RÉFLEXION SUR L'APPROCHE DE L'ANALYSE EN TERMES D'ORDRES DE GRANDEUR

Robert LUTZ
Université de Haute Alsace

Depuis 1993, nous avons mené à Mulhouse une réflexion approfondie sur l'enseignement de l'Analyse au niveau élémentaire, suivie à partir de 1996-97 par une campagne d'expérimentation au lycée et dans le premier cycle universitaire dans le cadre des IREM d'Alsace et de Picardie. Le concept fondamental sur lequel repose la démarche que nous avons mise au point est celui *d'ordre de grandeur absolu*. L'objet de cette conférence est de réfléchir avec vous sur les lignes de force et les résultats principaux de ces travaux, présentés dans les publications [1] et [2], en insistant sur leur signification intrinsèque et sur le sens de leur application pratique.

L'enseignement de l'analyse est centré sur la compréhension et l'assimilation progressive par les élèves des notions de *nombre réel, limite de suites et de fonctions, dérivées, intégrales*. ainsi que des notions géométriques associées: *tangentes, asymptotes, aires...* On aimerait évidemment, dans la mesure du possible, marier l'intuition et la rigueur, ou au moins distinguer nettement ce qui est admis à la suite d'une justification heuristique de ce qui est déduit.

Une pédagogie bien pensée s'appuie nécessairement sur un choix didactique qui relève d'une philosophie de l'acte éducatif. Celui que nous privilégions est sous-tendu par l'antique idée « d'accouchement des esprits », la *maïeutique* chère à Socrate. C'est dire que nous voulons essayer de faire émerger les notions fondamentales de l'analyse des profondeurs inconscientes où elles font partie du patrimoine archétypal de la personne humaine. Notre démarche est donc la conséquence d'un choix anthropologique qui nous conduit à connecter les lignes directrices de l'apprentissage des mathématiques aux racines profondes des concepts concernés. Quelle est l'origine de la notion de nombre réel ? De celle de limite ? La réponse ne peut venir des mathématiques, lesquelles sont auto-référentes pour la forme, mais pas pour le sens. *La réponse ne peut venir que d'une vision anthropologique de la notion de nombre.*

La notion empirique, ou plutôt anthropologique, de nombre entier est caractérisée par l'opération de succession qu'une personne humaine peut répéter autant de fois qu'elle veut, pourvu qu'elle en ait la capacité mentale. Cette opération est inusable; elle ne porte aucune trace de ses utilisations antérieures. Elle détermine l'ordre entre les entiers et les opérations d'addition, de multiplication, d'exponentiation que l'on peut réaliser sur eux. Les procédés de numération nous permettent de nommer de manière condensée les nombres constructibles à partir de zéro par application répétée de la succession. Nous augmentons ainsi le rayon d'action de notre capacité à « écrire » des nombres. Mais nous avons bien conscience qu'il est impossible à quiconque d'épuiser, ou même simplement de concevoir, la liste de tout ce que l'algorithme de succession peut produire. Une part de la production reste fondamentalement inaccessible à l'homme. C'est seulement par analogie (entretenu par la confusion entre la notion anthropologique d'entier et la notion abstraite d'entier « naturel », qui nous a été inculquée sous ce nom par nos professeurs de mathématiques) que nous donnons

encore le statut de nombre entiers aux constituants de cette production inaccessible. Cette analogie nous conduit à prétendre que :

- (i) *tous les entiers plus grands qu'un entier inaccessible sont inaccessibles ;*
- (ii) *si la somme ou le produit de deux entiers est inaccessible, au moins l'un des deux est inaccessible ;*
- (iii) *si la puissance n-ième d'un entier est inaccessible, c'est que cet entier ou l'exposant n l'est aussi.*

Bien entendu, nous pressentons qu'il y a des entiers qui n'ont pas encore été utilisés ou même nommés, mais qui sont susceptibles de l'être un de ces jours. Appelons les *potentiels*. Dès que, pour des raisons fortuites, ils auront été nommés par quelqu'un, ils seront devenus *contingents*. Mais tous les entiers déjà nommés ne sont pas contingents: certains d'entre eux sont *nécessaires* à la pratique des nombres, comme 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, 12 et bien d'autres sans lesquels la vie quotidienne ne serait pas possible. La frontière entre la catégorie des entiers potentiels et celle des entiers inaccessibles est *floue*. Il en est de même de la frontière entre la catégorie des entiers nécessaires et celle des entiers contingents. Ceci n'est pas surprenant pour des catégories liées à la perception humaine et à l'impossibilité d'obtenir des informations précises sur l'utilisation effective des nombres dans une communauté donnée. Notons que les quatre catégories sont reliées par deux relations d'analogie (« ne pas avoir été nommé » d'un côté, « avoir été nommé » de l'autre) et par une transformation entre entiers potentiels et entiers contingents qui est encadrée par les points fixes que sont les entiers inaccessibles et les entiers nécessaires. Par contre il n'y a aucune relation d'analogie entre entiers nécessaires et entiers non nommés, ou entre entiers inaccessibles et entiers nommés. La structure épistémologique des quatre catégories peut donc être représentée par un tétraèdre, de la manière suivante :

On peut montrer qu'une telle structure quaternaire différenciant une totalité – ici celle des nombres – se retrouve de manière universelle partout où la perception du monde par l'homme est concernée (voir [3], qui concerne en particulier un point de vue anthropologique sur les mathématiques). Nous allons voir qu'elle mène naturellement aux concepts de l'analyse pourvu qu'on les exprime dans un langage mathématique afférent à une modélisation qui préserve le caractère flou des transitions. En d'autres termes, il s'agit de faire correspondre au modèle anthropologique des entiers un modèle mathématique où se trouvent traduites en termes formels les propriétés (i), (ii), (iii) constatées ci-dessus et leurs conséquences logiques. Notons que la catégorie des entiers inaccessibles est une sorte de *néant numérique* pour l'homme, dont l'existence est indispensable à la différenciation entre entiers nommés et non nommés. C'est pourquoi le modèle mathématique que nous voulons constituer doit comporter un concept correspondant à celui d'entier inaccessible, vérifiant l'analogie des trois propriétés ci-dessus. Or il n'y a rien de tel dans les mathématiques classiques ! Il nous faut le construire. C'est pourquoi nous devons d'abord explorer un peu plus avant cette mathématique anthropologique qui préexiste aux mathématiques abstraites et formalisées. Voyons comment la notion de limite y trouve sa racine. Considérons par exemple le rapport d'accroissements $R(b) = \frac{(1+b)^2-1}{b} = 2 + b$. Newton nous invitait à évaluer la valeur de ce rapport « juste avant que b ne s'évanouisse », provoquant l'ironie de Berkeley qui y voyait poétiquement « le fantôme des quantités disparues ». Mais il n'y a pas de « juste avant... » newtonien, car les nombres réels ne sont pas bien ordonnés comme les entiers: entre deux réels il y en a une infinité d'autres. Dans un esprit différent, Leibniz nous invitait à calculer la « vraie valeur » de

$R(b)$ lorsque b est *infinitement petit*, en précisant qu'il ne fallait pas prendre ceci pour une propriété de « quantités » mais *comme une manière de parler qui facilite l'invention*. En d'autres termes, nous dirions aujourd'hui *comme un formalisme qui facilite la découverte et le maniement du concept de limite*, c'est à dire exactement ce qui nous préoccupe dans ce colloque.

Les continuateurs de Leibniz, en particulier le baron de l'Hospital, ont voulu par force définir la notion de nombre infinitement petit en termes des mathématiques héritées des grecs, c'est à dire « dans le style d'Archimède » comme l'a écrit Leibniz. Ils s'y sont cassé les dents, faute de pouvoir se placer dans un contexte mathématique plus large. Mais l'intuition qui sous-tendait le formalisme leibnizien était fondée, sans qu'il en ait clairement conscience, sur le modèle anthropologique. N'oublions pas que pour Leibniz, aussi bien en mathématique qu'en physique, la notion de relation entre choses était première par rapport à la nature des choses.

Revenons à notre rapport $R(b)$ de « quantités évanouissantes ». Dans le modèle anthropologique, si nous pensons aux accroissements b tels que la partie entière de $\left| \frac{1}{b} \right|$ soit inaccessible – appelons les *accroissements imperceptibles* –, nous constatons qu'aucune majoration explicite ou potentielle de $R(b)$ ne permet de le distinguer de la valeur 2. Nous dirons donc que la « vraie valeur » du rapport « à la limite » est 2. Ce constat purement statique permet de donner un sens à la notion de vitesse instantanée: il s'agit de la vitesse moyenne, connue à des fluctuations imperceptibles près, entre deux instants distincts de différence imperceptible. Comment allons nous calculer cette vitesse pour des points qui se meuvent de manière compliquée sur un axe ? Eh! Bien, nous allons utiliser des propriétés qui se déduisent logiquement des constats (i), (ii), (iii) sur les entiers inaccessibles. En voici quelques-unes :

- la somme et le produit de deux nombres imperceptibles sont imperceptibles ;
- le rapport d'un nombre imperceptible et d'un nombre qui ne l'est pas est imperceptible ;
- la somme et le produit de deux nombres qui ne sont pas de partie entière inaccessible ont la même propriété.

À quels types de « nombres » s'appliquent ces propriétés ? Parler de « nombres réels » n'a pas de sens dans le contexte anthropologique de notre discussion. Nous avons des entiers potentiels ou nommés et un « fond du paysage » constitué de ce que nous appelons entiers inaccessibles. Sur le « seuil » entre les potentiels et les contingents nous trouvons les entiers nécessaires à l'avènement des entiers potentiels dans le champ du contingent : par exemple les nombres de 0 à 9 qui nous servent à écrire des nombres dans le système indo-arabe. À partir de là nous pouvons construire des fractions, étendre l'ordre et les deux opérations et vérifier que deux fractions sont équivalentes ou non. Ce sont là les « nombres » auxquels s'appliquent les propriétés ci-dessus, deux fractions équivalentes déterminant le même nombre. Ces nombres se répartissent en « paquets » au sein desquels les différences sont imperceptibles. Certains de ces paquets contiennent des éléments qui se représentent par une fraction de numérateur et de dénominateur accessibles: ce sont les « rationnels accessibles ». D'autres paquets ne peuvent pas contenir de tels rationnels accessibles, par exemple le paquet des rationnels positifs dont le carré ne diffère que imperceptiblement de 2. En effet, dans le cas contraire, on aurait des entiers tels que $\frac{p^2}{q^2} - 2$ soit imperceptible, avec q accessible, donc aussi q^2 . On en déduirait que $p^2 - 2q^2$ est un entier imperceptible, donc nul (sinon son inverse serait inaccessible, alors que p^2 ne l'est pas). Si nous

appelons $\sqrt{2}$ le paquet correspondant, dans tout calcul effectif ou potentiel, nous ne ferons qu'une erreur imperceptible en écrivant que le carré d'un élément de ce paquet est égal à 2.

Ces considérations laissent entrevoir que le modèle anthropologique des nombres entiers porte en lui l'essentiel du contenu scientifique de la théorie des nombres réels, et par là de l'analyse mathématique. Il justifie de ce fait toutes les approches didactiques où l'on évoque de manière heuristique des nombres « très grands » ou « très petits » en faisant confiance à l'intuition des élèves pour y mettre du contenu.

À partir de ces racines anthropologiques de l'analyse, revenons maintenant à la recherche d'une modélisation mathématiques susceptible de placer le contenu scientifique correspondant dans un cadre déductif abstrait ou formel.

Le modèle ensembliste classique fondé sur un ensemble $\mathbf{N}$ dont tous les éléments (à part 0) ont le même statut ne suffit évidemment pas. Il revient à évacuer des mathématiques tout ce qui pourrait rappeler les limitations naturelles des capacités efficaces de l'homme. L'adopter sans nuance crée automatiquement une difficulté d'assimilation pour les élèves qui doivent se familiariser avec les mathématiques, *car on triche avec la réalité*. Depuis que les Grecs en ont édifié les canons, les mathématiques trichent d'ailleurs beaucoup avec la réalité, par souci de préserver la pureté d'un monde idéal sans erreurs où les entités mathématiques sont supposées vivre. Là où des droites idéales peuvent ne rencontrer un cercle idéal qu'en un seul point, alors que dans la réalité, on ne trouve que des pointillés plus ou moins alignés qui frôlent des pointillés plus ou moins circulaires dans une petite zone de taille imperceptible à l'œil nu. Il s'agit certes d'une démarche efficace *pour construire l'édifice mathématique*, mais à trop éluder le sens des choses on crée des difficultés didactiques dont l'Analyse offre des exemples flagrants. Car ce n'est pas tant l'abstraction ou le formalisme en eux-mêmes qui effraient nos élèves ou nos étudiants que le manque de sens des concepts proposés par leurs maîtres (au sens propre et au figuré: on ne « sent » rien). Le sens fait tragiquement peur aux familiers des mathématiques, car il est riche de connotations humaines qui sont réputées pouvoir troubler l'entendement. On apprécie la froide rigueur des formules sorties de tout contexte sensible. Au risque de rendre ces mathématiques stériles, sans saveur et pour tout dire inutiles puisqu'elles sont déconnectées de la fécondité du monde réel *où tout n'est qu'approximation, essai, arrangement d'ordre et de non-ordre qui en constituent la vérité et la beauté et le rendent vivable*.

Adjoignons donc hardiment au langage mathématique classique les mots qu'il faut, disons *entier très grand*, comme contre-partie mathématique de la notion anthropologique d'entier inaccessible. Adjoignons les axiomes suivants, dits « externes » (par rapport aux mathématiques classiques) aux axiomes usuels (lesquels sont réservés aux objets des mathématiques classiques) :

- (i) *L'entier 1 n'est pas très grand ;*
- (ii) *Tout entier supérieur à un entier très grand est très grand ;*
- (iii) *Si la somme de deux entiers est très grande, l'un des termes est très grand ;*
- (iv) *Si le produit de deux entiers est très grand, l'un des facteurs est très grand ;*
- (v) *Si x^y est très grand, alors x ou y est très grand ;*
- (vi) *Il existe un entier très grand.*

Bien entendu, il ne faut pas donner à ce « il existe » la signification concrète « voilà un exemple de nombre empirique très grand »; cela reviendrait à confondre le concret

et l'abstrait. Autre confusion, plus subtile, réservée aux mathématiciens (faussement ?) naïfs: « il existe » signifierait « voilà une construction ensembliste qui définit de manière unique un exemple d'entier très grand » ; j'y croirai lorsqu'on m'en aura montré un . En fait, l'axiome externe (vi) ne dit rien sur le contexte ensembliste classique: nous sommes dans un contexte plus riche, avec un langage et des axiomes qui complètent ceux du contexte classique. Cela permet une puissance modélisatrice des mathématiques plus grande, que nous pouvons mettre à profit pour introduire les concepts de l'analyse d'une manière qui soit en symbiose avec leurs racines anthropologiques.

Notons que le caractère flou des transitions anthropologiques se retrouve bien dans notre modélisation axiomatique, comme nous le souhaitons plus haut. En effet, il ne peut exister de plus petit entier très grand, sinon l'entier précédent serait aussi très grand, ce qui est contradictoire. Sous réserve que la contradiction soit exclue de notre théorie, la conclusion en résulte. J'évoquerai ce point tout à l'heure.

Bien entendu il y a là un paradoxe apparent, puisque les propriétés de Péano assurent que toute partie de l'ensemble des entiers naturels admet un plus petit élément. Mais il se dissout si l'on se rappelle que seules les propriétés exprimables dans le langage ensembliste classique définissent automatiquement des sous ensembles. Or « très grand » n'est pas de ce type, pas plus que « sympathique » ou « jaune ».

Si l'on accepte, comme on en a l'habitude, de faire l'impasse sur une introduction classique sérieuse des nombres réels, on peut introduire les concepts fondamentaux de l'Analyse en considérant que la notion d'entiers naturel très grand structure les ordres de grandeur de nombres réels de la manière suivante :

- un réel positif (resp. négatif) dont la partie entière est très grande est dit très grand positif (resp. négatif) ;
- un réel est dit modéré si sa valeur absolue n'est pas très grande ;
- un réel est dit très petit s'il est nul ou si la valeur absolue de son inverse est très grande ;
- deux réels dont la différence est très petite sont dits très proches.

Les axiomes (i) à (vi) ont pour conséquences les « règles de Leibniz » :

$$\text{modéré} + \text{modéré} = \text{modéré} \quad ; \quad \text{très petit} + \text{très petit} = \text{très petit}$$

$$\text{modéré} \cdot \text{modéré} = \text{modéré} \quad ; \quad \text{très petit} \cdot \text{modéré} = \text{très petit}$$

Ces règles permettent de lever n'importe quelle indétermination algébrique, bardée de polynômes, de racines, de fractions rationnelles etc.

Pour les autres indéterminations, impliquant des fonctions non algébriques comme le sinus, le logarithme ou l'exponentielle, il faut choisir des propriétés de base qui aboutissent à des constats en termes d'ordres de grandeur. Par exemple de l'encadrement empiriquement évident $\sin x \leq x \leq \tan x$ sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et de

l'imparité du sinus on déduit aisément que pour tout $b \approx 0$, $b \neq 0$, on a $\frac{\sin b}{b} \approx 1$ et

$$\frac{\cos b - 1}{b^2} \approx -\frac{1}{2}.$$

On peut bien entendu construire un cours sur la dérivation et l'intégration en utilisant ces concepts d'ordres de grandeur. Si l'on désire introduire la notion de fonction dérivée, il faut élargir un peu plus le contexte externe en introduisant les notions de nombre réel et de fonction explicités qui sont les pendants abstraits des notions anthropologiques *de nombres et de fonctions accessibles à la connaissance de l'homme*. Je renvoie aux références [1] et [2] pour une abondante illustration de ce type

d'enseignement, qui a fait l'objet des expérimentations citées au début de cette conférence. Les ateliers qui suivent vous en feront partager le charme et la saveur.

Pour terminer, je voudrais insister sur un point qui nous a constamment guidé au cours de ces années de réflexion et d'expérimentation. Tous les collègues, dont certains sont parmi nous, qui y ont participé ont voulu faire vivre leurs classes ou leurs amphithéâtres en donnant accès de manière intuitivement acceptable aux concepts de base, *tout en permettant à la fois une discussion riche sur les nombres réels et une pratique naturelle du raisonnement formel sur les nombres et les fonctions*. Du point de vue épistémologique, ce qui rend la réalisation de cette double ambition possible est le fait que les définitions de limites, dérivées etc. en termes d'ordres de grandeur rendent les démonstrations directes, car dans leurs expressions les quantificateurs « vont dans le bon sens ». Par exemple, dire que la suite explicitée u_n tend vers 1 en écrivant que « pour tout n très grand, u_n est très proche de 1 » permet d'enchaîner des conséquences nécessaires qui vont de l'hypothèse à la conclusion par simple contemplation des valeurs obtenues à chaque étape du raisonnement. L'expression classique de la limite « pour tout $\varepsilon > 0$ il existe... » nécessite, dans la phase de construction du raisonnement, de remonter de la conclusion à l'hypothèse en enchaînant une suite de conditions suffisantes, ce qui est rarement naturel. La difficulté de l'analyse mathématique est concentrée dans ce constat...

Je n'ai rien dit à propos de la légitimité logique de l'approche en termes d'ordres de grandeur. Elle est abondamment discutée dans les brochures [1] et [2]. Il suffit de savoir que l'introduction des ordres de grandeur ne trahit ni par excès ni par défaut les mathématiques classiques. En termes spécialisés, nous travaillons dans une *extension conservative* de la théorie des ensembles classique, et par conséquent ni plus ni moins contradictoire que celle-ci. *Cela signifie qu'un énoncé du langage classique est un théorème dans la théorie étendue si et seulement si il est un théorème dans la théorie classique*. Il ne s'agit donc pas, pour ce qui concerne les propriétés exprimables dans le langage classique, d'un contexte mathématique alternatif, mais d'une autre formulation du même contenu conceptuel, plus directe et plus conforme à l'art d'inventer, comme le disait si bien Gottfried Wilhelm Leibniz de son calcul infinitésimal il y a trois siècles.

Références

- [1] R. LUTZ, A. MAKHLOUF, E. MEYER, *Fondement pour un enseignement de l'Analyse en termes d'ordres de grandeur: les réels dévoilés*, Paris, APMEP, n°103, 1996.
- [2] Groupe « ORDRES DE GRANDEUR » de l'IREM de Picardie, *Analyse en termes d'ordres de grandeur: de l'intuition aux concepts*, IREM de Strasbourg, n°182, 2001.
- [3] J.F. FROGER, R. LUTZ, *Structure de la connaissance, sens des nombres et beauté des mathématiques*, Éd. DesIris, Méolans-Revel, 2003.