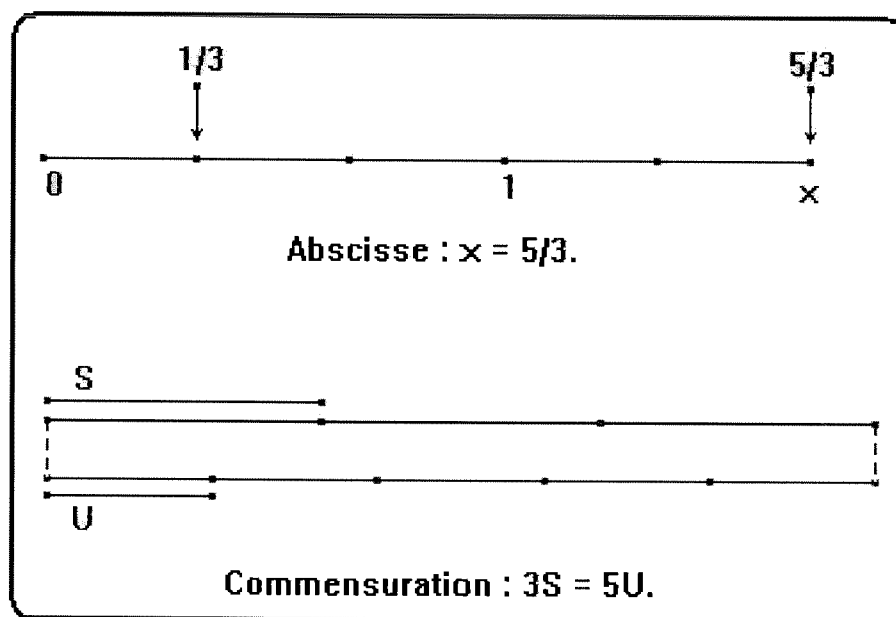


Ressources pour l'enseignement mathématique en série littéraire

MARS 2003



SOMMAIRE

Présentation et mode d'emploi de ce document.....	1
THEME 1 : ANTHYPHERESE ET COMMENSURATION	3
1. <i>L'emploi d'une unité de longueur, est-ce si bête que ça ?</i>	3
2. <i>Théorie et pratique de l'anthypérèse</i>	4
3. <i>Une interrogation pour le mathématicien : la commensuration</i>	5
THEME 2 : CE QUE LA GEOMETRIE PEUT NOUS APPRENDRE SUR LES NOMBRES	9
1. <i>Pavage d'un rectangle avec des dalles carrées.....</i>	11
1.1. Exemple 1	11
1.2. Exemple 2 : Plus généralement	12
1.3. Exemple 3	13
1.4. Exemple 4.....	14
1.5. Conclusion de l'étude de ces différents exemples	15
2. <i>Nombres constructibles.....</i>	22
3. <i>Nombres constructibles : définition moderne</i>	24
3.1. Un exemple : la construction $\mathbb{C}$ des racines d'une équation du second degré	24
3.2. Polygones réguliers	26
3.3. Points et nombres $\mathbb{C}_2$ -constructibles	28
THEME 3 : DE L'ALGORITHME D'EUCLIDE A L'APPROXIMATION D'UN NOMBRE IRRATIONNEL PAR DES NOMBRES RATIONNELS	31
1. <i>L'Algorithme d'Euclide.....</i>	31
1.1. L'Algorithme d'Euclide sur un exemple.....	31
1.2. Application	31
2. <i>Recherche de développements de nombres donnés en fraction continue....</i>	32
2.1. Exemple 1	32
2.2. Exemple 2.....	32
3. <i>Conséquences</i>	33
4. <i>Approches géométriques</i>	34
4.1. Etude géométrique du rapport diagonale / côté du carré.....	34
4.2. Etude géométrique du rapport diagonale / côté du pentagone régulier.....	35

5. Applications numériques.....	36
5.1. Valeurs approchées rationnelles de $\sqrt{2}$	36
5.2. Valeurs approchées rationnelles du nombre d'or.....	36
5.3. Justification mathématique : Cadrages par des réduites.....	36
UNE MISE A L'ESSAI EN PREMIERE L.	39
1. Première activité : De l'algorithme d'EUCLIDE au développement en fraction continue d'un nombre réel.....	39
1.1 Développement en fraction continue d'un nombre	40
1.1.1. Algorithme de la division euclidienne sur un exemple ($A > B$).....	40
1.1.2. Programmes de calcul	40
1.1.3. Cas où $A < B$	42
1.2. Développement en fraction continue d'un nombre réel	42
1.2.1. Description du procédé de l'anthyphérèse (voir aussi les thèmes 1 et 3).....	42
1.2.2. Programmes de calcul	43
1.2.3. Des exemples traités avec les élèves	44
1.2.4. Développement de fraction mettant en évidence une simplification	45
2. Deuxième activité : Analyse géométrique d'un tableau de Raphaël.....	46
2.1. Observation du tableau de Raphaël.....	48
2.2. Construction d'un carré inscrit dans un demi cercle	48
2.3. Relations métriques et géométriques.....	49
2.4. Méthode analytique	49
THEME 4 : ASTRONOMIE, CALENDRIERS ET FRACTIONS CONTINUES.	51
1. Aristarque de Samos : sur les dimensions et les distances du soleil et de la lune	51
2. L'élaboration d'un calendrier	53
3. L'horloge astronomique de Strasbourg et les fractions	55
THEME 5 : SUITES AYANT DES DIFFERENCES SECONDES CONSTANTES : LES TRAVAUX DE GALILEE	57
1. Les travaux de Galilée.....	58
1.1. Quelques énoncés qui fondent le mouvement uniforme	58
1.2. Le mouvement uniformément accéléré	59
1.3. Annexe : exemples de théorèmes donnés par Galilée et commentaires.....	61

2. Prolongements : différences finies.....	63
2.1. Etude des différences des polynômes de degré inférieur ou égal à deux.....	62
2.1.1. Calcul des différences successives d'un tel polynôme	63
2.1.2. Recherche de polynômes connaissant leurs différences.....	63
2.2. Une réponse au problème posé dans le cas des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à deux.....	64
2.2.1. Construction de la table de différences d'un polynôme de degré inférieur ou égal à deux, connaissant le bord (α, β, γ)	64
2.2.2. Etude de polynômes particuliers	64
2.2.3. Calcul d'un polynôme du second degré connaissant le bord de sa table	65
BIBLIOGRAPHIE	67

PRESENTATION ET MODE D'EMPLOI

A partir de la rentrée 2000, un changement important est intervenu dans les programmes des classes de première et terminale littéraires. Les élèves suivent désormais un enseignement obligatoire de « mathématiques et informatique » et peuvent s'ils le souhaitent, suivre une option facultative en première et terminale. L'objectif est à la fois d'assurer à tous les élèves une formation mathématique de base et de proposer une ouverture sur des aspects historiques ou culturels des mathématiques permettant de montrer sur des exemples comment les concepts se sont progressivement construits. Compte tenu de l'orientation future des élèves, de leurs centres d'intérêts et des liens possibles avec d'autres disciplines, il paraît important de mettre en évidence, chaque fois que c'est possible, les contextes dans lesquels certaines notions ont pu apparaître.

Un petit groupe d'enseignants s'est mis en place sous la responsabilité conjointe des IPR et de l'IREM de Strasbourg. Il a choisi, dans un premier temps, de travailler sur les parties du programme destinées à permettre :

- une meilleure compréhension de la notion de nombre au travers de la perception de l'imbrication des éléments géométriques et numériques (algorithme d'Euclide, approximation d'un nombre irrationnel par des rationnels, problème de l'incommensurabilité, nombres constructibles, polygones réguliers...),
- une réflexion sur les différents types de croissance et la manière de les caractériser (sans l'outil dérivée).

Cela étant, de tels objectifs et perspectives ne peuvent que favoriser l'apprentissage des mathématiques dans d'autres cursus scolaires. C'est dire que le travail engagé par ce groupe peut être mis au service de l'enseignement des mathématiques dans d'autres séries, en particulier scientifiques.

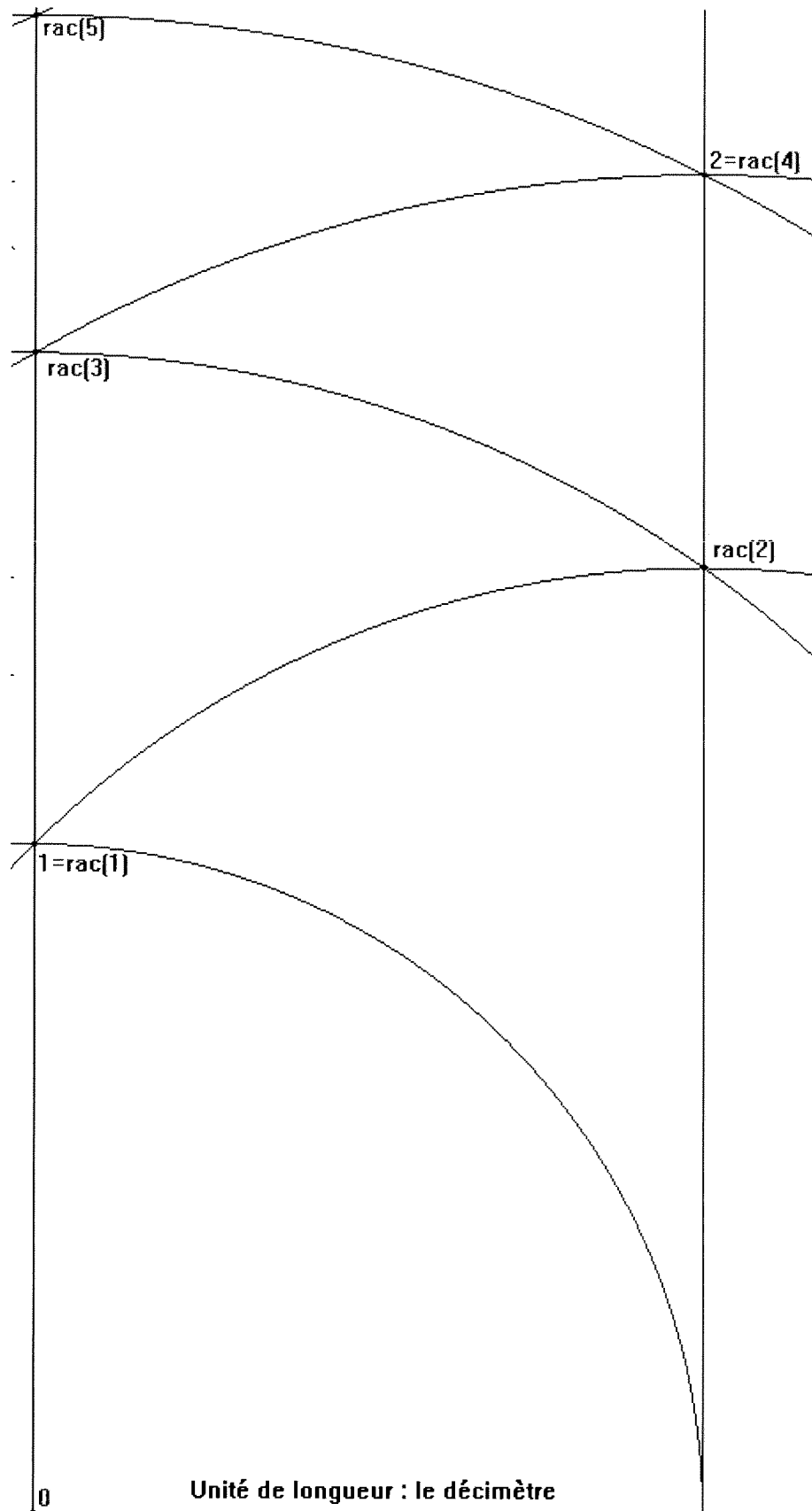
Ce groupe a exploré quelques thèmes d'étude, cherchant à la fois l'intérêt qu'ils présentaient pour répondre aux objectifs du programme et la forme que pouvait alors prendre l'activité mathématique de l'élève. Ce sont les résultats de cette recherche qui sont présentés ici, à l'attention des professeurs. La rédaction mêle des savoirs et des réflexions qui s'adressent à des lecteurs ayant une formation mathématique, des développements d'idées ou de raisonnements appropriés à la formation des élèves ainsi que des prolongements possibles. **Le lecteur y trouvera à la fois des éléments de culture mathématique liée à son enseignement et des propositions d'activités pour ses élèves.** Il lui restera à exercer son discernement pour utiliser tout ou partie de ce qui est présenté ici, et à aménager peu ou prou ce qu'il en aura choisi pour l'adapter aux élèves de sa classe.

D'autres réflexions sont en cours, en particulier sur la perspective cavalière et la perspective à points de fuite.

Nicole Bopp
Directrice de l'IREM
de Strasbourg.

Suzette Rousset-Bert
IA-IPR de l'académie
de Strasbourg.

**UNE FIGURE INTRODUCTIVE
POUR "CONTEMPLATION" ET "MEDITATION"
AVANT ET APRES L'ETUDE DES THEMES 1 ET 2.**



THEME 1 : ANTHYPHÉRESE ET COMMENSURATION

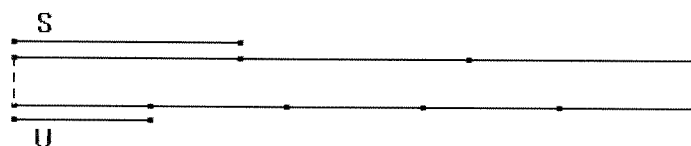
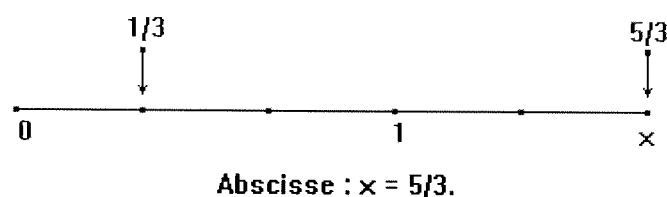
Commentaire : On propose ici des études géométriques et numériques sur la droite. Les études qui font intervenir le plan euclidien (figure introductive et thèmes 2 et 3) les complètent naturellement.

1. L'emploi d'une unité de longueur, est-ce si bête que ça ?

Une unité de longueur étant choisie, de manière plus ou moins arbitraire (pied d'un héros ou pouce d'un monarque, étalon de platine iridié construit en référence au méridien terrestre, nombre donné de longueurs d'onde d'une radiation fixée, etc.), la pratique ancestrale encore valable pour mesurer des longueurs consiste à matérialiser cette unité et à effectuer des reports. On a procédé ainsi aussi bien pour des mesures courantes grossières, grâce à des ressources corporelles (comme l'utilisation de l'empan ou le décompte de pas) que pour des mesures fines, par exemple destinées à préciser les dimensions et la forme de la terre. Pour ce dernier objectif, il faut d'ailleurs associer longueurs et angles, ainsi que le mentionne le thème d'étude de la terre et d'astronomie (voir page 51 et suivantes).

Certes, l'emploi de règles graduées ou de système d'axes s'est imposé de nos jours, au point de faire parfois oublier qu'une valeur fractionnaire de longueur peut se repérer de deux façons différentes : par l'abscisse d'un point ou par la commensuration de segments, comme cela apparaît dans l'exemple suivant, illustrant deux visions de la fraction $5/3$.

Exemple : deux représentations d'une fraction, abscisse sur un axe et commensuration.



Commensuration : $3S = 5U$.

Commentaires : Pour placer l'abscisse $x = 5/3$, on a commencé par subdiviser en trois le segment $[0, 1]$ (ce qui a conduit au point d'abscisse $1/3$), puis on a considéré cinq reports de ce tiers. Pour les segments S et U (que l'on se permet ici de confondre avec leur longueur), on obtient $S = \frac{5}{3}U$ lorsque des reports de S et de U conduisent à la coïncidence $3S = 5U$; on est alors assuré qu'il existe une même unité (dont U est le triple et S le quintuple) *mesurant* à la fois S et U, d'où le nom de commensuration.

Reports d'une unité de longueur. Examinons à présent la situation des reports d'une unité U pour mesurer une longueur donnée S sans pouvoir effectuer de reports de cette longueur S elle-même. La pratique impose souvent une telle contrainte ; elle s'imposait par exemple à Eratosthène (3^{ème} siècle av. J-C) pour la mesure de distance entre Alexandrie et Syène (aujourd'hui Assouan) qui lui avait permis d'évaluer la longueur du méridien terrestre. Pour mesurer une longueur par reports à l'aide d'une unité matérialisée, il n'y a aucun problème lorsque l'on tombe juste. Si je dispose par exemple d'une perche de quatre mètres et

que j'obtiens une distance en exactement 12 reports de cette perche, c'est que cette distance est de quarante-huit mètres. Mais une telle coïncidence n'est nullement la situation générale. La situation générale correspond à la possibilité d'effectuer un certain nombre de reports et de tomber alors sur une longueur restante plus petite que l'unité utilisée. Il convient dans un tel cas de déterminer quelle fraction de l'unité de longueur ce reste représente.

Ce sont les mathématiciens grecs qui ont procédé à l'étude théorique d'une telle situation. Se demander quelle fraction de l'unité un reste peut valoir, c'est se demander combien de fois il peut tenir dans l'unité. Par exemple, si quatre reports du reste conduisent exactement à la longueur unité, c'est que ce reste vaut $1/4$ de l'unité.

Exercice 1 : Opérer comme il vient d'être indiqué, pour les segments représentés ci-après.

Segment S à mesurer : _____

Segment U représentant l'unité de longueur choisie : _____

Quelle longueur a S en fonction de U ?

Dans le cas général, le reste permettra-t-il à son tour d'atteindre exactement l'unité par une succession de reports ? Ce n'est pas davantage acquis que le fait d'atteindre exactement une distance donnée par une succession de reports de l'unité. Est-on alors dans une impasse ? L'idée des reports du reste constitue cependant une avancée intéressante, car si ces reports produisent à leur tour un reste, on peut envisager de reproduire cette même démarche pour ce nouveau reste, qui est forcément plus petit que le premier. Considérons un nouvel exemple, avant d'envisager la situation générale.

Exercice 2 : Supposons que pour mesurer un segment S donné, en se référant à une unité U, on ait pu faire six reports successifs de U et qu'il reste alors un segment R1 plus petit que U. Supposons que ce reste R1 puisse être reporté trois fois dans U et qu'il reste alors un segment R2, plus petit que R1. Supposons enfin que R2 puisse se reporter exactement cinq fois dans R1. Quelle longueur aura S en fonction de U ?

[Réponse : Par commodité, confondons les désignations des segments et de leurs longueurs. La première hypothèse permet d'écrire $S = 6U + R1$, avec $R1 < U$. La seconde hypothèse, $U = 3R1 + R2$, avec $R2 < R1$. Enfin la troisième hypothèse s'écrit $R1 = 5R2$.

Ainsi $R2 = (1/5)R1$. On en déduit, par report dans la deuxième égalité, que $U = (3 + (1/5))R1$, d'où $R1 = (1/(3 + (1/5)))U$. Par report dans la première, il en résulte finalement que $S = (6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}})U$.

Certes, on peut simplifier sous forme d'une unique fraction : $S = (101/16)U$, mais on peut en rester à l'écriture précédente, qui a l'avantage de mettre les données en évidence.]

2. Théorie et pratique de l'anthyphérèse

Les Grecs voyaient les reports successifs d'un segment unité dans un autre, celui à mesurer, comme autant de soustractions : on peut en effet considérer que l'on retranche au segment à mesurer des morceaux successifs de longueurs toutes égales à celle du segment unité. A son tour, le reste obtenu, s'il n'est pas nul, conduit à de telles soustractions. Et ainsi de suite. Un verbe grec : ἀνθυφάρεω (anthyphéréo, ôter à son tour), désigne précisément une telle suite d'opérations. D'où le nom d'anthyphérèse que l'on donne à l'algorithme que nous avons vu, consistant à effectuer des reports d'un segment dans un second jusqu'à aboutir à un reste, plus petit que le premier segment, que l'on reporte à son tour dans le premier segment jusqu'à aboutir de nouveau à un reste, et ainsi de suite.

Reprenons les notations déjà introduites : U le segment unité, S le segment (ou sa longueur) à mesurer, R1, R2, etc. les restes successifs obtenus. Supposons que l'on aboutisse à un reste nul au bout de (n+1) étapes de l'algorithme. Nous pouvons alors écrire la suite d'expressions :

$$\begin{aligned} S &= a_0 U + R_1, \text{ avec } R_1 < U, \\ U &= a_1 R_1 + R_2, \text{ avec } R_2 < R_1, \\ R_1 &= a_2 R_2 + R_3, \text{ avec } R_3 < R_2, \\ &\dots \\ R_{n-2} &= a_{n-1} R_{n-1} + R(n), \text{ avec } R(n) < R_{n-1}, \\ R_{n-1} &= a_n R(n). \end{aligned}$$

Dans ces expressions, les a_i ($i=0, 1, \dots, n$) désignent les nombres entiers de reports qu'il est possible d'effectuer aux diverses étapes de l'algorithme. Les inégalités entre les restes permettent d'affirmer que tous ces entiers a_i sont strictement positifs sauf peut-être a_0 , qui est égal à 0 si S est plus petit que l'unité U

Formellement, l'algorithme qui vient d'être présenté est exactement celui d'Euclide. Mais il porte sur des nombres réels (longueurs de segments) au lieu de porter sur des entiers. L'anthypèrese peut alors se poursuivre indéfiniment, comme nous allons le voir au paragraphe 3.

Le résultat final obtenu dans ces conditions est :

$$S = \left(a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} \right) U$$

Pour démontrer ce résultat, on "remonte" les égalités de l'algorithme depuis la dernière, qui permet d'exprimer $R(n)$ en fonction de $R(n-1)$ et ainsi d'éliminer $R(n)$ de l'avant dernière, etc. Faut-il aller jusque là avec des élèves littéraires, ou s'en tenir à des exemples représentatifs, comme celui qui apparaît dans l'exercice 2 précédemment envisagé ?

Signalons que la suite d'expressions (incluant les inégalités) peut même être exploitée pour un cadrage qui est présenté à la fin du thème 3.

3. Une interrogation pour le mathématicien : la commensuration

Dans l'anthypèrese (comme dans l'algorithme d'Euclide), les restes qui apparaissent successivement sont de plus en plus petits. Une question naturelle est alors de savoir si à partir de segments quelconques S et U, on atteindra forcément un reste nul comme c'est le cas dans l'algorithme d'Euclide ou si, au contraire, il n'y a pas d'objection théorique à ce que l'anthypèrese se poursuive indéfiniment.

Un cas particulier fondamental.

Représentons les segments U et S sur une même demi-droite d'origine A, par les deux segments respectifs [A, B] et [A, C].



Pour l'anthypèrese, nous avons à reporter [A, B] dans [A, C]. Supposons, comme c'est le cas sur la figure, qu'il n'y ait pas la possibilité d'effectuer plusieurs reports, c'est à dire que $BC < AB < AC$. Ainsi, le segment [B, C] apparaît comme le premier reste.

A présent, s'il se trouve que $[B, C]$ soit à $[A, B]$ comme $[A, B]$ est à $[A, C]$, c'est à dire $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AC}$, nous sommes sûrs que l'anthyphérèse se répètera à l'identique indéfiniment : les termes a_i de l'anthyphérèse seront alors tous égaux à 1, ad infinitum.

Or cette disposition existe bel et bien. Une situation de géométrie plane permet de la faire apparaître (voir thème 2). Nous pouvons ici procéder à l'étude analytique sur la droite : On prend le point A comme origine, on affecte au point B l'abscisse 1 et au point C une abscisse x à déterminer. La condition qui a été exprimée sur les rapports s'écrit :

$$x - 1 = 1/x, \text{ avec } x > 1.$$

En simplifiant l'égalité, on obtient :

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

ou encore :

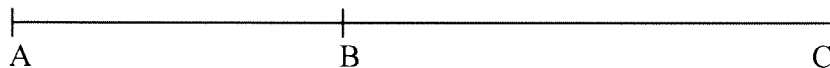
$$(x - 1/2)^2 - 5/4 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont ainsi :

$$x = (1 + \sqrt{5})/2 \text{ et } x = (1 - \sqrt{5})/2.$$

Comme la seconde ne vérifie pas l'inégalité $x > 1$, la première solution est la seule qui convient. Les propriétés de ce nombre sont telles qu'on lui a même attribué un nom, celui de "nombre d'or" (voir thème 3).

Exercice : Trois points d'une droite graduée sont définis par leur abscisse : A(0), B(1) et C($1 + \sqrt{2}$). (La figure illustre approximativement la situation des points A, B et C.)



Déterminer ce que fournit l'anthyphérèse pour $U = [A, B]$ et $S = [A, C]$.

[Réponse : Après deux reports de $[A, B]$, on obtient un reste qui a pour longueur $\sqrt{2} - 1 < 1$. Et de l'identité $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$, il résulte que $\sqrt{2} - 1 = 1/(1 + \sqrt{2})$. Autrement dit, le rapport du reste à l'unité U est égal au rapport de U à S . Par conséquent, l'anthyphérèse produit ici une suite illimitée de termes tous égaux à 2. En particulier, les deux segments considérés sont incommensurables. On notera au passage que nous avons là une démonstration de l'irrationalité de la racine carrée de 2, que l'on trouve sous une autre forme en page 20].

Remarque : La figure introductive justifie le placement sur la droite graduée des racines carrées ainsi que des nombres qui en résultent par des opérations arithmétiques.

Conclusion : Il est ainsi apparu aux mathématiciens grecs que, pour une paire de segments, l'anthyphérèse peut conduire à deux types de situations.

- Soit l'algorithme aboutit à un reste nul et on dit alors que les segments sont *commensurables*. Cette désignation vient de ce que les deux segments considérés sont dans ce cas deux multiples entiers d'un même segment, comme cela a été indiqué dans l'exemple de la représentation de $\frac{5}{3}$, et ce segment les *mesure* donc tous deux.
- Soit l'anthyphérèse se poursuit indéfiniment et on dit alors que les segments sont *incommensurables*. Les situations de répétition indéfinie des mêmes termes (périodicité, dont le cas particulier et l'exercice ont fourni deux exemples simples) sont des situations d'incommensurabilité, mais ce ne sont pas les seules. Par exemple, l'anthyphérèse d'un segment de longueur π par rapport à l'unité conduit à une suite de termes dépourvue de toute régularité. Mais cela, les mathématiciens grecs ne le savaient pas encore ; il a fallu attendre d'abord l'année 1761 pour que J-H. Lambert établisse l'irrationalité de π , autrement dit l'incommensurabilité de la circonférence et du diamètre d'un cercle (l'anthyphérèse se poursuit indéfiniment), puis 1882 pour que A. Lindemann prouve la transcendance de π (ainsi π , n'étant solution d'aucune équation algébrique, n'est en

particulier pas solution d'une équation du second degré et il n'y a donc pas périodicité des termes successifs obtenus par anthypérèse).

Sujets de réflexion : Ces études ont dégagé des notions tout à fait particulières aux mathématiques. C'est ainsi le cas pour la commensurabilité de segments : quelle que soit la précision d'une réalisation, cela ne peut pas avoir de sens que de se demander si des segments matérialisés sont commensurables. C'est aussi le cas pour l'infini rencontré ici ; cet infini "achevé" est propre aux mathématiques et se distingue par exemple de celui de la philosophie.

Pour enrichir sa culture. Une *Librairie des Terres Australes et Boréales* se trouve sur le site web de l'association Amicale des Missions Australes et Polaires Françaises (AMAPOF) <http://www.amapof.com>. Dans la sélection des ouvrages indiquée par cette Librairie se trouvent notamment deux livres, ainsi introduits :

« Entre Newton et Descartes, le Siècle des Lumières voulut choisir. Newton, c'était la gravitation universelle et aussi des principes qui prétendaient que la Terre était aplatie aux pôles et renflée à l'équateur, une Terre en forme de mandarine... Mais Newton était anglais, donc un tantinet hérétique et contradictoire de surcroît des idées de notre Descartes national. Il fut donc décidé de mesurer qui avait raison du physicien anglican ou du mathématicien catholique. Pour une autre raison aussi : le commerce et la guerre réclamaient que les marins disposent de cartes exactes. Deux expéditions quittèrent donc la France pour mesurer la longueur d'arc de méridien. L'une en 1735 vers le Pérou pour atteindre l'équateur (Gouin, La Condamine, Bouguer). L'autre en 1736 pour la Laponie (Maupertuis) pour réaliser la même opération près du cercle polaire. »

La première expédition est relatée dans l'ouvrage de Florence TRYSTRAM, *Le Procès des Etoiles*, Petite Bibliothèque PAYOT, réédition 1993, et la seconde dans celui de l'abbé OUTHIERS, présenté par A. Balland, *La Terre Mandarine (Journal d'un voyage au Nord pour déterminer la figure de la Terre)*, SEUIL, 1994.

Le livre de Florence Trystram expose en détails comment on procédait pour mesurer des longueurs avec précision, simplement avec des perches mises bout à bout, mais chacune parfaitement dirigée nord-sud et calée pour être horizontale. Relevons que sur une rivière gelée de Laponie coulant nord-sud, cela fut plus simple qu'au travers de la cordillère des Andes.

Rappelons que la mise en place du système métrique, mondialement répandu aujourd'hui (à l'exception près d'irréductibles attardés, tels les habitants des USA, alors pourtant que le dollar a joué dans le monde un rôle pilote en tant que monnaie décimale), a bénéficié de tous ces travaux. Une lecture instructive pour un éclairage d'ensemble est celle du livre de Denis GUEDJ, *Le Mètre du Monde*, SEUIL, 2000, consacré à l'instauration du système métrique, avec toutes les opérations qu'elle supposait.

THEME 2 : CE QUE LA GEOMETRIE PEUT NOUS APPRENDRE SUR LES NOMBRES

Le mathématicien allemand Kronecker répétait volontiers que « *Dieu a créé le nombre entier, mais tout le reste est l'œuvre de l'homme* ». Nous avons en effet très tôt une intuition du nombre entier qui se traduit par le fait qu'un enfant sait compter des objets dès le plus jeune âge. Mais les mathématiciens ont peu à peu élargi et enrichi le concept de nombre qui aujourd'hui se présente avec de multiples qualificatifs, souvent regroupés d'ailleurs en couples opposés :

- Nombres rationnels et irrationnels
- Nombres réels et imaginaires
- Nombres positifs et négatifs
- Nombres algébriques et transcendants

sans compter des qualificatifs plus anciens devenus obsolètes comme nombres rompus, nombres sourds ou nombres impossibles.

L'enseignement a d'autant plus de mal à faire saisir ces classifications aux élèves d'aujourd'hui que le nombre se présente à eux concrètement le plus souvent sous la forme d'un nombre décimal c'est à dire d'une suite finie de chiffres écrits sur un écran de calculatrice ou d'ordinateur. C'est pourquoi il peut être opportun de les confronter à des questions du type :

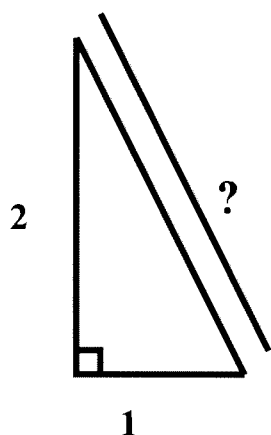
- Qu'est ce qu'un nombre ?
- Quelle est la réalité qui se cache derrière l'abstraction portée par un nombre ?

Cela est vrai particulièrement pour des élèves de L destinés à réfléchir davantage sur la nature des concepts et leur élaboration. « *Cependant, précisent les objectifs généraux du programme de l'option facultative de mathématiques en série L, la culture mathématique proposée ne doit pas être purement spéculative : il importe qu'elle soit fondée sur une réelle pratique du raisonnement et de la démonstration et sur l'expérience de la confiance liée à la maîtrise de certaines techniques. Bien que fondamentale dans l'activité mathématique, la formalisation ne devra pas constituer un obstacle pour les élèves : une large place sera donc laissée à l'intuition et aux réalisations concrètes variées (tracés, calculs sur tableurs, ...) ; en particulier, le programme demande que les études numériques soient systématiquement corrélées à une vision géométrique ou graphique* »

La géométrie, en effet, est particulièrement apte à donner une intuition, un sens et une représentation des nombres irrationnels : sans elle on n'aura jamais qu'une approximation décimale sur un écran, ou un symbole graphique tel que $\sqrt{\quad}$ ¹ sans signification explicite. Pour donner un sens à ces nombres les géomètres anciens passaient par la géométrie.

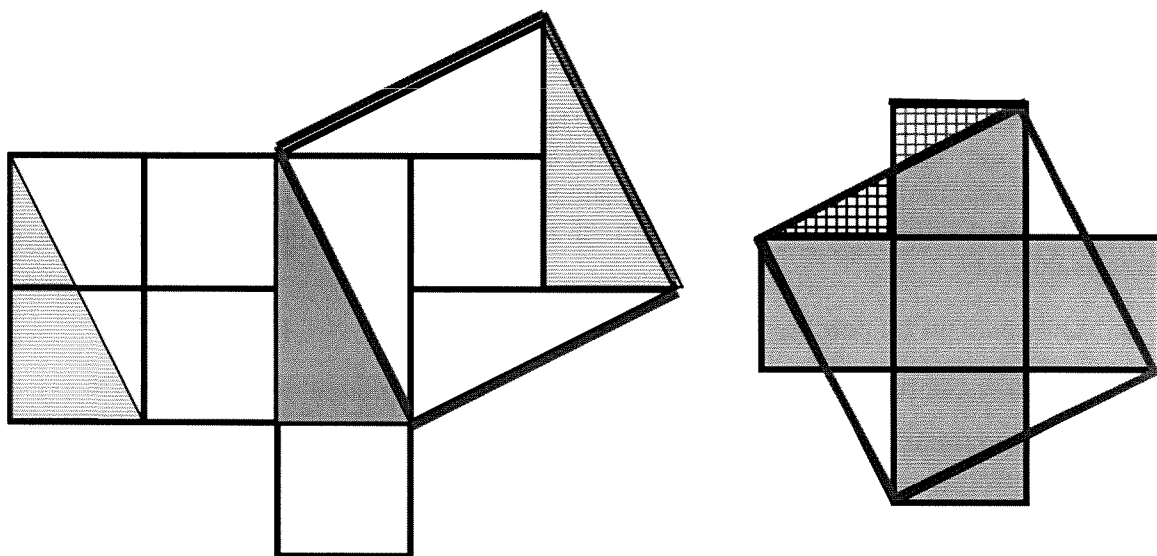
¹ Voir en note page 30, l'historique de cette notation.

Prenons par exemple un triangle rectangle construit à partir de longueurs mesurant 1 et 2 :



Que dire de la longueur du troisième côté que l'on appelle hypoténuse ? Euclide nous apprend qu'il faut passer par le plan, pour avoir des informations sur la mesure linéaire. C'est l'étude de la figure géométrique plane, de dimension deux, qui nous informe sur la mesure des longueurs (dimension un) !

Sur les côtés de l'angle droit du triangle rectangle je peux placer respectivement 4 et 1 carrés unités. Ces cinq carrés regroupés peuvent se placer autrement. L'aire totale de ces cinq carrés unités est aussi celle d'un unique carré ayant pour côté l'hypoténuse du triangle. Ce qui nous permet d'affirmer que cette hypoténuse a pour longueur exactement la longueur du côté d'un carré mesurant 5 carrés unités. D'où l'idée, pour mesurer une telle longueur, d'introduire un nombre dont le carré est 5 et que l'on écrira $\sqrt{5}$.



Plus généralement, par le théorème de Pythagore l'élève peut comprendre qu'il existe des longueurs comme $\sqrt{n}$ mesurant le côté d'un carré construit à l'aide de n carrés unités.

L'exposé qui suit tente de construire une progression prenant en charge l'alinéa « **Nombres constructibles ; commensurabilité et algorithme d'Euclide** » du paragraphe « **Géométrie euclidienne** ». Nous y avons simplement inversé l'ordre d'exposition tel qu'il est présenté dans le programme officiel², pour relier la problématique des nombres constructibles aux autres rubriques, de manière à retrouver l'origine historique de ces notions, et la raison de leur introduction. Nous partirons de l'algorithme d'Euclide, mais introduit à partir d'une activité géométrique qui lui donne sens et raison d'être : le pavage d'un rectangle au moyen de dalles carrées.

² Voir en annexe l'extrait concerné de ce programme.

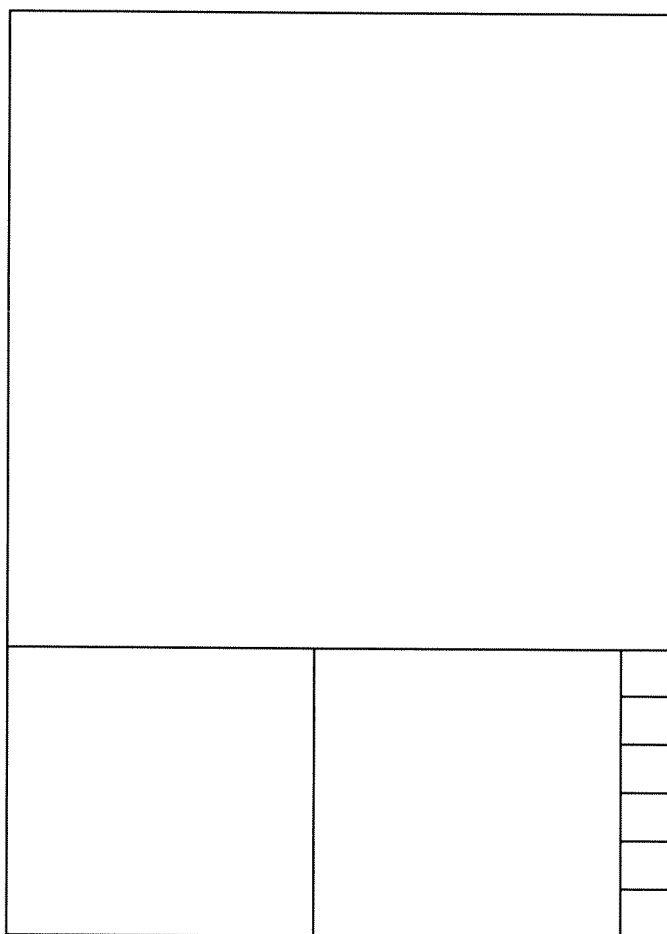
1. Pavage d'un rectangle avec des dalles carrées

1.1. Exemple 1

Considérons un rectangle dont les dimensions par rapport à une unité fixée sont données par deux entiers, par exemple 133 et 91. La figure indique par elle même la manière de réaliser le pavage, lorsque celui-ci n'a d'autre contrainte que celle de loger dans chaque rectangle le carré ou les carrés les plus grands possibles.

Je peux inscrire un carré de côté 91 et il reste un rectangle 91×42 (car $133 = 91 + 42$).

Dans ce rectangle je peux inscrire deux carrés de côté 42, qui laissent un rectangle 42×7 (car $91 = 42 \times 2 + 7$). Enfin dans le dernier rectangle je peux inscrire 6 carrés de côté 7 (puisque $42 = 7 \times 6$).



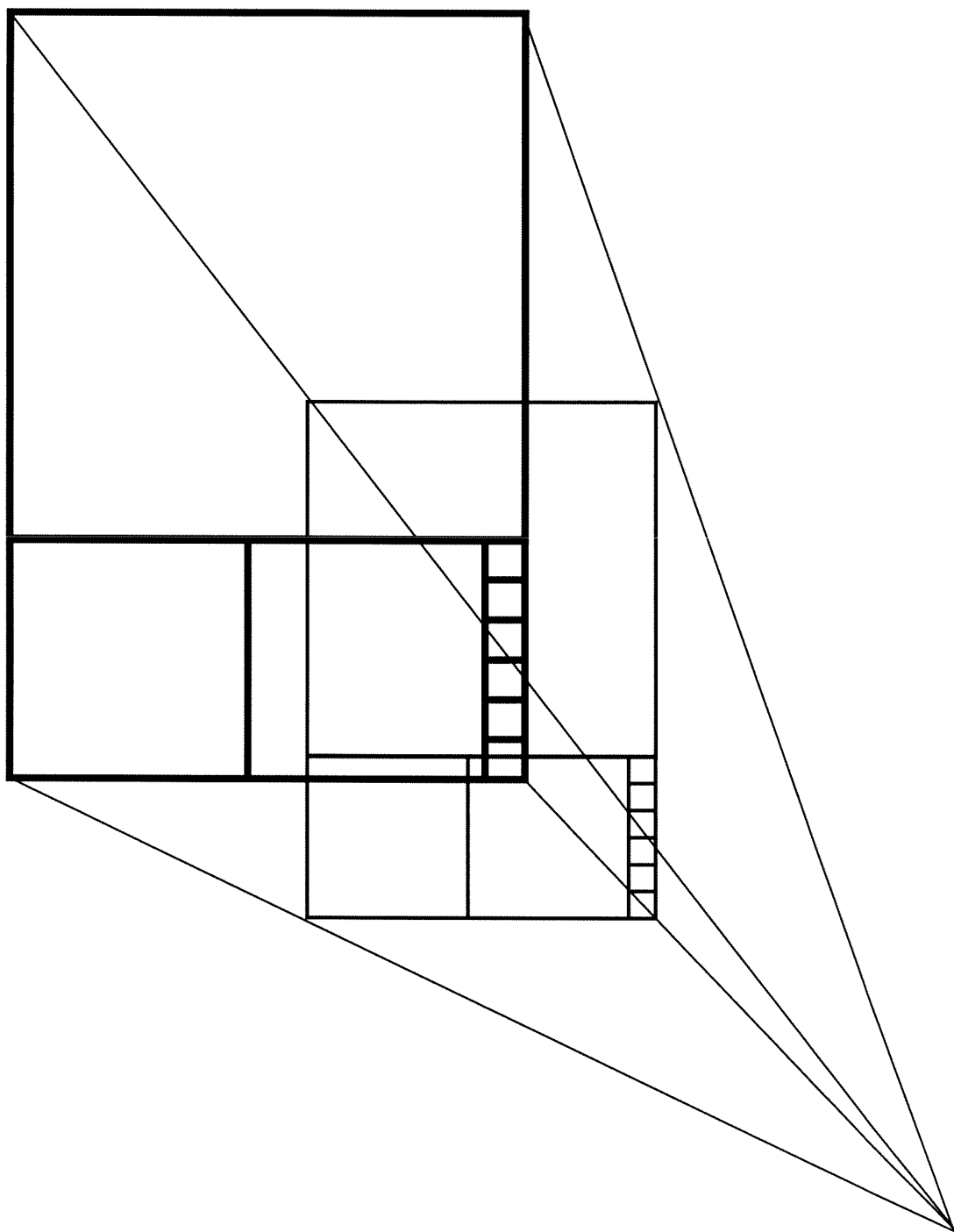
Récapitulons : $133 = 91 + 42$; $91 = 42 \times 2 + 7$; $42 = 7 \times 6$.

C'est exactement l'algorithme d'Euclide qui nous fournit :

- 1) le PGCD des nombres 133 et 91 à savoir 7, avec les relations : $133 = 19 \times 7$ et $91 = 13 \times 7$;
- 2) un dallage uniforme avec des carrés tous égaux, les plus grands possibles, donc de côté 7 , au nombre de $19 \times 13 = 247$;
- 3) le rapport des côtés du rectangle initial : $\frac{19}{13}$.

Ce rapport donne en quelque sorte la **forme** du rectangle indépendamment des unités de mesure : pour les rectangles 133×91 et 19×13 ou $19u \times 13u$, il existe toujours une

homothétie transformant l'un en l'autre si les côtés sont pris respectivement parallèles. La figure ci dessous met en évidence cette permanence de la forme et l'homothétie qui la sous-tend.



1.2. Exemple 2 : Plus généralement

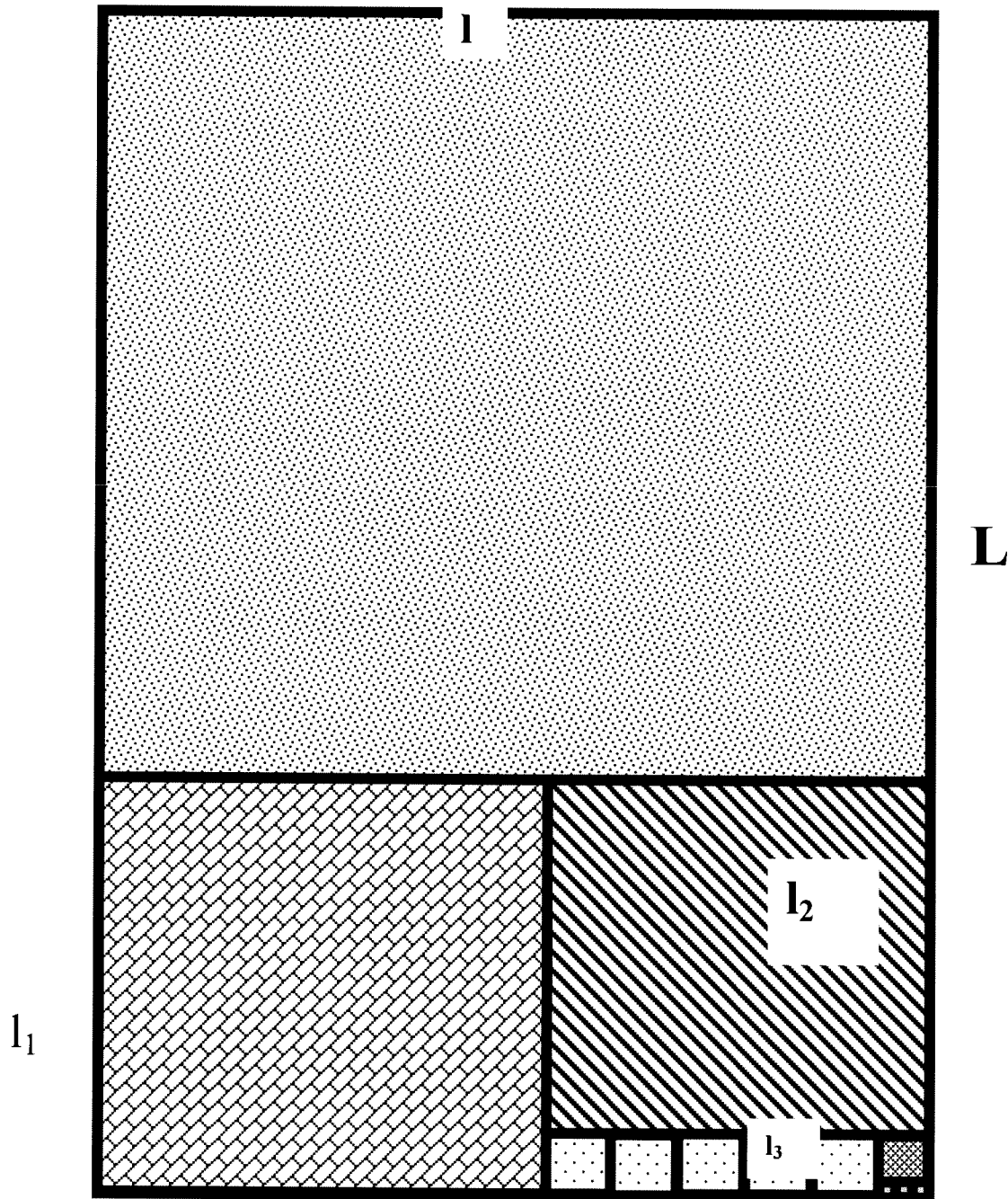
Je dessine un rectangle quelconque dont je ne connais pas précisément les dimensions L et l . Puis-je néanmoins dire quelque chose sur le rapport de L à l ? Utilisons pour ce rectangle le même procédé que dans l'exemple ci-dessus, sur le rectangle ci-dessous. J'obtiens ainsi des carrés successifs de côtés l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 vérifiant les relations :

$$L = l + l_1 \quad ; \quad l = l_1 + l_2 \quad ; \quad l_1 = l_2 + l_3 \quad ; \quad l_2 = 5 l_3 + l_4 \quad ; \quad l_3 = l_4 + l_5 \quad ; \quad l_4 = 3 l_5$$

qui me donnent, en remontant les indices

$$l_4 = 3 l_5 ; l_3 = 4 l_5 ; l_2 = 23 l_5 ; l_1 = 27 l_5 ; l = 50 l_5 ; L = 77 l_5.$$

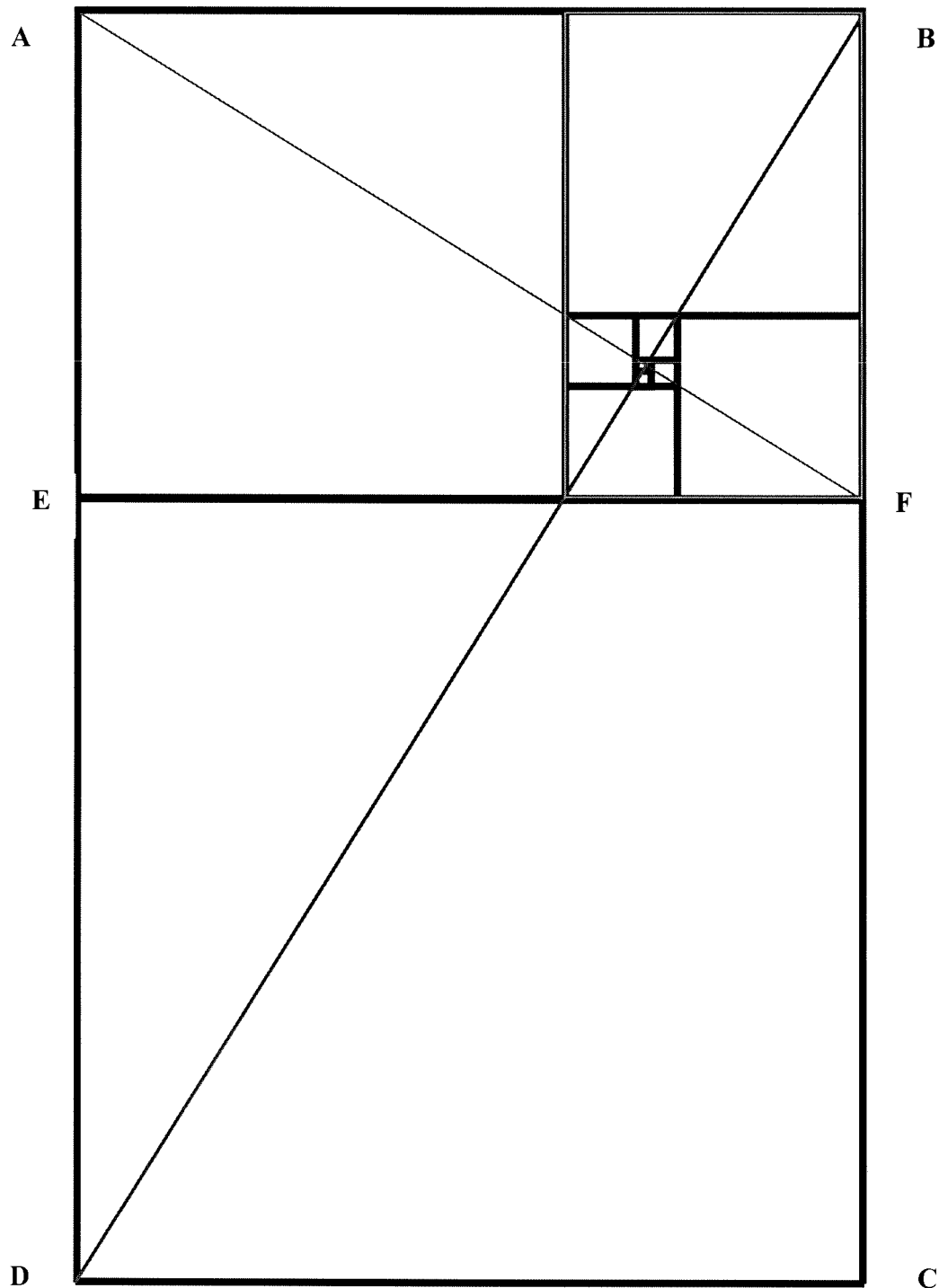
J'obtiens ainsi finalement le rapport $\frac{L}{l} = \frac{77}{50} = 1,54$.



Conclusion : les côtés de ce rectangle sont comme 77 à 50 et j'ai pu trouver ce que l'on appelle une mesure commune à L et l, à savoir la longueur l_5 . Ici nous avons eu en quelque sorte de la chance parce que le processus s'est terminé au bout de cinq étapes mais on imagine très bien qu'il pourrait être beaucoup plus long, voire qu'il ne se termine jamais. En fait, tant que je me fie à la simple observation, il arrivera toujours un moment où le pouvoir de résolution de mon œil sera inférieur à l'épaisseur du trait et où le processus sera terminé.

1.3. Exemple 3

Il en va tout autrement si, au-delà de la simple observation et de la mesure directe, j'introduis un raisonnement sur **un objet pensé, idéal**, donné non plus d'abord par une figure mais par une propriété abstraite, tel l'exemple suivant : le rectangle ABCD considéré a la propriété suivante : si j'enlève le plus grand carré possible, EFCD, il reste un rectangle ABFE semblable (c'est-à-dire gardant le même rapport des côtés), sur lequel je peux recommencer la même opération, mettant ainsi en évidence un rectangle toujours semblable au rectangle initial, mais de plus en plus petit.



Un tel rectangle se rencontre chez Euclide au Livre II, proposition 11, sous la forme d'un problème élémentaire énoncé ainsi :

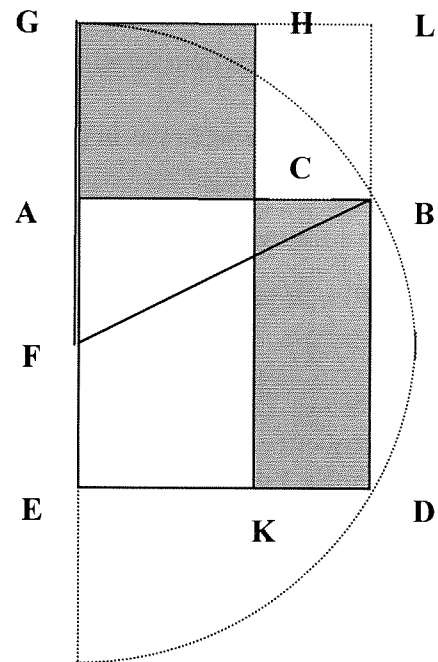
Proposition (II, 11) : couper une droite donnée de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

En termes modernes : Couper un segment $[AB]$ en un point C tel que $AB \cdot BC = AC^2$

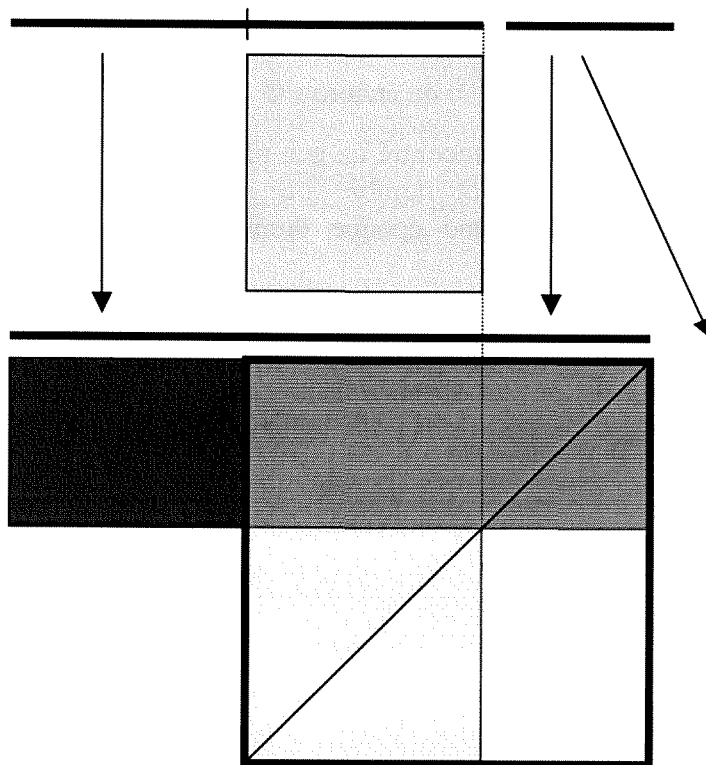
Construisons le carré $ABDE$ et soit F le milieu de $[AE]$.

Construisons G tel que $FB = FG$ sur le prolongement de (EA) et complétons le carré $AGHC$. Alors C est le point cherché.

En effet, soit K l'intersection de (HC) avec (ED) ; par la proposition (II,6), (voir ci-dessous), le rectangle $EGHK$, pris avec le carré sur $[AF]$ est égal au carré sur $[FG]$, ou au carré sur $[FB]$. Mais le carré sur $[FB]$ est égal à la somme des carrés sur $[AB]$ et $[AF]$ par la proposition (I, 47) (C'est le théorème de Pythagore) ; Donc le rectangle $EGHK$ est égal au carré sur $[AB]$; en soustrayant le rectangle $ACKE$ à chacun, nous obtenons l'égalité à démontrer : le carré sur $[AC]$ est égal au rectangle $BCKD$.



Il nous faut encore démontrer la proposition (II, 6) : Si une ligne droite est coupée en deux parties égales et qu'une certaine droite lui soit ajoutée en alignement, le rectangle contenu par la droite entière plus la droite ajoutée et la droite ajoutée, pris avec le carré sur sa moitié, est égal au carré sur la droite composée de sa moitié et la droite ajoutée.



En termes algébriques, cela correspond à l'identité : $(a + b)b + (a/2)^2 = (a/2 + b)^2$.

La figure réalisant la proposition (II, 11) met alors bien en évidence un rectangle AEKC égal au rectangle AGLB dans lequel, en enlevant le plus grand carré AGHC, il reste un rectangle HCBL semblable à AGBL, puisque : $AB \cdot BC = AC^2$ ou $BD \cdot BC = AC \cdot HC$, ou encore : $BC/HC = AC/BD$.

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème numériquement et poser

$$AB = 1 ; AC = x ; \text{ alors } BC = 1 - x .$$

La propriété énoncée par la proposition (II, 11) se traduit par l'équation :

$$x^2 = 1 - x , \text{ ou encore : } x^2 + x - 1 = 0 ,$$

dont la solution positive est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Remarquons que cette construction nous met en présence d'un carré inscrit dans un demi-cercle, figure que nous retrouvons dans l'un des autres thèmes de cette étude : celui consacré à une peinture de Raphaël « l'Ecole d'Athènes ».

Revenons au rectangle ABCD qu'il faut paver avec des carrés et introduit au début du paragraphe 1.3.. Sur la figure, la permanence de la forme et la disposition alternativement «verticale» et «horizontale» du rectangle est matérialisée par les diagonales [DB] et [AF]. (On pourra vérifier que leur intersection donne le centre de la similitude directe qui fait passer d'un rectangle au rectangle suivant).

Désignons par L et l les côtés du rectangle ABCD, et par l_k le côté du $k^{\text{ème}}$ carré (avec $l = l_1 = L - l_2$). L'hypothèse faite sur les rectangles successifs, se traduit par les rapports :

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{l_2} = \frac{1}{L-l} \text{ d'où l'on tire la relation : } L^2 = l \times L + l^2 .$$

Donc si je pose $\Phi = \frac{L}{l}$, Φ vérifie l'équation

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \text{ ou encore : } \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} .$$

Φ n'est rien d'autre que l'inverse du x rencontré un peu plus haut. C'est ce que l'on appelle la section dorée, ou divine proportion, ou nombre d'or, utilisé beaucoup en architecture, peinture et esthétique en général, à une époque donnée (voir le texte sur « l'Ecole d'Athènes » page 46).

1.4. Exemple 4

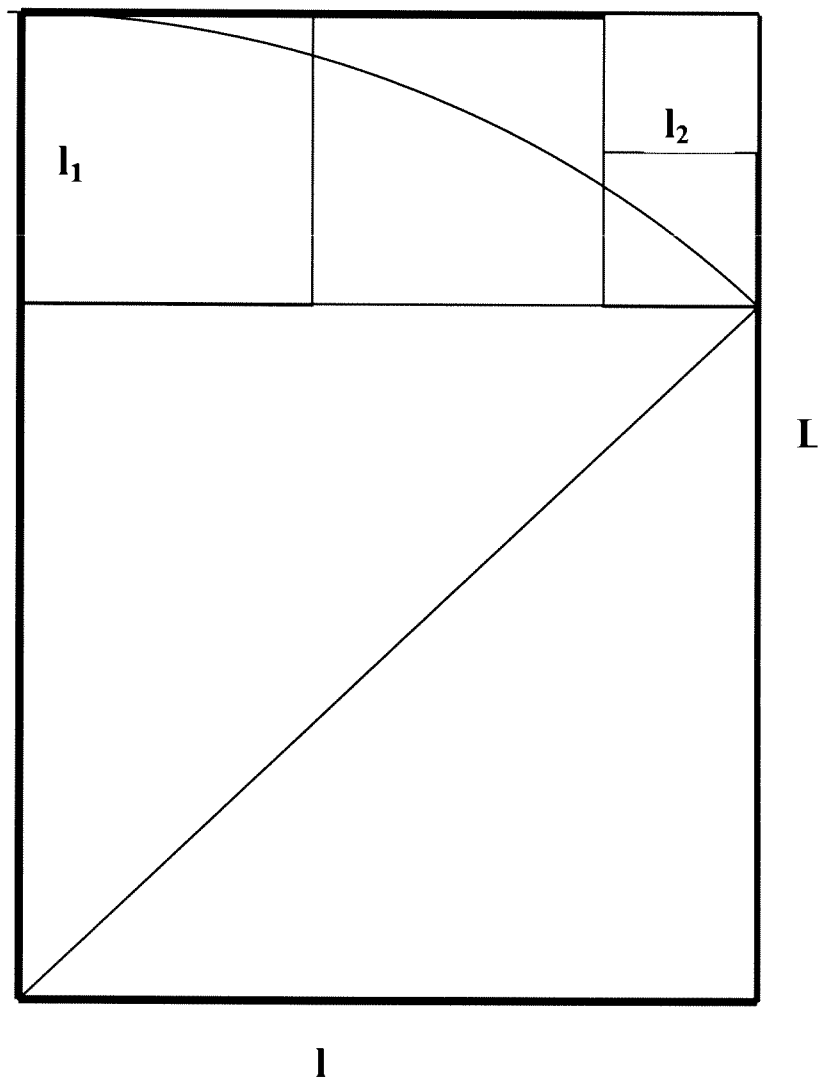
Un autre exemple nous est donné par un rectangle qui a pour côtés respectivement le côté d'un carré et sa diagonale. En restant sur une mesure empirique des côtés des carrés successifs (par exemple avec une règle graduée), j'arrive à la situation suivante :

$$L = l + l_1 ; l = 2 l_1 + l_2 ; l_1 = 2 l_2 ;$$

et en remontant les indices :

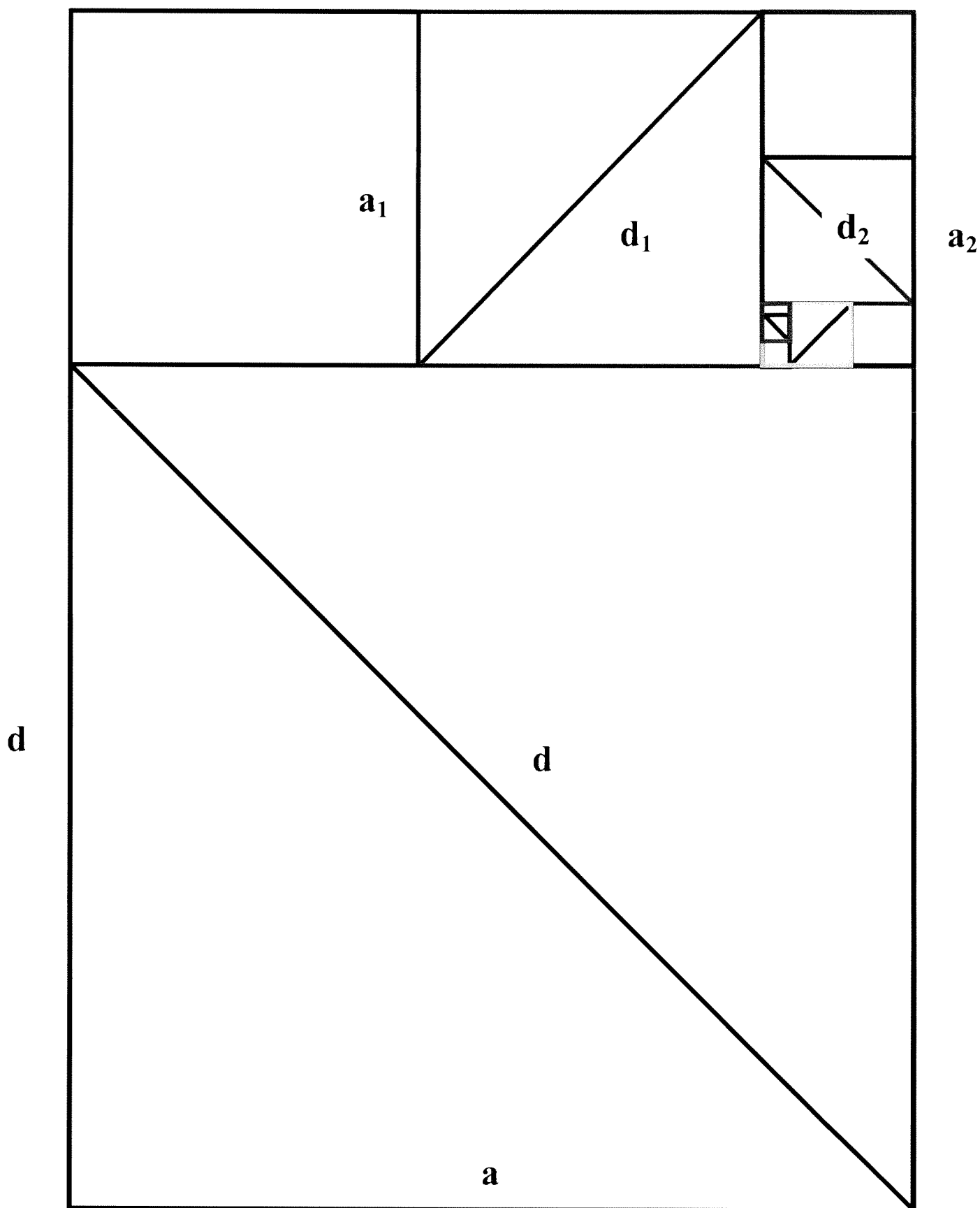
$$l = 5 l_2 ; L = 7 l_2$$

ce qui me donne le rapport $\frac{L}{l} = \frac{7}{5} \cong 1,4$.



Rappelons que ce type de rectangle est utilisé comme format papier A1, A2, A3, A4, A5, dont la propriété est que, plié en deux selon l'axe de symétrie parallèle au petit côté, on obtient deux rectangles de mêmes proportions que le rectangle initial.

Par contre, si j'introduis dans la construction de mes différents carrés en même temps la considération du rapport des côtés du rectangle je constate qu'à chaque étape il y a « conservation de la forme du rectangle » et que le processus n'a aucune raison de s'arrêter.



En effet, si $a, a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$ et $d, d_1, d_2, d_3, \text{etc.}$ désignent les côtés (respectivement les diagonales) des carrés successifs, et en tenant compte des relations : $d^2 = 2a^2$; $a_1 = d - a$; $d_1 = a - a_1$, etc.

on a les rapports : $\frac{2a}{d} = \frac{\frac{d}{a} = \frac{2a-d}{d-a}}{\frac{d_1}{a_1} = \frac{2a_1-d_1}{d_1-a_1}} = \frac{\frac{d_2}{a_2} = \frac{2a_2-d_2}{d_2-a_2}}{\frac{d_3}{a_3}} = \frac{d_3}{a_3} \text{ etc...}$

Je pourrai inscrire indéfiniment des carrés certes de plus en plus petits, mais sans arriver jamais à épuiser le dernier rectangle restant par ces carrés.

1.5. Conclusion de l'étude de ces différents exemples

- ou bien le processus de pavage du rectangle s'arrête ou bout d'un nombre fini d'opérations. On pourra paver entièrement le rectangle au moyen de carrés tous de même dimension. Le côté commun de tous ces carrés est une mesure commune aux deux côtés du rectangle. On dit que **ces deux côtés sont commensurables**.
- ou bien ce processus ne s'arrête pas, il n'y a pas de mesure commune et **les deux côtés sont dites incommensurables**.

Ces définitions se retrouvent exactement dans Euclide :

Euclide X 2

Si, de deux grandeurs inégales {proposées} la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le [reste] précédent, les grandeurs seront incommensurables.

Euclide X 3

Etant données deux grandeurs commensurables, trouver leur plus grande commune mesure.

Le parallélisme est flagrant entre ces deux propositions du livre X et les propositions VII 1 et 2 du livre VII concernant les nombres³ :

Euclide VII 1

Deux nombres inégaux étant proposés et le plus petit étant retranché du plus grand de façon réitérée et en alternance, si le reste ne mesure jamais [le reste] précédent jusqu'à ce qu'il reste une unité, les nombres initiaux seront premiers entre eux.

Euclide VII 2

Etant donnés deux nombres non premiers entre eux, trouver leur plus grande commune mesure.

C'est pourquoi la méthode proposée n'est évidemment rien d'autre que ce qu'aujourd'hui nous appelons **algorithme d'Euclide**⁴, à cette nuance près qu'ici il est appliqué aux grandeurs au lieu de l'être aux nombres.

Nous la présentons sous la forme modernisée suivante :

Soient G et g les deux grandeurs telles que $G > g$.

$$\begin{aligned} G &= gq_1 + R_1 && \text{avec } q_1 \text{ nombre entier et } R_1 \text{ grandeur, } R_1 < g ; \\ g &= R_1q_2 + R_2 && \text{avec } q_2 \text{ nombre entier et } R_2 \text{ grandeur, } R_2 < R_1 ; \\ &\dots\dots\dots \\ R_{n-2} &= R_{n-1}q_n + R_n && \text{avec } q_n \text{ nombre entier et } R_n < R_{n-1}. \end{aligned}$$

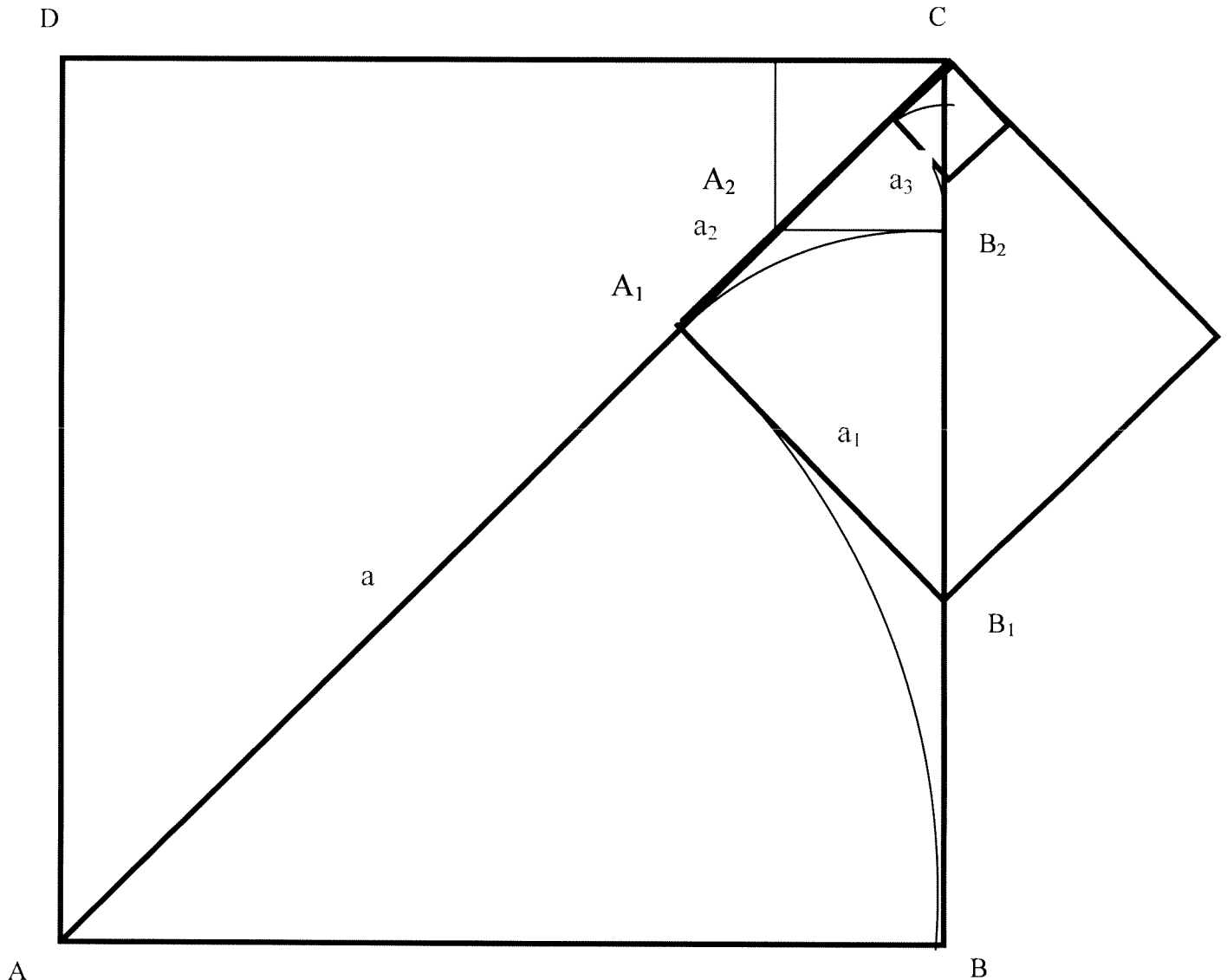
On a : $G > g > R_1 > R_2 > \dots > R_{n-1} > R_n$.

³ *Ibid.* Vol. 2 p. 290 et 291.

⁴ Voir thèmes 1 et 3.

- ou bien il existe n tel que R_n soit nul (et R_{n-1} non nul); alors G et g sont commensurables et R_{n-1} est une commune mesure.
- ou bien un tel n n'existe pas et alors G et g sont incommensurables.

A titre d'exemple « paradigme » voici une autre démonstration de **l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté.**



Soit $AB = AA_1 = a$ et $AC = d$; $A_1C = A_1B_1 = B_1B_2 = a_1$. Puis $A_2B_2 = A_1A_2 = A_2A_3 = a_2$, $B_2B_3 = A_3B_3 = B_3B_4 = a_3$ etc...

On a :

$AC = AB + A_1B_1 = a + a_1$; $AB = 2A_1B_1 + A_2B_2 = 2a_1 + a_2$; $A_1B_1 = 2A_2B_2 + A_3B_3 = 2a_2 + a_3$; $A_2B_2 = 2A_3B_3 + A_4B_4 = 2a_3 + a_4$; $A_3B_3 = 2A_4B_4 + A_5B_5 = 2a_4 + a_5$ et ainsi de suite, indéfiniment.

Cet algorithme, confronté aux propriétés géométriques du carré, met en évidence le caractère infiniment répété des opérations et de ce fait l'impossibilité de trouver un élément ultime qui serait mesure commune. Les deux propositions d'Euclide qui suivent permettent de démontrer dans toute sa rigueur ce caractère infini :

Euclide X, 1 : *Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, et si l'on retranche du reste une partie plus grande que*

sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Euclide X, 2 déjà rappelé ci-dessus.

Supposons qu'il existe une mesure u commune au côté $AB = a$ et à la diagonale $AC = d$; alors :

- 1) elle mesure leur différence a_1 ; donc aussi a_2 , a_3 , etc,
- 2) $d^2 = 2a^2$ donc $a > d/2$: on a enlevé à d une grandeur plus grande que sa moitié.

Mais aussi : $d = a + a_1$ avec $a_1 < a$; $a = 2a_1 + a_2$ avec $a_2 < a_1$; $a_1 = 2a_2 + a_3$ avec $a_2 < a_3$ etc . Donc $a_1 = 2a_2 + a_3 < 3a_2 < 4a_2$; donc $2a_2 > a_1/2$ etc. : on enlève à chaque fois une grandeur plus grande que la moitié de la précédente.

Nous finirons par obtenir un reste a_n inférieur à u d'après Euclide X,1.

Mais ceci est impossible puisque u divise tous les a_i .

Donc il n'existe pas de commune mesure entre d et a .

Maurice Caveing voit dans cet exemple l'origine même de la géométrie grecque, géométrie du raisonnement opposée à la géométrie des arpenteurs et des calculateurs :

Avant la découverte de l'incommensurabilité, la droite reste un objet confondu avec ses modèles physiques : trait graphique, faite d'un toit, etc. Si c'est là ce que l'on entend par « objet de l'intuition » c'est retomber dans l'empirique et il n'y a là rien qui soit de l'ordre d'une notion mathématique. C'est dans l'opération de mesure que s'est dévoilée la vraie nature de l'objet « droite », son essence idéale, plus précisément dans le processus de mesure d'un segment incommensurable à l'unité de mesure : le caractère illimité du processus(...) révèle, au sein même de la finitude du segment, une infinité qui, même conçue comme potentielle, ne peut appartenir qu'à un objet idéal, qui se trouve défini en tant que tel par ce processus même. (Pour un objet empirique, on atteint le seuil de la perception en un nombre fini d'étapes)⁵.

Cette infinité rend manifeste une propriété des grandeurs qui était passée inaperçu jusque là : leur caractère **continu**. C'est parce que les grandeurs sont continues, c'est à dire, selon la définition qu'en donne Aristote : *divisibles en parties toujours divisibles*, que s'introduit un processus algorithmique de division à l'infini, et qui est la marque du caractère incommensurable de certaines grandeurs.

Conséquence : puisque dans le cas commensurable nous savons associer un nombre (rationnel) au rapport des deux longueurs qui mesurent les côtés du rectangle, pourquoi ne pas associer aussi un nombre aux rapports incommensurables ?

Par exemple dans le cas du carré et de sa diagonale on a :

$$d^2 = 2a^2 \text{ ou } \frac{2a}{d} = \frac{d}{a}.$$

Pourquoi ne pas représenter ce rapport par un symbole tel que $\sqrt{2}$, signifiant « le côté d'un carré mesurant deux fois un carré unité » ? Ou plus simplement encore : **nombre dont le carré vaut deux**, puisque l'existence d'un tel nombre peut être postulée par le fait qu'il mesure le côté d'un carré bien défini. Mais comme ce nombre ne peut être écrit par un rapport de deux entiers, nous le qualifierons **d'irrationnel**, du grec αλογον (alogon) qui signifie qu'on ne peut ni l'écrire ni le penser comme un rapport (ratio en latin).

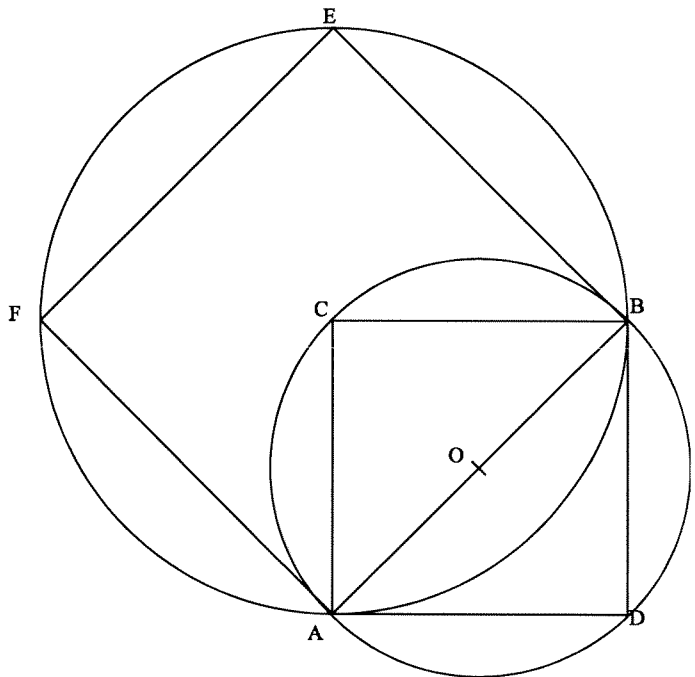
Euclide, dans le Livre X des *Eléments*, introduit une distinction supplémentaire en considérant parmi les nombres irrationnels ceux dont le carré est rationnel, autrement dit les nombres du

⁵ M. Caveing : *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les « Eléments » d'Euclide et la philosophie d'Aristote* in **Penser la science** ; Points Sciences Seuil 1982.

type $\sqrt{n}$, avec n rationnel non carré. Il appelle ces nombres « **rationnels en puissance** ». Pourquoi ? C'est que ces nombres là mesurent des segments faciles à construire au moyen des seuls instruments de la règle et du compas. Ce sont ceux qu'aujourd'hui on appelle **nombres constructibles**.

2. Nombres constructibles

Pour des raisons d'ordre philosophique⁶, les Grecs ont privilégié en géométrie les grandeurs que l'on peut construire à la règle et au compas. De sorte que s'introduit rapidement l'idée que parmi les rapports irrationnels de deux grandeurs certains correspondent à des segments que je peux construire à la règle et au compas et d'autres non. Les premiers seront appelés **nombres constructibles**. Ainsi, je peux construire la diagonale d'un carré et donc « visualiser » le nombre irrationnel $\sqrt{2}$, mais puis-je faire la même chose avec le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre ou le rapport des arêtes de deux cubes dont le volume de l'un est le double de l'autre ? Sur la figure ci-contre, nous pouvons envisager plusieurs rapports de longueurs ou d'aires :



- $\sqrt{2}$: $\frac{AB}{AC}$ est irrationnel, mais rationnel en puissance,
- π ⁷ : $\frac{\text{AireDisqueABEF}}{\text{AireCarréADBC}}$ ou $\frac{\text{circonférenceABEF}}{AE}$ sont-ils rationnels ou irrationnels ?

Archimède montrera que les deux rapports sont égaux, mais sans pouvoir démontrer qu'ils étaient rationnels ou rationnels en puissance. C'est ce qu'on appelle le problème de la quadrature du cercle : construire (à la règle et au compas) le côté d'un carré ayant même aire qu'un disque (cercle) donné. Le mathématicien mulhousien Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) montrera bien plus tard (en 1761) que ce rapport est irrationnel, et en 1882 Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939) démontrera qu'il n'est pas constructible à la règle et au compas⁸.

Un autre grand problème de l'histoire des mathématiques sera de construire à la règle et au compas les polygones réguliers d'un nombre donné de côtés. Jusqu'au XIX^e siècle on ne savait construire que les polygones de 3, 4, 5, 15 côtés et ceux obtenus des précédents en doublant le nombre de leurs côtés.

Toutes ces difficultés à prouver le caractère rationnel ou irrationnel de certains rapports, ou à effectuer certaines constructions avaient leur raison dans le fait que l'on n'avait pas de critère théorique permettant soit de montrer **la possibilité** de réaliser, soit de

⁶ Voir par exemple l'article de Joëlle Delattre et Rudolf Bkouche : *Pourquoi la règle et le compas ?* dans *Histoires de Problèmes, histoire des mathématiques*, Ellipses 1993.

⁷ Voir le chapitre 5 de l'ouvrage collectif *Les nombres*, Vuibert, 1999.

⁸ Pour une étude détaillée de cette question, voir Michel Serfati, *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*, Brochure APMEP n°86.

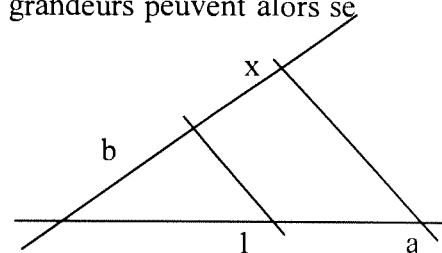
démontrer l'**impossibilité** d'effectuer ces constructions. On peut montrer la possibilité de réaliser telle ou telle construction en la faisant effectivement, mais comment prouver son impossibilité ? Un tel critère se construira peu à peu en ramenant les problèmes de construction à la résolution d'équations. Le grand artisan de cette transformation est René Descartes dans un livre intitulé « *La Géométrie* » publié en 1637 comme illustration de son fameux « *Discours de la méthode* ».

Jusque là, en schématisant un peu, la géométrie concernait uniquement les figures ; leurs dimensions pouvaient dans des cas simples être mesurées, constituant diverses grandeurs⁹ : longueurs de segments, aires de surfaces, volumes de solides. Les grandeurs ne sont pas des nombres ; on ne peut par conséquent effectuer en général des opérations sur elles sauf à préciser la nature de la grandeur produite. Les grandeurs liées à une même dimension donnée peuvent par exemple être additionnées ou soustraites sous certaines conditions. Ainsi le théorème de Pythagore, dans sa version historique, énonce que « *la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égale à l'aire du carré construit sur l'hypoténuse* ». Le produit de deux longueurs sera une aire, on parlera de grandeur rectangle ; ou le produit d'une longueur par une aire sera un volume. Mais le produit de deux aires, lui, n'a pas de sens. Par contre on peut associer à toute grandeur un nombre qui est sa mesure, à partir du moment où l'on a mis en place un système métrique.

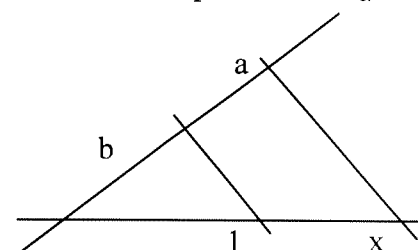
Descartes va établir une relation précise (nous dirions aujourd'hui une bijection) entre grandeurs continues et nombre, laquelle va intégrer le continu à l'algèbre et dégager peu à peu le concept de nombre réel. Il va mettre en évidence que toutes les grandeurs peuvent alors se penser comme grandeur ligne, en introduisant une unité.

Par exemple,

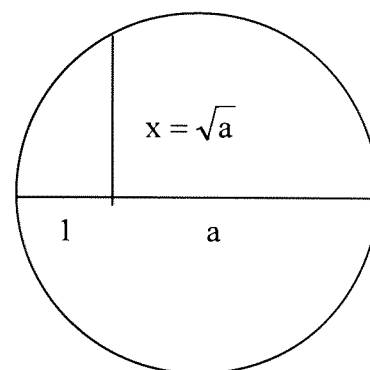
♦ La grandeur **rectangle** : $x = a \times b \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{1}$



♦ La grandeur **quotient** : $x = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{1}{b}$



♦ La grandeur « **racine** » : $x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{1}$



De sorte que l'on peut réaliser l'identification des nombres avec les points d'une droite munie d'une origine et d'une unité.

Exercice. Une unité de longueur ayant été choisie, construire à la manière de Descartes les nombres

$$2/5 ; 7/3 ; \sqrt{5} ; \frac{\sqrt{5}-1}{4} ; \sqrt{3+\sqrt{5}} ; \sqrt{3-\sqrt{5}} .$$

⁹ Pour une étude plus détaillée du concept de grandeur en liaison avec l'enseignement, voir Stella Baruk, *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Seuil, 1992.

3. Nombres constructibles : définition moderne

Définition 0 : lignes primitives

Deux points a et b définissent une unique droite (contenant a et b) et un unique cercle (centré en a et contenant b) que nous appellerons lignes primitives. Une telle ligne ne peut être définie par deux points confondus.

Définition 1 : points RC-constructibles

Soit A un ensemble de points (assimilé à une partie de $\mathbf{R}^2$) et $RC(A)$ le plus petit ensemble contenant A tel que les points d'intersection de deux lignes primitives définies à partir de points de $RC(A)$ soient encore dans $RC(A)$ (On exclut l'intersection de deux lignes identiques).

L'ensemble $RC(A)$ est appelé l'ensemble des points RC-constructibles à partir de A (RC comme Règle et Compas).

Définition 2 : nombres RC-constructibles

Un nombre complexe $x + iy$ est RC-constructible si le point correspondant (x,y) est RC-constructible à partir de $\{(0,0) ; (1,0)\}$.

$RC = RC\{(0,0) ; (1,0)\}$ désigne l'ensemble des nombres RC-constructibles.

Caractérisation

En 1837 Pierre Laurent Wantzel (1814 – 1848) donne une caractérisation algébrique des points constructibles qui équivaut au théorème suivant :

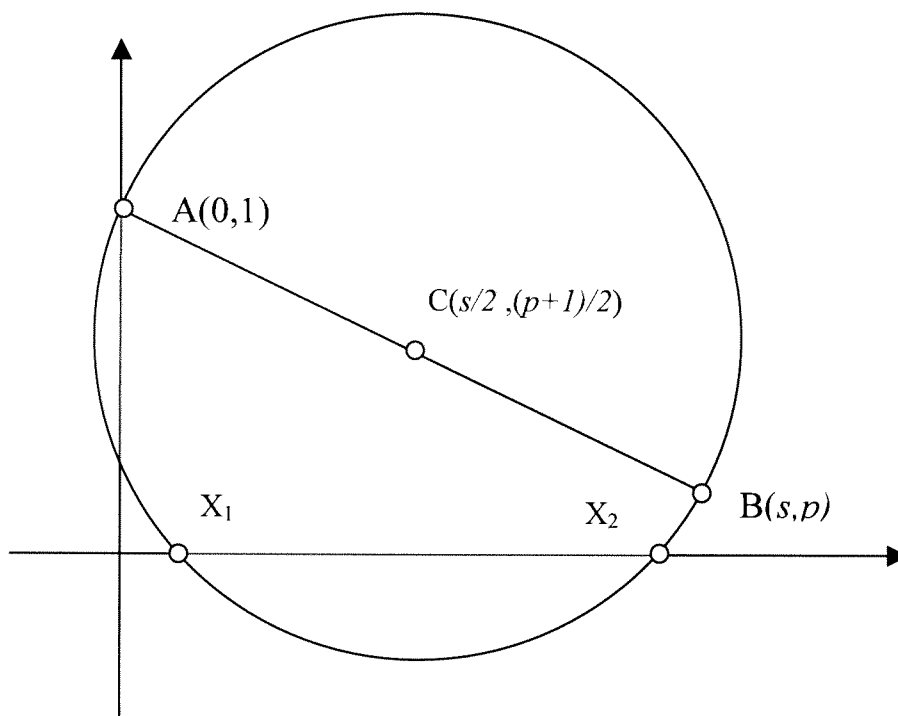
Théorème : RC est le plus petit sous corps de $\mathbf{C}$ stable par conjugaison et extraction de racines carrées.

3.1. Un exemple : la construction RC des racines d'une équation du second degré

Nous avons vu comment Descartes construisait les nombres $a \times b$ et $\frac{a}{b}$ pour a et b réels

donnés. Il donne aussi la construction des racines réelles d'une équation du second degré à coefficients réels, et nous pouvons rassembler les différents cas sous la construction suivante.

Soient deux réels constructibles s et p et le polynôme $P = X^2 - sX + p$: la somme des racines est s et le produit p . Construisons le cercle C de diamètre $[AB]$ pour $A(0,1)$ et $B(s,p)$.



Le cercle a pour équation : $\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{p+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Les intersections avec l'axe des x sont les racines de $\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p$, ou encore $x^2 - sx + p = 0$.

Donc ce cercle coupe l'axe des x si et seulement si P a une ou deux racines réelles ; et dans ce cas, les abscisses des points d'intersection sont les zéros de P . Nous appellerons un tel cercle, **cercle de Descartes**¹⁰ relatif au polynôme P (voir figure ci-dessus).

Application : construction d'un pentagone régulier

Un tel problème peut se résoudre par l'algèbre ou/et la trigonométrie. Par exemple on ramènera le problème à la construction de $\cos \frac{2\pi}{5}$ dont on calcule la valeur en résolvant de deux manières différentes l'équation

$$(1) : \cos 3x = \cos 2x.$$

Première manière : $3x = \pm 2x + k.2\pi$ donc $x = \frac{2k\pi}{5}$ avec k entier relatif.

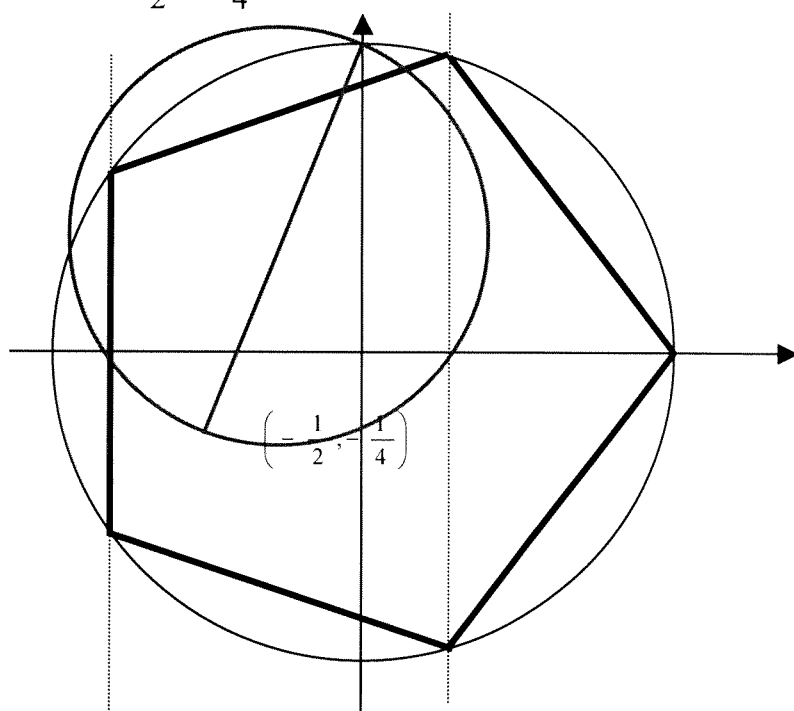
Deuxième manière : en posant $\cos x = u$ et en remarquant que $\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1$ et que $\cos 3x = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$; alors l'équation (1) devient :

$$4u^3 - 3u = 2u^2 - 1 \quad \text{ou} \quad 4u^3 - 2u^2 - 3u + 1 = (u - 1)(4u^2 + 2u - 1) = 0$$

dont les solutions donnent les diverses valeurs de $\cos \frac{2k\pi}{5}$:

$$\cos 0 = 1 \quad ; \quad \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad , \quad \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}.$$

Le cercle de Descartes relatif au polynôme $P = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$ nous donne une construction. Il en existe d'autres, plus ou moins simples.



¹⁰ Appelé aussi cercle de Carlyle (cf. *The mathematical Intelligencer*, Vol. 22, n°3, 2000).

3.2. Polygones réguliers

La construction des polygones réguliers est un problème très ancien déjà traité par Euclide pour un nombre de côtés égal à 3, 4, 5, 15, ou le doublement du nombre de côtés. Sa méthode est purement géométrique, ne faisant appel à aucun calcul. Les algébristes arabes, en particulier, Abu'l – Gûd au X^e/XI^e siècle, ont mis au point une autre méthode, dont voici l'exposé pour le pentagone et l'heptagone.

Le pentagone

Comme le montre la figure ci-contre, pour construire un pentagone régulier, il suffit de savoir construire un triangle isocèle ABC dont les angles à la base sont le double de l'angle au sommet. La bissectrice de l'angle B coupe le côté [AC] en D, et alors le triangle BDC est isocèle et semblable au triangle ABC. Désignons par a la longueur AB et par x celle de $BC = BD$. Alors

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}, \text{ soit } \frac{a}{x} = \frac{x}{CD}.$$

Donc $CD = \frac{x^2}{a}$ et comme le triangle ABD est également isocèle,

$$AD = BC = x.$$

D'où l'équation d'inconnue x :

$$\frac{x^2}{a} + x = a, \text{ ou encore } x^2 + ax - a^2 = 0.$$

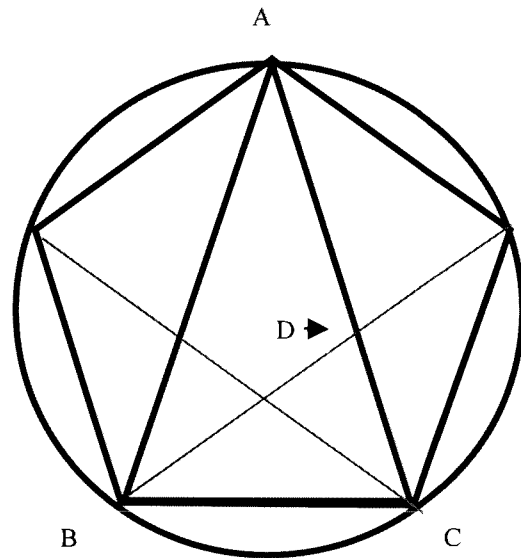
Si a est pris pour unité, cette équation se réduit à :

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

dont la solution positive est $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$, constructible à la règle et au compas.

L'heptagone

La méthode utilisée ci-dessus s'adapte bien au cas du polygone régulier à sept côtés. Il suffit cette fois-ci de savoir construire un triangle isocèle dont les angles à la base sont le triple de l'angle au sommet. La trissectrice de l'angle B qui est la plus proche de [BC] coupe le côté [AC] en D, et alors le triangle BDC est isocèle et semblable au triangle ABC.



Désignons par a la longueur AB et par x celle de $BC = BD$. Alors

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}, \text{ soit } \frac{a}{x} = \frac{x}{CD}.$$

Donc $CD = \frac{x^2}{a}$ et comme le triangle CBD est également isocèle,

$$BD = BC = x.$$

Soit E sur AB tel que $DE = x$ également. Un travail sur les angles montre que alors le triangle ADE est aussi isocèle et donc

$$AE = ED = BD = BC = x.$$

Soit EF sa hauteur, et BH la hauteur du triangle BCD . La similitude des triangles AEF et ABH conduit aux rapports :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AH}.$$

Comme $AH = AC - (1/2)CD$, on en déduit :

$$AF = \frac{x}{a} \left(a - \frac{x^2}{2a} \right) = x - \frac{x^2}{2a^2}.$$

La relation : $AC = 2AF + CD$ donne finalement l'équation d'inconnue $BC = x$, légèrement transformée, après multiplication par a^2 :

$$x^3 - ax^2 - 2a^2x + a^3 = 0$$

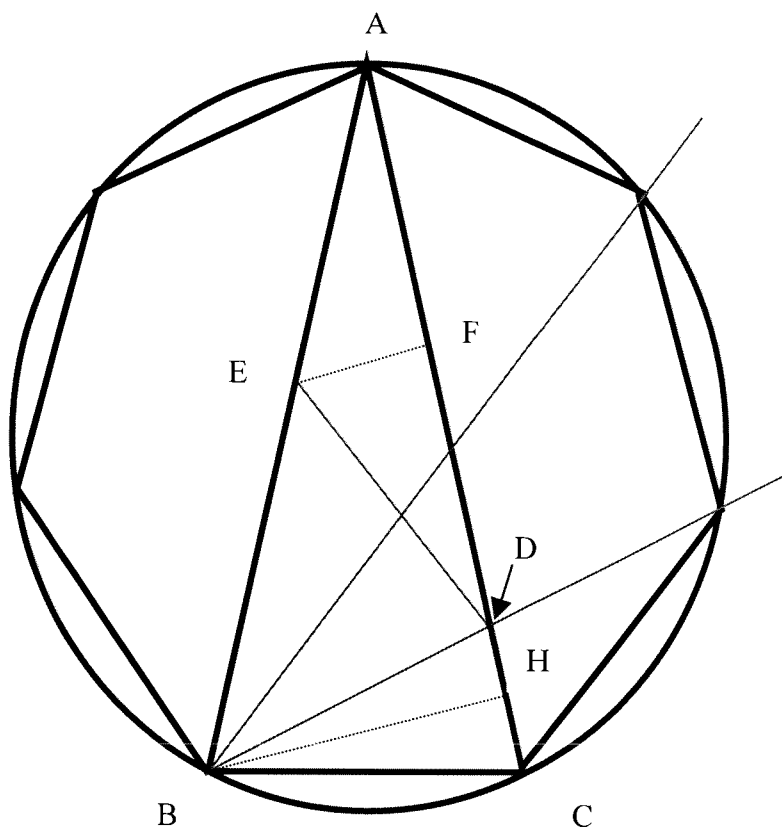
ou encore si nous prenons la longueur a comme unité :

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0,$$

dont une racine est $2\cos\frac{3\pi}{7}$ (puisque l'angle B mesure $\frac{3\pi}{7}$).

La théorie des équations du troisième degré montre que les racines de cette équation ne peuvent pas s'écrire au moyen de seuls radicaux carrés, et donc que ses racines ne sont pas RC-constructibles.

Plus généralement Gauss (1777 – 1855) a démontré que les sommets d'un polygone régulier sont RC-constructibles si et seulement si leur nombre p est égal à $2^n p_1 p_2 \dots p_k$, où n et k sont des entiers naturels et les p_i des nombres premiers distincts de la forme $2^{a_i} + 1$ (nombres de



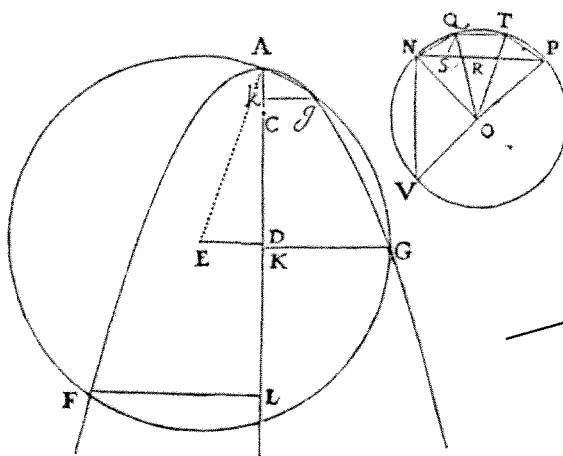
Fermat). Ainsi le polygone de 17 côtés est constructible ($17 = 2^4 + 1$) et $\cos \frac{2k\pi}{17}$ s'exprime uniquement au moyen de racines carrées. Précisément :

$$16 \cos \frac{2\pi}{17} = -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} !$$

Par contre le polygone de 7 côtés n'est pas RC-constructible ($7 = 2^2 + 3$), car comme nous l'avons vu plus haut, $\cos \frac{2\pi}{7}$ est racine d'une équation du 3^{ème} degré et fait intervenir des racines cubiques.

3.3. Points et nombres $\mathbf{C}_2$ -constructibles

Descartes a montré comment construire les racines d'une équation du troisième degré au moyen de l'intersection de cercles et de paraboles. Voici (à titre purement documentaire), une reproduction d'une page du texte de Descartes : *La Géométrie*, publié en 1637 (p. 396 dans l'édition citée dans la bibliographie), dans laquelle il ramène le problème de la trisection de l'angle à une équation du 3^{ème} degré elle-même ramenée à l'intersection d'une parabole et d'un cercle. (On ne cherchera pas à comprendre en détail la démarche de Descartes, laquelle est très étrangère dans ses méthodes comme dans ses notations à celle d'aujourd'hui).



La façon de diviser un angle en trois.

Tout de même si on veut diviser l'angle NOP , ou bien l'arc, ou portion de cercle NQT P , en trois parties égales; faisant $\text{NO} \propto 1$, pour le rayon du cercle, & $\text{NP} \propto q$, pour la subtendue de l'arc donné, & $\text{NQ} \propto x$, pour la subtendue du tiers de cet arc; l'Equation vient,

$x^3 \propto 3x - q$. Car ayant tiré les lignes NQ , OQ , OT ; & faisant QS parallèle à TO , on voit que comme NO est à NQ , ainsi NQ à QR , & QR à RS ; en sorte que

Cette idée a été reprise et développée récemment (en 1997) par un mathématicien italien nommé Videla, dans une théorie qui est l'équivalent pour le troisième degré de ce qui se passe pour le second. Le lecteur curieux peut être intéressé par la présentation d'une théorie, qui bien que toute récente, lui soit néanmoins accessible. Donnons en les grandes lignes.

Il faut en général cinq points pour définir une courbe du second degré (conique). Nous conviendrons que s'il existe plusieurs coniques passant par cinq points donnés, ces cinq points ne définissent pas de conique. Ajoutons aux lignes primitives de la définition 0, l'ensemble des coniques.

Définition 3 : points C_2 -constructibles

Soit A un ensemble de points (assimilé à une partie de $\mathbf{R}^2$) et $C_2(A)$ le plus petit ensemble contenant A tel que les points d'intersection de deux lignes primitives définies à partir de points de $C_2(A)$ soient encore dans $C_2(A)$ (On exclut l'intersection de deux lignes identiques)

Définition 4 : nombres C_2 -constructibles

L'ensemble des nombres C_2 -constructibles est l'ensemble $C_2 = C_2 \cup \{(0,0) ; (1,0)\}$

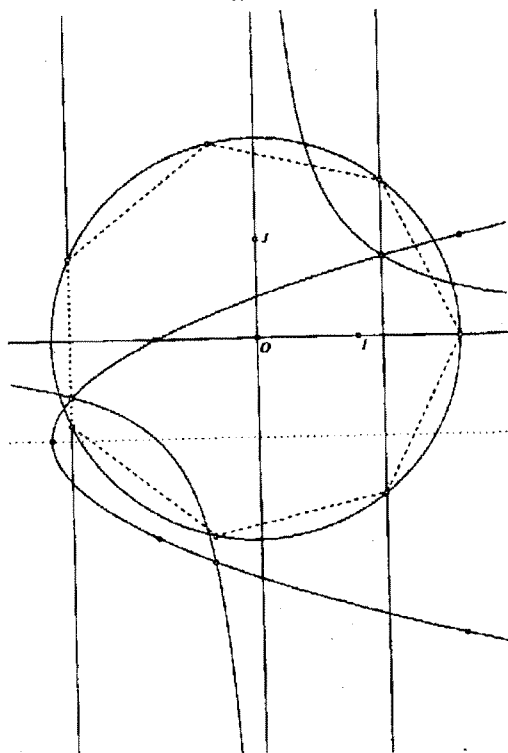
Caractérisation

Videla a démontré en 1997 que C_2 est le plus petit sous corps de $\mathbf{C}$ stable par conjugaison, extraction de racines carrées et de racines cubiques. Alors les polygones réguliers C_2 -constructibles ont un nombre de côtés égal à $2^n 3^m p_1 p_2 \dots p_k$ où n, m et k sont des entiers naturels et les p_i des nombres premiers distincts de la forme $2^a 3^b + 1$.

L'heptagone en fait partie, car l'équation, issue de l'étude précédente concernant l'heptagone,

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

peut se résoudre au moyen de l'intersection de l'hyperbole $xy = 1$ et de la parabole d'équation $y = -x^2 + x + 2$, qui se construisent aisément.



Note historique sur l'utilisation du signe $\sqrt{}$

La première utilisation d'un symbole, en l'occurrence R , se trouve dans la *Practica geometriae* de Leonard de Pise (Fibonacci), de 1220, où il signifie « racine carrée ».

Le symbole $\sqrt{}$ (sans la barre au-dessus) apparaît pour la première fois en 1525 dans *Die Coss* de Christoff Rudolff (1499-1545). Il est utilisé pour désigner des racines carrées. Rudolff n'utilise pas d'indice pour les radicaux de degrés supérieurs mais rajoute des « v », tel $v\sqrt{}$, ou $vv\sqrt{}$. Il est souvent suggéré que l'origine du symbole radical moderne se trouve dans une altération de la lettre r , première lettre du mot *radix*. C'est l'opinion de Leonard Euler dans ses *Institutiones calculi differentialis* (1775). Mais Florian Cajori, auteur de *A History of Mathematical Notations* donne des arguments contre cette hypothèse.

En 1637, dans *La Géométrie*, René Descartes utilise $\sqrt{}$, ajoutant la barre. (d'après le site internet : St. Andrews Mac Tudor History of Mathematics Site :

[http : // www-groups.dcs.st-and.ac.uk : 80/"history/](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~80/history/)).

Annexe : Option facultative de mathématiques en Première Littéraire

Extrait de programme

Géométrie plane		
Constructions et tracés (« à la règle et au compas »)		
Nombres constructibles	On construira la somme et le produit de deux nombres constructibles. ; l'inverse et la racine carrée d'un nombre constructible. On en déduira que tout nombre rationnel est constructible.	On pourra évoquer le problème de la quadrature du cercle.
Commensurabilité et algorithme d'Euclide	On posera le problème du dallage d'un rectangle avec des dalles carrées identiques les plus grandes possibles. On fera le lien avec le calcul d'un PGCD	On débouche ainsi de façon très naturelle sur des nombres n'ayant pas de « commune mesure » et donc sur les nombres irrationnels.

THEME 3 : DE L'ALGORITHME D'EUCLIDE A L'APPROXIMATION D'UN NOMBRE IRRATIONNEL PAR DES NOMBRES RATIONNELS

1. L'Algorithme d'Euclide

La pratique de la division euclidienne est enseignée dès la classe de sixième et l'Algorithme d'Euclide fait partie des activités proposées par le programme de la classe de Troisième. Les élèves du collège ont utilisé le nombre π et ont pratiqué le calcul des racines carrées. Ils ont pu démontrer l'irrationalité de nombres tels que $\sqrt{2}$ en classe de Troisième.

1.1. L'Algorithme d'Euclide sur un exemple

Choisissons deux nombres entiers naturels, par exemple 77 et 36.

On divise successivement :

$$77 \text{ par } 36 : \quad 77 = 2 \times 36 + 5 ; \quad 0 \leq 5 < 36.$$

$$36 \text{ par } 5 : \quad 36 = 7 \times 5 + 1 ; \quad 0 \leq 1 < 5.$$

$$5 \text{ par } 1 : \quad 5 = 5 \times 1 + 0 ; \quad 0 \leq 0 < 1.$$

Il n'est pas question de diviser 1 par 0 : l'algorithme s'arrête là.

Il en sera toujours ainsi quels que soient les nombres entiers naturels a et b ($a > b$) choisis au départ. En effet, à chaque étape de l'algorithme, le diviseur est le reste de la division précédente : les restes obtenus successivement sont donc des nombres entiers naturels de plus en plus petits et, par conséquent, on obtiendra un reste nul au bout d'un nombre fini de divisions.

1.2. Application

Les égalités précédentes (mise à part la dernière) peuvent s'écrire :

$$\frac{77}{36} = 2 + \frac{5}{36}; \quad 0 \leq \frac{5}{36} < 1.$$

$$\frac{36}{5} = 7 + \frac{1}{5}; \quad 0 \leq \frac{1}{5} < 1.$$

On peut alors écrire $\frac{77}{36} = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{5}}$.

Le second membre de cette égalité s'appelle « le développement en fraction continue » du nombre $\frac{77}{36}$.

On remarquera que le nombre 2 est la partie entière de $\frac{77}{36}$ et que le nombre 7 est la partie entière de $\frac{36}{5}$. On notera : $2 = E\left(\frac{77}{36}\right)$; $7 = E\left(\frac{36}{5}\right)$.

2. Recherche de développements de nombres donnés en fraction continue

2.1. Exemple 1

Cherchons par exemple le développement en fraction continue du nombre rationnel $\frac{79}{15}$.

Pour cela, on effectue l'algorithme d'Euclide relatif aux nombres 79 et 15 :

$$79 = 5 \times 15 + 4, \quad 0 \leq 4 < 15 \quad \text{donc} \quad \frac{79}{15} = 5 + \frac{4}{15}, \quad \text{avec} \quad 5 = E\left(\frac{79}{15}\right).$$

$$15 = 3 \times 4 + 3, \quad 0 \leq 3 < 4 \quad \text{donc} \quad \frac{15}{4} = 3 + \frac{3}{4}, \quad \text{avec} \quad 3 = E\left(\frac{15}{4}\right).$$

$$4 = 1 \times 3 + 1, \quad 0 \leq 1 < 3 \quad \text{donc} \quad \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}, \quad \text{avec} \quad 1 = E\left(\frac{4}{3}\right).$$

$3 = 3 \times 1 + 0$: l'algorithme s'arrête là.

On obtient alors :

$$\frac{79}{15} = 5 + \frac{1}{\frac{15}{4}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{3}{4}} = 5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}.$$

N.B. Un nombre décimal est un nombre rationnel particulier que l'on sait écrire comme quotient de deux nombres entiers (exemple : $1,22 = \frac{122}{100} = \frac{61}{50}$; on cherchera donc le développement en fraction continue de $\frac{61}{50}$).

Exemple 1 bis

Cherchons le développement en fraction continue du nombre rationnel $\frac{36}{77}$.

On remarque que la division de 36 par 77 conduit à un quotient nul, ou que $E\left(\frac{36}{77}\right) = 0$.

Il suffit d'écrire $\frac{36}{77} = \frac{1}{\frac{77}{36}}$ pour déduire le résultat cherché du résultat obtenu au paragraphe 1.2.

2.2. Exemple 2

Cherchons maintenant le développement en fraction continue du nombre irrationnel $\sqrt{2}$.

Par définition, $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Le nombre 2 étant compris entre 1 et 4, le nombre $\sqrt{2}$ est compris entre 1 et 2 : la partie entière de $\sqrt{2}$ est donc égale à 1. On écrit alors :

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1), \text{ avec } 1 = E(\sqrt{2}).$$

Par analogie avec ce qui a été fait pour le nombre rationnel $\frac{79}{15}$ au paragraphe 2.1., à savoir l'écrire sous la forme $\frac{79}{15} = 5 + \frac{1}{\frac{15}{4}}$, on écrit $\sqrt{2}$ sous la forme :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}}.$$

$$\text{Or, } \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1, \text{ car } (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2 + (\sqrt{2} - 1), \text{ avec } 2 = E\left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1}\right).$$

$$\text{Et, par conséquent, on a : } \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}.$$

En utilisant systématiquement ce résultat, on obtient :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}}} = \dots\dots$$

Ici, le processus ne s'arrête pas : le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue est illimité.

3. Conséquences

1. De l'étude faite aux paragraphes 1. et 2.1., il résulte que le développement en fraction continue d'un nombre rationnel (quotient de deux entiers) est fini. On peut en rédiger une démonstration pour un nombre rationnel quelconque, mais on ne le fera pas ici.

2. Inversement, si le développement en fraction continue d'un nombre est fini, alors les règles de calcul sur les fractions permettent d'écrire ce développement sous forme de quotient de deux entiers.

Il en résulte qu'un nombre est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est fini.

Evidemment, il est plus simple d'utiliser la définition d'un nombre rationnel (quotient de deux entiers) pour reconnaître un tel nombre. Ce qui précède fournit un critère pour reconnaître un nombre irrationnel que l'on peut énoncer :

un nombre est irrationnel si et seulement si son développement en fraction continue est illimité.

4. Approches géométriques

4.1. Etude géométrique du rapport diagonale / côté du carré

Donnons-nous un carré $ABCD$.

On trace le cercle de centre A et de rayon $R=AB$.

Ce cercle coupe la droite (AC) en E et F .

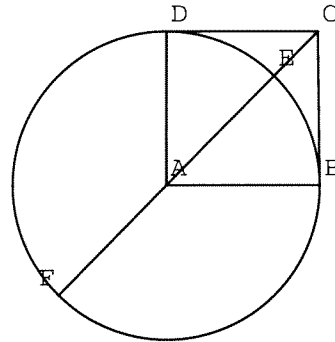
On étudie le rapport $\frac{CF}{R}$ égal à $1 + \frac{CA}{R}$.

On obtient deux égalités :

$$(1) \quad CF = CE + 2R$$

$CE \cdot CF = (CA - R)(CA + R) = CA^2 - R^2$, soit :

$$(2) \quad CE \cdot CF = R^2.$$



On déduit de (1) : $\frac{CF}{R} = \frac{CE}{R} + 2$.

On déduit de (2) : $\frac{CF}{R} = \frac{R}{CE}$.

On peut alors écrire : $\frac{CF}{R} = 2 + \frac{1}{\frac{CF}{R}}$, et par suite, en utilisant systématiquement ce résultat, on

obtient :

$$\frac{CF}{R} = 2 + \frac{1}{\frac{CF}{R}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{CF}{R}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{CF}{R}}}} = \dots\dots$$

soit, sous forme numérique :

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = \dots\dots$$

On en déduit immédiatement le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue.

On rapprochera ce résultat de celui que l'on a obtenu au paragraphe 2.2.

N.B. On peut utiliser la similitude des triangles CFB et CBE pour établir la relation (2).

4.2. Etude géométrique du rapport diagonale / côté du pentagone régulier

Donnons-nous un pentagone régulier $ABCDE$.

On a :

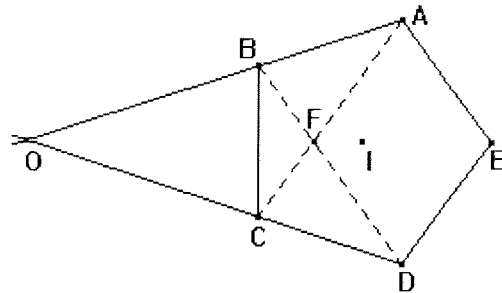
$$AB=BC=CD=DE=EA$$

(longueurs des côtés) ;

$$AC=AD=CE=DB=EB$$

(longueurs des diagonales).

On note F le point d'intersection des droites (AC) et (BD) et O celui de (AB) et (CD) .



La droite (IE) est axe de symétrie du pentagone. Il s'en suit que (AD) est parallèle à (BC) et que O et F sont situés sur (IE) .

Plus généralement, chaque diagonale du pentagone est parallèle au côté qui ne lui est pas adjacent. Le quadrilatère $AEDF$ est donc un parallélogramme.

On étudie donc géométriquement le rapport $\varphi = \frac{AC}{ED}$ ($(AC) \parallel (ED)$).

On a :

$$(1) \quad \frac{AC}{ED} = \frac{AF + FC}{ED} = 1 + \frac{FC}{ED} \quad (\text{car } AF=ED).$$

$$\text{Or, } \frac{AC}{ED} = \frac{AD}{BC} \quad \text{car } AC=AD \text{ et } ED=BC,$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{OD}{OC} \quad \text{car } (AD) \parallel (BC),$$

$$\frac{OD}{OC} = \frac{ED}{FC} \quad \text{car } (ED) \parallel (FC).$$

Donc, finalement, on a:

$$(2) \quad \frac{AC}{ED} = \frac{ED}{FC}.$$

De (1) et (2), on déduit l'égalité : $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$.

En conséquence,

$$1) \quad \varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Cette égalité permet de calculer φ algébriquement : on trouve $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ce nombre est appelé nombre d'or.

2) En utilisant systématiquement le résultat $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, on obtient :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = \dots\dots\dots$$

Le nombre φ est donc un nombre irrationnel dont on connaît ainsi le développement en fraction continue.

N.B. On peut aussi écrire : $\varphi = \frac{AC}{CB}$.

AC et CB sont les longueurs de deux côtés du triangle ABC . On cherche un triangle qui lui soit semblable, par exemple le triangle CFB (angles égaux). On a alors $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{CF}$, ce qui démontre d'une autre façon l'égalité (2).

5. Applications numériques

5.1. Valeurs approchées rationnelles de $\sqrt{2}$

Revenons au développement en fraction continue de $\sqrt{2}$, explicité au paragraphe 2.2.

On pose : $R_1 = 1; R_2 = 1 + \frac{1}{2}; R_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}; R_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}; \dots$

On a donc : $R_1 = 1; R_2 = 1 + \frac{1}{1 + R_1}; R_3 = 1 + \frac{1}{1 + R_2}; R_4 = 1 + \frac{1}{1 + R_3}; \dots$

On obtient : $R_1 = 1; R_2 = \frac{3}{2}; R_3 = \frac{7}{5}; R_4 = \frac{17}{12}; \text{etc...}$

On peut vérifier que : $R_1^2 < R_3^2 < \dots < 2 < \dots < R_4^2 < R_2^2$.

Il s'en suit que l'on a : $R_1 < R_3 < \dots < \sqrt{2} < \dots < R_4 < R_2$.

On peut ainsi calculer R_5, R_6 , etc... et constater que l'on obtient une suite de nombres rationnels qui encadrent et approchent « de mieux en mieux » le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Le résultat général est établi ci-après, en 5.3.

On peut aussi, par curiosité, chercher le premier de ces nombres rationnels dont la calculatrice affiche la même valeur approchée que celle de $\sqrt{2}$.

5.2. Valeurs approchées rationnelles du nombre d'or

Revenons au développement en fraction continue de φ , explicité au paragraphe 4.2.

On procède de façon analogue à ce qui précède.

On se contentera d'une étude « à la calculatrice » pour comparer ces nombres rationnels à φ , car le carré de φ n'est pas rationnel.

5.3. Justification mathématique : Cadrages par des réduites

Sachant que a_0 est la partie entière d'un nombre, on peut situer ce nombre dans l'intervalle $[a_0, a_0 + 1[$. De même, sachant qu'un nombre donne lieu aux valeurs a_0 et a_1 lors des deux premières étapes d'une anthyphérèse (voir thème 1), on peut le situer dans l'intervalle

$$]a_0 + \frac{1}{a_1 + 1}, a_0 + \frac{1}{a_1}].$$

Considérons en effet les étapes d'anthyphérèse :

$$S = a_0 U + R_1, \text{ avec } R_1 < U,$$

$$U = a_1 R_1 + R_2, \text{ avec } R_2 < R_1.$$

Pour R_2 , les valeurs extrêmes sont :

$R_2 = 0$ (minimum qu'il est possible d'atteindre), qui conduit à $R_1 = \frac{1}{a_1} U$, d'où $S = a_0 + \frac{1}{a_1}$,

$R_2 = R_1$ (maximum non atteint), qui conduit à $R_1 = \frac{1}{a_1 + 1} U$, d'où $S = a_0 + \frac{1}{a_1 + 1}$.

On en déduit l'intervalle précédemment indiqué. Remarquons que par rapport au premier intervalle $[a_0, a_0 + 1[$, l'incertitude sur S est ainsi réduite dans un facteur au moins égal à 2, puisque $a_1 \geq 1$.

On généralise de même pour un nombre quelconque d'étapes d'anthyphérèse. On obtient alors, selon que l'on s'est arrêté après un nombre pair ou impair d'étapes, l'un des encadrements suivants :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{2p}}}} \leq S < a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{2p} + 1}}}$$

ou

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{2p+1} + 1}}} < S \leq a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{2p+1}}}}.$$

Ces résultats simples d'encadrement sont fondamentaux pour les études d'approximation d'un nombre S par les réduites successives de son développement en fraction continue (voir page 43). Ils conduisent par exemple à voir que les réduites sont successivement inférieures ou égales puis supérieures ou égales au "nombre cible" S . Et, bien entendu, ils conduisent aussi aux résultats de convergence (rapide) des réduites vers le "nombre cible".

Exercice d'application : On indique (le lecteur peut procéder à une vérification avec calculatrice ou ordinateur) que l'anthyphérèse de la racine carrée du nombre 53 par rapport à l'unité conduit aux termes successifs 7, 3, 1, 1, 3, 14 et qu'à partir de là on voit se répéter la période 3, 1, 1, 3, 14. Dans ces conditions, quelle est l'incertitude sur $S = \sqrt{53}$ lorsque l'on en prend la valeur approchée 7,28 ?

[Indications : Noter que $7,28 = 728/100 = 182/25$. Remarquer que l'anthyphérèse de cette fraction par rapport à l'unité, qui coïncide avec l'algorithme d'Euclide effectué pour les entiers 182 et 25, conduit aux mêmes premiers termes 7, 3, 1, 1, 3 obtenus pour $\sqrt{53}$ et s'achève alors sur un reste nul.

Réponse : $7,28 = 182/25 \leq \sqrt{53} < 233/32 = 7,28125$. L'incertitude est donc nettement moindre que si 7,28 apparaissait comme une approximation décimale, ce qui conduirait à $7,28 \leq \sqrt{53} < 7,29$.]

UNE MISE A L'ESSAI DE CES NOTIONS EN PREMIERE L, AU LYCEE KIRSCHLEGER DE MUNSTER

Les passages en italiques présentent les activités pratiquées en classe et donnent des indications sur leur déroulement. Les observations faites peuvent servir non seulement dans l'idée de reproduire ces activités, mais d'envisager différents scénarios d'enseignement (par exemple en amenant les élèves à utiliser un tableur). C'est pourquoi des pistes autres que celles essayées sont présentées dans les passages en caractères droits.

1. Première activité : De l'algorithme d'EUCLIDE au développement en fraction continue d'un nombre réel

Les objectifs à atteindre sont les suivants :

- 1. Les élèves devront, à partir de l'algorithme d'Euclide, savoir obtenir le développement en fractions continues des nombres rationnels.*
- 2. Ils devront également savoir retrouver les développements de quelques irrationnels comme $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{26}$ sans l'aide de la calculatrice. Ce qui nécessite de leur part une certaine aisance en calcul numérique (et n'a pas été une mince affaire ! !).*
- 3. Finalement, ils devront élaborer un algorithme permettant d'obtenir, sur calculatrice, le développement en fractions continues d'un nombre réel quelconque.*

Description sommaire du déroulement :

La dernière étape n'a pu se faire qu'après 2 séances de familiarisation pour les uns, de perfectionnement pour les autres, à la programmation de leur calculatrice (un modèle commun facilitant la tâche). Les programmes étudiés, sollicitaient les compétences suivantes : affectation des variables, écriture d'une boucle, d'un test, affichage des résultats, le tout afin d'obtenir le PGCD de deux entiers et les racines d'un trinôme du second degré (réalisé en analyse). L'apprentissage du langage spécifique à la machine ne leur a pas posé de problème majeur. Par contre, l'étape plus abstraite d'écriture de l'itération et la structuration de l'algorithme n'a pu se faire qu'avec les meilleurs élèves, ceux-ci mettant spontanément le fruit de leur recherche à la disposition des autres.

Le passage à la comparaison des résultats obtenus sur calculatrice, aux résultats après calcul à la main, a été assez épique. Plusieurs réactions ont fusé : la calculatrice a raison ! ! ! (Le prof s'est trompé ! ! !). Rien ne vaut les calculs à la main (argument exploitable par les puristes. Alors allons-y mon brave !). Mais qu'est-ce qu'on est venu faire dans cette galère ? (objectif non recherché). Enfin la plus lumineuse : « et si on écrivait un programme différent, à partir du programme PGCD déjà écrit précédemment ? » C'est cette idée que j'ai retenue, ne souhaitant pas me lancer dans des théories de convergence de réduites ni d'approximation, au risque de les dégoûter à vie des mathématiques.

Les élèves ont donc à leur disposition deux programmes distincts, dont un réservé aux rationnels, avec la stricte consigne d'utiliser la calculatrice comme un outil de vérification.

1.1. Développement en fraction continue d'un nombre rationnel A/B

1.1.1. Algorithme de la division euclidienne sur un exemple (A>B)

Ecrire la division euclidienne de 77 par 36. Le respect de la disposition des calculs est nécessaire pour la suite.

Division euclidienne

$$77 = 36 \times 2 + 5$$

$$36 = 5 \times 7 + 1$$

$$5 = 1 \times 5 + 0$$

Ecriture

$X = \text{partie entière de } X + \text{Partie décimale de } X$

$$\frac{77}{36} = 2 + \frac{5}{36}$$

$$\frac{36}{5} = 7 + \frac{1}{5}$$

$$\frac{5}{1} = 5 + 0 \quad \text{FIN}$$

Le développement en fraction continue de 77/36 peut s'écrire

$$[2, 7, 5] = 2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{5}}$$

A vous de jouer : déterminer le développement en fraction continue de 79/14, de 80/11.

1.1.2. Programmes de calcul

Le programme de calcul a été le suivant :

$\ll A \gg ? \rightarrow A ; \ll B \gg ? \rightarrow B$

Lbl 0

$\text{Int}(A \div B) \rightarrow Q$

Q

$(A - B * Q) \rightarrow R$

$R = 0 \Rightarrow \ll \text{FIN} \gg$

$B \rightarrow A ; R \rightarrow B$

Goto 0

En raison des erreurs d'arrondi, ce calcul risque de ne jamais s'arrêter. Il est plus prudent de remplacer le test d'égalité $R=0$ par un test du genre R très petit (en valeur absolue qui plus est) car l'expérimentation montre que R devient négatif sur certaines machines.

On pourra retenir l'algorithme suivant :

Algorithme : $A \leftarrow \text{donnée}$ $B \leftarrow \text{donnée}$ Répéter $Q \leftarrow \text{Int}(A \div B)$ Afficher Q $R \leftarrow A - B \cdot Q$ $A \leftarrow B$ $B \leftarrow R$ Jusqu'à ce que $\text{Abs}(R) < 10^{-8}$	Programme CASIO xxx $\llcorner A \gg ? \rightarrow A ; \llcorner B \gg ? \rightarrow B$ Lbl 0 $\text{Int}(A \div B) \rightarrow Q$ Q $(A - B \cdot Q) \rightarrow R$ $\text{Abs}(R) < 1\text{EE}-8 \Rightarrow \llcorner \text{FIN} \gg$ $B \rightarrow A : R \rightarrow B$ Goto 0
---	--

On obtient : $79/14 = [5,1,1,1,4]$ soit : $\frac{79}{14} = 5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$.

$80/11 = [7,3,1,2]$ soit : $\frac{80}{11} = 7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$.

Et avec un tableur ?

Nous détaillons ici le remplissage d'une feuille de calcul ; le lecteur familier avec l'usage d'un tableur peut directement consulter les tableaux présentés. Il est intéressant de remplir la première ligne (la ligne 1 de la feuille de calcul) par des indications : « dividende », « diviseur », « quotient entier » et « reste ». Ce n'est pas indispensable pour effectuer les calculs, mais sera utile par la suite pour savoir de quoi il s'agit quand on ouvrira le fichier.

Les données, 77 et 36 dans notre exemple, sont introduites dans les cellules A2 et B2. Ensuite, on a introduit les formules dans chaque cellule exactement comme c'est indiqué. On remarque ici que la seule fonction à utiliser, en plus des opérations arithmétiques, est la fonction « partie entière » notée ENT. Ainsi dans la cellule C2, on a demandé de prendre la partie entière du rapport entre les nombres qui sont en A2 (c'est 77 dans notre exemple) et B2 (c'est 36 dans notre exemple). Lorsqu'une formule (débutant par le signe d'égalité) a été introduite dans une cellule, la valeur numérique obtenue s'affiche : on verra ici apparaître 2 dans la cellule C2.

	A	B	C	D
1	Dividende	Diviseur	Quotient entier	Reste
2	77	36	=ENT(A2/B2)	=A2-B2*C2
3	=B2	=D2		

Données et formules à introduire dans une feuille de calcul

Sur la ligne 3 de la feuille de calcul, on entame l'algorithme d'Euclide en prenant comme nouveau dividende l'ancien diviseur et comme nouveau diviseur l'ancien reste. On pourrait continuer de même en introduisant les formules successives, cellule après cellule. Mais une feuille de calcul dispose d'un outil quasiment magique, le « copier-coller », qui évite toute nouvelle introduction dans une cellule d'une formule déjà utilisée dans une autre cellule.

Voyons précisément comment s'effectue un *copier-coller* : celui de la cellule C2 vers C3 : Quand on copie la formule de la cellule C2, qui est « =ENT(A2/B2) », la formule ensuite collée en C3 est automatiquement décalée d'une ligne, pour devenir « =ENT(A3/B3) ». La valeur calculée en C3 est donc le quotient entier de A3 par B3. De même, copier-coller D2 vers D3

fournira la reste de la division euclidienne de A3 par B3. Il n'y aura plus alors qu'à copier la ligne 3 au complet pour la coller dans la ligne 4. Inutile de poursuivre puisque l'on voit apparaître un reste nul. Le résultat final obtenu est donné ci-après.

	A	B	C	D
1	Dividende	Diviseur	Quotient entier	Reste
2	77	36	2	5
3	36	5	7	1
4	5	1	5	0

La feuille de calcul telle qu'elle apparaît après les « copier-coller » convenables

1.1.3. Cas où $A < B$

On se ramène au cas 1, après avoir écrit $\frac{A}{B} = \frac{1}{\frac{B}{A}}$. et on applique l'algorithme à B/A .

Finalement : si $\frac{B}{A} = [a, b, c, d]$, on a $\frac{A}{B} = [0, a, b, c, d]$.

$$\text{Exemple : } \frac{36}{77} = [0, 2, 7, 5] \text{ soit } \frac{36}{77} = \frac{1}{2 + \frac{1}{7 + \frac{1}{5}}}$$

1.2. Développement en fraction continue d'un nombre réel

1.2.1. Description du procédé de l'anthyphérèse (voir aussi les thèmes 1 et 3)

Tout nombre réel X peut s'écrire

$$X = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \text{ où } a_0 \text{ est un entier naturel et où } \alpha_1 \geq 1,$$

puis $\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$, où a_1 est un entier strictement positif et où $\alpha_2 \geq 1$, et ainsi de suite.

Deux cas se présentent :

- On atteint un α_i entier. L'algorithme s'arrête alors et le développement est $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_i]$; il en résulte que X est un nombre rationnel.

Nous retiendrons que X est rationnel si son développement en fraction continue est fini.

- Le procédé se poursuit indéfiniment.

On peut démontrer et nous admettrons que X est rationnel seulement si son développement en fractions continues est fini.

1.2.2. Programmes de calcul

On pourra retenir l'algorithme suivant :

Algorithme :	Programme TI 83
$X \leftarrow \text{donnée}$	: Prompt X
$A \leftarrow \text{Int}(X)$	: $\text{Int}(X) \rightarrow A$
Afficher A	: Disp A
$B \leftarrow X-A$	: $X-A \rightarrow B$
Répéter tant que $\text{abs}(B) > 10^{-8}$	: While B $\text{abs}(B) > 10^{-8}$
$X \leftarrow B^{-1}$	: $B^{-1} \rightarrow X$
$A \leftarrow \text{Int}(X)$	: $\text{Int}(X) \rightarrow A$
Afficher A et faire une pause	: Disp A
$B \leftarrow X-A$	: Pause
Fin tant que	: $X-A \rightarrow B$
	: End

Remarques :

Problème d'approximation : L'algorithme s'arrête dans le cas où le nombre X est rationnel. Pour le programme, un problème d'approximation se présente. En effet, on introduit en pratique toujours une valeur numérique décimale (donc rationnelle) et, de plus, l'opération d'inversion s'effectue avec une certaine imprécision. Petit à petit, les chiffres deviennent inexacts en commençant par les derniers et, poussé trop loin, le programme finit par fournir des résultats faux. Ci-après, l'utilisation d'un tableur permet de bien voir le phénomène.

Réduites : Les valeurs affichées, au fur et à mesure avant chaque pause, permettent d'obtenir les valeurs rationnelles approchées de X, appelées réduites de X, lorsqu'il n'est pas rationnel. Le programme écrit ci-après pour tableur fournit ces réduites (nous l'admettrons).

Sur la feuille de calcul d'un tableur

Commençons par un exemple simple, illustrant un fonctionnement standard, sans problème d'approximation, celui du développement de $\sqrt{11}$. Comme précédemment, un premier tableau montre les données et formules à introduire et un second tableau montre les résultats obtenus (des *copier – coller* de la ligne 4 vers les suivantes ayant complété les formules introduites).

	A	B	C	D
1	Introduire votre	Termes	Numérateur	Dénominateur
2	nombre en A3	successifs	0	1
3	=RACINE(11)	=ENT(A3)	1	0
4	=1/(A3-ENT(A3))	=ENT(A4)	=B3*C3+C2	=B3*D3+D2

Données et formules à introduire.

Introduire votre	Termes	Numérateur	Dénominateur
nombre en A3	successifs		
3,31662479	3	1	0
3,1583124	3	3	1
6,31662479	6	10	3
3,1583124	3	63	19
6,31662479	6	199	60

Résultats obtenus après *copier-coller* de la ligne 4 vers les suivantes.

Le nombre introduit, $\sqrt{11}$ dans l'exemple, apparaît en écriture décimale. Il a ici huit chiffres après la virgule, mais le tableur utilisé, qui était *Excel*, permet le choix du nombre souhaité de décimales.

Notons que les nombres qui interviennent dans les calculs sont ceux que la machine met en mémoire et ne sont donc pas nécessairement les nombres affichés : ces derniers apparaissent avec leur dernier chiffre arrondi. Signalons que le tableur utilisait dans ses calculs une quinzaine de chiffres significatifs pour un nombre et qu'il aurait donc été inutile de demander trop de décimales (si vous demandez par exemple d'afficher vingt décimales, vous voyez des "0" en fin de nombre).

Les résultats font apparaître une répétition des nombres obtenus en colonne 1 (lignes 6 et 7 reproduisant les lignes 4 et 5). Il y a là l'indice d'une périodicité. En admettant cette périodicité (et elle peut effectivement être démontrée), nous pouvons dire que le développement en fraction continue de $\sqrt{11}$ est $[3, 3, 6, 3, 6, \dots]$, les deux termes 3 et 6 se répétant à l'infini (la période est "3, 6"). De plus, les deux dernières colonnes nous fournissent les approximations de $\sqrt{11}$ par des réduites successives (voir la remarque 2 précédente) : $3, \frac{10}{3}, \frac{63}{19}, \frac{199}{60}$.

Illustration de l'approximation dans le cas du développement du nombre π

	Termes successifs	Numér. 0	Dénom. 1
3,14159265	3	1	0
7,06251331	7	3	1
15,99659441	15	22	7
1,00341723	1	333	106
292,63459088	292	355	113
1,57581844	1	103993	33102
1,73665853	1	104348	33215

	Termes successifs	Numér. 0	Dénom. 1
3,14159265	3	1	0
7,06251348	7	3	1
15,99654859	15	22	7
1,00346337	1	333	106
288,73649777	288	355	113
1,35777736	1	102573	32650
2,79503431	2	102928	32763

Développement de π et développement de 3,14159265.

Les deux tableaux de résultats ci-dessus ont été obtenus comme précédemment. En apparence, ils traitent du même nombre et pourtant les trois dernières lignes obtenues sont sensiblement différentes. L'explication est qu'en réalité les deux nombres traités diffèrent : l'un est le nombre Pi du tableur, que l'on obtient en introduisant « = PI() », l'autre est vraiment le nombre 3,14159265. Notons pour être précis, que le nombre obtenu en introduisant « = PI() » ne pourra évidemment pas être le nombre π du mathématicien ; il peut dépendre des machines et des programmes (c'était pour nous 3,14159265358979). On voit dans les deux colonnes de droite des tableaux apparaître les approximations fractionnaires du nombre π : $3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}$.

1.2.3. Des exemples traités avec les élèves

a) Développements en fractions continues de $\sqrt{2}$, $\sqrt{26}$, de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Réponses : $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$ (la période est "2"), premières réduites $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}$,
 $\sqrt{26} = [5, 10, 10, \dots]$ (la période est "10"), première réduites $5, \frac{51}{10}, \frac{515}{101}, \frac{5201}{1020}$,
 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, 1, \dots]$ (la période est "1"), première réduites $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$.

b) Déterminer le développement de $\frac{77}{36}$ à l'aide de la calculatrice et comparer à celui obtenu précédemment. Expliquer

Le résultat fourni par un tableur est surprenant, comme le montre le tableau qui suit.

	Termes successifs	Numérateur	Dénominateur
		0	1
2,138888889	2	2	1
7,2	7	15	7
5	4	62	29
1	1	77	36

Développement (insatisfaisant) de $\frac{77}{36}$.

Rappelons que les termes successifs (colonne B) sont les parties entières des nombres de la colonne de droite. Il est alors scandaleux de trouver 4 comme partie entière de 5, tant que l'on n'a pas présente à l'esprit l'idée d'approximation. Pour éclaircir cette question, on peut spécifier des nombres de chiffres après la virgule avec lesquels afficher les nombres de la colonne A. Jusqu'à douze chiffres après la virgule, où apparaît encore 5,000000000000, on ne voit rien. Mais le choix de treize chiffres après la virgule provoque l'affichage de 4,999999999999 (pour précision complète : le nombre exact intervenant dans les calculs était 4,9999999999993). Le fait de retrouver la fraction de départ $\frac{77}{36}$ comme réduite est malgré tout réconfortant, mais on aurait dû l'obtenir après les termes 2, 7 et 5.

Il ne faudrait pas pour autant jeter le bébé avec l'eau du bain : Si l'on reste conscient du phénomène de l'approximation inhérente à tout calcul numérique, on peut tirer un parti très intéressant des développements obtenus sur machine. L'exemple suivant montre une simplification mise en évidence par un développement.

1.2.4. Développement de fraction mettant en évidence une simplification

	Termes successifs	Numérateur	Dénominateur
		0	1
1,857142857	1	1	1
1,166666667	1	2	1
6	6	13	7
1,8765E+14	187649984473771	2,43945E+15	1,31355E+15

Développement de $\frac{559}{301}$.

Au terme du développement d'un nombre rationnel en fraction continue, on retrouve bien évidemment ce nombre, mais sous son écriture de fraction simplifiée. En pratique, il faut simplement prendre garde au phénomène d'approximation, comme l'exemple présenté l'illustre. La donnée introduite dans la case A3 (où on lit 1,857142857) a été la fraction 559/301, dont le tableur utilise pour ses calculs une valeur décimale approchée. Au vu des résultats donnés par la feuille de calcul, il est clair que l'avant-dernière ligne est la dernière à être pertinente. La taille du dernier nombre de la colonne A est en effet de l'ordre de l'inverse des nombres provenant des derniers chiffres significatifs du tableur. On peut avancer dans un tel cas que la fraction considérée est égale à la réduite obtenue sur cette ligne, soit $\frac{13}{7}$. Et c'est en effet facile à vérifier, et aurait d'ailleurs pu résulter de l'algorithme d'Euclide : $559 = 43 \times 13$ et $301 = 43 \times 7$.

2. Deuxième activité : Analyse géométrique d'un tableau de Raphaël

Objectifs poursuivis : en même temps qu'une initiation progressive aux outils de base d'un logiciel de géométrie (nous avons utilisé GEOPLAN), outils de la rotation et du tracé de points et de lignes qui, à mon avis, correspondent au tracé à la règle et au compas, cette activité m'a permis d'introduire de manière naturelle l'outil de l'homothétie déjà présent dans GEOPLAN. Le lien agrandissement, réduction, avec l'homothétie définie par son centre et son rapport, n'a posé aucune difficulté aux élèves (bien que l'homothétie ne soit pas au programme).

L'école d'Athènes, fresque de Raphaël (1510)

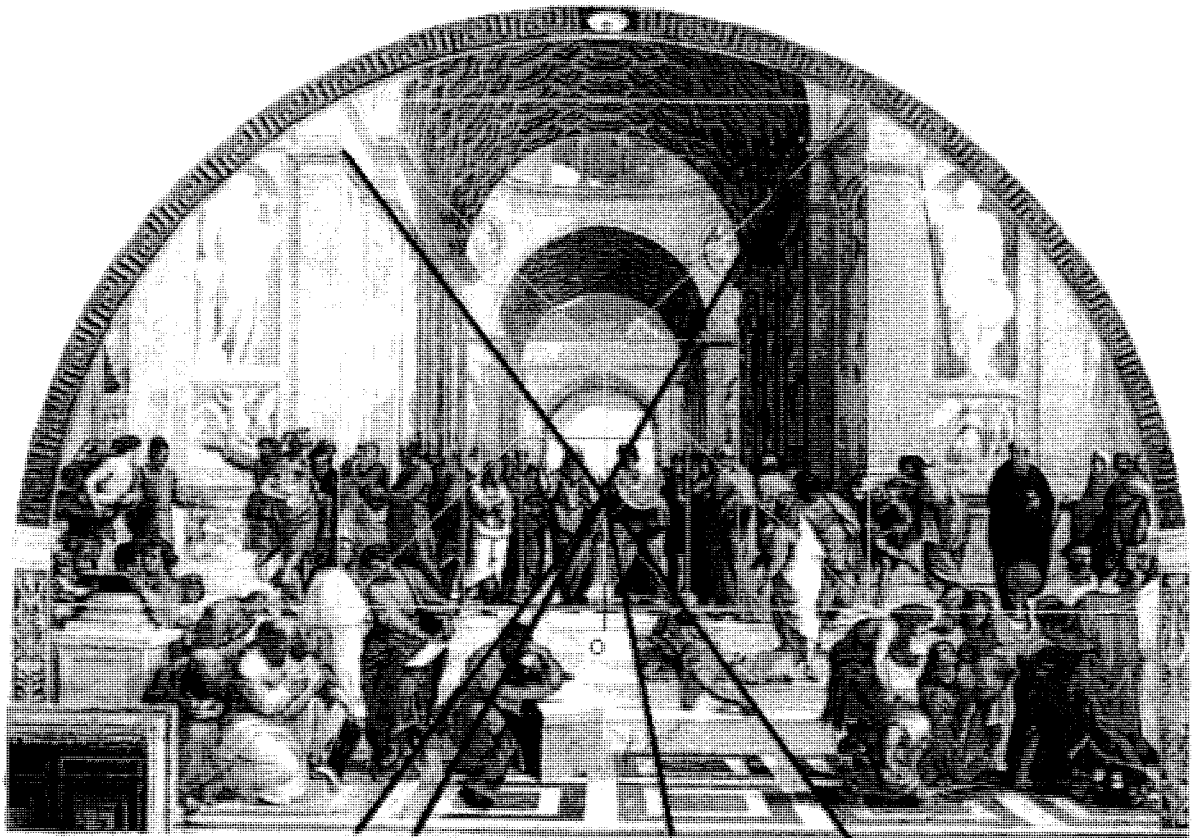
(Chambre de la Signature, palais du Vatican)



Dans cette œuvre symbolisant la recherche rationnelle de la vérité, l'artiste a réuni des Sages d'époques variées. Il a représenté, au centre, Platon (sous les traits de Léonard de Vinci), levant le doigt, en conversation avec Aristote, qui tend sa main droite. A gauche, en haut, on voit Socrate discutant avec des jeunes gens, tandis qu'en bas, Epicure lit un livre tenu par un enfant accompagnant Zénon. Au premier plan, à gauche, Pythagore annote un gros volume, Héraclite (alias Michel-Ange) est appuyé, pensif, sur un bloc de pierre, et à l'avant plan, Euclide trace une figure au compas. Le peintre s'est représenté en bas, à l'extrême droite.

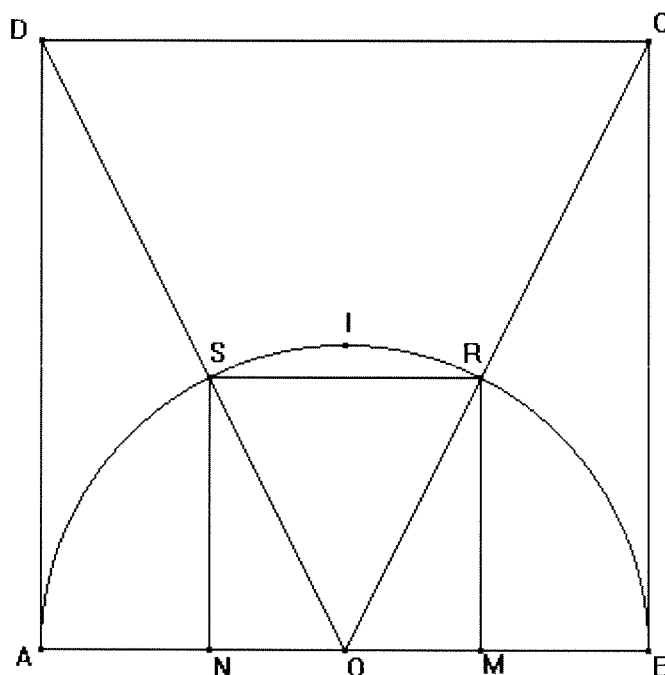
Plusieurs raisons concourent à la célébrité de la fresque. Ainsi, on remarquera et l'on appréciera l'habileté de la composition, la virtuosité de la perspective, l'utilisation savante de la lumière et des ombres (le fameux *Chiaroscuro*), la variété et la richesse des postures et des gestes ainsi que le cadre architectural classique et majestueux, dû à Bramante - lequel sert d'ailleurs de modèle à Raphaël pour son *Euclide*. La perspective a conduit à l'utilisation de constructions rigoureuses. Sur l'image ci-dessous, quelques lignes, tracées en traits gras, mettent en évidence que le point de fuite correspond à la main droite d'Aristote. L'image rappelle là une lecture courante des deux auteurs qui fut celle de la Renaissance : Platon pointe le doigt vers le ciel (des Idées) et tient à la main le *Timée*, tandis qu'Aristote indique le sol et tient à la main *L'Éthique* à Nicomaque.

*Un autre élément remarquable dans cette fresque est la présence de "proportions dorées". La composition fait apparaître plusieurs carrés (tracés en traits fins sur la figure), dont le plus grand est inscrit dans un demi-cercle, dont nous avons noté 0 le centre. Or la figure constituée d'un carré inscrit dans un demi-cercle est une figure de base pour la construction du nombre d'or (voir l'introduction du nombre d'or au thème 1 et les constructions présentées dans les thèmes 2 et 3). C'est autour de cette figure qu'une activité géométrique a été entreprise avec les élèves. Pour d'autres études, l'exploitation de la perspective mérite, tout autant sinon davantage qu'une construction du nombre d'or, d'être envisagée en cours de mathématique (voir l'article *Perspective à points de fuite* de Nicole Vogel sur le site IREM2 <http://irem2.u-strasbg.fr>).*



2.1. Observation du tableau de Raphaël

1. Outre un demi-cercle on remarque une figure centrale dans un carré. Comment ce carré est-il placé par rapport au demi-cercle ?
2. Mettre le tableau en relation avec la figure géométrique suivante, en précisant à quels points du tableau correspondent les points MNSR de la figure ci-dessous : ABCD est un carré dans lequel on inscrit le demi-cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O . S et R sont alors les intersections respectives de $[OD]$ et $[OC]$ avec le demi-cercle, et N et M leurs projections orthogonales sur $[AB]$.



2.2. Construction d'un carré inscrit dans un demi cercle

1. Un peintre veut mettre des personnages dans un carré inscrit dans un demi cercle : comment peut-il construire ce carré ?
2. Le but est de construire le carré ABCD et le demi-cercle de diamètre AB en utilisant les seuls outils de la rotation et les fonctions de tracés de points et de lignes sur GEOPLAN.
 - Placer un point A grâce à « créer point libre du plan », faire de même pour I, centre du carré ABCD.
 - A l'aide d'une rotation du centre I, d'angle à déterminer, construire les sommets B, C, D. Utiliser le chemin « créer point image par une rotation ».
 - Construire l'arc AB : « créer ligne – arc de cercle- demi-cercle ». Attention, l'arc est tracé dans le sens direct !!!
 - Construire le milieu O du segment $[AB]$. Déterminer, si possible, un « chemin » de construction des points S et R.

2.3. Relations métriques et géométriques

1. On pose $AB = a$. On souhaite montrer que $NMSR$ est un carré et calculer la longueur de son côté.
 - Exprimer OC en fonction de a
 - Soit $h(O, \sqrt{5})$ l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{5}$.
 - Montrer que $h(R) = C$
 - $h(S) = D$
 - $h(N) = A$
 - $h(M) = B$
 - En déduire que $NMRS$ est un carré de côté $a\frac{\sqrt{5}}{5}$.
2. Terminer la construction du carré $NMRS$, comme image de $ABCD$ par l'homothétie de centre O , de rapport à déterminer.
3. Montrer que $\frac{NB}{NM} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
4. En déduire une construction du nombre d'or à la règle et au compas.

2.4. Méthode analytique

L'homothétie n'étant plus au programme, on peut démontrer que $NMRS$ est un carré de manière analytique, dans le repère orthonormal d'origine O et de vecteurs unitaires $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OI}$.

Remarque : La construction du nombre d'or peut être étudiée sur la figure d'un carré inscrit dans un demi-cercle sans avoir à recourir à l'homothétie, en traçant d'abord le carré, dont le côté est à prendre comme unité (voir thèmes 2 et 3).

THEME 4 : ASTRONOMIE, CALENDRIERS ET FRACTIONS CONTINUES

Les fractions continues sont aujourd'hui un outil fondamental de la théorie des nombres qui, en particulier, nous informe sur la nature de l'irrationalité de certains d'entre eux. Mais comme beaucoup d'autres théories, celle-ci s'est élaborée à partir de questions pratiques. Dès l'Antiquité, la relation entre l'algorithme d'Euclide et les fractions continues (qui, bien entendu, n'étaient alors pas étudiées ni même nommées en tant que telles) a aidé les astronomes à simplifier certaines estimations de distances entre le soleil, la lune et la terre. Elle a permis de trouver des solutions approchées raisonnables pour les problèmes posés par l'organisation de la vie quotidienne en société, selon les exigences d'un calendrier. Il y a là deux types de situations qui, avec des moyens mathématiques relativement élémentaires, nous donnent l'occasion d'aborder en lycée des questions scientifiques qui peuvent et devraient faire partie de la culture générale du bachelier.

1. Aristarque de Samos : sur les dimensions et les distances du soleil et de la lune

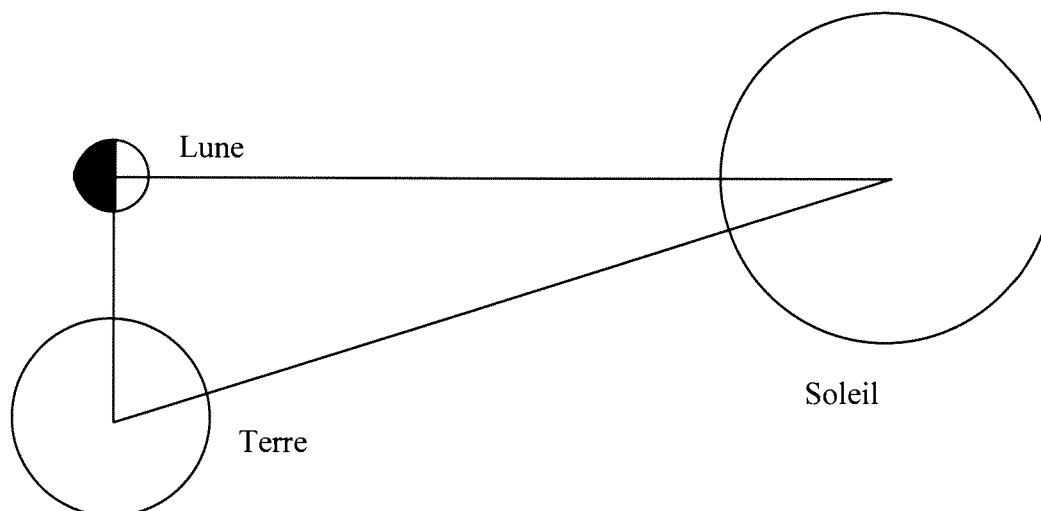
Aristarque est un mathématicien grec que l'on peut situer entre les années 310 et 230 avant notre ère, soit environ 25 ans avant Archimède. Il est célèbre pour avoir formulé le premier l'hypothèse héliocentrique (c'est-à-dire où le soleil est au centre de l'univers), soit 18 siècles avant Copernic, en 1543. Mais la physique d'Aristote et l'astronomie de Ptolémée ne lui accordèrent aucun crédit : ils imposèrent pendant longtemps un système géocentrique (où la terre est au centre de l'univers).

La plus ancienne mention d'Aristarque est faite par Archimède dans son *Arénaire*¹ :
Or Aristarque de Samos a, dans ses écrits, émis certaines hypothèses dont les arguments feraient admettre que le monde est beaucoup plus étendu qu'on ne l'avait dit jusqu'à présent. En effet, il suppose que les étoiles fixes et le soleil demeurent immobiles, que la terre tourne suivant une circonférence de cercle autour du soleil, qui est situé au milieu de l'orbite de la terre.

Le seul écrit d'Aristarque qui nous ait été transmis est un traité *Sur les dimensions et les distances du soleil et de la lune*, dans lequel l'hypothèse héliocentrique n'apparaît pas ; en fait elle n'intervient pas dans les calculs effectués. Mais d'autres hypothèses sont formulées, dont nous retiendrons :

- l'hypothèse 3 : lorsque la lune nous apparaît selon un demi cercle, le grand cercle qui sépare la zone obscure de la zone éclairée est dans la direction de notre œil. Par conséquent, puisque la lune reçoit la lumière du soleil, les centres de la lune, la terre et le soleil forment un triangle rectangle.

¹ Archimède, *L'arénaire*, Les œuvres complètes d'Archimède I, p. 354.



- l'hypothèse 4 : elle donne une estimation de l'angle de ce triangle au centre de la terre. Aristarque admet qu'il est « *inférieur à un quadrant d'un trentième de quadrant* », soit $90^\circ - 3^\circ = 87^\circ$. Cette valeur de $1/30$ est très surestimée ; la valeur exacte, qui correspond à un angle proche de $89^\circ 50'$, est $1/540$.
- l'hypothèse 5 : elle donne la largeur de l'ombre terrestre lorsque la lune la traverse. Elle est estimée égale à deux diamètres lunaires.

Le manque de précision de ces hypothèses n'enlève rien, cependant, à l'intérêt mathématique des investigations d'Aristarque, que nous allons présenter dans une formulation moderne, mais sans trahir l'esprit de la méthode. En particulier, l'astronome grec utilise des rapports de longueurs là où nous emploierons les fonctions trigonométriques. C'est ainsi qu'il admet sans démonstration des propositions dont la formulation est équivalente à celles – ci :

- 1) si α est la mesure en radian d'un angle et que $\alpha < \frac{\pi}{2}$, alors le rapport $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$

décroît, et le rapport $\frac{\tan \alpha}{\alpha}$ croît lorsque α augmente de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

- 2) si β est la mesure en radian d'un autre angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$ et si $\alpha > \beta$, alors :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}.$$

Il peut alors mettre en évidence des encadrements correspondants aux inégalités suivantes :

$$\frac{1}{18} > \sin 3^\circ > \frac{1}{20} \quad ; \quad \frac{1}{45} > \sin 1^\circ > \frac{1}{60} \quad ; \quad 1 > \cos 1^\circ > \frac{89}{90} \quad ; \quad 1 > \cos^2 1^\circ > \frac{44}{45}.$$

Exercice 1

Vérifier ces inégalités avec votre calculatrice ; éventuellement les démontrer. En déduire la proposition suivante d'Aristarque, à partir de l'hypothèse 4 : la distance de la terre au soleil est supérieure à 18 fois, mais inférieure à 20 fois la distance de la terre à la lune.

A cause de l'imprécision des observations du temps d'Aristarque, cet encadrement est grossièrement faux, mais sa démarche est mathématiquement correcte. Quel est le rapport entre les deux distances, si l'on prend comme angle au centre de la terre $89^\circ 50'$?

D'autres calculs qu'il serait trop long et compliqué à présenter ici², conduisent Aristarque à des inégalités entre des distances A , B , C et D de la forme $\frac{A}{B} > \frac{7921}{4050}$ et $\frac{C}{D} > \frac{71755875}{61735500}$ qu'il simplifie en les remplaçant respectivement par $\frac{A}{B} > \frac{48}{45}$ et $\frac{C}{D} > \frac{43}{37}$.

Exercice 2

Démontrer l'exactitude des simplifications d'Aristarque, en utilisant l'algorithme d'Euclide et le développement en fraction continue des fractions ci-dessus.

2. L'élaboration d'un calendrier³

Lorsqu'on veut mesurer des longueurs, on est libre de choisir l'unité. Mais il n'en est pas ainsi pour la mesure de la durée car le jour et l'année nous sont imposés par la nature !

Chez les peuples nomades, les phases de la lune ont tout naturellement servi à diviser le temps. Mais lorsque ces populations se fixèrent au sol pour adopter la vie agricole, elles sentirent rapidement le besoin d'un calendrier réglé sur les saisons, c'est-à-dire sur la marche du soleil, tout en gardant d'ailleurs leur ancien calendrier lunaire.

Les premiers calendriers solaires étaient fondés sur une année de 365 jours. Ainsi le calendrier égyptien comprenait 12 mois de 30 jours et 5 jours complémentaires ou épagomènes.

Malheureusement, une année tropique (durée qui sépare deux équinoxes de printemps consécutifs) n'est pas un nombre entier de jours mais égale à 365 jours, 5 heures, 48 minutes et 46 secondes...

Exercice 3

Montrer que l'approximation de l'année par 365 jours conduit à un renversement complet des saisons en 750 ans. (c'est-à-dire que, si l'équinoxe de printemps a lieu telle année le 21 mars, dans 750 ans elle aurait lieu une $\frac{1}{2}$ année plus tard, c'est-à-dire le 21 septembre ...)

En l'an 46 avant J.C., Jules César entreprit de réformer le calendrier romain. Sosigène, un astronome d'Alexandrie, institua la règle simple suivante : toute année dont le millésime est divisible par 4 comportera 366 jours. (Les Romains avaient décidé de doubler le sixième jour précédant les calendes de mars, qui correspondaient alors au Nouvel An. D'où le nom d'année bissextile pour désigner les années de 366 jours). Les autres années restent bien entendu fixées à 365 jours. Ce calendrier porte le nom de **Calendrier Julien**.

Exercice 4

Calculer la durée moyenne d'une année civile du calendrier julien. Montrer que la différence avec l'année tropique correspond à une erreur de 1 jour tous les 128 ans (environ).

² Pour les détails, voir par exemple : Heath, Thomas, *A history of greek mathematics*, vol. 2, p. 1-15, Dover Publications, 1981.

³ D'après la brochure IREM : *Activités géométriques pour le collège et le lycée*, vol. 1, présentées par le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Strasbourg, 1996. Pour une étude détaillée de ces questions voir : Lefort Jean, *La saga des calendriers*, Bibliothèque pour la Science, 1998.

Le calendrier julien a été adopté par l'Eglise catholique en l'an 325, au Concile de Nicée. Cette année là, l'équinoxe de printemps tombait le 21 mars et on avait fixé la célébration de la fête de Pâques à partir de cette date.

En 1582, l'erreur du calendrier julien était devenue sensible, et représentait environ une dizaine de jours : l'équinoxe de printemps tombait le 11 mars. Le pape Grégoire XIII décida que le lendemain du 4 octobre 1582 serait le 15 octobre 1582, et que dorénavant, pour que l'équinoxe de printemps tombe toujours entre le 19 mars et le 21 mars, toute année séculaire dont le millésime n'est pas divisible par 400, resterait une année commune. Ainsi les années 1700, 1800, 1900 n'ont pas été bissextiles, mais 2000 l'a été ! Ce calendrier porte le nom de **calendrier grégorien**. Il a d'abord été adopté dans les seuls pays catholiques, puis peu à peu par tous les autres. Un des derniers aura été la Russie qui l'adopte au moment de la révolution soviétique. C'est pourquoi cette révolution s'appelle Révolution d'Octobre, alors que dans le calendrier grégorien on était déjà en novembre.

Exercice 5

Calculer la durée moyenne d'une année civile du calendrier grégorien. Montrer que la différence avec l'année tropique engendre une erreur d'environ 1 jour tous les 3500 années.

Essayons à notre tour d'approcher le rapport « année tropique/jour = A/J » par des rapports dont le numérateur et le dénominateur soient les plus petits possibles.

En prenant comme unité la seconde une année tropique égale 365 jours et 20 926 secondes ; et un jour égale 86 400 secondes. Par conséquent :

$$\frac{A}{J} = 365 + \frac{20926}{86400} = 365 + \frac{1}{\frac{86400}{20926}} = 365 + \frac{1}{4 + \frac{2696}{20926}}.$$

En négligeant le « reste » $\frac{2696}{20926}$, on a une première approximation du rapport $\frac{A}{J} \cong 365 + \frac{1}{4}$.

$$\text{En poussant les calculs : } \frac{2696}{20926} = \frac{1}{\frac{20926}{2696}} = \frac{1}{7 + \frac{2054}{2696}} = \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{642}{2054}}}.$$

D'où les approximations successives de $\frac{A}{J}$:

$$\frac{A}{J} = 365 + \frac{1}{4} ; \quad \frac{A}{J} = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7}} = 365 + \frac{7}{29} ; \quad \frac{A}{J} = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1}}} = 365 + \frac{8}{33}.$$

Cette dernière approximation nous indique qu'il faudrait intercaler 8 jours tous les 33 ans, soit : $\frac{8 \times 400}{33} = 96,9$ jours tous les 400 ans.

Or durant une telle période, le calendrier julien en intercale 100 et le calendrier grégorien 97.

Exercice 6

Construire un calendrier où l'on insère 8 jours tous les 33 ans.

Exemple de réponse (mais il y en a bien d'autres et des plus judicieuses sans doute !).

Le calendrier grégorien insère 97 jours tous les 400 ans. Or $\frac{8 \times 400}{33} = 97 - \frac{1}{33}$.

Donc tous les $33 \times 400 = 13\,200$ ans il y a une année bissextile de trop dans le calendrier grégorien. Dans ce calendrier, l'année 13 200 serait bissextile. Il suffirait donc d'en faire une année ordinaire de 365 jours, ainsi que les années 26 400 ; 39 600 ; 52 800 ; 66 000. Mais ces numéros d'années ne sont pas faciles à retenir. Une solution approchée (meilleure que celle du calendrier grégorien) serait de faire des années dix-millénaires (normalement bissextiles dans le calendrier grégorien) des années ordinaires, sauf les multiples de 40 000.

Cela revient à intercaler 9 697 jours tous les 40 000 ans au lieu de 9 696, $96 = \frac{8 \times 40\,000}{33}$.

Mais nos descendants auront largement le temps d'y réfléchir !

3. L'horloge astronomique de Strasbourg et les fractions

Tous les Strasbourgeois connaissent « leur » horloge astronomique mais pas forcément les trésors d'ingéniosité utilisés par ses constructeurs, dont certains relèvent précisément de mathématiques en relation avec les fractions continues.

Une première version, appelée « l'horloge des Trois Rois » avait précédé l'horloge construite au XVI^{ème} siècle sous l'impulsion du mathématicien Dasypodius et avec le concours des horlogers Isaac et Josias Habrecht, le peintre Tobias Stimmer et le maître d'œuvre Hans Uhlberger. Cette horloge réalisait une véritable synthèse des connaissances astronomiques et mécaniques de la Renaissance, mais elle s'arrêta de fonctionner vers la fin du XVIII^{ème} siècle. Elle fut heureusement remarquablement restaurée en 1838 par le prestigieux horloger Jean Baptiste Schwilgué.

Autodidacte, Schwilgué devint professeur de mathématiques, vérificateur des Poids et Mesures et surtout génial mécanicien. Il conçut des mécanismes de haute précision, entièrement nouveaux, avec un nombre impressionnant d'engrenages au profil cycloïdal parfaitement calculé. Ce n'est pas le lieu, ici d'en donner une description détaillée.⁴

Evoquons seulement le Planétaire, dont le cadran reproduit le mouvement des six premières planètes autour du Soleil : Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, auxquelles on ajoute la Lune tournant autour de la Terre. Les six planètes décrivent des cercles autour du soleil placé au centre, cercles dont les rayons sont proportionnels aux distances moyennes relativement au Soleil. Uranus n'a pu être admise sur le Planétaire à cause de son trop grand éloignement. Neptune n'a été découverte qu'en 1846 par Leverrier. Chaque planète est représentée par une boule dorée au feu, de diamètre proportionnel à sa grandeur apparente et fixée à la pointe d'une aiguille très effilée, peinte en bleu foncé de manière à être aussi imperceptible que possible. Les six planètes sont équilibrées et montées sur des tubes concentriques, séparés entre eux par des bagues en acier ; chacun de ces tubes porte à son extrémité intérieure une roue dentée qui communique le mouvement de révolution à la planète respective.

La Terre est montée sur un grand disque qui décrit un tour complet autour du soleil en une année tropique, que Schwilgué prend égale à 365 jours, 5 h., 48 mn., 48 s. = 31 556 928 s. Ce disque est entraîné par un arbre moteur qui fait un tour en une heure de 3 600 secondes. Il y a de ce fait un système de trois engrenages réducteurs dont les rapports sont donnés par :

$$\frac{3600}{31556928} = \frac{9}{156} \times \frac{10}{188} \times \frac{10}{269}.$$

⁴ On trouvera celle-ci dans le livre de Roger Lehni, 1997, *L'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg*, éditions la Goélette. Voir aussi le site <<http://juillot.home.cern.ch/juillot/horloge.html>>.

Pour réaliser le mouvement des autres planètes, Schwilgué emploie pour chacune deux engrenages dont les rapports sont calculés au plus juste en utilisant des approximations calculées au moyen de fractions continues, approximations données par le tableau⁵ ci-après.

Par exemple $\frac{3060}{737}$ est une réduite de $\frac{31556928}{7600475}$.

PLANETE	DUREE DE REVOLUTION A REALISER	RAPPORT A REALISER	RAPPORT CHOISI POUR LES ENGRENAGES	DUREE DE LA REVOLUTION OBTENUE
MERCURE	87 j 23 h 14 mn 35 s	$\frac{31556928}{7600475}$	$\frac{3060}{737} = \frac{240}{44} \times \frac{102}{134}$	87 j 23 h 14 mn 35,79 s
VENUS	224 j 16 h 41 mn 25 s	$\frac{31556928}{19413685}$	$\frac{6107}{3757} = \frac{197}{17} \times \frac{31}{221}$	224 j 16 h 41 mn 25,68 s
MARS	686 j 22 h 18 mn 44 s	$\frac{31556928}{59350724}$	$\frac{10759}{20235} = \frac{203}{95} \times \frac{53}{213}$	686 j 22 h 18 mn 43,87 s
JUPITER	4330 j 14 h 14 mn 10 s	$\frac{31556928}{374163250}$	$\frac{384}{4553} = \frac{96}{157} \times \frac{32}{232}$	4330 j 14 h 14 mn 23,5 s
SATURNE	10746 j 22 h 30 mn 10 s	$\frac{31556928}{928535410}$	$\frac{290}{8533} = \frac{58}{161} \times \frac{20}{212}$	10746 j 22 h 30 mn 2,15 s

Commentaire :

Pour obtenir les réduites, l'utilisation d'un tableur permet aujourd'hui d'effectuer les calculs simplement (voir la Mise à l'Essai en Première L paragraphe 1.2.2.).

⁵ Ce tableau se trouve en p. 91 de «L'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg», 1922, par A. et T. Ungerer, Imprimerie Alsacienne, consultable à la bibliothèque de l'IREM de Strasbourg.

THEME 5 : SUITES AYANT DES DIFFERENCES SECONDES CONSTANTES. LES TRAVAUX DE GALILEE

Ce thème de travail s'inscrit dans la partie du programme intitulée « exemples de types de croissances » dans le **programme de mathématiques-informatique de première littéraire**

contenus	commentaires
Suites arithmétiques : croissance linéaire	
Suites géométriques : croissance exponentielle	
Autres exemples de croissance	On montrera qu'il existe d'autres types de croissances. On pourra prendre comme exemple le cas de suites ayant des différences secondes constantes, que l'on pourra illustrer historiquement par les travaux de Galilée, mettre en œuvre sur tableur et représenter graphiquement.

L'objectif est ici de travailler avec les élèves sur l'idée de croissance sans disposer de l'outil de la dérivation. Nous sommes donc dans une problématique de discrétisation d'un phénomène continu.

Pour étudier concrètement une grandeur variable et savoir si elle est croissante (resp. décroissante) on peut mesurer les valeurs de cette grandeur à différents moments et faire un tableau de différences. Ce qui permet alors le mieux de dire si la grandeur est croissante ou non, et de quelle nature est cette croissance (régulière ou non, quelle type de régularité etc.). Ce ne sont pas ses valeurs successives en tant que telles, mais les différences entre les valeurs successives que l'on considère.

Par exemple, si ces différences sont constantes sur des intervalles de temps constants, on peut penser que l'on est en présence d'une croissance linéaire : mais en est-on vraiment sûr ?

Si les différences des différences c'est-à-dire les différences secondes sont constantes, peut-on chercher à savoir de quelle nature est la croissance ? C'est la question qui va nous préoccuper ici.

Ce travail est l'occasion de montrer aux élèves quelques méthodes pour caractériser un type de croissance. C'est aussi l'occasion de préciser dans quels contextes historiques ou culturels certaines notions ont pu apparaître.

Vous trouverez ici deux textes :

- *Le premier donne quelques indications sur les travaux de Galilée à propos du mouvement uniformément accéléré. Cette présentation s'inspire principalement du livre de Georges BARTHELEMY, Newton mécanicien du cosmos (éditions Vrin 1992). En annexe on peut trouver les exemples de théorèmes donnés par Galilée à propos du mouvement uniforme, exemples accompagnés de quelques commentaires*
- *Le deuxième texte propose quelques idées à partir desquelles on peut construire des activités avec les tables de différences des polynômes.*
- *Aucun de ces deux textes ne constitue une activité directement utilisable par les élèves. Il s'agit d'un point de départ pour une réflexion sur ces thèmes.*

1. Les travaux de Galilée

Dans le chapitre intitulé « Du mouvement local » de son ouvrage « *Discours concernant deux sciences nouvelles* » de 1638, Galilée traite du mouvement uniforme et du mouvement uniformément accéléré.

Georges BARTHELEMY consacre le troisième chapitre de son livre (évoqué ci-dessus) à ce qu'il appelle « la mathématisation du mouvement » c'est à dire à la démarche de Galilée. Ce faisant, il situe l'état de la réflexion à son époque, les outils mathématiques dont il disposait (et par conséquent ceux qui lui étaient inconnus) et montre « l'habileté » avec laquelle Galilée va pallier l'absence des concepts usuels de la physique mathématique tels que la notion de fonction et de dérivée.

Le calcul infinitésimal naîtra dans le dernier tiers du XVII^{ème} siècle avec les travaux de Newton (méthode des fluxions 1675) et ceux de Leibniz dont les textes fondateurs datent de 1684.

La dérivée en tant que fonction n'apparaîtra qu'un siècle plus tard avec l'algébrisation du calcul infinitésimal entrepris par Lagrange et publié dans son ouvrage « *La théorie des fonctions analytiques* » qui date de 1797.

Galilée disposait de la théorie des proportions qui, elle, date d'Euclide et qui concerne des rapports de grandeurs homogènes : rapports de temps, rapports de distances parcourues. Mais le concept de vitesse, en tant que rapport de la distance parcourue au temps de parcours, ne peut être pensé et exprimé en termes de rapport, puisque distance et temps sont des grandeurs de nature différente, hétérogènes.

1.1. Quelques énoncés qui fondent le mouvement uniforme

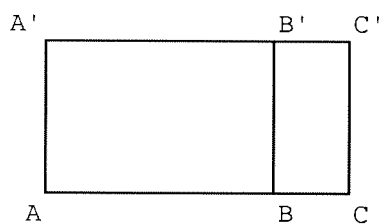
1. En des durées égales, le mobile parcourt des distances égales. On dit que la vitesse est constante au cours d'un mouvement uniforme.
2. La vitesse est proportionnelle à la distance parcourue et à l'inverse de la durée. Autrement dit, pour deux mouvements uniformes, on écrirait maintenant :

$$\text{à durées égales : } \frac{v_2}{v_1} = \frac{d_2}{d_1} \quad \text{à distances égales : } \frac{v_2}{v_1} = \frac{t_1}{t_2} .$$

3. L'espace parcouru est proportionnel à la fois à la durée du mouvement et à sa vitesse (constante) : autrement dit, on écrirait maintenant,

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{t_2}{t_1} \times \frac{v_2}{v_1} .$$

Galilée propose une représentation avantageuse de ce phénomène :



L'espace parcouru est représenté par l'aire d'un rectangle : celle de ACC'A' pour une durée AC d'un mouvement uniforme à vitesse constante AA'. Cette représentation traduit ce que nous écrivons aujourd'hui : $d = v.t$ lorsqu'on a choisi une unité de temps et de distance.

1.2. Le mouvement uniformément accéléré

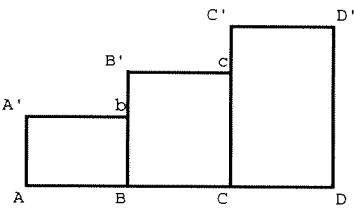
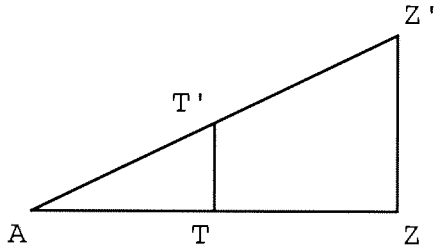
Les choses se compliquent car ici la vitesse varie au cours du mouvement mais on ne dispose pas alors pour autant d'une définition de la vitesse au sens où nous l'entendons maintenant.

L'idée est la suivante, selon Georges BARTHELEMY, : « Si à un instant d'un mouvement jusque là uniformément accéléré, le mobile se met à avoir tout d'un coup un mouvement uniforme, il prend une vitesse uniforme qu'il conserve. C'est cette grandeur-ci qui doit être regardée comme vitesse du mobile à l'instant considéré. »

Les énoncés qui fondent le mouvement uniformément accéléré sont les suivants :

1.a. En des temps égaux il se fait des accroissements de vitesse égaux.

1.b. Cette augmentation se fait dans un processus continu.

Une représentation géométrique ne tenant compte que de 1.a.	Une représentation géométrique tenant compte de 1.a. et 1.b. dans le cas où le mobile part du repos.
	
AB=BC=CD (temps parcourus égaux) bB'=cC' (accroissements de vitesse égaux)	la distance parcourue est alors représentée par l'aire d'un triangle : celle de AZZ' pour une durée AZ d'un mouvement uniformément accéléré de vitesse « finale » ZZ'.

2. De la propriété de Thalès on déduit que :

$$\text{la vitesse est proportionnelle au temps écoulé : } \frac{v_2}{v_1} = \frac{t_2}{t_1}.$$

3. De considérations d'aires résulte que :

la distance parcourue est proportionnelle à la fois au temps écoulé et à la vitesse (finale) :

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{t_2}{t_1} \times \frac{v_2}{v_1}.$$

4. Des deux relations précédentes on déduit à l'aide des propriétés des proportions à

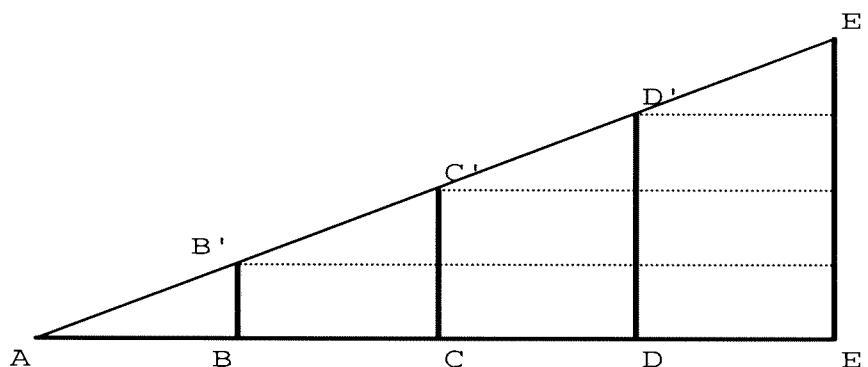
$$\text{l'époque de Galilée que } \frac{d_2}{d_1} = \frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Autrement dit, la distance est proportionnelle au carré du temps écoulé.

Ce résultat peut s'obtenir géométriquement :

Sur la figure ci dessous, les segments AB, AC, AD, AE représentent les temps parcourus aux instants $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$. Les segments BB', CC', DD', EE' représentent les vitesses atteintes aux temps $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$.

Les aires des triangles rectangles ABB', ACC', ADD', AEE'...représentent les distances parcourues aux temps $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$



On peut raisonner de deux façons :

- lorsque le temps écoulé double, triple, quadruple, etc....il en est de même de la vitesse. Par conséquent l'aire du triangle rectangle ABB'est multipliée par 4 (ACC'), par 9 (ADD'), par 16 (AEE')...
- lorsque le temps écoulé double, triple, quadruple, etc..., les aires que l'on rajoute sont égales à 3 fois, 5 fois, 7 fois...celle de l'aire du triangle rectangle initial.

temps parcouru t	0	1	2	3	4
aires ajoutées*		1	3	5	7
distances parcourues	0	1	4	9	16

* l'unité d'aire est celle du triangle ABB'

On démontre ainsi que les distances parcourues aux temps $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=4$sont proportionnelles aux carrés des temps écoulés.

1.3. Annexe : exemples de théorèmes donnés par Galilée et commentaires

Galilée et la mathématisation du mouvement

Galilée est le premier qui ait tenté de donner la loi de la chute des corps (on disait alors « la chute des graves ») en termes mathématiques, ce qui suppose de savoir traiter comme une grandeur quelque chose qui jusque là ne rentrait pas dans cette catégorie : la vitesse. Le concept de vitesse est exemplaire pour montrer comment une notion liée de façon vague au changement est amenée par la pensée rationnelle à un traitement mathématique en tant que grandeur.

C'est d'abord une notion qui appelle la comparaison : un mobile ne va pas vite en soi ; il va **plus vite** que... **moins vite** que... ou **aussi vite** que... Ainsi dans *La Physique* ¹Aristote explique qu' *il est nécessaire que le plus rapide soit mû en un temps égal sur une plus longue distance, en un temps plus court sur une distance égale...* Mais ceci ne fait pas encore de la vitesse une grandeur, encore moins une grandeur mesurable. Galilée réalise cette transformation en deux étapes. Dans un premier temps il élabore la notion de vitesse constante, celle qui intervient dans le mouvement uniforme. Il lui donne sens et la rend opératoire dans sa relation avec l'espace et le temps. La vitesse n'est pas encore mesurée mais c'est une grandeur susceptible du traitement défini par Euclide dans le livre V des *Eléments* et que Galilée applique avec un soin extrême, en cinq définitions ou axiomes et en six théorèmes parcourant les six types de relations entre les trois grandeurs que sont le temps, l'espace et la vitesse. Les voici sans les démonstrations correspondantes².

Théorème I – Proposition I

Si un mobile animé d'un mouvement uniforme parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.

Théorème II – Proposition II

Si un mobile parcourt deux distances en des temps égaux, ces distances seront entre elles comme les vitesses. Et si les distances sont comme les vitesses, les temps seront égaux.

Théorème III – Proposition III

Si un même espace est franchi avec des vitesses inégales, les temps seront en raison inverse des vitesses.

Théorème IV – Proposition IV

Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales, les espaces qu'ils parcourront en des temps inégaux seront entre eux dans un rapport composé du rapport des vitesses et du rapport des temps.

Théorème V – Proposition V

Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales et sur des espaces inégaux, alors le rapport des temps sera composé du rapport des espaces et du rapport inverse des vitesses.

Théorème VI – Proposition VI

Si deux mobiles sont animés d'un mouvement uniforme, le rapport de leurs vitesses sera composé du rapport des espaces parcourus et du rapport inverse des temps.

Le lecteur non historien peut s'étonner de ce que Galilée ait besoin de trois théorèmes de proportionnalité là où l'écriture « moderne » unique $d = v \times t$, apparemment plus simple, contient les trois simultanément par le jeu des manipulations algébriques. Mais que l'on ne

¹ Aristote, *Physique*, 233b, 20.

² Galilée, *Discours concernant deux sciences nouvelles* ; traduction M. Clavelin ; Armand Colin ; Troisième journée ; pp. 126-130.

s'y trompe pas, cette simplicité est illusoire dans les applications numériques car elle sous-entend les rapports de proportionnalité aux différentes unités. Si je marche pendant 15 minutes à une vitesse de 4 Km/h la distance parcourue n'est pas 4×15 , mais $4 \times \frac{15}{60} = 1$, en Km. Ce qui met bien en évidence le rapport des temps, c'est à dire la relation à une unité. L'utilisation de l'écriture $d = v \times t$, suppose un pas supplémentaire qui est celui de la mesure des grandeurs.

2. Prolongements : différences finies

On s'intéresse au problème suivant : connaissant les accroissements (les différences) d'une fonction, peut-on déterminer cette fonction ?

On étudiera ici le cas des fonctions polynômes.

2.1. Etude des différences des polynômes de degré inférieur ou égal à deux

2.1.1. Calcul des différences successives d'un tel polynôme

On note	exemple
$P(x)$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.	$P(x) = x^2$.
$\Delta P(x)$ le polynôme $P(x+1) - P(x)$.	$\Delta P(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$.
$\Delta^2 P(x)$ le polynôme $\Delta P(x+1) - \Delta P(x)$.	$\Delta^2 P(x) = 2(x+1) - 2x = 2$.

x prend ici des valeurs entières,

$\Delta P(x)$ est la différence première du polynôme $P(x)$,

$\Delta^2 P(x)$ est la différence seconde du polynôme $P(x)$.

Les calculs précédents montrent que la différence seconde du polynôme x^2 est une constante, le nombre 2.

Ceci est mis en évidence dans la **table de différences du polynôme x^2** :

x	0	1	2	3	4
1 ^{ière} ligne $P(x)$	0	1	4	9	16
2 ^{ième} ligne $\Delta P(x)$	1	3	5	7	9
3 ^{ième} ligne $\Delta^2 P(x)$		2	2	2	2

Généralisation

On peut démontrer (calculs analogues aux précédents) que la différence seconde d'un polynôme $ax^2 + bx + c$, c'est à dire d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 (a ou b peuvent être nuls), est une constante.

2.1.2. Recherche de polynômes connaissant leurs différences

On se pose maintenant le problème suivant : quels sont les polynômes dont la différence première est égale à $2x + 1$?

Pour cela on cherche à construire la table de différence d'un tel polynôme : on construit d'abord la deuxième ligne. On se donne la valeur de $P(0)$ que l'on note c. On construit alors la première ligne.

x	0	1	2	3	4
1 ^{ière} ligne $P(x)$	c				
2 ^{ème} ligne $\Delta P(x)$	1	3	5	7	

On conjecture que les polynômes cherchés sont de la forme $x^2 + c$, résultat que l'on peut démontrer par récurrence sur x .

On peut alors remplir la troisième ligne du tableau précédent : tous les termes sont égaux à 2.

x	0	1	2	3	4
1 ^{ière} ligne $P(x)$	c				
2 ^{ème} ligne $\Delta P(x)$	1	3	5	7	
3 ^{ème} ligne $\Delta^2 P(x)$		2	2	2	

Le triplet $(c, 1, 2)$ constitue ce qu'on appelle le **bord de la table** de différence du polynôme $x^2 + c$. On peut vérifier que la seule donnée de ce bord, permet de reconstituer la table de différences de ce polynôme.

2.2. Une réponse au problème posé dans le cas des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à deux

2.2.1. Construction de la table de différences d'un polynôme de degré inférieur ou égal à deux, connaissant le bord (α, β, γ)

La troisième ligne est constituée uniquement de γ (en raison de la généralisation mentionnée en 2.1.1.). Connaissant cette troisième ligne, on remplit la deuxième puis la première.

2.2.2. Etude de polynômes particuliers

On note $P_0(x) = 1$; $P_1(x) = x$. La différence première du polynôme $P_1(x)$ est le polynôme $P_0(x)$. On cherche alors un polynôme $P_2(x)$ de degré inférieur ou égal à deux dont la différence première soit $P_1(x)$. Pour cela on note $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, on calcule $\Delta P_2(x)$ et on cherche a, b, c tels que $\Delta P_2(x) = x$ pour tout x . On trouve

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{-1}{2}, c' \text{ est à dire } P_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Dressons le début des tables de différences de chacun des polynômes $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$.

x	0	1	2	3	4
1 ^{ière} ligne $P_0(x)$	1	1	1	1	1
2 ^{ème} ligne $\Delta P_0(x)$	0	0	0	0	
3 ^{ème} ligne $\Delta^2 P_0(x)$		0	0	0	0
x	0	1	2	3	4
1 ^{ière} ligne $P_1(x)$	0	1	2	3	4
2 ^{ème} ligne $\Delta P_1(x)$	1	1	1	1	
3 ^{ème} ligne $\Delta^2 P_1(x)$		0	0	0	0

x	0	1	2	3	4
1 ^{ière} ligne $P_2(x)$	0	0	1	3	6
2 ^{ème} ligne $\Delta P_2(x)$	0	1	2	3	
3 ^{ème} ligne $\Delta^2 P_2(x)$		1	1	1	1

Les bords des ces tables de différences sont respectivement $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$.

2.2.3. Calcul d'un polynôme du second degré connaissant le bord de sa table

En rapprochant le travail fait en 2.1. et le résultat obtenu en 2.2.2., on obtient le résultat suivant :

Le polynôme de degré inférieur ou égal à deux, dont la table de différence a pour bord (α, β, γ) est le polynôme : $P(x) = \alpha + \beta x + \gamma \frac{x(x-1)}{2}$.

Remarques :

- a) Il est commode d'utiliser cette écriture d'un polynôme de degré inférieur ou égal à deux lorsqu'on cherche à déterminer un tel polynôme $P(x)$ connaissant ses valeurs pour $x = 0, 1, 2$. En effet

$$P(0) = \alpha, \quad P(1) = \alpha + \beta, \quad P(2) = \alpha + 2\beta + \gamma.$$

Connaissant $P(0)$, $P(1)$, et $P(2)$, on peut calculer immédiatement et successivement α , β et γ .

- b) Les résultats précédents se généralisent à des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, 4, 5...n.

Ainsi un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 peut s'écrire sous la forme :

$$(1) \quad \alpha + \beta x + \gamma \frac{x(x-1)}{2} + \delta \frac{x(x-1)(x-2)}{6}.$$

Une application directe est le calcul de la somme $S(x) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + x^2$.

En effet, on sait que

$$1+2+3+\dots+x = \frac{x(x+1)}{2}.$$

C'est un polynôme du deuxième degré. On fait alors l'hypothèse que $S(x)$ est un polynôme du troisième degré. L'écriture de $S(x)$ sous la forme (1) permet de calculer immédiatement les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ à partir des valeurs de $S(x)$ pour $x = 0, 1, 2, 3$.

De façon analogue, un polynôme de degré inférieur ou égale à 4 s'écrit sous la forme :

$$(2) \quad \alpha + \beta x + \gamma \frac{x(x-1)}{2} + \delta \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \varepsilon \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}.$$

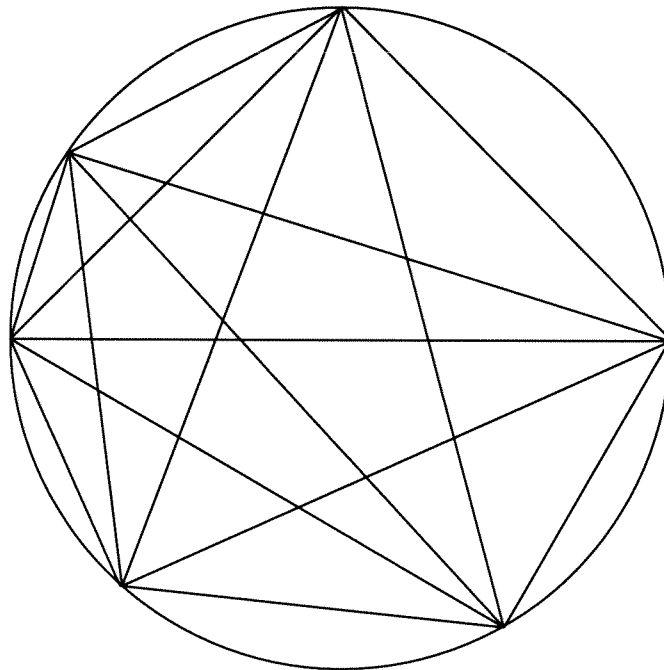
Application : calcul du nombre $R(x)$ de régions d'un disque délimitées par les cordes joignant x points de son bord.

Si on essaie les cinq premières valeurs de x , on peut conjecturer une suite géométrique, mais le calcul de $R(6)$ montre qu'il n'en est rien.

On conjecture alors que $R(x)$ est un polynôme. Connaissant cinq valeurs de x , on « précise » : de degré 4.

L'écriture de $R(x)$ sous la forme (2) permet de calculer sans difficulté les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ correspondantes, à partir des valeurs de $R(x)$ pour $x = 0, 1, 2, 3, 4$. On peut vérifier la formule pour $x = 5, 6$, etc.

La démonstration peut se faire par récurrence.



BIBLIOGRAPHIE

THEME 1

DAUMAS Denis, *Une Approche de l'irrationnalité : Algorithme d'Euclide et fractions continues*, dans *Histoire d'infini*, Actes du 9^{ème} colloque Inter-IREM Epistémologie et histoires des mathématiques, IREM de BREST, 1994.

GUEDJ Denis, *Le Mètre du Monde*, Seuil, 2000.

THEME 2

BAINVILLE Eric et GENEVÈS Bernard, *Constructions using conics*, The mathematical Intelligencer, Vol. 22, n° 3, 2000.

BARUK Stella, *Dictionnaire de Mathématiques élémentaires*, Seuil, 1992.

CARREGA Jean-Claude, *Théorie des corps, La règle et le compas*, Hermann, 1981.

CAVEING Maurice, *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les « Eléments » d'Euclide et la « Physique » d'Aristote*, in *Penser les mathématiques*; Points Sciences, Seuil, 1982.

DELATTRE Joëlle et BKOUCHE Rudolf, *Pourquoi la règle et le compas ?* dans *Histoires de Problèmes, histoire des mathématiques*, par la Commission Inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques, Ellipses, 1993.

DESCARTES René, *La Géométrie, The Geometry of René Descartes*, Dover, (reprint) 1954, (contient le texte français), 1637.

EUCLIDE, *Les Eléments*, traduction B. Vitrac, P.U.F.

FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *Grandeurs et nombres, l'histoire édifiante d'un couple fécond*, Repères IREM, n° 44, juillet 2001.

IREM DE STRASBOURG (groupe d'histoire des mathématique), *Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique*, Vol. I, 1996.

LEBESGUE Henri, *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars, 1949, réédité par J. Gabay.

OUVRAGE COLLECTIF, *Les nombres*, Vuibert, 1999.

SERFATI Michel, *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*, Brochure APMEP n° 86, Fragments d'Histoire des mathématiques IV, 1992.

WILLARD Claude-Jacques, *Le nombre d'or, utilisation en mathématiques et dans les beaux-arts*, Editions Magnard, 1987.

MISE A L'ESSAI

VOGEL Nicole, *Perspective à points de fuite*, site IREM2 <http://irem2.u-strasbg.fr>.

THEME 4

ARCHIMEDE, *L'arénaire*, Les œuvres complètes d'Archimède I, 354.

HEATH Thomas, *A history of greek mathematics*, vol. 2, 1-15, Dover Publications, 1981.

IREM DE STRASBOURG (groupe d'histoire des mathématiques), *Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique*, Vol. I, 1996.

LEFORT Jean, *La saga des calendriers*, Bibliothèque pour la Science, 1998.

LEHNI Roger, *L'horloge astronomique de la cathédrale de Strasbourg*, éditions la Goélette, 1997.

THEME 5

BARTHELEMY Georges, *Newton mécanicien du cosmos*, éditions VRIN, 1992.

CLAVELIN Maurice, *La philosophie naturelle de Galilée*, Albin Michel, 1996.

DE GANDT François, *Mathématiques et réalité physique au XVIII^{ème} siècle* dans *Penser les mathématiques*, 167-194, Seuil Points Sciences, 1982.

GALILEE, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, traduction et notes par Maurice CLAVELIN, éditions Armand Colin, 1970.

GINDIKIN Simon, Deux récits sur Galilée, dans *Histoires de mathématiciens et de physiciens*, 47-74, Cassini, 2000.

GINDIKIN Simon, *Horloges, pendules et mécanique céleste*, Diderot éditeur, arts et sciences 1995.

Titre :	Ressources pour l'enseignement mathématique en série littéraire
Auteurs :	Jean-Pierre FRIEDELMEYER, Michel de COINTET, Corinne FRITSCH, François PLUVINAGE, Suzette ROUSSET-BERT.
Mots-clés :	Première L - terminale L - algorithme d'Euclide - construction à la règle et au compas - nombre rationnel - nombre constructible - nombre d'or - commensurabilité - incommensurabilité - fraction continue - approximation rationnelle de nombres réels - astronomie - calendrier - mouvement - Galilée - croissance des suites numériques - différence finie - calculatrice programmable - tableur.
Date :	Mars 2003.
Nombre de pages :	70 pages A4.
Editeur :	I.R.E.M. de Strasbourg (S. 187) http://irem.u-strasbg.fr Pour les brochures : E-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr - Tél. : 03 90 24 01 61
* ISBN :	2-911446-22-4.
Public concerné :	Professeurs de lycée - Enseignants en formation initiale - Intervenants en formation continue.
Résumé :	Les programmes de Mathématiques de la série L font preuve d'originalité par rapport à ceux des autres séries de l'enseignement général et technologique des lycées. Cette brochure étudie quelques thèmes inscrits à ces programmes. Ils sont centrés sur des aspects de complémentarité au sein des Mathématiques : rationnels-irrationnels, analyse-géométrie, discret-continu. Ils ont été choisis parce qu'ils n'étaient pas couramment abordés dans l'enseignement récent des Mathématiques au lycée. En outre, l'histoire des Mathématiques nous en fait connaître une approche culturelle conforme aux objectifs exprimés par les programmes. La géométrie permet d'abord une approche historique et didactique des concepts nombres rationnels et irrationnels. Géométrie et arithmétique se rejoignent alors pour construire des suites d'approximations des nombres irrationnels par des nombres rationnels. En complément, sont exposées des applications à l'astronomie et aux problèmes de calendriers. Le dernier chapitre est consacré aux travaux de Galilée : ceux-ci consistent en une mathématisation du mouvement uniformément accéléré à l'aide des suites ayant des différences secondes constantes pour établir la proportionnalité des distances parcourues aux carrés des temps écoulés. En prolongement, on aborde le problème de la définition d'une fonction polynôme par ses différences premières et secondes.
Prix :	7 € (+ 2.50 € de frais de port).