ÉVOLUTIONS ET PERSPECTIVES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE AU LYCÉE

Michèle ARTIGUE, Université Paris 7

1. Introduction

L'enseignement des débuts de l'analyse est aujourd'hui un secteur d'enseignement déstabilisé, en crise, partout dans le monde, en dépit des différences institutionnelles et culturelles. Le symposium organisé à Genève en octobre 2000, pour commémorer les cent ans de la revue « l'Enseignement Mathématique », qui a consacré une demi-journée de ses travaux à cet enseignement, retraçant son histoire au fil du siècle et essayant de penser ses perspectives futures, l'a bien mis en évidence[1]. Quelles sont les sources de cette crise ? Comment s'explique-t-elle ? C'est à ces questions que nous essaierons de répondre dans la première partie de ce texte, en nous appuyant sur l'histoire de l'enseignement secondaire de l'analyse en France et en rappelant brièvement ce qu'a été son évolution au cours du siècle dernier. Mais si une telle analyse permet de tirer les leçons de l'histoire et aide à comprendre la situation actuelle, elle ne saurait suffire pour penser le futur de l'enseignement secondaire de l'analyse. C'est à ces questions de prospective que nous nous attacherons dans la suite de ce texte, en nous centrant sur deux dimensions qui nous semblent fondamentales pour penser l'entrée dans le champ de l'analyse : celle de la localisation des points de vue et celle de l'extension du calcul algébrique par intégration des ordres de grandeur. Nous nous interrogerons ensuite, dans une dernière partie, sur la viabilité de perspectives qui découlent de cette réflexion, dans l'environnement technologique qui est celui de l'enseignement des mathématiques aujourd'hui ou devrait l'être du moins dans un futur proche.

2. L'évolution de l'enseignement secondaire français de l'analyse au XX^{e} siècle

Pour comprendre la situation actuelle de l'enseignement des débuts de l'analyse, il nous semble nécessaire de percevoir l'enseignement actuel comme le produit d'une histoire et de s'intéresser donc à son évolution. C'est à travers cette histoire, marquée par des caractéristiques culturelles et institutionnelles particulières, que se sont forgées des valeurs pour cet enseignement, au fil des continuités et des ruptures. Ce sont des valeurs qui nous sont, partiellement au moins, devenues transparentes, qui se sont naturalisées, mais pour comprendre la situation actuelle, pour penser les futurs possibles, il est nécessaire de les considérer comme des objets problématiques. Le regard historique va nous y aider, comme pourrait le faire, dans un registre différent, le regard porté sur d'autres cultures et d'autres choix d'enseignement.

[1] On pourra se référer sur ce point aux actes de ce symposium qui seront publiés dans un numéro spécial de la revue *l'Enseignement Mathématique*.

Lorsque l'on se penche sur l'histoire de l'enseignement des débuts de l'analyse en France, on ne peut manquer d'être frappé par le contraste saisissant entre la situation du début du XX^e^ siècle, que nous qualifierions volontiers d'idyllique, et la situation actuelle. C'est ce contraste que nous allons interroger dans cette partie, en distinguant dans l'histoire de l'enseignement au cours du XX^e^ siècle quatre périodes principales : la période qu'amorce la réforme de 1902 et qui couvre toute la première moitié du siècle, la période de la réforme des mathématiques modernes qui s'amorce avec la réforme des années 60, la contre-réforme des années 80 et, enfin, la situation qui a prévalu jusqu'aux infléchissements apportés par les nouveaux programmes entrés en vigueur en première en 2001-2002 et en terminale en 2002-2003.

1. La situation idyllique du début du siècle : l'entrée du calcul différentiel et intégral (CDI) dans l'enseignement secondaire

C'est en effet avec la réforme de 1902, et son ambition de fonder des humanités scientifiques à égalité de statut avec les humanités littéraires qui, traditionnellement, assuraient la formation des élites de la nation (Belhoste, 1996) que l'enseignement du CDI se généralise en France au niveau secondaire. Cette introduction est un succès comme l'attestent la stabilité des programmes ainsi que les nombreux textes et rapports publiés (Artigue, 1996). Ceci n'est pas un phénomène isolé. L'étude internationale lancée sur ce thème par la CIEM en 1911, dont le rapport, connu sous le nom de rapport Beke est publié en 1914 par la revue *l'Enseignement Mathématique,* le montre à l'évidence, tout en nous aidant à comprendre les ressorts de ce succès.

L'entrée du CDI est tout d'abord une entrée modeste dans un enseignement où la géométrie règne en maître. Il ne fait pas l'objet d'une rubrique séparée dans les programmes, étant intégré à la partie d'algèbre, et, par exemple, dans le programme de terminale scientifique, cette partie n'occupe qu'une page sur les huit que compte le programme de mathématiques. Le CDI se veut essentiellement un calcul efficace pour faire face aux besoins tant des mathématiques, dont l'enseignement inclut à l'époque, rappelons-le, mécanique, cinématique et astronomie, que des autres disciplines scientifiques, notamment la physique. C'est un enseignement qui, sans déstabiliser le curriculum, apporte un progrès évident. Il permet de se libérer de techniques ad hoc auparavant utilisées dans un certain nombre de calculs, de proposer des méthodes simples et unifiées, libérées de la métaphysique des infinitésimaux. Ces méthodes rencontrent les canons de rigueur de l'époque. Priorité est donnée à l'outil CDI, les ambitions théoriques sont clairement limitées et cette limitation est soutenue par les mathématiciens influents de l'époque comme par exemple Henri Poincaré. Ces derniers d'ailleurs produisent des ressources pour les enseignants, allant au-delà des seuls manuels du secondaire. Des ouvrages comme ceux des frères Tannery, de Carlo Bourlet ont un retentissement international. Cet enseignement d'une analyse algébrisée, que la culture géométrique, cinématique et mécanique aide à motiver et prendre sens, est à l'évidence un enseignement qui marche. Les pionniers qui se sont investis dans l'aventure récoltent les fruits de cet investissement et ont tout lieu de se déclarer pleinement satisfaits.

Rappelons pour compléter la description de ce contexte que cet enseignement s'adresse à une petite élite, tant côté élève que côté enseignant.

2. Le tournant du milieu du siècle : des ambitions nouvelles pour l'enseignement de l'analyse

Avec le tournant du milieu du siècle, et l'évolution du champ mathématique, l'équilibre ancien se rompt. L'enseignement de l'analyse se dote de nouvelles ambitions. Il ne s'agit plus pour lui de mettre en place un calcul fonctionnel algébrique efficace, il s'agit d'approcher le champ de l'analyse comme champ théorique où les valeurs d'approximation jouent un rôle essentiel. L'évolution s'amorce dès la réforme du début des années soixante mais, dans un contexte très marqué par la culture ancienne. Même si des définitions formelles sont introduites, il n'y a pas alors de bouleversement spectaculaire. Dans la culture ancienne, toujours dominante au lycée, des ilôts se construisent où commencent à vivre les nouvelles valeurs et l'analyse des manuels des années soixante, dans leur diversité, est ici particulièrement instructive. La réforme des mathématiques modernes, au début des années 70, par son radicalisme, crée la véritable rupture, même si l'analyse est loin d'être une de ses priorités. Les exigences de rigueur, de formalisation, la centration sur les questions de fondements en sont le moteur, un moteur d'autant plus puissant qu'il transcende le champ de l'analyse. L'enseignement de l'analyse ne connaît cependant pas de crise. Il s'adresse toujours à une petite proportion de la classe d'âge et la séparation entre filières, dès le début du lycée, favorise la viabilité des ambitions théoriques de la filière C, conçue par ailleurs comme filière d'excellence. La part de l'analyse, excepté en terminale C, reste d'ailleurs limitée dans des programmes où les structures algébriques tiennent le haut du pavé.

3. La contre-réforme des années 80 ou l'analyse triomphante

Si elle rejette les valeurs de la réforme des mathématiques modernes, ses ambitions théoriques et ses excès de formalisation, la contre-réforme des années 80, contrairement à ce que l'on pourrait penser, ne rejette pas l'ambition de fonder dès le lycée le champ de l'analyse comme champ de l'approximation, bien au contraire. L'effondrement de l'algèbre des structures, la disparition des éléments de théorie des ensembles, non contrebalancée par l'introduction de nouveaux champs, offrent de plus à l'enseignement de l'analyse un espace où se déployer. L'analyse l'occupe effectivement et sa part relative, dans les programmes augmente substantiellement. Les valeurs de l'approximation sont fortement présentes et ce, dès la classe de seconde, soit un avant que ne débute officiellement l'enseignement de l'analyse. En témoignent les extraits suivants du programme de 1982.

« *c) Comportement local*

Exemple d'études au voisinage de zéro : $x \mapsto (1+x)^2$, $x \mapsto (1+x)^3$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Exemples d'approximation locale par une fonction affine : utilisation de majorations dans le calcul approché des valeurs d'une fonction et le calcul d'erreurs.

On entraînera ici encore les élèves à trouver des conditions suffisantes pour la mise en place de majorations, par exemple : $0 \leq \frac{1}{1+x} - (1+x) \leq 2x^2$ *sous la condition suffisante* $|x| \leq \frac{1}{2}$. »

La progression dans ce champ de l'approximation, l'évolution des moyens pour l'étude des problèmes emblématiques de l'analyse que sont les problèmes de variation et d'optimisation, les problèmes d'approximation de nombres, organisent un paysage mathématique que l'on ne cherche plus à structurer suivant l'organisation « logique » des notions. L'analyse est ainsi, en quelque sorte triomphante, face à une géométrie qui cherche à reconstruire ses valeurs.

4. Le déclin et la crise

Les ambitions épistémologiques que s'est donné la contre-réforme en analyse sont ambitieuses. Comme c'est souvent le cas, la réflexion épistémologique n'a pas été suffisamment accompagnée d'une réflexion de nature plus didactique et écologique, cherchant à étudier les coûts, les conditions de viabilité des choix effectués, comme nous l'avons montré par ailleurs (Artigue, 1993). L'opposition entre apprentissage de concepts et apprentissage de techniques qui se développe dans l'enseignement, dans le cadre d'un constructivisme mal compris, n'aide d'ailleurs pas à poser correctement les problèmes, et en particulier à s'interroger sur le coût réel de l'opérationalisation souhaitée des techniques d'approximation. La massification rapide de l'enseignement au lycée, la réduction des horaires sur toute la scolarité secondaire, la disparition de la filière C, rendront les ambitions initiales de plus en plus irréalistes et le déclin s'amorcera inéluctablement.

La situation qui en résulte à la fin du siècle est une situation de crise. Cette crise n'est pas, comme nous l'avons souligné dès le départ, un phénomène isolé et ce, même si l'évolution française que nous venons de retracer très sommairement présente des spécificités indéniables. De nombreux pays, par exemple, n'ont pas connu le phénomène de contre-réforme que nous avons vécu, la réforme des mathématiques modernes ayant été dans peu d'endroits aussi radicale que chez nous. Dans d'autres, l'enseignement de l'analyse au lycée, souvent optionnel, est resté essentiellement un enseignement de calcul, au sens initial du terme, les ambitions théoriques étant réservées aux enseignements universitaires. Pourtant, quelles que soient les évolutions, le sentiment de crise est uniformément ressenti. Plusieurs raisons contribuent à l'expliquer, comme l'a montré L. Steen au Symposium de Genève déjà cité, se renforçant mutuellement par leurs interactions et nous en retiendrons ici plus particulièrement trois :

1. La place qu'occupe l'analyse dans les curricula

Nous avons souligné l'accroissement important de la part relative de l'analyse dans les curricula au cours du XX^{e} siècle. Le maintien de cette position ne va en rien de soi. Reflète-t-elle le rôle que joue l'analyse dans les mathématiques actuelles ? Reflète-t-elle les besoins sociaux et culturels de la formation en mathématiques ? Répond-t-elle aux besoins professionnels en mathématiques au sens large ? Sur tout le siècle passé, l'organisation du curriculum du lycée s'est posée en termes d'équilibres entre algèbre, géométrie et analyse. On perçoit bien les limites actuelles d'une telle organisation. Au fil du XX^{e} siècle, de nouveaux domaines mathématiques ont pris leur essor. L'évolution de l'informatique, celle du calcul scientifique créent des besoins mathématiques nouveaux. Les probabilités, encore marginales en mathématiques au début du siècle, sont aujourd'hui un des moteurs clefs du développement mathématique dans les domaines les plus divers. De plus en plus, on considère une familiarisation certaine avec les raisonnements mettant en jeu l'aléatoire, avec les notions statistiques, comme une composante incontournable de la formation du citoyen, s'il veut prendre la part qui lui revient dans les débats actuels de société. Peut-on en dire autant de la capacité à calculer des dérivées et intégrales ? L'analyse doit aujourd'hui justifier la place qu'elle occupe dans les curricula.

2. L'évolution technologique

Que l'enseignement de l'analyse soit resté simple « *calculus* », pour reprendre l'expression anglo-saxonne, ou qu'il se soit donné des ambitions plus théoriques, force

est de constater que, dans la plupart des pays, ce qui est réellement appris et ce qui est évalué, pour des raisons diverses, ne va guère au-delà d'une analyse algébrisée, enfermée dans un nombre limité de routines. C'est justement cette analyse que les logiciels de calcul symbolique prennent en charge aujourd'hui, des logiciels implantés même sur des calculatrices. Ceci ne peut que renforcer l'idée que l'enseignement de l'analyse pourrait être drastiquement réduit sans que cela induise une réduction substantielle des compétences des élèves. Les choses sont bien sûr moins simples, comme le montrent différents travaux concernant les calculatrices symboliques[2], mais le poids de tels arguments, dans et surtout à l'extérieur de l'institution scolaire, contribue à fragiliser l'enseignement de l'analyse et renforce le sentiment de crise.

3. La massification de l'enseignement au lycée

La massification de l'enseignement au lycée, l'hétérogénéité qui en résulte, l'injonction qui est faite aujourd'hui à l'École d'assurer la réussite de tous les élèves, accroissent bien sûr la déstabilisation. Nous n'insisterons pas plus sur cette dimension de la crise qui est sans doute celle à laquelle le monde éducatif est le plus sensible.

Aujourd'hui donc, il semble donc impossible d'éviter une réflexion approfondie sur un certain nombre de questions. Certaines ne sont pas nouvelles et on les voit apparaître, de façon récurrente, dans les débats qui se sont succédés concernant l'enseignement de l'analyse. C'est par exemple le cas des questions suivantes :

- Comment répercuter dans le choix des contenus d'enseignement les valeurs épistémologiques de ce domaine, son évolution propre comme celle de ses rapports avec les autres domaines mathématiques, avec les autres disciplines ?
- Comment prendre en compte la diversité des besoins des élèves et étudiants ?
- Comment trouver un juste équilibre entre intuition et rigueur dans les premiers contacts avec le monde de l'analyse ?

D'autres sont plus actuelles :

- Comment penser l'enseignement de l'analyse aujourd'hui, compte-tenu de la massification de l'enseignement secondaire, et maintenant universitaire, et de l'hétérogénéité croissante des élèves et étudiants qui en résulte ?
- Comment prendre en compte efficacement dans cet enseignement l'évolution technologique ?
- Qu'offre enfin, pour penser l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse, la recherche didactique qui s'est développée maintenant depuis plus de vingt ans dans ce domaine et que pourrait-on en attendre de plus[3] ?

Ces questions nous indiquent, s'il en était besoin, que les problèmes qui sont à résoudre aujourd'hui, même s'ils nous paraissent par certains aspects très proches de ceux du passé, sont en fait profondément différents : les contraintes et les possibilités qui conditionnent les futurs possibles ont profondément changé. Les solutions aux problèmes actuels d'enseignement et d'apprentissage de l'analyse ne peuvent donc être simplement empruntées au passé, quelles qu'aient été les réussites du passé. Mais, ce passé, pourtant, tant par ses réussites que par ses

[2] Sur ce point, le lecteur pourra notamment se référer à l'ouvrage coordonné par D.Guin et L.Trouche (Guin & Trouche, 2002).

[3] Nous n'aborderons pas cette question dans ce texte, renvoyant le lecteur à divers textes de synthèse : (Tall, 1996), (Artigue, 1998, 2001), (Robert et Speer, 2001).

échecs, nous instruit et nous pouvons en tirer un certain nombre de leçons. Nous nous limiterons ici à en mentionner quelques unes qui nous semblent particulièrement criantes. Ce sont les quatre suivantes :

1. Il n'existe pas de voie royale pour l'enseignement des débuts de l'analyse, diverses organisations cohérentes sont sans aucun doute possibles mais toutes s'appuient nécessairement sur des niveaux de conceptualisation provisoires.
2. L'apprentissage de l'analyse impose, notamment de ce fait, des reconstructions cognitives que l'enseignement doit organiser et sérieusement prendre en charge, sans les laisser à la seule charge du travail personnel des élèves et étudiants.
3. Les ambitions de l'enseignement secondaire de l'analyse doivent être à la fois épistémologiquement convaincantes et institutionnellement viables.
4. Les ambitions conceptuelles de cet enseignement ne peuvent pas être pensées indépendamment de la réflexion sur le travail technique qui permet leur réalisation.

Elles sembleront peut-être au lecteur de simples évidences, n'ayant pas leur place dans un article. Pourtant, force est de constater que l'étude de l'histoire de cet enseignement montre à quel point ces évidences ont été souvent ignorées et quels effets désastreux cela a eu dans le moyen et long terme. Dans le moyen et long terme, en effet, car c'est assez rarement dans le court terme que les effets des décisions curriculaires sont réellement appréciables.

Comment penser, à la lumière de ce passé, mais aussi des contraintes et potentialités actuelles, l'enseignement de l'analyse au lycée ? C'est la question que nous aborderons maintenant en essayant d'abord de préciser quelques phénomènes marquants, à nos yeux, de l'entrée dans le champ de l'analyse.

3. L'entrée dans le champ de l'analyse

Dans cette partie, nous évoquerons d'abord de façon synthétique les diverses reconstructions que nécessitent l'entrée et les premières avancées dans le champ de l'analyse, avant de nous centrer sur deux d'entre elles : la localisation des points de vue sur les objets fonctionnels d'une part, l'enrichissement du calcul algébrique par introduction des ordres de grandeur d'autre part.

1. La diversité des reconstructions qui marquent l'entrée dans le champ de l'analyse

Rentrer dans le champ de l'Analyse c'est rencontrer un nouveau monde mathématique faits de nouveaux problèmes, de nouveaux objets, de nouvelles techniques, de nouveaux modes de pensée. C'est aussi reconstruire son rapport à des objets connus mais qui vont prendre un sens différent dans ce nouveau champ. La recherche didactique a été, depuis ses débuts, sensible à ces reconstructions, tout en les approchant à travers des cadres théoriques divers (Artigue, 2001). Elle a aidé à les analyser, elle a montré aussi que le coût cognitif de ces reconstructions est généralement sous-estimé par les systèmes éducatifs qui laissent beaucoup d'entre elles à la charge du travail personnel de l'élève puis de l'étudiant.

Les reconstructions requises pour l'entrée dans le champ de l'analyse sont de nature diverses. Certaines d'entre elles concernent des objets et des pratiques mathématiques que les élèves ont rencontrés et avec lesquels ils se sont familiarisés avant que l'enseignement de l'analyse ne commence. C'est le cas par exemple de l'objet tangente.

Comme l'a bien montré par exemple C. Castela (1995), la tangente connue des élèves avant le début de l'enseignement de l'analyse est un objet qui hérite de la tangente au cercle, premier exemple de tangente rencontré, un certain nombre de caractéristiques. Elle est perçue globalement comme une droite qui rencontre la courbe en un point et un seul et ne la traverse pas. Elle est construite géométriquement dans le cas du cercle et peut être déterminée algébriquement dans des cas simples, par exemple dans le cas de courbes représentatives de fonctions polynomiales de degré deux, en écrivant qu'une équation a une solution double. Pour devenir un objet de l'analyse, la tangente doit devenir un objet caractérisé par une propriété locale et non plus globale, une propriété qui, de plus, n'était pas présente dans les conceptions premières de la tangente : la propriété de « communauté de direction » ou de « meilleure approximation affine ». Et de nouvelles techniques vont en résulter pour sa détermination.

Les nombres réels qui objets algébriques à l'origine doivent devenir des objets topologiques, en fournissent un autre exemple, où les reconstructions sont à la fois plus délicates et beaucoup plus cruciales. En effet, quand l'enseignement de l'analyse débute, les élèves ont rencontré depuis plusieurs années des nombres réels : rationnels et irrationnels. Ces objets ont été engagés dans des pratiques mathématiques et les conceptions qu'ils ont développé à leur propos en émergent. Ces pratiques mathématiques peuvent être décrites, si l'on se réfère à l'approche anthropologique du didactique élaborée par Y. Chevallard (Chevallard, 1992), (Bosch & Chevallard, 1999), en termes de praxéologies. Ces praxéologies sont organisées autour de types de tâches, de techniques développées pour résoudre ces tâches, de discours technologiques utilisés pour motiver, expliquer, justifier les techniques, et de théories qui organisent et structurent les discours précédents. Les nombres réels qui émergent ainsi des pratiques des élèves sont des objets algébriques, munis d'un ordre dense, d'une représentation géométrique : la droite numérique, de représentations et approximations diverses parmi lesquelles les développements décimaux fournis par les calculatrices jouent un rôle essentiel. Entrer dans le champ de l'analyse requiert d'importantes reconstructions qui, quelles que soient les stratégies d'enseignement mises en place, on le sait aujourd'hui, ne sont pas aisément réalisées. Les recherches didactiques ont bien montré par exemple que, même si les étudiants savent et déclarent que l'ordre des réels est un ordre dense, ils sont tentés de penser que certains nombres peuvent être, en un sens, successeurs. Par exemple, 0,999… est très souvent considéré comme le prédécesseur de 1, comme si la notation symbolique utilisée, évoquant un processus infini dont tous les termes sont strictement inférieurs à 1, empêchait les étudiants de détacher le résultat de ce processus du processus lui-même. Des tests passés à l'entrée à l'université ont également régulièrement montré que la majorité des étudiants scientifiques répondaient à la question : « Que pouvez-vous dire des nombres a et b si, pour tout entier positif n, on a : $|a - b| < 1/n$? », en disant qu'alors a et b étaient infiniment proches ou successeurs. De telles conceptions rendent évidemment difficile la compréhension des preuves en analyse et *a fortiori* leur production.

Les reconstructions ne concernent cependant pas que des notions rencontrées avant l'entrée dans le champ de l'analyse. D'autres, tout aussi importantes, vont concerner les objets nouveaux que l'enseignement de l'analyse va introduire. Elles résultent en partie de la polysémie des objets mathématiques, pensons par exemple au concept de dérivée ou d'intégrale, et au fait que les différentes facettes de ces objets ne peuvent être toutes introduites simultanément.

Mais les plus problématiques pour l'enseignement sont plutôt liées au fait que, comme l'avait déjà souligné Henri Poincaré au début du XX^{e} siècle, dans une

conférence célèbre sur les définitions mathématiques (Poincaré, 1904), généralement, un concept mathématique ne peut être introduit aux élèves dans sa forme la plus élaborée. Différents niveaux de conceptualisation doivent être progressivement atteints, chacun d'eux correspondant à une sorte d'équilibre qui est partiellement rompu quand on veut passer à un niveau de conceptualisation plus avancé. Ainsi les recherches montrent-elles, par exemple, que les conceptions que les élèves ont de la droite réelle dans les débuts de l'enseignement de l'analyse ne sont pas celles qui seront attendues, à un certain niveau de conceptualisation. Une conception « naturelle » de la continuité se développe sur la base de nos expériences physiques liées à l'espace et au mouvement notamment (Lakoff & Nuñez, 2000), (Nuñez, Edwards, Matos, 1999). Une courbe continue est ainsi d'abord perçue comme engendrée par un mouvement continu, comme sa trajectoire. Les points n'en sont pas des constituants, ils sont perçus comme des positions possibles d'un mobile sur cette trajectoire, ou comme des repères, des bornes, le long d'une route. Des propriétés comme la convergence des suites croissantes majorées (respectivement décroissantes minorées), conséquences directes de la complétude de l'ensemble des réels, y sont naturelles, soutenues qu'elles sont par des métaphores cinématiques : un mobile qui se déplace dans une direction donnée sur une route mais ne peut dépasser telle position finira bien par s'arrêter quelque part. Concevoir une courbe continue comme constituée de points, associer la continuité à l'absence de trous et comprendre le rôle fondamental joué ici par la propriété de complétude de l'ensemble des réels, comprendre que les fonctions continues sont celles qui préservent la continuité des ensembles de départ, en préservant la proximité, tout ceci requiert d'importantes et difficiles reconstructions[4].

Comment organiser ces reconstructions ? Lesquelles privilégier dans un premier contact avec le champ de l'analyse ? C'est la question que nous allons aborder maintenant, en nous centrant sur deux aspects des reconstructions qui nous semblent essentiels à l'entrée dans le champ de l'analyse : la localisation des points de vue et l'enrichissement du calcul algébrique par l'introduction des ordres de grandeur. Ils peuvent et doivent commencer à se mettre en place, nous semble-t-il, très tôt, à un moment où l'accès à un niveau de conceptualisation correspondant à celui de l'analyse formalisée, assujettie aux définitions et preuves en ε - η, est encore peu accessible.

2. La localisation des points de vue, l'enrichissement du calcul

Quand débute l'enseignement de l'analyse, les élèves ont déjà une certaine expérience du monde des fonctions et leurs conceptions des objets fonctionnels émergent de cette expérience et des pratiques associées. Aujourd'hui, généralement, ces pratiques sont liées à une introduction des fonctions qui se fait à travers la modélisation fonctionnelle de situations internes ou externes au champ mathématique, et combine des approches numériques, graphiques et algébriques. Des problèmes de variation et d'optimisation ont déjà été abordés mais généralement traités sur la base « d'évidences » numériques ou graphiques ou, en s'appuyant sur les propriétés des fonctions prototypes que sont les fonctions de référence. Les pratiques fonctionnelles ont été jusque là de nature ponctuelle ou globale. L'entrée dans le

[4] Les auteurs cités ci-dessus montrent, en analysant le discours de mathématiciens, que reconstruction ne signifie pas simple remplacement d'un point de vue par un autre. Dans leurs discours, les mathématiciens ne se privent pas d'utiliser des expressions, des métaphores qui sont caractéristiques de la continuité naturelle. Ils savent, en revanche, que les preuves qu'ils vont produire se situent, elles, dans le registre de la continuité ensembliste qui est soutenu par d'autres verbalisations, d'autres métaphores.

champ de l'analyse conduit à les reconsidérer en prenant en compte la localisation des points de vue qui est une des caractéristiques du travail dans ce champ, et en développant progressivement un jeu dialectique entre points de vue local et global. Ainsi, la linéarité qui était jusque là un concept global va-t-elle avoir à devenir aussi une propriété locale, partagée par une large classe de fonctions, une propriété à la base du calcul différentiel. Et les élèves auront aussi assez rapidement à comprendre comment, sous certaines conditions, des informations de nature purement locale permettent de caractériser des objets globaux, comme c'est le cas dans la résolution des équations différentielles.

Même sans aller jusqu'à entrer dans une analyse formelle en ε–η, ce qui n'est plus une ambition de l'enseignement secondaire français de l'analyse[5], les pratiques algébriques des élèves doivent elles aussi être reconsidérées. Dans le travail algébrique antérieur, les différents composants d'une expression algébrique avaient tout le même poids, résoudre une équation, une inéquation signifiait trouver tous les nombres satisfaisant cette équation, cette inéquation. En analyse, même lorsque le travail technique avec les objets reste essentiellement algébrique, des discontinuités apparaissent. Le traitement des expressions algébriques doit impérativement prendre en compte les différents ordres de grandeur des composants des expressions considérés. Ceci suppose une notion de négligeabilité qui sera de nature absolue ou relative, suivant que l'on se situe dans le cadre de l'analyse non standard ou de l'analyse standard, et le développement de techniques de calcul intégrant cette idée de négligeabilité sous des formes appropriées au choix (non-standard ou standard) effectué. Le travail avec des inéquations, qui devient en analyse prédominant sur le travail avec les équations, n'obéit pas, lui non plus, au même jeu que dans l'algèbre ordinaire. Il ne s'agit pas de trouver toutes les solutions d'une inéquation, il s'agit de trouver un intervalle de solutions, en raisonnant par conditions suffisantes et en jouant simultanément sur l'expression et son traitement différencié suivant les ordres de grandeur d'une part, sur le caractère local du travail mené d'autre part. Le travail technique en est profondément modifié et complexifié, aussi bien dans sa dimension opératoire, que dans les raisonnements qui servent à le piloter et le contrôler.

Il est frappant de constater que les étudiants avancés, même s'ils ont acquis des compétences formelles en analyse, n'ont pas forcément bien compris ces changements de jeu et ne savent pas les gérer de façon toujours efficace. Nous en donnerons un exemple issu d'expériences répétées avec des étudiants préparant le CAPES. Il s'agit de l'étude, banale à ce niveau, de la convergence d'une série numérique, la série de terme général : $u_n = (-1)^n \frac{n \ln(n)}{(n^2+1)}$. Les étudiants de CAPES disposent de techniques efficaces pour aborder une telle tâche. La première question qu'ils se posent généralement est celle de la convergence absolue. Pour y répondre, une technique économique consiste à déterminer un équivalent de la valeur absolue du terme général de la série, ce qui revient ici à considérer que 1 est négligeable devant n^2, et on aboutit à l'expression : $\frac{\ln(n)}{n}$. La reconnaissance d'une série de référence (série de Bertrand) ou plus

[5] De nombreuses recherches didactiques (cf. les synthèses mentionnées au début de cet article) ont montré les problèmes posés par un enseignement qui voudrait trop prématurément s'inscrire dans une telle analyse formelle, sans laisser aux élèves le temps de construire un champ d'expérience et des rapports aux objets de l'analyse se situant à un niveau de conceptualisation moins exigeant. Les nouveaux programmes du lycée, tout en réintroduisant des définitions précises pour la convergence des suites numériques et la notion de limite d'une fonction à l'infini, et en soulignant la nécessité de pouvoir disposer d'un nombre minimal de définitions pour pouvoir conduire des raisonnements précis et rigoureux, faire comprendre les raisons d'être de certains théorèmes clefs, nous semblent tout à fait cohérents avec ce point de vue.

simplement la comparaison avec la série harmonique permettent alors de conclure à la divergence de la série des valeurs absolues. Jusqu'ici tout fonctionne comme une mécanique bien rodée avec des techniques devenues routinières.

La série est aussi une série alternée, et les étudiants disposent, pour ce type de série, d'un théorème qui permet d'assurer la semi-convergence. Ce théorème assure que si la suite $(|u_n|)$ a pour limite 0 et si elle est décroissante à partir d'un certain rang, la série est convergente. Le branchement est, pour ces étudiants, automatique. Il est clair aussi pour eux que la limite de la suite est bien nulle. Il reste donc à montrer la décroissance, ce qui en revanche ne va pas de soi. Lorsque la différence ou le quotient de deux termes successifs ne conduit pas de façon immédiate au résultat, la stratégie usuellement développée consiste à introduire une fonction auxiliaire associée à la suite et à étudier ses variations. Ici il s'agit de la fonction f définie sur]0,+∞[par $f(x) = \frac{x\,\mathbf{ln}(x)}{(x^2+1)}$. Cette fonction est dérivable et sa dérivée est égale à : $f'(x) = \frac{(1-x^2)\mathbf{ln}x + 1 + x^2}{(1+x^2)^2}$. Comme le lecteur s'en rendra compte aisément, déterminer le signe de cette expression sur]0,+∞[n'est pas évident. C'est pourtant à résoudre cette sous-tâche que s'acharnent, année après année, ces étudiants, introduisant une nouvelle fonction auxiliaire associée au numérateur de la dérivée, dérivant et re-dérivant cette nouvelle fonction, sans généralement aboutir. Le fait que le problème qu'ils ont à résoudre : celui du signe de la dérivée, n'est pas un problème global mais un problème local : seul nous intéresse en effet le signe de la dérivée, au voisinage de l'infini, leur échappe complètement. Même confrontés à de sérieuses difficultés techniques, ils ne changent généralement pas de point de vue, s'enferrant dans une approche globale du problème. Chaque année, l'introduction finalement de cette perspective locale, après maints errements de leur part, semble pour eux une découverte. Quoi ? Il suffisait de chercher la limite du numérateur de cette dérivée en +∞, en l'occurrence −∞, le terme prépondérant étant : $-x^2\,\mathbf{ln}(x)$, pour pouvoir garantir que la dérivée était négative au voisinage de l'infini et donc la fonction décroissante, et cela suffisait !

Et, pourtant, si l'on analyse les problèmes de CAPES, même à ce niveau avancé, c'est bien plus ce calcul enrichi par la manipulation des ordres de grandeur, associé à une bonne maîtrise de la localisation du regard qui y est en jeu qu'une analyse véritablement formelle. Celle-ci est en fait généralement encapsulée dans les théorèmes qui vont organiser et justifier la démarche suivie, comme ici le théorème assurant que deux séries à termes positifs dont les termes généraux sont équivalents sont de même nature, ou le théorème des séries alternées.

Localisation des points de vue, enrichissement du calcul algébrique sont, comme nous avons essayé de le montrer, des évolutions majeures, emblématiques de l'entrée dans le monde de l'analyse. Peut-on aujourd'hui, dans les conditions qui sont celles de l'enseignement au lycée, amorcer ces reconstructions et en faire sentir aux élèves la profondeur épistémologique ? C'est ce point que nous aborderons dans la troisième partie de ce texte, en étudiant plus précisément comment les instruments

technologiques actuels peuvent aider à rendre viables des choix didactiques dont on mesure bien à la fois l'importance et la complexité.

4. Enseignement de l'analyse et TICE

De très nombreux travaux de recherche ont étudié l'aide que les technologies informatiques pouvaient apporter à l'enseignement de l'analyse. Dès le début, deux voies principales ont été explorées : celle de la programmation dans les langages spécifiques et celle de la visualisation. Ce sont ces deux voies que nous présenterons brièvement, en nous référant à des travaux qui en sont emblématiques, pour commencer, avant de nous centrer sur deux recherches ayant cherché à exploiter plus particulièrement les TICE pour conjuguer localisation des regards et enrichissement du calcul par l'intégration des ordres de grandeur.

3. Deux potentialités privilégiées au départ : programmation et visualisation

La première voie : celle de la programmation est particulièrement bien illustrée par les travaux initiés par E. Dubinski (1991) qui ont conduit au développement de la théorie APOS et du langage ISETL (Dubinsky & Mac Donald, 2001). De façon très résumée, la théorie APOS6, basée sur l'épistémologie piagétienne, modélise la conceptualisation mathématique de la façon suivante : des actions sont intériorisées en processus, eux-même ensuite encapsulés en objets qui peuvent être réinvestis ensuite dans de nouvelles actions et de nouveaux processus. Ainsi en est-il par exemple du concept de fonction qui émerge comme processus par l'intériorisation d'actions menées sur des objets fonctionnels particuliers et, une fois encapsulé en objet, peut-être réinvesti dans d'autres processus, tels les processus de dérivation et d'intégration qui deviendront à leur tour des objets. Objets et processus sont enfin reliés à d'autres objets et processus à l'intérieur de schémas.

La deuxième voie est celle de la visualisation et le travail mené par David Tall, dès le début des années 80, en termes de "generic organiser" (voir pour une synthèse (Tall 1996)) en est un exemple pionnier et paradigmatique, à la fois. L'idée à la base de ce travail est de visualiser concepts et théorèmes, en utilisant les possibilités graphiques des ordinateurs. Elle conduit ainsi D. Tall à la notion de « tangente pratique ». Cette notion est associée aux approximations de la tangente mathématique, obtenues en considérant les droites passant par le point de la courbe en lequel on cherche à déterminer la tangente et un point très voisin (obtenu en fixant un pas h sur x). Ces droites se confondent à l'écran avec la tangente mathématique, dès que le pas h est suffisamment petit, se comportant pratiquement donc comme la tangente. Cette visualisation lui sert à introduire la notion de dérivée en un point puis de fonction dérivée. De même, la démonstration, dans le cas continu, du théorème fondamental de l'analyse reliant calcul différentiel et intégral est visualisée en utilisant le fait qu'une fonction continue en un point a va être représentée par un segment horizontal à l'écran de l'ordinateur dès que l'on considère une fenêtre de la forme $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]\times[b, c]$ avec ε suffisamment petit.

.[6] Dans l'acronyme APOS, A signifie Action, P signifie Processus, O signifie Objet et S signifie Schéma.

1. Visualisation et ordres de grandeur : les apports de deux recherches récentes

La potentialité de visualisation de la linéarité locale offerte par les ordinateurs, exploitée par D. Tall en termes de tangente pratique, est aussi à la base des deux recherches que nous évoquerons dans cette partie : la recherche que nous avons développé dans le cadre d'un projet de recherche sur l'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement initié en 1995 (Artigue et al., 1998) et la recherche menée plus récemment par M. Maschietto pour sa thèse (Maschietto, 2002). Mais ces deux recherches, plus que les travaux de D. Tall, se sont centrées sur le rôle que la technologie pouvait jouer, non seulement pour visualiser les concepts de l'analyse, mais aussi pour soutenir la mise en place et l'articulation des deux facettes dont nous avons pointé l'importance dans ce qui précède : la localisation des points de vue d'une part, l'intégration des ordres de grandeur au calcul d'autre part.

Les possibilités de zooms offertes par les calculatrices et logiciels rendent très facilement visible le fait que, pour beaucoup de représentations graphiques de fonctions, si l'on centre progressivement le regard au voisinage d'un point, on finit par voir un segment de droite. Le processus qui conduit à la tangente à la courbe au point considéré est mathématiquement un processus infini, engageant un passage à la limite, mais les caractéristiques graphiques des écrans rendent le phénomène de linéarisation locale visible, « à distance finie ». C'est cette caractéristique de l'implémentation informatique qui a été, dès le début, exploitée par D. Tall et l'a conduit à la notion de tangente pratique ; ce sont les visualisations associées que l'on retrouve dans de nombreux ouvrages concernant l'utilisation de calculatrices graphiques dans l'enseignement de l'analyse et, maintenant, dans de nombreux manuels de lycée. Elles nous sont devenues familières.

Ce qui est moins souligné, ce sont les limites de cette visualisation. Très souvent, dans les exemples choisis, la tangente au point considéré a une équation simple avec des coefficients, en particulier le coefficient directeur, entiers, et les approximations numériques de la calculatrice ou du logiciel conduisent, pour un agrandissement suffisant ou un pas assez petit, à l'affichage d'une équation, pour la droite tracée, qui est celle de la tangente. Ceci permet de laisser planer l'ambiguïté sur la nature réelle de l'objet qui apparaît à l'écran et de le confondre avec la tangente. C'est sans doute une solution confortable pour l'enseignant et qui ne gêne en rien les élèves, d'autant plus que généralement, cette visualisation fonctionne juste comme une entrée en matière et que l'on s'engage très vite dans un travail plus classique sur les dérivées. Mais, dans une culture où l'image est aussi omniprésente et aussi valorisée, une telle attitude nous semble tout à fait dommageable. Il importe en effet d'apprendre à distinguer ce que l'on voudrait que les images nous montrent de ce qu'elles nous montrent réellement, et les mathématiques, dans ce domaine comme dans bien d'autres, ont un rôle important à jouer.

C'est ce qui nous avait conduit, dans un projet de recherche sur l'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement initié en 1995 à, au contraire, construire un scénario didactique permettant d'interroger ces visualisations et de faire apparaître la notion de meilleure approximation affine et de dérivée, comme une réponse mathématique à ces interrogations. Ce scénario et les résultats de sa réalisation dans les

classes expérimentales concernées sont analysés de façon détaillée dans (Artigue et al., 1998) et (Artigue, 2002). Nous en présenterons ici seulement les grandes lignes.

Dans ce scénario, on procède d'abord classiquement en étudiant comment évoluent les pentes des sécantes (AM) à la parabole d'équation y = x2 – 2, A étant le point d'abscisse 1 lorsque le point M se rapproche de A. Une construction effectuée sous le logiciel Cabri-géomètre, implanté dans la calculatrice TI92 utilisée permet de visualiser le phénomène et d'afficher les pentes des sécantes. Les élèves remarquent bien l'évolution des sécantes et de leur pente et, même si lorsque les deux points sont confondus rien n'est tracé comme ici et l'affichage du coefficient est : « undef », ils conjecturent sans difficulté particulière, dans ce processus visuel dynamique, l'existence d'une limite qui serait la droite passant par A de pente 2. Le fait que la limite soit entière favorise bien sûr la formulation de cette conjecture. Mais pourquoi cette droite là et non une autre ? C'est cette interrogation que le scénario essaie de faire vivre et de résoudre ensuite, en mathématisant le phénomène observé.

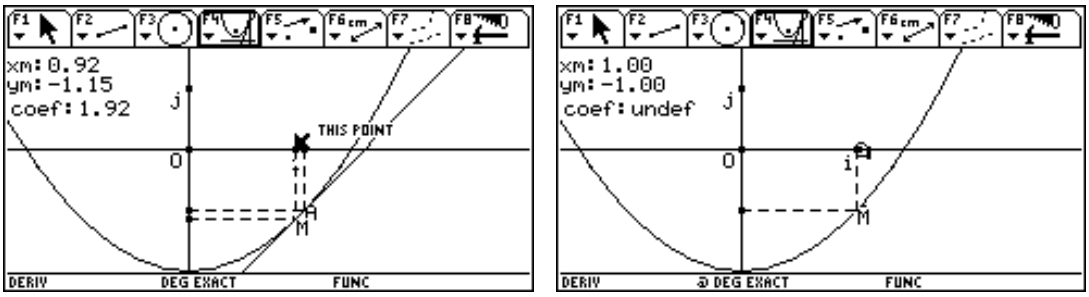

Figure 1 : Évolution des sécantes et situation limite

Pour cela, on a préalablement entré, dans l'application Y= de la calculatrice rétro-projetable, l'équation de la parabole, l'équation de la droite limite conjecturée et les équations de deux droites voisines passant aussi par le point A, les équations étant écrites sous une forme qui mette ces caractéristiques en évidence. Le scénario prévoit que l'enseignant ouvre l'application Y= et fasse interpréter les quatre équations présentes puis fasse tracer les représentations graphiques correspondantes dans la fenêtre standard. Les trois droites s'y confondent, contrairement aux attentes des élèves. On peut bien sûr envisager des zooms, et c'est ce que les élèves proposent immédiatement de faire, pour singulariser la droite de pente 2, mais force est de constater que cela ne change pas grand chose et que, de toutes façons, le problème reste posé pour des droites avec des coefficients directeurs beaucoup plus proche de 2. Ce à quoi le scénario veut confronter les élèves, dans cette phase collective, c'est que ce type de représentation permet de visualiser la proximité, mais qu'il ne permet pas d'en apprécier précisément la qualité, c'est à dire, en des termes mathématiques qui, bien sûr, ne sont pas ici employés, d'apprécier l'ordre de l'approximation.

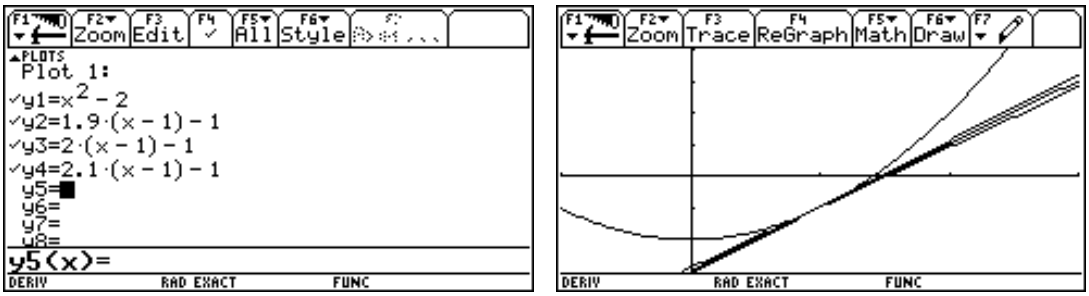

Figure 2 : Les tracés après agrandissement

Le problème étant posé, le scénario prévoit que la mathématisation s'engage sous la direction du professeur qui va aider les élèves à trouver un moyen de comparer les différentes droites du faisceau passant par A, du point de vue de leur proximité à la parabole au voisinage du point A. Ceci se fait, classiquement, en introduisant les distances, entre le point de la parabole et le point de chaque droite, de même abscisse 1+h, et en comparant ces distances. On fait l'hypothèse , dans ce scénario, que les élèves qui ont été déjà sensibilisés à la notion de négligeabilité relative par un travail antérieur sur les limites, vont réinvestir cette notion dans la comparaison, en s'apercevant que les trois distances tendent vers 0 quand h tend vers 0. C'est ce qui s'est passé effectivement dans les expérimentations menées. Les élèves ont montré que seule la distance associée à la droite de coefficient directeur 2 tendait vers 0 plus vite que h. On a, à ce point du scénario, singularisé la droite parmi un ensemble de trois. Le même calcul va être ensuite repris avec une droite quelconque du faisceau de pente m et aboutir à la conclusion que seule la droite de coefficient directeur 2 possède cette propriété qui la caractérise donc mathématiquement.

Ceci n'est bien sûr qu'un premier pas. La technique utilisée va être testée avec d'autres points et d'autres fonctions et l'on montrera, avec l'aide du calcul symbolique de la calculatrice, qu'elle permet, dans chaque cas, de vérifier les conjectures faites. On montrera aussi qu'au prix d'un léger aménagement, elle permet de calculer la valeur de m sans que l'on soit obligé de l'avoir conjecturée, et l'on arrivera ainsi au calcul de la dérivée en un point. Une fois ce calcul installé sur les exemples les plus simples, le scénario prévoit d'introduire la commande de dérivation formelle de la calculatrice et d'utiliser les résultats qu'elle produit, pour conjecturer les règles de calcul algébrique des dérivées. La calculatrice fonctionne ici comme une boîte noire productrice de calculs formels dont il s'agit de comprendre la logique, en s'appuyant sur le sens donné par les expériences précédentes à la notion de dérivée et sur les formulations qui en ont résulté.

Nous n'entrerons pas plus dans le détail de cette ingénierie didactique mais nous voudrions souligner que si, au départ, la localisation des points de vue, s'effectue dans le registre perceptif et graphique, c'est l'articulation de cette perception avec un calcul mobilisant les ordres de grandeur, via la notion de négligeabilité relative qui permet de faire sens de la visualisation et des invariants perceptifs sur lesquels cette dernière attire notre attention.

La recherche de M. Maschietto se situe dans une problématique proche puisque, ce qui y est étudié, ce sont les possibilités offertes par le mouvement de zoom que simulent les calculatrices graphiques pour problématiser, dès le début de l'enseignement de l'analyse, la localisation des points de vue, et soutenir le passage d'une vision globale de la linéarité à une vision locale de cette dernière. Elle se situe cependant, sur le plan théorique, dans une perspective sensiblement différente, de part ses références au champ de l' "embodied cognition" dont relèvent aussi les recherches mentionnées plus haut sur la continuité naturelle. Le scénario didactique qui en résulte et a été expérimenté à plusieurs reprises en Italie, est proche de celui précédemment décrit, dans son esprit, mais présente avec ce dernier des différences sensibles. Il n'utilise d'abord pas le même point de départ. M. Maschietto en effet n'utilise pas la visualisation du mouvement de la sécante comme nous l'avions fait mais se propose

d'accéder à l'idée de linéarité locale à travers un processus de zooms successifs. Et c'est à travers la recherche puis la confrontation des équations proposées par les différents groupes d'élèves pour la droite affichée sur l'écran de leur calculatrice qu'est organisée, dans le scénario, le questionnement de la perception et lancé le travail de mathématisation. Il n'organise pas non plus, de la même façon, le travail au sein de la classe puisque chaque séance est conçue en deux temps : une longue phase de travail en groupes suivie d'une substantielle phase collective de bilan. L'enseignement s'adresse enfin, il faut le souligner, à des élèves du même niveau mais ayant une culture mathématique et technologique sensiblement différente. Les élèves ont déjà rencontré la notion de tangente dans le cadre de l'étude des coniques et la technique algébrique de détermination de la tangente a été institutionnalisée à cette occasion. En revanche, excepté pour une classe, ils sont peu familiers avec les calculatrices symboliques qui ne sont mises à leur disposition que quelques séances avant l'expérimentation. Ils n'ont pas non plus rencontré préalablement la notion de négligeabilité. Tout ceci va créer pour l'entrée dans le point de vue local des conditions particulières.

L'expérimentation, pour laquelle nous renvoyons le lecteur à l'article de M. Maschietto dans ces mêmes actes et à (Maschietto, 2002), montre que le phénomène de linéarité locale est rapidement découvert par les élèves, au cours des explorations qu'ils ont à mener, dans un travail de groupes, sur un certain nombre de fonctions. On voit aussi, à travers le langage dynamique qu'ils utilisent, que, même si au bout de quelques zooms seulement le tracé devient droit, les élèves cherchent à maintenir la distance entre les deux types d'objets, l'objet courbe et l'objet droit. Une différence essentielle avec les expérimentations menées en France est l'identification spontanée qu'opère un nombre non négligeable d'élèves, entre le tracé droit qui apparaît à l'écran de la calculatrice, et la tangente, via un mécanisme cognitif que les données recueillies ne permettent pas d'élucider complètement. Cette identification résiste même quand on propose aux élèves de mener le travail de mathématisation sur une fonction du troisième degré et non, comme cela a été le cas, dans la première expérimentation, sur une fonction du second degré. Cette identification de la tangente va, dans certains cas, bloquer l'avancée des élèves, qui veulent disposer d'une procédure algébrique exacte pour la déterminer, et semblent percevoir le recours à la démarche d'approximation proposée comme une régression. Enfin, la non disponibilité de la négligeabilité oblige l'enseignant à assumer plus de responsabilités dans l'introduction du nouveau calcul. Mais cette recherche, comme celle que nous avons menée, en dépit des différences, confirme bien l'accessibilité du point de vue local à des élèves débutant en analyse dans l'environnement technologique choisi et du calcul algébrique enrichi qui permet d'opérationnaliser ce point de vue.

2. En conclusion

Après avoir évoqué les deux grandes orientations sur lesquelles s'est élaborée au départ la réflexion sur les TICE en analyse, nous avons, dans la partie précédente, mis l'accent sur les potentialités des TICE, en privilégiant des recherches qui, répondant aux préoccupations que nous avions exprimé précédemment, mettaient l'accent sur les potentialités offertes pour la localisation de point de vue en jeu dans l'introduction de la notion de dérivée et pour la mise en place de techniques de calcul associées, mettant en jeu des raisonnements en termes d'ordre de grandeurs et de négligeabilité. C'est bien

sûr là une vision très partielle des potentialités des TICE pour l'enseignement de l'analyse et nous voudrions le souligner dans cette conclusion. Les recherches et innovations menées sur l'enseignement de l'analyse dans l'environnement de calculatrices et logiciels ont par exemple bien mis en évidence les potentialités de ces technologies pour développer et exploiter des dispositifs permettant de faire vivre très tôt dans l'enseignement une approche cinématique à l'analyse, en mettant en jeu les mouvements mêmes du sujet et leur représentation (Kaput, 1992). Elles ont aussi montré comment les possibilités graphiques et symboliques de ces technologies permettent, non seulement de travailler sur des objets plus complexes et moins scolairement apprêtés, mais aussi d'approcher des familles d'objets, de faire vivre des problématiques de généralisation, à un moment où l'enseignement est encore centré sur l'étude d'objets spécifiques et où les compétences techniques des élèves leur donnent difficilement accès, sans aide instrumentale, à ce travail de généralisation. Et même si l'on envisage le seul passage d'un point de vue global à un point de vue local, nous n'avons abordé la question que très partiellement, à travers le filtre de la dérivation, alors que nous aurions pu l'aborder par exemple à travers l'étude des branches infinies, ce qui en aurait donné une image un peu différente.

Nous avons, aussi, dans ce qui précède, souligné l'importance qu'a en analyse le travail sur les ordres de grandeur. L'importance des ordres de grandeur va cependant bien au-delà de l'analyse et le rapport sur le calcul élaboré par la CREM (Kahane, 2002) dont nous avons piloté l'élaboration, comme l'annexe associée à ce rapport[7], le mettent clairement en évidence. En fait, c'est dès l'école élémentaire que la notion d'ordre de grandeur intervient et doit intervenir pour raisonner le calcul, anticiper ses résultats ou les contrôler, en particulier quand ils sont produits avec une calculatrice. Au fur et à mesure de la scolarité, des notions et techniques mathématiques vont permettre d'enrichir un rapport aux ordres de grandeur qui joue un rôle crucial dans la vie quotidienne, dans les rapports entre mathématiques et autres disciplines. Ainsi en est-il, au collège des puissances (puissances de 10 notamment) et des techniques de calcul associé. Ce travail doit déjà permettre aux élèves de dépasser, dans leur rapport au nombre, l'image d'homogénéité associée en mathématiques à la droite réelle. Nous voudrions illustrer ceci par un exemple extrait de l'annexe au rapport sur le calcul déjà citée. Il illustre bien, nous semble-t-il à la fois cette non homogénéité via l'existence du très grand et du très petit, mais aussi le fait que ces notions de très grand et de très petit dépendent des grandeurs engagées dans la comparaison. La négligeabilité y apparaît non comme quelque chose d'absolu mais comme quelque chose de relatif.

Combien y-a-t-il de molécules d'eau dans une goutte d'eau ? Y en a-t-il beaucoup plus, beaucoup moins que de gouttes d'eau dans la mer Méditerranée ?

Mais si l'enseignement qui précède l'analyse, en mathématiques, comme dans les autres disciplines, crée une familiarité avec la notion d'ordre de grandeur et fait comprendre son importance, l'analyse va lui conférer un autre statut. En analyse, l'approximation devient constitutive des concepts eux-mêmes et la notion d'ordre de grandeur, la comparaison des ordres de grandeur deviennent de ce fait fondamentales.

[7] Cette annexe est disponible sur différents sites avec les autres rapports et annexes aux rapports de la CREM, par exemple le site de l'APMEP, le site de la SMF.

Une fonction dérivable en un point est ainsi une fonction approximable au premier ordre par une fonction affine au voisinage de ce point. Il y a, sous-jacente, une reconstruction profonde du rapport aux ordres de grandeur que l'on ne saurait sous-estimer.

5. Conclusion

Nous avons, dans la première partie de ce texte, souligné les problèmes que pose l'enseignement de l'analyse aujourd'hui, en situant cet enseignement dans son histoire pour essayer de mieux comprendre ce qui faisait la spécificité de la situation actuelle. Dans une seconde partie, nous avons pointé un certain nombre de difficultés inhérentes à l'apprentissage de l'analyse, en mettant en particulier l'accent sur les nombreuses reconstructions que cet apprentissage nécessite, au fil de l'évolution des niveaux de conceptualisation dans ce domaine. Nous en sommes ensuite venue à deux évolutions qui nous semblaient emblématiques de l'entrée dans le champ de l'analyse : la localisation des points de vue et, au-delà de cette localisation, l'articulation dialectique des rapports entre point de vue local et point de vue global d'une part, l'intégration au calcul algébrique des notions d'ordre de grandeur et de négligeabilité d'autre part. Ces évolutions vont permettre d'opérationnaliser les notions introduites, dès les premiers niveaux de conceptualisation, avant même que ne se mette en place un rapport formalisé aux objets de l'analyse et elles continueront ensuite à jouer un rôle essentiel. Ces évolutions sont, on le sait délicates, d'autant plus délicates aujourd'hui que le contexte de l'enseignement est plus difficile (enseignement de masse, réductions substantielle des horaires…). Elles doivent être engagées et travaillées tôt, sont exigeantes tant du point de vue conceptuel que technique et l'on peut se demander s'il ne s'agit pas là d'ambitions irréalistes dans les conditions actuelles. Ce n'est pas notre position et, prenant en compte l'évolution des outils de l'activité mathématique et des outils de l'enseignement de cette discipline, nous nous sommes alors interrogée sur l'aide que pouvaient apporter les TICE à leur réalisation. Ces aides sont certaines même si, comme le montrent les recherches, la construction de scénarios didactiques permettant d'en tirer efficacement profit ne va pas tout à fait de soi. Et il nous semble qu'elles devraient pouvoir contribuer à rendre viables, si des efforts suffisants sont faits au niveau de la formation des enseignants et de la production de ressources didactiques adaptées, des choix curriculaires raisonnablement ambitieux.

Nous voudrions enfin, à travers ce texte, avoir contribué à convaincre ses lecteurs que l'enseignement de l'analyse a d'importants défis à relever, qu'il doit justifier la place qui lui est ou lui sera accordée à l'avenir dans l'enseignement secondaire et que ceci ne va pas de soi. Ces défis ne seront certainement pas faciles à relever car, si l'on ne vide pas l'enseignement de l'analyse de toute ambition, c'est un enseignement nécessairement difficile. Mais, si les conditions qui sont celles de l'enseignement actuel, par de nombreux aspects, ne facilitent pas la tâche des enseignants, ces derniers disposent par ailleurs aujourd'hui de ressources qui, si elles sont convenablement exploitées, ce qui est loin d'être le cas, devraient permettre d'atteindre des fonctionnements plus satisfaisants. Ceci suppose une cohérence entre les valeurs attribuées à cet enseignement, son contenu et les moyens qui lui sont attribués, une attention particulière aux conditions de viabilité des choix préconisés, mais nous avons peut-être la chance d'être à un moment où le statut quo ne peut perdurer.

6. Références

ARTIGUE M. (1993) : Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM* nº 11, 115-139.

ARTIGUE M. (1996) : Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée, in B. BELHOSTE & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, 197-217. Éd. Vuibert, Paris.

ARTIGUE M. (1998) : L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 18.2, 231-262.

ARTIGUE M. et al. (1998) : L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement des mathématiques au lycée. *Cahier DIDIREM*, nº spécial 3. IREM Paris 7.

ARTIGUE M. (2001) : L'entrée dans le champ conceptuel de l'analyse : réformes curriculaires, recherches didactiques, où en est-on ?, in T. ASSUDE & B. GRUGEON (eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2000*, 277-301. IREM Paris 7.

ARTIGUE M. (2002) : L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques In D. GUIN & L. TROUCHE (eds). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BELHOSTE B. (1996) : Réformer ou conserver ? La place des sciences dans les transformations de l'enseignement secondaire en France (1900-1970), in B. BELHOSTE & al. (eds), *Les sciences au lycée – un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger,* 197-217. Éd.. Vuibert, Paris.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999) : La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.

CASTELA C. (1995) : Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15/1, 7-47.

CHEVALLARD Y. (1992) : Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 77-111.

DUBINSKY E. (1991): Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

DUBINSKY E., MC DONALD M. (2001): APOS : a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers (to appear).

GUIN D. & TROUCHE L. (eds). (2002) : *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

KAHANE J.P. (ed.) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Paris, Odile Jacob.

KAPUT, J. (1992). Technology and Mathematics Education, in D. Grouws (Ed.) *Handbook of research in mathematics teaching and learning,* 515-556. New York, Macmillan.

LAKOFF G., NUÑEZ R. (2000): *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York, Basic Books.

MASCHIETTO M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu local – global dans l'environnement de calculatrices*. Thèse de doctorat. Université Paris 7.

NUÑEZ R., EDWARDS L.D., MATOS J.P. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 39, 45-65.

POINCARÉ H. (1904). Les définitions en mathématiques. *L'Enseignement Mathématique, 6*, 255-283.

ROBERT A., SPEER N. (2001). Research on the teaching and learning of calculus / elementary analysis, in D. Holton & al. (eds), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI Study*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers (to appear).

TALL D. (1996). Functions and Calculus, in A.J. Bishop al. (eds), *International Handbook of Research in Mathematics Education,* 289-325. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.