Compléments à l'article
Imagerie médicale : le Scanner.

[1]

Les compléments portent sur le paragraphe 5 de l'article précité paru dans le numéro 106 de l'Ouvert. Ils concernent la transformation de Radon.

La transformation de Radon

Essayons de voir quel serait l'analogue continu de la méthode discrète (Cf**3. Exemples miniatures**).

On considère une fonction f à support compact dans l'espace numérique, à deux dimensions ici, et on lui associe la fonction F (la tranformée de Radon de f) qui à toute droite ℓ associe

$$F(\ell) = \int_{x \in \ell} f(x)\, dx \ . \tag{1}$$

Il s'agit de définir ce que cela signifie et de voir ensuite si l'on peut récupérer f à à partir de la connaissance de F. Ce problème est un type de *problème inverse* en ce sens qu'il s'agit de récupérer une donnée inconnue f à partir de sa transformée F par une certaine opération effectivement calculable.

Exercice 1. Montrer qu'on peut écrire l'équation d'une droite quelconque ℓ sous la forme

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = p \text{ où } p \geq 0, \varphi \text{ défini modulo } 2\pi \ ,$$

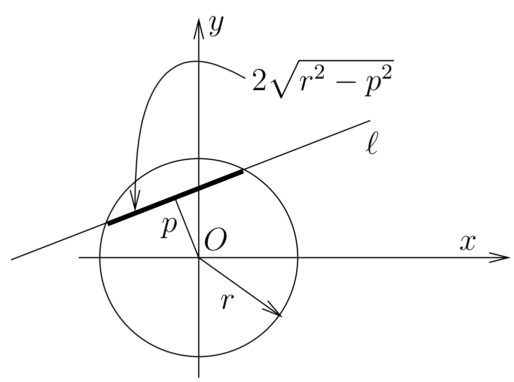
et que dans ce cas (1) peut s'écrire

$$F(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p\cos\varphi - s\sin\varphi, p\sin\varphi + s\cos\varphi)\, ds \ . \tag{2}$$

Et donc il s'agit de déterminer f connaissant F.

Exercice 2. On considère f constante égale à m dans une petite boule de rayon r centrée à l'origine et nulle en dehors. Montrer qu'on a

$$f(O) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(p, \varphi)}{2\sqrt{r^2 - p^2}}\, d\varphi \ , p \leq r \ .$$



Soit F la fonction définie par (2). On considère des fonctions f à décroissance suffisamment rapide à l'infini pour que les intégrales définies par (2) convergent. Soit $F_P(q)$ la fonction définie pour q strictement positif comme la moyenne de F sur toutes les droites situées à la distance q de P. Par exemple si P est à l'origine on a

$$F_O(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(q, \varphi)\, d\varphi \ .$$

1. © L'OUVERT 107 (2003)

Considérons pour éviter le pôle en zéro

$$I_P(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'_P(q)}{q}\,dq = \frac{1}{\pi}\left[\frac{F_P(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F_P(q)}{q^2}\,dq\right] \quad (\varepsilon > 0)\ ,$$

(formule qui résulte d'une intégration par parties).

Théorème (Radon, 1917)

Sous certaines conditions de régularité de f, l'expression précédente converge pour ε tendant vers 0 et on a

$$f(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} I_P(\varepsilon)\ .$$

Autrement dit, en dimension deux et sous certaines conditions, on récupère la valeur de f en un point (quelconque) si on connait TOUTES les intégrales sur toutes les droites du plan.

On peut lire la démonstration originale de Radon dans son article de 1917 (*Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*) qui est reproduit dans l'ouvrage *75 Years of Radon transform* publié en 1994 sous la direction de S. Gindikin et P. Michor (Internat. Press, Cambridge, MA).

En dimension quelconque il est aussi possible d'inverser la transformation de Radon. On pourra trouver des formules d'inversion dans l'ouvrage de S. Helgason *The Radon transform* publié en 1999 (Birkhaüser, Boston).

Correctifs

D'autre part voici aussi quelques correctifs portant sur des détails de l'article.

Pour les commentaires de la Figure 9 il fallait écrire :

Etant données les trois droites L_i dont les équations sont données par le système et dont on ne connaît pas les intersections deux à deux, on part d'un point P_0 quelconque et on définit :

$$\begin{aligned} &P_1, P_4, P_7, \dots \text{ sur la droite } L_1\ ,\\ &P_2, P_5, P_8, \dots \text{ sur la droite } L_2\ ,\\ &P_3, P_6, P_9, \dots \text{ sur la droite } L_3\ ,\end{aligned}$$

où P_1 est la projection orthogonale de P_0 sur L_1, P_2 celle de P_1 sur L_2 etc.

Dans l'exercice qui suivait il fallait écrire :

Partez de $P_0 = (2,3)$.

Au début de la page 8 il fallait écrire :

Les droites sont remplacées par 6 hyperplans; l'analogue de la formule de projection orthogonale permet de construire un algorithme donnant 6 suites de points (les points d'une suite appartenant à l'un des hyperplans). En partant de $(0,0,0,0)$ on obtient les points dont les coordonnées sont indiquées page 8 : les points notés P_1 (resp. P_2 etc...) appartiennent tous à l'un des hyperplans. L'algorithme détermine six suites qui convergent séparément vers un point de chacun des hyperplans.