|_{r_2}$, d'autre part sur $\overline{D}_{r_1}$ : $|\Phi|_{r_1} = r_1^{-n}\,|\Psi|_{r_1}$. Mais comme $r_1 \leq r_2$ : $|\Phi|_{r_1} \leq |\Phi|_{r_2}$ d'où le résultat annoncé. □

Introduisons

$$\Psi(z) = \det(\varphi_\lambda(\zeta_\mu z))_{1\leq\lambda,\mu\leq L} \text{ (remarquer que } \triangle_L = \Psi(1)).$$

Bien sûr la fonction $\Psi$ est entière (i.e analytique sur $\mathbb{C}$) puisque $\varphi_\lambda$ est entière pour tout $\lambda$. Nous allons voir que $\Psi$ admet en 0 un zéro d'ordre au moins $L(L-1)/2$. Pour cela écrivons le développement de Taylor de $\varphi_\lambda$ à l'ordre $L(L-1)/2$ en 0, soit

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{L(L-1)/2} a_{k\lambda} z^k + o(z^{L(L-1)/2}),$$

d'où

$$\Psi(z) = \det\Big(\sum_{k=0}^{L(L-1)/2} a_{k\lambda}(\zeta_\mu z)^k\Big)_{\lambda,\mu} + o(z^{L(L-1)/2}),$$

si bien qu'il suffit[11] de montrer que pour tout choix d'entiers naturels $k_1, \ldots, k_L$ au plus égaux à $L(L-1)/2$,

$$\det((\zeta_\mu z)^{k_\lambda})_{1\leq\lambda,\mu\leq L}$$

admet en 0 un zéro d'ordre au moins $L(L-1)/2$. Pour cela, on peut supposer les $k_\lambda$ distincts, sinon le déterminant est identiquement nul (2 lignes sont identiques). Alors

$$\det((\zeta_\mu z)^{k_\lambda})_{1\leq\lambda,\mu\leq L} = (\prod_{\lambda=1}^{L} z^{k_\lambda})\det((\zeta_\mu)^{k_\lambda})_{1\leq\lambda,\mu\leq L}$$

et il est immédiat que $\sum_{\lambda=1}^{L} k_\lambda \geq 0 + 1 + 2 + ... + L - 1 = L(L-1)/2$.

À présent nous appliquons le lemme précédent avec $r_1 = 1$, $r_2 = e$, $n = L(L-1)/2$, d'où

$$|\triangle_L| \leq |\Psi|_1 \leq e^{-L(L-1)/2}\,|\Psi|_e\,.$$

Or, par définition du déterminant, on a

$$|\Psi(z)| \leq L! \prod_{\lambda=1}^{L} \max_\mu |\varphi_\lambda(\zeta_\mu z)|\,.$$

Mais si $|z| \leq e$, $|\zeta_\mu z| \leq e(N^4-1)(1+|\beta|)/2$ et il vient

$$|\Psi|_e \leq L! \prod_{\lambda=1}^{L} |\varphi_\lambda|_R \ ,$$

11. Il faut s'en convaincre : utiliser la multilinéarité du déterminant comme fonction de ses lignes.

où $R = e(1+|\beta|)N^4$. Tenant compte de

$$|\varphi_\lambda|_R \leq R^\tau e^{|tl|R} \leq R^{N^6} e^{N^2|l|R},$$

on obtient

$$|\triangle_L| \leq e^{-L(L-1)/2} L! R^{N^{14}} e^{N^{10}|l|R}.$$

En majorant $L!$ par $L^L$, on a donc

$$|\triangle_L| \leq e^{CN^{14}\log N - N^{16}/2}$$

où $C$ (constante positive) ne dépend que de $l$ et de $\beta$. Pour $N$ assez grand on a la majoration annoncée, soit

$$|\triangle_L| \leq e^{-N^{16}/3}.$$

*Troisième étape :* Des majorants pour le degré et la hauteur de $\triangle_L$.

Rappelons que $\Phi_{\tau t}(\xi_{s1s2}) = (s_1+s_2\beta)^\tau(\alpha_1^{s_1}\alpha_2^{s_2})^t$, si bien que, comme polynôme en $\beta$, $\alpha_1^{\pm 1}$, $\alpha_2^{\pm 1}$, son degré total est majoré par $|\tau|+|t(s_1+s_2)| \leq 2N^6$. Par suite le degré de $\triangle_L$, qui est somme de produits de $N^8$ tels facteurs, est majoré par $2N^{14}$.

Quant à la hauteur d'un polynôme $F$ elle est évidement majorée par la longueur de $F$ notée $\ell(F)$ et définie comme la somme des modules des coefficients de $F$. La longueur a cet avantage qu'en plus de vérifier

$$\ell(F+G) \leq \ell(F) + \ell(G),$$

elle satisfait

$$\ell(FG) \leq \ell(F)\ell(G).$$

On en déduit :

$$\ell(\triangle_L) \leq L!(\max_{\lambda,\mu} \ell(\phi_\lambda(\zeta_\mu)))^L, \quad \text{(sous-additivité de } \ell)$$

où $\phi_\lambda(\zeta_\mu)$ et $\triangle_L$ sont vus comme polynômes en $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}$.

Mais remarquons que

$$\begin{aligned} \ell(\Phi_{\tau t}(\xi_{s1s2})) &\leq \ell(s_1+s_2\beta)^\tau \ell((\alpha_1^{s_1}\alpha_2^{s_2})^t) \\ &\leq (|s_1|+|s_2|)^\tau, \end{aligned}$$

d'où, pour $N$ assez grand et en majorant encore $L!$ par $L^L$

$$\log \mathrm{H}(f_N) \leq 8N^8 \log N + 4N^{14}\log N \leq 5N^{14}\log N.$$

□

# 4 La postérité du septième problème de Hilbert

La valeur d'un problème mathématique est difficile à définir dans l'absolu, mais la communauté des mathématiciens s'accorde probablement sur ce point : un bon problème doit survivre à sa résolution, soit que les méthodes mises au point pour le «tuer » aient un champ d'application vaste ou qu'elles donnent même naissance à une nouvelle branche des mathématiques (on peut songer au dernier théorème de Fermat), soit que l'énoncé prouvé suggère des conjectures nouvelles et stimulantes.

Nous espérons, dans la dernière partie de cet exposé, convaincre le lecteur que le septième problème de Hilbert répond à ces deux critères (soulignons que nous sommes fort loin de l'exhaustivité dans l'échantillon d'applications que nous présentons).

L'idée la plus naturelle est d'exploiter les méthodes de Gel'fond et Schneider afin de démontrer la transcendance d'autres classes de nombres que ceux de la forme $\alpha^\beta$. Nous l'illustrons maintenant par un exemple dû à Schneider lui-même.

À un réseau $\Omega$ de $\mathbb{C}$ (c'est un sous-groupe discret de $\mathbb{C}$ qui engendre $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$), on associe une fonction méromorphe $\wp(z)$, dont les pôles sont précisément les points de $\Omega$ et qui est périodique relativement à ce réseau. Elle est solution de l'équation différentielle $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$, où $g_2$ et $g_3$ sont des quantités associées à $\Omega$, d'où l'on peut déduire que $(\wp, \wp')$ fournit une paramétrisation de la courbe algébrique donnée par $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$. Une telle courbe est dite *elliptique* et possède la très remarquable propriété qu'on sait munir l'ensemble de ses points (sur un corps donné) d'une loi de groupe abélien. Ceci se traduit en retour par une relation algébrique entre les valeurs de $\wp$ et $\wp'$ aux points $u, v$ et $u + v$ ; cette propriété est à rapprocher de la relation $e^{u+v} = e^u.e^v$, elle-même liée au fait que les nombres complexes de module 1 forment un groupe.

Ces similitudes entre la fonction exponentielle et la fonction $\wp$ (dite de Weierstraß) permirent à Schneider d'adapter sa méthode à cette dernière, le principal obstacle à surmonter provenant de ce que $\wp$ n'est pas une fonction entière. Il obtint par exemple :

*si $g_2$ et $g_3$ sont algébriques et si $\alpha$ est un nombre algébrique n'appartenant pas à $\Omega$, alors $\wp(\alpha)$ est transcendant.*

On peut mentionner le corollaire suivant :

*pour une ellipse dont les axes sont pris comme axes de coordonnée et dont les longueurs d'axes sont algébriques, la longueur de tout arc compris entre des points de coordonnées algébriques distincts (en particulier la longueur de l'ellipse) est un nombre transcendant.*[12]

D'un autre point de vue, Gel'fond eut l'idée d'utiliser sa méthode afin d'obtenir des résultats quantitatifs fins (l'aspect qualitatif étant de dire d'un nombre s'il est irrationnel, algébrique ou transcendant par exemple). Pour des nombres algébriques $\alpha$ et $\beta$, avec les restrictions d'usage, il produit ainsi de nouvelles minorations des quantités $|\alpha^\beta - \zeta|$, où $\zeta$ est un nombre algébrique arbitraire. Soulignons aussi que ces estimations sont *effectives*, ce qui signifie qu'on sait, comme dans le théorème de Liouville, «effectivement» calculer les quantités intervenant dans les minorations, celles-ci dépendant évidemment de $\alpha$ et $\beta$, mais aussi de la «complexité» du nombre $\zeta$, mesurée au moyen du degré et de la hauteur de

12. Bien sûr un lien étroit, mais non immédiat, existe entre ellipses et courbes elliptiques.

son polynôme minimal (disons que c'est le polynôme à coefficients entiers premiers entre eux, à coefficient dominant positif, de plus bas degré, dont $\zeta$ est racine).

Rappelons la formulation eulérienne du problème de Hilbert : si $b$ n'est pas une puissance rationnelle de $a$, alors $\ln b/\ln a$ est transcendant. On peut réécrire le théorème de Gel'fond-Schneider dans cet esprit : si $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont des nombres algébriques et que $\alpha_1$ n'est pas une puissance rationnelle de $\alpha_2$, alors $\log\alpha_2/\log\alpha_1$ est transcendant (pour toute détermination des logarithmes en question). Ou encore :

*pour tous nombres algébriques $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, tels que $\log\alpha_1$ et $\log\alpha_2$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, le nombre $\beta_1\log\alpha_1 + \beta_2\log\alpha_2$ est non nul.*

Gel'fond donne de nouvelles minorations effectives de ces quantités[13], ce qui a des conséquences remarquables, aussi bien pour la résolution des équations diophantiennes que pour certaines questions de théorie algébrique des nombres.

Il s'est par exemple intéressé au vieux «problème du nombre de classes 1» de Gauß, qui conjecture dans ses *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) qu'il n'y a que neuf corps quadratiques imaginaires, c'est à dire de la forme $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, où $D$ est un entier positif sans facteur carré, dont le nombre de classes est égal à 1, cette propriété signifiant que, du point de vue de l'arithmétique, les éléments de tels corps ont un comportement parfaitement similaire à celui des rationnels. Il montre avec Linnik comment relier cette question à la majoration de la valeur absolue d'une combinaison linéaire à coefficients entiers de trois logarithmes de nombres algébriques.

Sa méthode ne lui permet pas dans ce cas précis de conclure (elle traite essentiellement, on l'a vu, le cas où n'interviennent que deux logarithmes) et il souligne l'importance, pour le progrès de la théorie des nombres, de fournir des minorations effectives de quantités du type $|\beta_1\log\alpha_1 + \cdots + \beta_n\log\alpha_n|$, où les $\beta_i$ sont des entiers et les $\alpha_i$ des nombres algébriques.

Ce programme, qui suppose une généralisation des méthodes de Gel'fond et Schneider aux fonctions de plusieurs variables, est réalisé, au-delà des espérances de Gel'fond, par Alan Baker en 1966, dans une série de travaux qui lui vaudront d'ailleurs la médaille Fields. Il obtient par exemple la généralisation suivante du théorème de Gel'fond et Schneider :

*$\alpha_1^{\beta_1}\ldots\alpha_n^{\beta_n}$ est transcendant pour tous nombres algébriques $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ différents de 0 et 1 et tous nombres algébriques $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tels que $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$* (généralisation de la condition $\beta \notin \mathbb{Q}$).

La version quantitative des résultats de Baker a eu, et continue d'avoir, avec ses raffinements et ses généralisations, des répercussions remarquables dans de nombreuses branches de la théorie des nombres. Baker en déduisit en particulier qu'il n'y a pas de dixième corps quadratique imaginaire de nombre de classes égal à 1.

Ironie de l'histoire, Stark remarque en 1969 que Gel'fond et Linnik étaient en mesure de résoudre la question dès 1949, un argument utilisant des formes linéaires en deux logarithmes seulement permettant de conclure.

13. On parle de formes linéaires en deux logarithmes.

Pour terminer, nous donnons ci-dessous la liste des ouvrages qui ont guidé la rédaction de cet exposé et où le lecteur (motivé !) pourra trouver de quoi satisfaire la curiosité que nous espérons avoir éveillée.

Alan Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

N. I. Fel'dman et Yu. V. Nesterenko, *Number theory IV, Transcendental numbers*, Encyclopaedia of mathematical sciences, **44**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

Theodor Schneider, *Introduction aux nombres transcendants*, traduit de l'allemand par P. Eymard, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

Michel Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups, Transcendence properties of the exponential function in several variables*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

Michel Waldschmidt, *Transcendence methods*, Queen's papers in pure and applied mathematics, **52**, Queen's University, Kingston, Ontario, 1979.

Julien Haristoy
U.F.R. de mathématique et d'informatique & IRMA
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
e-mail : haristoy@math.u-strasbg.fr

Édouard Oudet
U.F.R. de mathématique et d'informatique & IRMA
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg
e-mail : oudet@math.u-strasbg.fr