NÉGLIGER DES TERMES ? OPPORTUNITÉS ET DIFFICULTÉS

Marysa KRYSINSKA AHA et GEM Louvain-la-neuve
Maggy SCHNEIDER AHA et université de Namur

Résumé : L'apprentissage de l'analyse mathématique donne l'occasion aux élèves d'identifier une nouvelle technique, la négligence de termes, qui peut être ultérieurement institutionnalisée par le biais, soit du concept de limite, soit de celui de réels très proches . L'exposé montre comment une approche heuristique de l'analyse, qui fait la part belle à la modélisation des grandeurs, est susceptible de préparer les élèves à entrer dans une présentation axiomatique en termes d'ordres de grandeurs tout en faisant apparaître en amont de cette dernière quelques difficultés d'apprentissage potentielles liées à la définition de grandeurs telles que les aires ou les vitesses.

Un des objectifs du colloque organisé à Mulhouse sur le thème « Regards et perspectives sur l'enseignement de l'Analyse au lycée et dans les formations universitaires de base » était de confronter plusieurs enseignement de l'analyse avec une approche en termes d'ordres de grandeurs telle que développée par le groupe ORDRE DE GRANDEUR de l'IREM de Picardie. À cette occasion, nous avons présenté une approche heuristique de l'analyse, le projet AHA, qui fait la part belle à la modélisation des grandeurs, ainsi qu'à la phase d'expérimentation mobilisant divers registres. Il nous est apparu que cette approche était susceptible de préparer les élèves à entrer dans le jeu axiomatique que constituait une présentation de l'analyse avec une approche en termes d'ordres de grandeurs tout en faisant apparaître quelques difficultés d'apprentissage potentielles en amont de cette dernière. C'est cela que nous voulons illustrer dans ces quelques lignes, en nous inspirant d'écrits antérieurs qui présentent et analysent les enjeux du projet AHA (e.a. Groupe AHA, 1999a et 1999b ; M. Grang'Henry-Krysinska et al.., 1993 ; C. Hauchart et al., 1996 ; M. Schneider, 2001a et 2001b). À cette fin, nous avons polarisé notre propos, d'une part, sur l'approche des asymptotes et, d'autre part, d=sur l'introduction des dérivées. Nous renvoyons aux références précédentes tout lecteur qui souhaiterait appréhender de manière plus globale les visées et les ressorts de ce projet.

1. Les asymptotes dans le projet AHA

1. Comportements asymptotiques de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

Dans le projet AHA, l'étude du comportement asymptotique de fonction prolonge celle du comportement asymptotique de plusieurs suites. Dans un premier temps, le tracé précis des graphiques de fonctions du type $y = x^n$ et $y = 1/ x^n$ fournit aux élèves l'occasion de comparer des ordres de grandeurs au voisinage de certaines valeurs de la variable : si x est suffisamment grand, 1/x peut être considéré comme négligeable et *a fortiori* $1/x^2$, $1/x^3$, etc.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ fait l'objet d'un examen plus approfondi, s'appuyant sur des registres numérique et graphique et favorisant les passages de l'un à l'autre. La construction du graphique et l'observation de tableaux numériques suscitent, chez les élèves, des propos tels que :

« Pour les x positifs petits, $\frac{1}{x}$ est positif grand, d'autant plus grand que x est plus petit »

« D'autre part, dès que x croît, $\frac{1}{x}$ décroît et s'approche de plus en plus de 0 au fur et à mesure que x devient grand »

« Quand x s'approche de 0 en venant de droite, le graphique de $\frac{1}{x}$ monte de plus en plus haut en s'approchant de l'axe Oy »

« Une partie du graphique semble se confondre avec l'axe Oy quand on le regarde de loin »

« Une partie du graphique semble se confondre avec l'axe Ox quand on le regarde de loin »

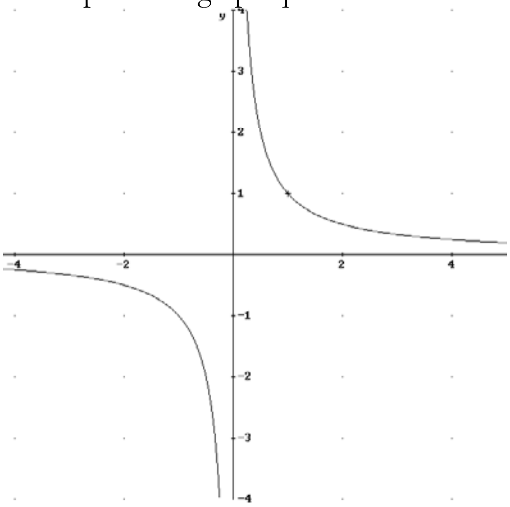


Figure 1

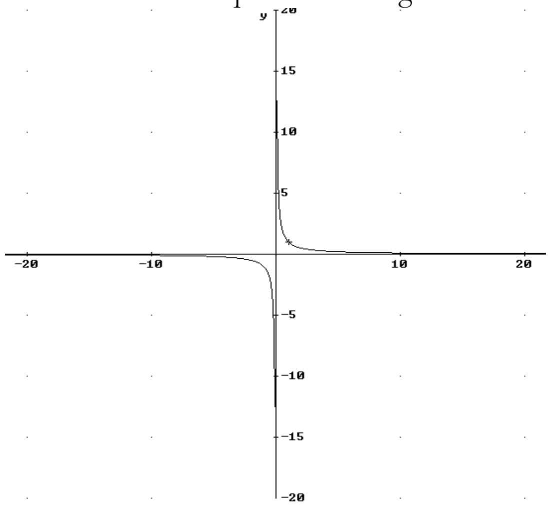


Figure 2

Cette expérimentation permet de donner une première signification au concept d'asymptote, mise en évidence par des choix judicieux de fenêtres sur une calculatrice graphique : “ On dira dans ce cas que la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale au graphique de la fonction f(x) = $\frac{1}{x}$ et que la droite y = 0 en est une asymptote horizontale parce que la courbe devient de plus en plus proche de ces droites au fur et à mesure qu'on la regarde de loin ”. Les écritures canoniques en termes de limite sont introduites pour décrire le phénomène.

Les asymptotes des fonctions $y = 1/x^n$ se déduisent alors de la position de leurs graphiques respectifs par rapport à celui de la fonction (Figure 3)

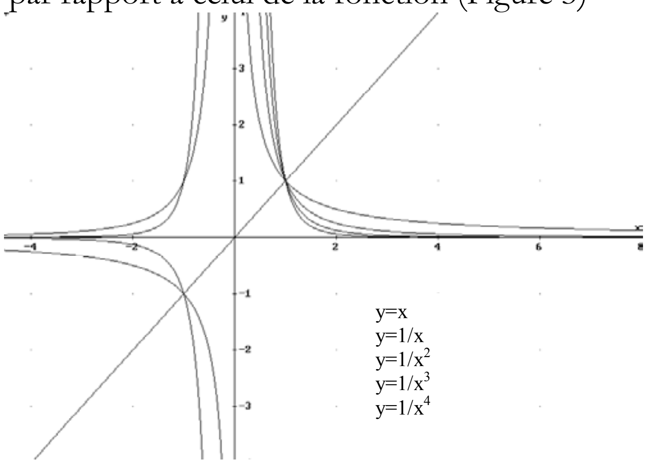


Figure 3

2. Comportements asymptotiques des fonctions de la classe $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

Un premier exemple de fonction homographique apparaît dans un contexte de grandeurs: “ Un toit en pente s'appuie sur les murs d’une maison. Ceux-ci sont hauts de 3 m et écartés l'un de l'autre de 4 m. Le toit peut être plus en moins incliné.” (Figure 4). Les comportements asymptotiques de cette fonction sont mis sur le tapis par des questions telles que : “ Comment varie la hauteur h du faîte lorsque la distance x s’approche de 2 m ? Comment varie h lorsque x devient de plus en plus grand ? ”

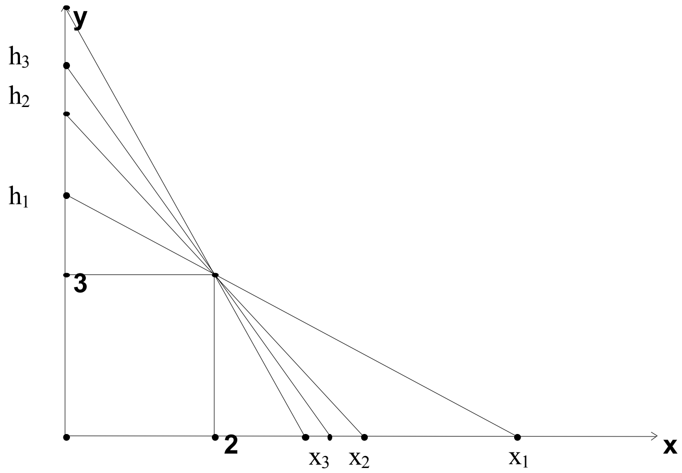


Figure 4

Ces comportements asymptotiques sont ainsi étudiés conjointement selon dans plusieurs registres : géométrique, numérique, analytique et graphique. D'abord, ce comportement peut être observé sur la Figure 4 : quand x s'éloigne de l'origine, h diminue en s'approchant de 3 ; quand x s'approche de 2, h devient de plus en plus grand. Ce comportement est ensuite traduit en deux expressions fonctionnelles : $h = \frac{3x}{x-2}$ et $h = \frac{6}{x-2} + 3$.

Quand on exploite des valeurs numériques de l'expression $h = \frac{3x}{x-2}$, on observe que plus x est proche de 2, plus le dénominateur de la fraction est proche de 0 et plus la fraction est grande ; plus x est grand, plus la fraction est proche de 3. Quand on transforme la formule $h = \frac{3x}{x-2}$ en $\frac{3}{1-\frac{2}{x}}$, on raisonne ainsi : “ lorsque x devient très grand, $\frac{2}{x}$ s'approche de 0 d'aussi près que l'on veut et la fraction s'approche de 3 d'aussi près que l'on veut pour autant que x soit suffisamment grand”. Quant à la formule $h = \frac{6}{x-2} + 3$, elle suggère une façon de construire le graphique de h en fonction de x par une suite de transformations de graphiques au départ du graphique de $\frac{1}{x}$ (une translation de 2 unités parallèlement à l'axe des y, une compression de rapport 6 parallèlement à l'axe des y, une translation de 3 unités parallèlement à l'axe des x).

Toutes ces approches se complètent et convergent vers une officialisation du phénomène en termes techniques mobilisant le concept de limite : la droite $y = 3$ est une asymptote horizontale au graphique de la fonction et la droite $x = 2$ en est une asymptote verticale.

Ces résultats se généralisent pour n'importe quelle fonction homographique $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$. La validation des résultats s'appuie sur la “bonne forme” de l'expression analytique de ces fonctions : $f(x) = a + \frac{k}{x + d}$, sur des propriétés établies pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et sur l'hypothèse que les asymptotes sont conservées d'une certaine manière par les translations et les dilatations. On établit aussi deux idéogrammes possibles du graphique de n’importe quelle fonction homographique (Figure 5).

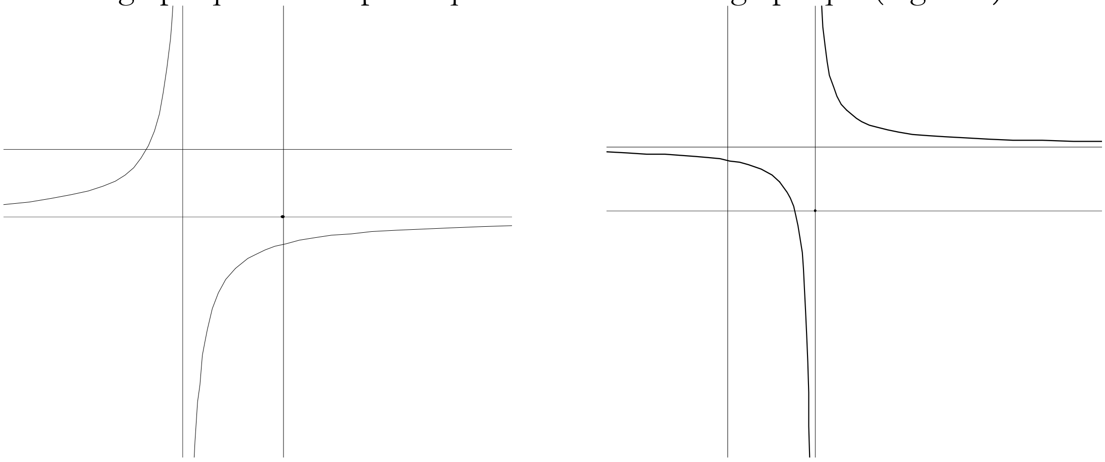


Figure 5

3. Comportements asymptotiques des fonctions de la classe $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$

La première asymptote oblique est rencontrée à propos de la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$; elle est traitée dans les registres numérique, graphique et analytique. Dans cette rencontre, on s'appuie sur le fait que la fonction se présente sous forme d'une somme de deux fonctions x et $\frac{1}{x}$ et sur le comportement asymptotique de $\frac{1}{x}$. On utilise les arguments suivants : “ D'abord, on rend $\frac{1}{x}$ aussi petit que l'on veut en prenant x assez grand, auquel cas $x + \frac{1}{x}$ est aussi proche que l'on veut de x ou la différence $f(x) - x$ aussi petite que l'on veut [...]. La fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$ se comporte pratiquement (c'est-à-dire à peu de choses près) comme la droite $y = x$ pour x très grand. La droite $y = x$ est un exemple de ce qu'on appelle une asymptote oblique de f(x) » (Figure 6).

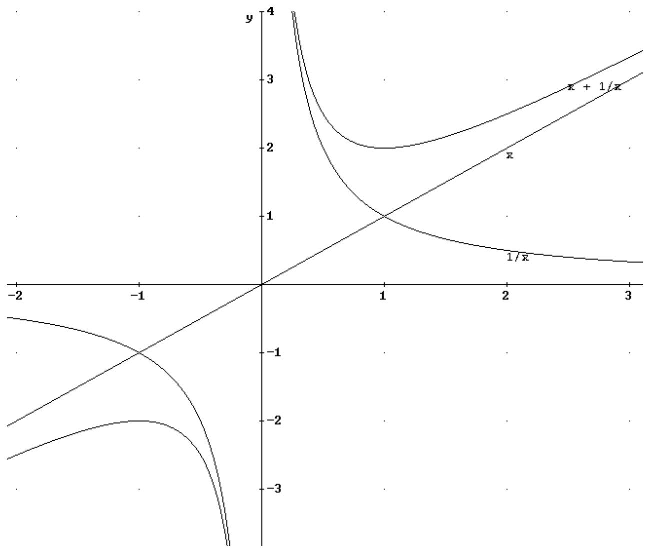


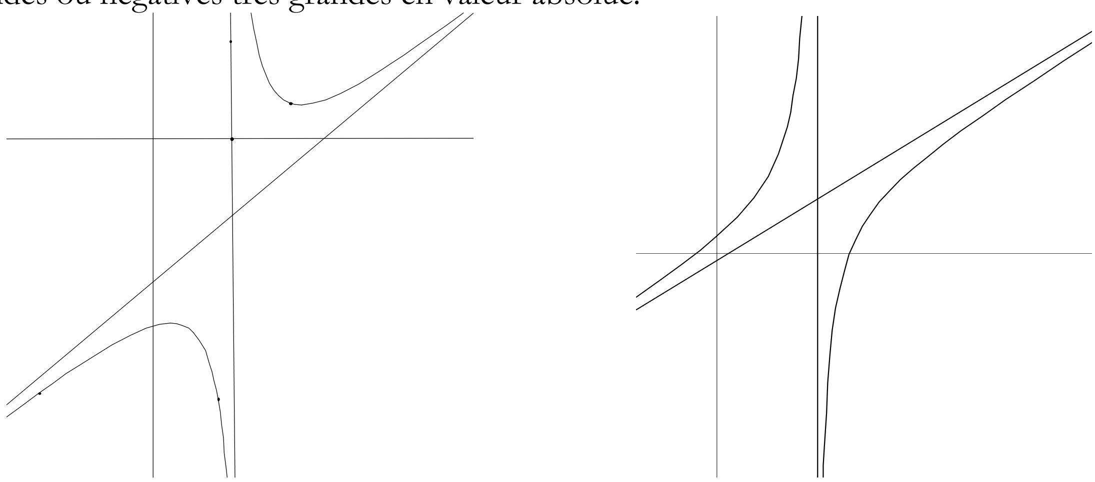
Figure 6

Quant à l’asymptote verticale de cette fonction, elle est *mutatis mutandis* étudiée dans les mêmes termes.

Le raisonnement mis en place pour étudier les comportements asymptotiques de cette fonction se généralise à d'autres fonctions de cette classe (Figure 7). Il se base sur la “bonne forme” de l'expression analytique de ces fonctions : $f(x) = mx + p + \frac{k}{x + d}$

Chacune de ces fonctions peut être considérée comme somme de deux fonctions données par $mx + p$ et $\frac{k}{x + d}$. Le comportement asymptotique de la seconde est connu puisqu'il s'agit d'une fonction homographique. Ainsi, on considère la droite $y = mx + p$ comme asymptote oblique car le terme $\frac{k}{x + d}$ devient négligeable pour des valeurs de x positives très grandes ou négatives très grandes en valeur absolue.

À ce stade, on est amené à considérer la droite $y = mx + p$ comme asymptote oblique du graphique d'une fonction dont l'expression analytique est de la forme $mx + p + g(x)$ lorsque $g(x)$ devient négligeable pour des valeurs de x positives très grandes ou négatives très grandes en valeur absolue.



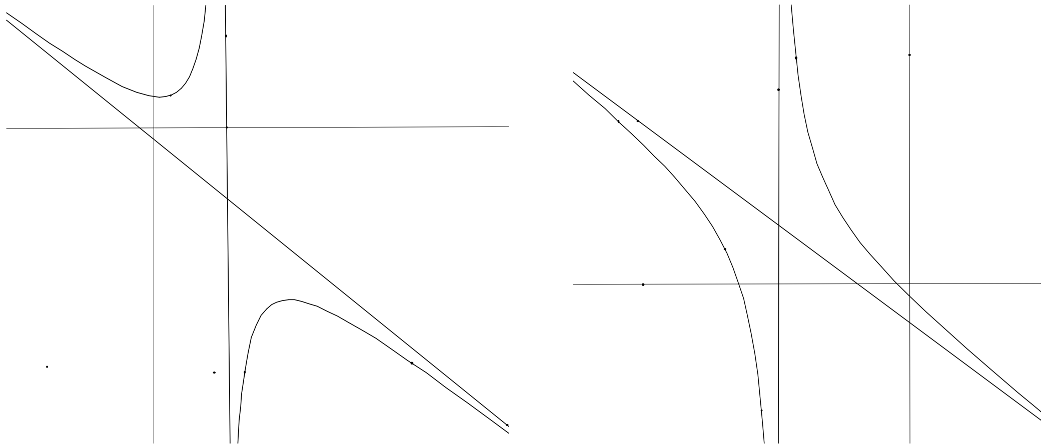


Figure 7

4. Comportements asymptotiques des fonctions de la classe $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

Quelques fonctions irrationnelles sont étudiées. Il s'agit principalement de racines carrées de fonctions du second degré et de sommes d'une telle fonction et d'une fonction affine. Ces fonctions sont mises sur le tapis à propos de problèmes d'optimisation. Ici aussi, c'est la recherche d'une “ bonne forme ” qui est la technique mise en évidence pour déterminer les asymptotes obliques, technique consistant ici à compléter le radicante en carré parfait. Cependant, dans le cadre de ces fonctions, le discours sur les parties négligeables qui pourrait s'ensuivre devient scabreux : ainsi, lorsqu'on considère la fonction $\sqrt{25t^2 - 8t + 1}$, on peut être tenté de négliger les termes - 8 t et 1 par rapport à 25 t^2 lorsque t devient grand et en conclure que les asymptotes obliques sont les droites d'équation y = 5 t et y = – 5 t mais un raisonnement analogue à partir d'une autre écriture de la même fonction, soit $\sqrt{(5t - \frac{4}{5})^2 + \frac{9}{25}}$,conduira aux asymptotes $y = \pm\,(5t - \frac{4}{5})$. En épinglant cet exemple, les auteurs du projet mettent en évidence la nécessité d'un calcul de limite pour déterminer des asymptotes. De là, une nouvelle définition de l'asymptote qui sera institutionnalisée dans la synthèse par une phrase dans laquelle la connotation temporelle n'est pas absente : “ la droite y = ax + b est asymptote au graphique de la fonction f(x) lorsque la différence f(x) – (ax+b), prise en valeur absolue, possède une limite nulle aux infinis, c'est-à-dire devient et reste aussi petite que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand en valeur absolue ”. L'asymptote horizontale apparaît dès lors comme cas particulier et l'asymptote verticale y est définie de manière analogue.

Dans la synthèse, ce changement d'écriture des racines carrées de fonctions du second degré par complétion du carré est réalisé de manière littérale : les asymptotes en sont déduites de manière générale. La Figure 8 montre les deux dessins auxquels conduit le cas où a est positif.

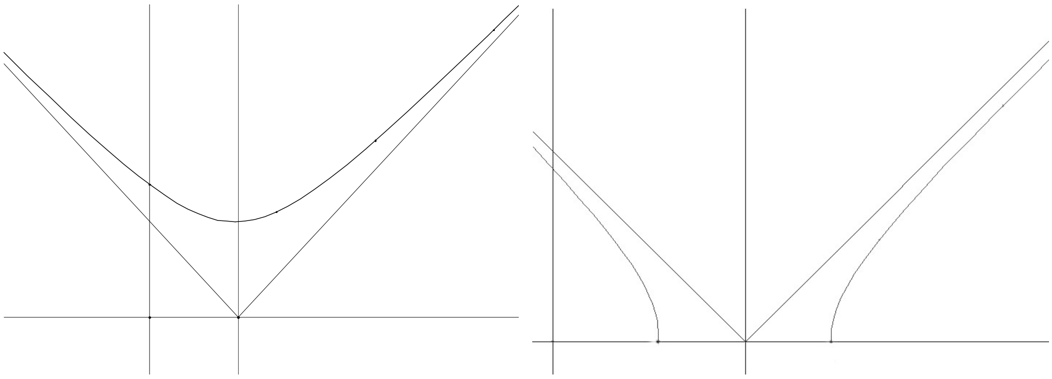


Figure 8

Un exemple montre comment obtenir, par sommation graphique, la somme d'une fonction affine et de la racine d'un second degré.

A propos d'un autre exemple, les auteurs du projet insistent sur le fait que l'expression “ Plus x est grand, plus f(x) se rapproche de b ” ne suffit pas à assurer que y = b est une asymptote horizontale.

Dans le projet AHA, la notion d'asymptote progresse ainsi, pas à pas, d'une famille de fonctions à l'autre. Elle s'approfondira avec l'étude des fonctions exponentielles et logarithmes et avec des exemples dont la fonction est de corriger des idées fausses sur les asymptotes. Par exemple, l'idée selon laquelle l'asymptote d'une courbe ne peut pas la traverser est contredit par la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$.

Le vocabulaire employé au début est intentionnellement naïf, quotidien et donc imprécis. Il évolue en fonction des cas rencontrés. C'est volontairement que les formules générales qui déterminent les paramètres d'une asymptote oblique ne sont pas utilisées pour privilégier un mode d'obtention des asymptotes lié à la bonne forme de chacune des classes de fonctions considérées, forme qui permet de mettre en évidence les termes que l'on jugera négligeables.

2. Un contexte cinématique pour introduire les dérivées

Des problèmes de vitesses liées constituent, dans le projet AHA, une autre première rencontre avec le concept de limite dans le cas des indéterminations du type 0/0. Voici le premier énoncé proposé aux élèves et illustré par la Figure 9 : Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm par minute. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm³/min ?

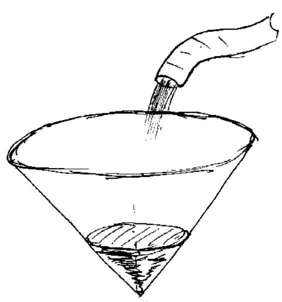


Figure 9

Ce problème constitue une expérience de pensée, paradigmatique d'une classe particulière de problèmes de vitesses liées, qui se caractérise comme suit : deux grandeurs y sont mobilisées (ici le volume d'eau et sa hauteur dans le vase). Elles varient toutes deux en fonction du temps, la vitesse de variation de l'une est constante et la vitesse de l'autre, sur laquelle porte la question, est variable. Ces deux grandeurs dépendent l'une de l'autre, ce qui fait que leurs vitesses sont liées. Là sont les caractéristiques a priori dépendant de la structure mathématique du problème. Il en est une autre relative au mental des élèves et qui a été testée dans les classes : le contexte du problème induit l'intuition que, si la vitesse d'une des deux grandeurs est constante, la vitesse de l'autre ne peut être que variable (c'est le cas de l'énoncé ci-dessus, mais ce n'est pas le cas de tous les problèmes de vitesses liées). L'énoncé ci-dessus se prête en outre à une validation particulière sur laquelle nous reviendrons.

Les enjeux didactiques de ce problème sont analysés autre part (M. Schneider, 1992 et 2001a). Nous nous contenterons donc ici de résumer cette analyse. Ce problème suscite plusieurs stratégies de base dont la plus “ primitive ”, sans être la plus fréquente, consiste à diviser l'expression du volume versé au temps t, soit $V(t) = \frac{1}{3}\pi t^3$, par cette même valeur de t avant d'égaler à 100. L'intuition effective que le débit croît constamment et les vérifications numériques contredisent le résultat trouvé par cette première stratégie. Elles poussent tous les élèves, y compris ceux qui avaient d'emblée évalué des débits sur de plus petits laps de temps, à procéder à un découpage du temps de plus en plus fin.

L'investigation qui vient d'être décrite ainsi que l'algébrisation du temps t et de l'incrément de temps Δt (qu'elle soit spontanément proposée par les élèves ou obtenue à l'invite du professeur pour alléger la recherche) conduisent à l'expression suivante qui donne le débit moyen de l'eau sur $[t , t + \Delta t]$ $\frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}$ ou, dans le cas présent $\pi t^2 + \pi t \Delta t + \frac{1}{3}\pi (\Delta t)^2$ (1)

Un retour au numérique, ou tout simplement la considération de l'expression (1) débouchent sur l'identification d'un passage à la limite : rendre nul Δt avant d'égaler à 100 l'expression du débit . C'est l'occasion d'un débat sur la validité de ce calcul, sur le sens de l'indétermination 0/0, au cours duquel s'expriment des réserves analogues à celles observées par M. Schneider (1988 et 1992) à propos des concepts de vitesse et de débit instantané : “ Un débit instantané, cela n'existe pas, car on ne peut avoir un débit avec un volume nul ” ou “ On ne peut obtenir une vitesse instantanée, car le temps de regarder sa montre, c'est du temps qui s'écoule ”. Ces réactions sont interprétées par cet auteur comme obstacle épistémologique, à savoir une vision positiviste des concepts mathématiques, supposés être un reflet exact du monde tel qu'on peut l'appréhender par les sens et les mesures plutôt que des modèles inventés par les humains pour le comprendre.

Le problème décrit plus haut se prête à une autre expérience de pensée qui vise à les convaincre que la réponse obtenue ainsi est bien exacte. Il s'agit de poser un vase cylindrique de base 100 cm^2 à côté du vase conique et de les alimenter tous deux au moyen de pompes respectives de sorte que les niveaux d'eau montent régulièrement et simultanément de 1 cm / min (Figure 10). La pompe qui alimente le cylindre a évidemment un débit constant de 100 cm^3 /mn. L'autre pompe devra verser moins vite que la première tant que le cône est plus étroit que le cylindre, et plus vite après. Les deux pompes auront donc un débit de 100 cm^3 / min. à l'instant précis où la superficie de l'eau dans le cône vaut 100 cm^2, ce qui revient à égaler à 100 l'expression du débit dans laquelle on a annulé Δt.

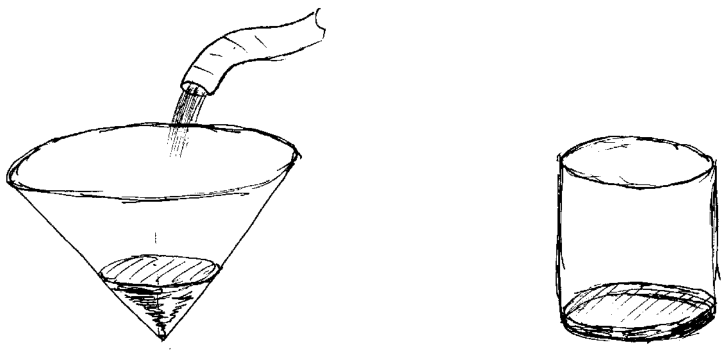


Figure 10

Cette expérience transcende une intuition exprimée par plusieurs élèves : à force de considérer des tranches de volumes de plus en plus petites, on prend des surfaces. Cette intuition conduit à la réponse exacte uniquement dans le cas où la vitesse de la montée de l'eau est unitaire (donnée délibérée ici pour cette raison). L'expérience de pensée, elle, est adaptable dans le cas contraire.

Les élèves sont ensuite invités à lire des propos de Berkeley exprimant à l'encontre du concept *d'ultima ratio* des réserves comparables à celles des élèves sur l'annulation de Δt et son interprétation en termes d'" instantané ". S'ensuit un débat sur le statut des concepts mathématiques, produit de l'esprit humain plus que prolongement de l'expérience sensible.

À la suite de la résolution de ce problème, le concept de débit instantané est défini comme l'expression obtenue en annulant Δt dans l'expression du débit moyen sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, une fois faites toutes les simplifications algébriques. L'expression " limite du débit moyen pour Δt tendant vers 0 " est utilisé pour décrire ce calcul.

3. Négligence de termes, ordres de grandeur et concept de limite

L'approche de l'analyse en termes d'ordres de grandeur proposée dans le cadre de l'IREM de Picardie s'inspire de l'analyse non-standard en ce sens qu'elle évite le concept de limite et qu'elle suppose, en échange, l'adjonction de nouveaux nombres. D'un côté, les entiers très grands, supérieurs à tout entier " classique " et les réels très grands positifs ou très grands négatifs supérieurs, en valeur absolue, aux entiers très grands et, de l'autre, des réels très petits, positifs ou négatifs, qui sont les inverses des réels très grands. Sur base d'une axiomatique régissant les nombres très grands ou très petits, le concept de réels très proches, c'est-à-dire de réels qui diffèrent d'un réel très petit, permet de contourner le concept de limite et de définir tant le concept d'asymptote que celui de nombre dérivé. Ainsi, la droite d'équation $y = 1$ sera appelée asymptote à la courbe représentative de la fonction $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$ en raison du fait que " pour tout x très grand positif, f(x) est très proche de 1 ". De même, le nombre dérivé de la fonction f en a est défini, dans ce cadre, comme un réel très proche du quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour tout réel h très petit non nul tel que a + h appartienne au domaine de f. De la sorte, cette définition permet d'identifier le réel $3\,a^2$ comme nombre dérivé en a de la fonction $f(x) = x^3$, celui-ci étant très proche pour tout h très petit non nul du taux d'accroissement de cette fonction dont la forme simplifiée est $3\,a^2 + 3\,ah + h^2$.

Comme le montrent les exemples précédents, ces nombres très proches, que l'on présente traditionnellement comme le résultat d'un calcul de limite, sont obtenus par la suppression de termes contenant une puissance positive d'un réel très petit : $\frac{1}{x-2}$ en ce qui concerne le cas de l'asymptote et les termes $3\,ah$ et h^2 pour ce qui est de l'exemple de dérivée. Comme l'a argumenté R. Lutz lors du colloque de Mulhouse, cette façon de présenter les choses donne du sens à l'ultima ratio de Newton tout en lui évitant des significations sujettes à caution, telle que : " la valeur de ce rapport juste avant que h ne s'évanouisse ", ou encore " la vraie valeur du rapport lorsque h est infiniment petit " comme le dit Leibniz.

De ce point de vue, le projet AHA procurerait, nous semble-t-il, une expérience antérieure riche d'enseignement à tout élève qui devrait appréhender la notion de réels très proches. En effet, comme le montre la section 1, la transformation algébrique d'expressions analytiques de fonctions, classe par classe, fait apparaître de " bonnes formes " dans lesquelles l'élève identifie aisément les parties qu'il pourrait considérer localement comme négligeables. Or, c'est justement la négligence de ces termes qui le conduit au réel très proche considéré dans la présentation en termes de grandeurs. En outre, ce travail sur les asymptotes à propos des racines de fonctions du second degré fait apparaître le risque de conclusion indue que peut induire la négligence de termes et l'intérêt de travailler des différences " très petites ". De même, la section 2 illustre des conditions didactiques dans lesquelles les élèves sont amenés d'eux-mêmes à identifier l'acte de suppression de termes en Δt qui leur fournira le nombre très proche que cette présentation définit comme le nombre dérivé.

Faut-il pour autant se priver du langage des limites que le projet AHA lie d'emblée à cette négligence de termes ? Pour quelles raisons ? Les changements induits par la présence des nombres très petits ou très grands dans la façon de s'exprimer sont-ils déterminants pour l'apprentissage des notions d'asymptote ou de dérivée ? Il nous semble que cette question devrait être étudiée de plus près.

La section 2 met en évidence une difficulté particulière soulevée par la négligence de termes dans les cas où elle définit des grandeurs géométriques ou physiques. Pour comprendre cette difficulté, nous contrasterons le cas d'une asymptote et celui du débit instantané. Soit la fonction $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ dont la courbe ne traverse pas son asymptote horizontale y = 3. Cette valeur 3 est obtenue comme limite aux infinis de la fonction, c'est-à-dire par négligence de termes de la forme $\frac{a}{x}$ qui apparaissent lorsqu'on met x en évidence au numérateur et au dénominateur. Cette négligence s'accompagne du sentiment d'avoir commis quelques erreurs, sentiment bien légitimé dans la mesure où le calcul opéré sur la fonction produit un objet proche de la courbe, mais qui lui reste cependant extérieur, donc distinct. Par contre, le même sentiment d'erreur suscite des réactions plus vives lorsque, en dépit de la négligence de termes, le calcul d'une limite donne la valeur exacte d'une grandeur cherchée telle un débit instantané, avec des arguments avancés du type de ceux repris à la section 2. M. Schneider (1988) a observé et analysé de semblables réserves chez les élèves à propos des aires curvilignes : celles-ci sont définies par la suppression de termes contenant des puissances de $\frac{1}{n}$ dans une somme de n rectangles qui les approxime par défaut ou par excès. Mais cette suppression même induit l'idée qu'elle ne peut conduire qu'à un résultat approximatif. S'ajoute à cela un effet mental de l'obstacle géométrique de la limite qui consiste à opposer le fait qu'une aire curviligne n'est pas " réductible " à un polygone formé de rectangles à celui qu'elle ne peut être obtenue en sommant des segments.

La négligence de termes soulève donc des problèmes particuliers dès qu'elle conduit à la définition de grandeurs. Mais là aussi, on doit se demander quelle est la part du langage utilisé, que ce soit celui des limites, ou celui des réels très proches.

Au delà du vocabulaire, nous nous sommes interrogées sur le prix que suppose chacune de ces approches de l'analyse. Nous l'exprimerons par référence à l'histoire du calcul infinitésimal au cours de laquelle une grande tension se manifeste entre trois aspects : primo, l'opérationnalité des calculs de dérivées et de primitives qui, même s'ils apparaissent sujets à caution parce que se soldant précisément par la négligence de termes, n'en permettent pas moins la détermination de multiples grandeurs tant physiques que géométriques, secondo, une forme de validation du calcul infinitésimal qui, faute de mieux, fait de larges emprunts à la métaphysique et tertio, la volonté de fonder ce calcul infinitésimal sur des bases cohérentes afin de conférer à cette discipline une légitimité interne qui la rende autonome vis-à-vis de la géométrie et à la physique. Cette tension se manifeste encore à l'heure actuelle dans l'enseignement de l'analyse par des choix didactiques très diversifiés, voire opposés, qui s'expriment par un déplacement d'accent entre, d'une part, la modélisation de grandeurs géométriques ou physiques et ce qu'elle suppose de travail sur l'intuition et, d'autre part, la cohérence et la légitimité mathématiques. Toute articulation entre ces deux pôles se paie d'un prix. Ainsi, l'approche en termes d'ordres de grandeur marie d'emblée une légitimité mathématique et une légitimité " métaphysique ", ainsi que le développe R. Lutz. Mais le prix à payer est un acte de foi dans l'existence et le fonctionnement de réels non-standard ou l'acceptation d'un autre mode de rationnalité. L'approche heuristique privilégie le processus de modélisation en travaillant les intuitions graphiques, géométriques et physiques pour construire progressivement une unité et une cohérence mathématiques. L'intention est de gérer la variété épistémologique a priori à laquelle donne lieu les différents calculs de limites selon qu'ils procurent des asymptotes, des tangentes ou des grandeurs. Mais, comme le développe M. Schneider (2001b), cette approche se solde par une organisation mathématique complexe où s'entrecroisent plusieurs types de validation qui n'ont pas le même statut et des techniques diverses dont certaines ont un caractère éphémère, voire anecdotique dans l'ensemble du projet.

Sans doute faudrait-il aller plus loin dans la confrontation de ces approches, en essayant de problématiser plus avant les hypothèses didactiques dont elles sont porteuses l'une et l'autre. Sans quoi, on risque fort de se cantonner à la conclusion que tout a un prix et que, décidément, on ne peut avoir à la fois le beurre et l'argent du beurre.

BIBLIOGRAPHIE

Grand'Henry-Krysinska M et Hauchart C. (1993), Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente à une courbe, *Actes de la 1re Université d'Eté Européenne Histoire et Epistémologie dans L'Education Mathématique*, Montpellier, 431-442

Groupe AHA, (Bolly, P., Chevalier, A., Citta, M., Hauchart, C., Krysinska, M., Legrand, D., Rouche, N., Schneider, M.) (1999a). *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, manuel pour l'élève*, Bruxelles, De Boeck

Groupe AHA, (1999b). *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, guide méthodologique* Bruxelles, De Boeck

Hauchart C. et Schneider M. (1996), Une approche heuristique de l'analyse, *Repères IREM, n° 25*, 35-62

Schneider M. (1988), *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve

Schneider M. (1992), A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics 23*, 317-350

Schneider M. (2001a), Une ingénierie didactique passée au crible de concepts de didactique, In Mercier A., Rouchier A., Lemoyne G. (eds), *Sur le génie didactique : usages et mésusages des théories de l'enseignement*, De Boeck, Louvain-la-Neuve

Schneider M. (2001b), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en didactique des mathématiques, 21* (1.2), 7-50.